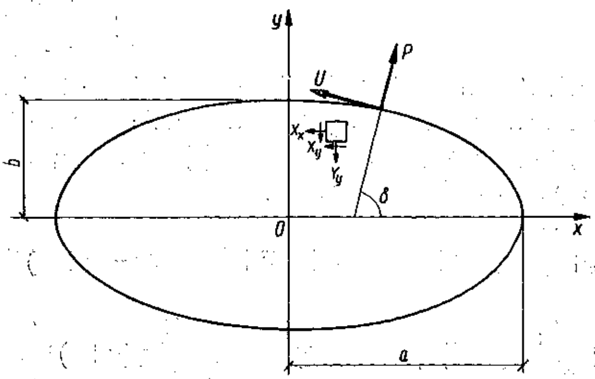
FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

TARCZA ELIPTYCZNA
POD WPŁYWEM DZIAŁANIA OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXVIII

TOM VIII ZESZYT • 4 • ROK 1960

Zagadnienie dotyczące stanu napięcia tarczy eliptycznej izotropowej pod wpływem działania danego obciążenia zewnętrznego sprowadza się w zasadzie do wyznaczenia wartości naprężeń X_y, X_x, Y_y, panujących w dowolnym punkcie tarczy (rys. 1) oraz przynależnych przemieszczeń u i v. Zadanie to zostało rozwiązane między innymi przez MUSCHELISZWILEGO w książce [4]. W artykule tym podajemy inny sposób rozwiązania tego zagadnienia.



Rys. 1

W rozwiązaniu powyższego zagadnienia zostanie wprowadzona zależność

$$z = R\left(\zeta + \frac{q}{\zeta}\right), \tag{1}$$

w której

$$z = x+iy, \qquad \zeta = \varrho e^{i\theta},$$

$$R = \frac{a+b}{2}, \qquad q = \frac{a-b}{a+b}.$$

Zatem równanie eliptycznego konturu tarczy będzie dla $\varrho = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

przy czym

$$a = R(1+q), \tag{3}$$

$$b = R(1-q). \tag{4}$$

Wartości wyżej wspomnianych naprężeń i przemieszczeń określają jak wiadomo następujące wzory, [1] i [2]:

$$X_x+Y_y=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)]=\frac{1}{2}[\Phi(\zeta)+\Phi_1(\zeta_1)],$$

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i}{2}z_1\Phi'(z)+F(z)=-\frac{i}{2}\frac{\zeta_1+\frac{q}{\zeta_1}}{1-\frac{q}{\zeta^2}}\Phi'(\zeta)+F(\zeta),$$

$$v+iu=-\frac{i}{8\mu}z_1\Phi(z)+\frac{i}{8\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int\Phi_1(z_1)\,dz_1+\frac{1}{4\mu}\int F(z)\,dz=$$

$$=-\frac{iR}{8\mu}\left(\zeta_1+\frac{q}{\zeta_1}\right)\Phi(\zeta)+\frac{iR}{8\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int\Phi_1(\zeta_1)\left(1-\frac{q}{\zeta_1^2}\right)d\zeta_1+$$

$$+\frac{R}{4\mu}\int\left(1-\frac{q}{\zeta^2}\right)F(\zeta)\,d\zeta,$$

w których, jak widać, występują tylko dwie niewiadome funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$. Istotą więc rozpatrywanego zagadnienia będzie określenie tych funkcji.

Jak wiadomo, [3], funkcję holomorficzną $f(z)$ określoną w rozpatrywanym obszarze można przedstawić w postaci szeregu

$$(5)\qquad f(z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[(z+\sqrt{z^2-a^2+b^2})^n+(z-\sqrt{z^2-a^2+b^2})^n\right]=$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(a+b)^n(\zeta^n+q^n\zeta^{-n})=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(a+b)^n\left(\varrho^n e^{in\Theta}+\frac{q^n}{\varrho^n}e^{-in\Theta}\right).$$

Dla pewnego punktu $s=e^{i\gamma}$ funkcja ta przybiera postać

$$f(s)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(a+b)^n(e^{in\gamma}+q^n e^{-in\gamma}),$$

co można napisać też w postaci następującej:

$$(6)\qquad f(s)=\varphi(\gamma)+i\psi(\gamma)=\alpha_0+i\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+i\beta_n)(a+b)^n[\cos n\gamma+i\sin n\gamma+$$
$$+q^n(\cos n\gamma-i\sin n\gamma)],$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$c_0=\alpha_0+i\beta_0,\qquad c_n=\alpha_n+i\beta_n.$$

Ze wzoru (6) otrzymujemy zatem

$$\varphi(\gamma)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a+b)^n[\alpha_n(1+q^n)\cos n\gamma-\beta_n(1-q^n)\sin n\gamma],$$

$$i\psi(\gamma)=i\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}i(a+b)^n[\beta_n(1+q^n)\cos n\gamma+\alpha_n(1-q^n)\sin n\gamma],$$

skąd wynikają związki

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\, d\gamma, \tag{7}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi(a+b)^n(1+q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \cos n\gamma\, d\gamma, \tag{8}$$

$$\beta_0 = -\frac{1}{\pi(a+b)^n(1-q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \sin n\gamma\, d\gamma, \tag{9}$$

$$i\beta_n = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\gamma)\, d\gamma, \tag{10}$$

$$i\alpha_n = \frac{i}{\pi(a+b)^n(1-q^n)} \int_0^{2\pi} \psi(\gamma) \sin n\gamma\, d\gamma, \tag{11}$$

$$i\beta_n = \frac{i}{\pi(a+b)^n(1+q^n)} \int_0^{2\pi} \psi(\gamma) \cos n\gamma\, d\gamma. \tag{12}$$

Wprowadzając wyżej otrzymane wartości współczynników (7), (8) i (9) do wzoru (5), można napisać

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\, d\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi(1+q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \cos n\gamma\, d\gamma - \right.$$
$$\left. - \frac{i}{\pi(1-q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \sin n\gamma\, d\gamma \right] (\zeta^n + q^n \zeta^{-n}).$$

Powyższy wzór, jak łatwo zauważyć, można będzie napisać jeszcze w postaci nieco zmienionej, a mianowicie:

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\, d\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi(1+q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \frac{e^{in\gamma} + e^{-in\gamma}}{2}\, d\gamma - \right. \tag{13}$$
$$\left. - \frac{i}{\pi(1-q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \frac{e^{in\gamma} - e^{-in\gamma}}{2i}\, d\gamma \right] (\zeta^n + q^n \zeta^{-n}) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\, d\gamma +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{q^n}{1-q^{2n}} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) e^{in\gamma}\, d\gamma + \frac{1}{1-q^{2n}} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) e^{-in\gamma}\, d\gamma \right] (\zeta^n + q^n \zeta^{-n}),$$

Ponieważ

$$q < 1,$$

oraz

$$\frac{1}{1-q^{2n}} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} q^{2nh},$$

więc wzór (13) przyjmie postać

$$(14)\quad f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\,d\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\Big[-q^n\zeta^n \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)e^{in\gamma}d\gamma -$$

$$-q^{2n}\zeta^{-n}\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)e^{in\gamma}d\gamma + \zeta^n\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)e^{-in\gamma}d\gamma + q^n\zeta^{-n}\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)e^{-in\gamma}d\gamma -$$

$$-\sum_{h=1}^{\infty} q^{n(2h+1)}(\zeta^n + q^n\zeta^{-n})\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)e^{in\gamma}d\gamma + \sum_{h=1}^{\infty} q^{2nh}(\zeta^n + q^n\zeta^{-n})\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)e^{-in\gamma}d\gamma\Big] =$$

$$= i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k-1}(\zeta^{-1}e^{-i\gamma}-\zeta e^{i\gamma})}{1-q^{2k-1}(\zeta e^{i\gamma}+\zeta^{-1}e^{-i\gamma})+q^{4k-2}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}(\zeta e^{-i\gamma}-\zeta^{-1}e^{i\gamma})}{1-q^{2k}(\zeta^{-1}e^{i\gamma}+\zeta e^{-i\gamma})+q^{4k}}\Big]d\gamma,$$

gdzie $k = h+1$. Jeżeli wprowadzimy zmienne

$$t = \frac{K}{i\pi}\ln\zeta - \frac{K\gamma}{\pi}, \qquad w = \frac{K}{i\pi}\ln\zeta + \frac{K\gamma}{\pi},$$

gdzie K oznacza połowę okresu funkcji eliptycznych, to wzór (14) przyjmie postać

$$(15)\quad f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma +$$

$$+\frac{iK}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)\Big[\frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta_1(t)} - \frac{\pi}{2K}\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2K} - \frac{\vartheta_4'(w)}{\vartheta_4(w)}\Big]d\gamma,$$

przy czym $\vartheta_1(t)$ oraz $\vartheta_4(w)$ są to funkcje Jacobiego. Posiłkując się jeszcze oznaczeniem

$$N(\zeta,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\Big\{\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta} + \frac{2iK}{\pi}\Big[\frac{\vartheta_1'(t)}{\vartheta_1(t)} - \frac{\pi}{2K}\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2K} - \frac{\vartheta_4'(w)}{\vartheta_4(w)}\Big]\Big\}$$

i uwzględniając je we wzorze (15) otrzymamy ostatecznie

$$(16)\qquad f(z) = \int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)N(\zeta,\gamma)\,d\gamma + i\beta_0.$$

Zatem wzór (16) określa funkcję holomorficzną w obszarze znajdującym się wewnątrz elipsy, gdy znana jest część rzeczywista $\varphi(\gamma)$ tej funkcji na brzegu eliptycznym powyższego obszaru.

Wprowadzając wartości współczynników (10), (11) i (12) do wzoru (5) i wykonując działania podobnie do poprzednich otrzymamy wzór

$$f(z) = \int_0^{2\pi} i\psi(\gamma) N(\zeta, \gamma)\, d\gamma + \alpha_0, \tag{17}$$

określający funkcję holomorficzną w obszarze znajdującym się wewnątrz elipsy, gdy znana jest część urojona $i\psi(\gamma)$ tej funkcji na brzegu eliptycznym.

Dodając stronami wzór (16) i (17) otrzymujemy

$$2f(z) = \int_0^{2\pi} [\varphi(\gamma) + i\psi(\gamma)] N(\zeta, \gamma)\, d\gamma + i\beta_0 + \alpha_0, \tag{18}$$

zaś odejmując stronami wzór (17) od wzoru (16) mamy

$$\int_0^{2\pi} [\varphi(\gamma) - i\psi(\gamma)] N(\zeta, \gamma)\, d\gamma + i\beta_0 - \alpha_0 = 0. \tag{19}$$

Wzór (18) określa funkcję holomorficzną w obszarze znajdującym się wewnątrz elipsy, gdy znana jest część rzeczywista i część urojona tej funkcji na brzegu eliptycznym. Natomiast wzór (19) wskazuje na to, że w przypadku gdy znamy funkcję sprzężoną na brzegu eliptycznym obszaru, otrzymujemy w wyniku określonych działań tylko wielkość stałą.

Przechodząc do sprawy określenia funkcji $\Phi(\zeta)$ napiszemy w tym celu równość następującą:

$$P + Q = 2(P + iU) - i[2U - i(P - Q)], \tag{20}$$

gdzie

$$P + Q = \mathrm{Re}[\Phi(\zeta)],$$

$$2U - i(P - Q) = e^{-2i\delta}[2X_y - i(X_x - Y_y)], \tag{21}$$

przy czym δ jest to kąt, jaki tworzy z osią Ox prostopadła poprowadzona do łuku elipsy.

Ponieważ $\mathrm{tg}\delta = -1/\mathrm{tg}\tau$, gdzie τ oznacza kąt, jaki tworzy styczna poprowadzona do łuku elipsy z osią Ox, więc przyjmując pod uwagę równanie (2) i zależności (3), (4) oraz (1), będziemy mieli

$$e^{-2i\delta} = \frac{\cos\delta - i\sin\delta}{\cos\delta + i\sin\delta} = \frac{x(1-q)^2 - iy(1+q)^2}{x(1-q)^2 + iy(1+q)^2} = \tag{22}$$

$$= \frac{(1+q^2)\left(\zeta_1 + \dfrac{q}{\zeta_1}\right) - 2q\left(\zeta + \dfrac{q}{\zeta}\right)}{(1+q^2)\left(\zeta + \dfrac{q}{\zeta}\right) - 2q\left(\zeta_1 + \dfrac{q}{\zeta_1}\right)}.$$

Zatem dla punktów położonych na eliptycznym brzegu tarczy można będzie napisać na podstawie wzorów (21), (22) i zależności $\zeta\zeta_1 = 1$ następujący związek:

$$(23) \qquad 2U - i(P-Q) =$$

$$= \frac{(1+q^2)(\zeta_1^2+q) - 2q(1+q\zeta_1^2)}{(1+q^2)(1+q\zeta_1^2) - 2q(\zeta_1^2+q)} \left[\frac{i}{2} \frac{\zeta_1(1+q\zeta_1^2)}{\zeta_1^2 - q} \Phi_1'(\zeta_1) + F_1(\zeta_1) \right].$$

Wobec powyższego stosując do wyrazu lewej strony równości (20) wzór (16), do pierwszego wyrazu prawej strony równości (20) wzór (18), zaś do drugiego wyrazu prawej strony równości (20) wzór (19), otrzymamy w wyniku działań

$$(24) \qquad \Phi(\zeta) = \int_0^{2\pi} 2(P+iU) N(\zeta, \gamma) d\gamma + C,$$

gdzie C oznacza pewną wartość stałą.

W celu określenia funkcji $F(\zeta)$ napiszemy równość następującą:

$$(25) \qquad P+Q = -2i(U+iP) + i[2U + i(P-Q)].$$

Należy zauważyć, że w równości (23) zmieniając $-i$ na i, otrzymujemy funkcję zmiennej ζ.

Stosując do wyrazu lewej strony równości (25) wzór (16), zaś do wyrazów prawej strony tejże równości wzór (18), będziemy mieli

$$\Phi(\zeta) = -\int_0^{2\pi} 2i(U+iP) N(\zeta, \gamma) d\gamma +$$

$$+ \frac{(1+q^2)(\zeta^2+q) - 2q(1+q\zeta^2)}{(1+q^2)(1+q\zeta^2) - 2q(\zeta^2+q)} \left[\frac{\zeta(1+q\zeta^2)}{\zeta^2 - q} \Phi'(\zeta) + 2iF(\zeta) \right],$$

skąd ostatecznie

$$(26) \qquad F(\zeta) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{(1+q^2)(1+q\zeta^2) - 2q(\zeta^2+q)}{(1+q^2)(\zeta^2+q) - 2q(1+q\zeta^2)} \left[\Phi(\zeta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{2\pi} 2i(U+iP) N(\zeta, \gamma) d\gamma \right] - \frac{\zeta(1+q\zeta^2)}{\zeta^2 - q} \Phi'(\zeta) \right\}.$$

Zatem funkcje $\Phi(\zeta)$ i $F(\zeta)$, określone wzorami (24) i (26), rozwiązują całość postawionego na wstępie zagadnienia.

Literatura cytowana w tekście

[1] G. V. Kolosov, *Application of the Complex Variable to the Theory of Elasticity*, Moscow 1935.

[2] F. Szelągowski, *The Plane Problem of the Theory of Elasticity in Functions of Complex Variables*, Arch. Mech. stos., 1951.

[3] E. Picard, *Traité d'analyse*, Paris 1905, 317.

[4] Н.И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1949.

Резюме

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ДИСК ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАРУЖНОЙ НАГРУЗКИ

Рассматривается решение вопроса, касающегося эллиптического диска, нагруженного по его краю.

В сущности, самая задача сводится к определении двух голоморфных функции $\Phi(\zeta)$ и $F(\zeta)$, выступающих в формулах, определяющих значение напряжений X_y, X_x, Y_y (рис. 1) соответствующих перемещении u и v в произвольной точке рассматриваемой области.

Применяя зависимости имеющие место между значением голоморфной функции области, заключающейся внутри эллипса и ее действительной и мнимой частью на краю этого диска, выводятся наконец формулы (24) и (26), определяющие соответствующие функции $\Phi(\zeta)$ и $F(\zeta)$.

Summary

ELLIPTICAL DISC UNDER EXTERNAL LOAD

The present paper contains a solution of the problem of an elliptical disc loaded on its edge.

The problem reduces to the obtainment of two holomorphic functions $\Phi(\zeta)$ and $F(\zeta)$ appearing in the equations for the stresses X_y, X_x, Y_y (Fig. 1) and the displacements u and v at any point of the region considered.

Making use of the relations between the value of the holomorphic function inside the region and the value of its real and imaginary part on the edge, the final equations (24) and (26) are derived for the functions $\Phi(\zeta)$ and $F(\zeta)$.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1960 r.