

**H. CZUDEK**

**NIEKTÓRE ZAGADNIENIA WYTRZYMAŁOŚCI  
TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OŚRODKIEM SZTYWNYM**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXVII**

**TOM VIII • ZESZYT 3 • ROK 1960**

## SPIS TREŚCI

1. Wiadomości wstępne	603
2. Rozwiązanie ogólne	604
2.1. Równania podstawowe	604
2.2. Rozwiązanie ogólne rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym	605
2.3. Rozwiązanie ogólne wytrzymałości tarczy nieograniczonej przy powracaniu obwodu ośrodka sztywnego z temperatury wyższej do niższej	607
3. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n=1$	608
3.1. Wiadomości ogólne	608
3.2. Jednokierunkowe rozciąganie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym o kształcie uogólnionej elipsy. Wzory ogólne	608
3.3. Wytrzymałość tarczy z ośrodkiem sztywnym o kształcie uogólnionej elipsy, powracającym z temperatury wyższej do niższej. Wzory ogólne	610
3.4. Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej w przypadku ośrodka sztywnego o kształcie elipsy uogólnionej	611
4. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n=2$	612
4.1. Wiadomości ogólne	612
4.2. Jednokierunkowe rozciąganie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym w kształcie krzywoliniowego trójkąta. Wzory ogólne	613
4.3. Wytrzymałość tarczy z ośrodkiem sztywnym w kształcie trójkąta krzywoliniowego, powracającego z temperatury wyższej do niższej. Wzory ogólne	615
4.4. Zestawienie naprężeń dla przypadku tarczy stalowej z ośrodkiem sztywnym w kształcie trójkąta krzywoliniowego	615
5. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n=3$ .	616
5.1. Wiadomości ogólne	616
5.2. Jednokierunkowe rozciąganie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym w kształcie krzywoliniowego kwadratu, gdy rozciąganie następuje w kierunku jednej z jego przekątnych. Wzory ogólne	617
5.3. Wytrzymałość tarczy z ośrodkiem sztywnym o kształcie kwadratu krzywoliniowego, powracającego z temperatury wyższej do niższej. Wzory ogólne.	619
5.4. Zestawienie naprężeń dla przypadku tarczy stalowej z ośrodkiem sztywnym w kształcie kwadratu krzywoliniowego	620
6. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n=3$ , gdy jednokierunkowe rozciąganie tarczy następuje w kierunku równoległym do dwóch boków sztywnego kwadratu krzywoliniowego	621
6.1. Wiadomości ogólne	621
6.2. Wzory szczegółowe	622
6.3. Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej	623
7. Wnioski	623

### 1. Wiadomości wstępne

W pracy niniejszej rozpatruje się niektóre przypadki rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego, eliptycznego, trójkątnego oraz w kształcie prostej szczeliny, jak również przypadki wytrzymałości tarczy nieograniczonej, w której stan napięcia jest wynikiem powracania części tarczy z ośrodkiem sztywnym z wyższej temperatury do niższej.

Przyjęto, że źródło temperatury znajduje się na obwodzie ośrodka sztywnego.

Oprócz znaczenia teoretycznego rozwiązań powyższych zagadnień mogą być wykorzystane w celu określenia stanu naprężeń w tarczy, powstającego wskutek przyspawania do niej nakładek, blach czy kształtowników. Otrzymane wzory oraz wielkości liczbowe jako odnoszące się do ośrodka doskonale sztywnego mogą być traktowane jako wielkości graniczne.

Rozwiązania przypadków wytrzymałości tarczy nieograniczonej przy działaniu temperatury mogą posłużyć do oceny różnych rodzajów nakładek przyspawanych do tarczy pod względem powstających naprężeń przy stygnięciu spoiny. Również wyniki analizy powyższych zagadnień stanowią pewne wielkości graniczne, będące dobrą podstawą do porównań.

Na podstawie powyższego opracowania staje się możliwe określenie racjonalnych kształtów nakładek dla konstrukcji spawanych. Nakładki powodują stosunkowo znaczną zmianę sztywności tarczy. Pociąga to za sobą koncentrację oraz nierównomierny rozkład naprężeń w jej otoczeniu.

Oba te czynniki wraz z naprężeniami spawalniczymi, powstałymi wskutek stygnięcia spoiny łączącej nakładkę z materiałem konstrukcji, mogą wpływać na jej wytrzymałość zmęczeniową. Z tego względu praktyczne znaczenie powyższych rozważań odnosi się przede wszystkim do konstrukcji spawanych, obciążonych dynamicznie.

W oparciu o niniejszą analizę można również wysnuć wnioski odnośnie racjonalnych sposobów zakończenia dodatkowej nakładki pasowej w blachownicach spawanych.

Przypadek tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu eliptycznego został rozwiązany w pracy [1]. W pracy naszej rozwiązanie powyższe otrzymuje się jako szczególny przypadek zagadnienia ogólnego, charakteryzującego się dwoma zmiennymi współczynnikami. Jeden z nich określa kształt zarysu ośrodka sztywnego pod względem ilości punktów obwodu najbardziej

odległych od jego środka ciężkości, drugi natomiast decyduje o zakrzywieniu obwodu ośrodka w otoczeniu tych jego charakterystycznych punktów.

Celem naszej pracy jednak nie jest samo zagadnienie teoretyczne, gdyż podobne zostało rozwiązane przez G. N. SAWINA (por. [3]). W pracy tej zastosowaliśmy inne metody, opracowane przez F. SZELAŃGOWSKIEGO. Drogę tę uważamy za prostszą, a postać wzorów końcowych za wygodniejszą do zastosowania i obliczeń. Poza tym nacisk kładziemy na przykłady i wyniki liczbowe, odnoszące się do tak ważnego materiału konstrukcyjnego, jakim jest stal.

## 2. Rozwiązanie ogólne

**2.1. Równania podstawowe.** Zagadnienie wytrzymałości tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym w zakresie obszaru odkształceń sprężystych sprowadza się do płaskiego zadania teorii sprężystości. Rozwiązujemy je w funkcjach zmiennej zespolonej zgodnie z ujęciem podanym w pracy [1] i [2].

Oznaczenia naprężeń przyjęto według symboliki KIRCHHOFFA-LOVE'A. Równania określające wartości naprężeń i przesunięć są następujące:

$$(2.1) \quad 2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2} \omega_1(\zeta_1) \Phi(\zeta) \frac{1}{w'(\zeta)} + F(\zeta),$$

$$(2.2) \quad X_x + Y_y = \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

$$(2.3) \quad v + iu = -\frac{i}{8\mu} \omega_1(\zeta_1) \Phi(\zeta) + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(\zeta_1) w'_1(\zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(\zeta) w'(\zeta) d\zeta.$$

W równaniach tych  $\omega(\zeta)$  stanowi funkcję odwzorowującą wiernie obszar jednostkowy na obszar zewnętrzny koła jednostkowego. Rozpatrywać będziemy odwzorowanie według wzoru

$$(2.4) \quad z = \omega(\zeta) = K \left( \zeta + \frac{m}{\zeta^n} \right).$$

Funkcja  $w(\zeta)$  musi być funkcją analityczną na zewnątrz oraz na obwodzie koła jednostkowego, czyli musi być spełniony warunek

$$(2.5) \quad \omega'(\zeta) \neq 0 \quad \text{przy } |\zeta| > 1.$$

Warunek (2.5) będzie spełniony przy zachowaniu nierówności

$$(2.6) \quad m \leq \frac{1}{n}.$$

Funkcja  $\omega_1(\zeta_1)$  wyraża się wzorem

$$\omega_1(\zeta_1) = K \left( \zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1^n} \right),$$

gdzie  $\zeta_1$  jest zmienną zespoloną, sprzężoną ze zmienną  $\zeta$ . W równaniu (2.3) pozostają do wyznaczenia z warunków brzegowych funkcje  $\Phi(\zeta)$  i  $F(\zeta)$ .

2.2. Rozwiązanie ogólne rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym. Zagadnienie powyższe ilustruje rys. 1. Kształt ośrodka sztywnego, określony wzorem (2.4), zależy od wielkości współczynników  $m$  i  $n$ .

Przy  $n = 1$  otrzymujemy elipsę uogólnioną, tzn. koło, elipsę lub sztywną szczelinę prostą, rozciągniętą wzdłuż osi  $x$  o długości  $4K$ . Otrzymamy koło, gdy dodatkowo przyjmiemy  $m = 0$ , natomiast szczelinę prostą przy  $m = 1$ . Elipsa właściwa wymaga założenia  $1 > m > 0$ .

Przypadek  $n = 2$  określa odwzorowanie wiernokątne trójkąta krzywoliniowego na koło jednostkowe. Współczynnik  $m$  zgodnie z (2.6) musi spełniać nierówność  $m \leq 1/2$ . Gdy  $m$  rośnie od wartości  $m = 0$  do  $m = 0,5$ , to wierzchołki trójkąta zaostrzają się coraz silniej, a jego boki stają się wklęsłe.

Przypadek  $n = 3$  określa odwzorowanie wiernokątne kwadratu krzywoliniowego na koło jednostkowe. Współczynnik  $m$  musi spełniać nierówność  $m \leq 1/3$ .

Określenie stanu napięcia w tarczy rozciąganej następuje przy zastosowaniu zasady superpozycji. Pierwszy stan stanowi rozciągana tarcza nieograniczona, przy czym obciążenie rozciągające  $p$  działa jednokierunkowo. W stanie drugim usuwamy obciążenie rozciągające  $p$  i zamiast niego obciążamy obszar leżący na zewnątrz ośrodka sztywnego takimi naprężeniami, które powodują przesunięcia punktów obwodu ośrodka odwzorowanego odwrotne do przesunięć stanu pierwszego.

Oczywiście dodatkowe naprężenia, przyłożone do punktów tarczy nieskończenie dalekich, nie mogą wywoływać przesunięć obwodu ośrodka odwzorowanego.

Istniejące naprężenia w tarczy z ośrodkiem sztywnym otrzymamy dodając wartości obu nałożonych stanów.

Stan pierwszy charakteryzuje się następującymi naprężeniami:

$$X_x = p, \quad Y_y = X_y = 0.$$

Przechodzimy do obliczenia stanu drugiego.

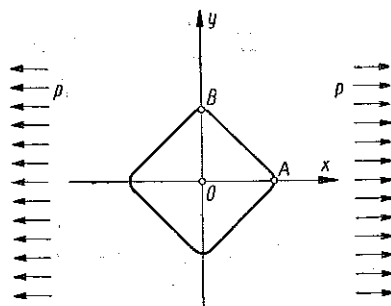
Przesunięcia poziome obwodu ośrodka odwzorowanego wyraża się wzorem

$$(2.7.1) \quad u = \frac{p}{E} x,$$

zaś przesunięcia pionowe wzorem

$$(2.7.2) \quad v = -\frac{\sigma p}{E} y.$$

We wzorze (2.7.2)  $\sigma$  oznacza współczynnik Poissona.



Rys. 1

Jak wiadomo, współrzędne  $x$  i  $y$  można przedstawić następującymi wzorami:

$$(2.8) \quad x = \frac{z+z_1}{2}, \quad y = -i \frac{z-z_1}{2}.$$

Uwzględniając zależności (2.8) oraz (2.3) dochodzimy do następującego równania:

$$(2.9) \quad -\frac{i\rho}{2E}K \left[ (1+\sigma) \left( \zeta + \frac{m}{\zeta^n} \right) + (1-\sigma) \left( \zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) \right] = \\ = -\frac{i}{8\mu}K \left( \zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) \Phi(\zeta) + \frac{ik}{8\mu} \int \Phi_1(\zeta_1) K \left( 1 - \frac{nm}{\zeta_1^{n+1}} \right) d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{4\mu} \int F(\zeta) K \left( 1 - \frac{nm}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta.$$

W równaniu powyższym przyjęto następujące oznaczenia:

$$k = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Dla obwodu koła jednostkowego ma miejsce zależność

$$\zeta\zeta_1 = 1.$$

Wobec tego równanie (2.9) możemy napisać w nieco odmienniej postaci:

$$(2.10) \quad -\frac{i\rho}{2E} \left[ (1+\sigma) \left( \frac{1}{\zeta_1} + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) + (1-\sigma) \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) \right] = \\ = -\frac{i}{8\mu} \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) \Phi(\zeta) + \frac{ik}{8\mu} \int \Phi_1(\zeta_1) \left( 1 - \frac{nm}{\zeta_1^{n+1}} \right) d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{4\mu} \int F(\zeta) \left( 1 - \frac{nm}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta.$$

Zadanie polega teraz na tym, aby znaleźć funkcje  $\Phi(\zeta)$  i  $F(\zeta)$  spełniające zależność (2.10). Funkcję  $\Phi_1(\zeta_1)$  otrzymamy z funkcji  $\Phi(\zeta)$  zastępując zmienną  $\zeta$  przez zmienną  $\zeta_1$ . Można się przekonać, iż poszukiwane funkcje wyrażają się następującymi wzorami:

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\zeta) = \frac{4\mu\rho}{Ek} [(1+\sigma)\zeta^{n-1} + nm(1-\sigma)] \frac{1}{\zeta^{n+1}-nm}, \\ \Phi_1(\zeta_1) = \frac{4\mu\rho}{Ek} [(1+\sigma)\zeta_1^{n-1} + nm(1-\sigma)] \frac{1}{\zeta_1^{n+1}-nm}, \\ F(\zeta) = \frac{i \cdot 2\mu\rho}{(\zeta^{n+1}-nm)^3 Ek} \{ k[(1+\sigma)nm + (1-\sigma)\zeta^{n-1}](\zeta^{n+1}-nm)^2 + \\ + \zeta^{2(n-1)}(1+\sigma)[nm\zeta^{n+1}-1](\zeta^{n+1}-nm) + \\ + (n-1)(m\zeta^{n+1}+1)(\zeta^{n+1}-nm) - (m\zeta^{n+1}+1)(n+1)\zeta^{n+1} + \\ + nm(1-\sigma)[\zeta^{n-1}(nm\zeta^{n+1}-1)(\zeta^{n+1}-nm) - \zeta^{2n}(m\zeta^{n+1}+1)(n+1)] \}. \end{array} \right.$$

Do wyznaczenia naprężeń musimy znać jeszcze pochodną funkcji  $\Phi(\zeta)$ . Jest to funkcja

$$\Phi'(\zeta) = \frac{4\mu p \zeta^{n-2}}{(\zeta^{n+1} - nm)^2 Ek} \{ (1+\sigma)[(n-1)(\zeta^{n+1} - nm) - (n+1)\zeta^{n+1}] - n(n+1)m\zeta^2(1-\sigma) \}.$$

Po wyznaczeniu funkcji  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Phi_1(\zeta_1)$  i  $F(\zeta)$  możemy naprężenia stanu drugiego określić ze wzorów (2.1) i (2.2):

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= \frac{i \cdot 2\mu p}{(\zeta^{n+1} - nm)^3 Ek} \left\{ \left[ \frac{(\zeta_1^{n+1} + m)\zeta^{2n-1}}{\zeta_1^n} \{ (1+\sigma)[2\zeta^{n+1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (n-1)nm \right] + nm(n+1)(1-\sigma)\zeta^2 \right\} + \\ &\quad + \zeta^{2(n-1)}(\zeta^{n+1} - nm)(1+\sigma)[nm\zeta^{n+1} - 1 + (n-1)(m\zeta^{n+1} + 1)] - \\ &\quad - \zeta^{2(n-1)}(1+\sigma)(n+1)\zeta^{n+1}(m\zeta^{n+1} + 1) + \\ &\quad + nm(1-\sigma)[\zeta^{n-1}(nm\zeta^{n+1} - 1)(\zeta^{n+1} - nm) - \\ &\quad - \zeta^{2n}(m\zeta^{n+1} + 1)(n+1)] + k[(1+\sigma)nm + (1-\sigma)\zeta^{n-1}](\zeta^{n+1} - nm)^2 \right\}, \\ X_x + Y_y &= \frac{2\mu p}{Ek} \left\{ [(1+\sigma)\zeta^{n-1} + (1-\sigma)nm] \frac{1}{\zeta^{n+1} - nm} + \right. \\ &\quad \left. + [(1+\sigma)\zeta_1^{n-1} + (1-\sigma)nm] \frac{1}{\zeta_1^{n+1} - nm} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dodając do siebie naprężenia obu stanów otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia ogólnego.

**2.3. Rozwiązanie ogólne wytrzymałości tarczy nieograniczonej przy powracaniu obwodu ośrodka sztywnego z temperatury wyższej do niższej.** Rozwiązanie powyższego przypadku można otrzymać w sposób podobny do przypadku poprzedniego.

Przesunięcia obwodu ośrodka odwzorowanego określone są wzorami

$$u = -atx, \quad v = -aty.$$

Symbolem  $a$  oznaczono współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej. Wykorzystując zależności (2.8) otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} -iatK \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) &= -\frac{i}{8\mu} K \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1^n} \right) \Phi(\zeta) + \\ &+ \frac{ik}{8\mu} K \int \Phi_1(\zeta_1) \left( 1 - \frac{nm}{\zeta_1^{n+1}} \right) d\zeta_1 + \frac{K}{4\mu} \int F(\zeta) \left( 1 - \frac{nm}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Równanie powyższe spełniają funkcje:

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{atnm \cdot 8\mu}{k} \frac{1}{\zeta^{n+1} - nm}, \\ \Phi_1(\zeta_1) &= \frac{atnm \cdot 8\mu}{k} \frac{1}{\zeta_1^{n+1} - nm}, \\ F(\zeta) &= \frac{i \cdot 4\mu \zeta^{n-1} at}{k(\zeta^{n+1} - nm)^3} [k(\zeta^{n+1} - nm)^2 + (nm\zeta^{n+1} - 1)(\zeta^{n+1} - nm)nm - \\ &\quad - n(n+1)m\zeta^{n+1}\zeta(m\zeta^{n+1} + 1)]. \end{aligned} \right.$$

Pochodna funkcji  $\Phi(\zeta)$  wyraża się wzorem

$$(2.14) \quad \Phi'(\zeta) = -\frac{atn(n+1) \cdot 8m\mu}{k} \frac{\zeta^n}{(\zeta^{n+1} - nm)^2}.$$

Funkcje (2.13)-(2.14) w połączeniu z równaniami (2.1) i (2.2) wystarczają do określenia stanu napięcia. Naprężenia te określone są wzorami:

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= \frac{4i\mu at \zeta^{n-1}}{k(\zeta^{n+1} - nm)^3} \left[ \frac{\zeta^{n+2}(\zeta_1^{n+1} + m)m}{\zeta_1^n} + \right. \\ &\quad \left. + k(\zeta^{n+1} - nm)^2 + (nm\zeta^{n+1} - 1)(\zeta^{n+1} - nm)nm - nm(n+1)\zeta^{n+1}(m\zeta^{n+1} + 1) \right], \\ X_x + Y_y &= \frac{4\mu at nm}{k} \left( \frac{1}{\zeta^{n+1} - nm} + \frac{1}{\zeta_1^{n+1} - nm} \right). \end{aligned} \right.$$

### 3. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n=1$

**3.1. Wiadomości ogólne.** Przypadek  $n=1$  stanowi odwzorowanie wiernokątne elipsy uogólnionej na koła jednostkowe. W zależności od wartości współczynnika  $m$  możemy otrzymać: (1) przy  $m=0$  koło, (2) przy  $m=1$  szczylinę prostą, (3) przy  $m=(a-b)/(a+b)$  elipsę o półosi w kierunku osi  $x$  równej  $a$ .

Badaniem powyższego przypadku zajmuje się również praca [1]. W niniejszej analizie rozwiązanie otrzymuje się ze wzorów ogólnych, wyprowadzonych wyżej.

**3.2. Jednokierunkowe rozciąganie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym o kształcie uogólnionej elipsy. Wzory ogólne.** Elipsę odwzorowuje na koło jednostkowe wzór (2.4), gdy  $n=1$ . Sposób obciążenia i odwzorowania widoczny jest na rys. 2. Z równań (2.12) otrzymamy następujące zależności między naprężeniami stanu drugiego:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= \frac{i \cdot 2\mu p}{Ek(\zeta^2 - m)^3} \left\{ [(1+\sigma) + m(1-\sigma)] \left[ \frac{2\zeta^3(m + \zeta_1^2)}{\zeta_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m(1 - \zeta^4) - \zeta^2(3 + m^2) \right] + (\zeta^2 - m)^2 k [(1-\sigma) + m(1+\sigma)] \right\}, \\ X_x + Y_y &= \frac{4\mu p}{(1-m)Ek} [(1+\sigma) + m(1-\sigma)]. \end{aligned} \right.$$





W sposób podobny otrzymamy według (3.3) dla punktu  $\zeta = i$ :

$$X_x = p \left\{ 1 - \frac{\mu}{Ek} [7(1+\sigma) + k(1-\sigma)] \right\},$$

$$Y_y = \frac{\mu p}{Ek} [3(1+\sigma) + k(1-\sigma)],$$

$$X_y = 0.$$

W tablicy 1 zestawiliśmy odpowiednie wielkości liczbowe dla tarczy stalowej.

Przypadek elipsy właściwej:  $m = 1/3$ . Nakładając oba stany otrzymamy zgodnie z (3.2) dla punktu  $\zeta = 1$  wzory na naprężenia o następującej postaci:

$$X_x = p \left\{ 1 + \frac{\mu}{Ek} [k(2-\sigma) + 2 + \sigma] \right\},$$

$$Y_y = \frac{\mu p}{Ek} [3(2+\sigma) - k(2-\sigma)],$$

$$X_y = 0.$$

W podobny sposób otrzymamy według (3.3) dla punktu  $\zeta = i$ :

$$\dot{X}_x = p \left\{ 1 - \frac{\mu}{4Ek} [9(2+\sigma) + 2k(2-\sigma)] \right\},$$

$$Y_y = \frac{\mu p}{4Ek} [2 + \sigma + 2k(2-\sigma)],$$

$$X_y = 0.$$

Przypadek szczeliny prostej:  $m = 1$ . Naprężenia dla punktu  $\zeta = 1$  określone są zgodnie z (3.2) za pomocą następujących wzorów:

$$X_x = \infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

W podobny sposób dla punktu  $\zeta = i$  otrzymamy według (3.3):

$$X_x = p \left[ 1 - \frac{\mu}{Ek} (3+k) \right], \quad Y_y = \frac{\mu p}{Ek} (k-1), \quad X_y = 0.$$

3.3. Wytrzymałość tarczy z ośrodkiem sztywnym o kształcie uogólnionej elipsy, powracającym z temperatury wyższej do niższej. Wzory ogólne. Naprężenia można obliczyć za pomocą następujących wzorów [otrzymamy je z (2.15) po podstawieniu  $n = 1$ ]:

$$(3.4) \quad \begin{cases} 2X_y + i(X_x - Y_y) = \frac{4\mu\alpha t}{k(\zeta^2 - m)^3} \left[ \frac{m\zeta^3(\zeta_1 + m)}{\zeta_1} + k(\zeta^2 - m)^2 + \right. \\ \left. + (m\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - m)m - 2m\zeta^2(1 + m\zeta^2) \right], \\ X_x + Y_y = \frac{4\mu\alpha t m}{k} \left( \frac{1}{\zeta^2 - m} + \frac{1}{\zeta_1^2 - m} \right). \end{cases}$$

Zależności powyższe pozwalają na wyznaczenie naprężeń w dowolnym punkcie tarczy. Wyznamy jedynie naprężenia dla punktów  $\zeta = 1$  oraz  $\zeta = i$ .

Przy  $\zeta = 1$  ze wzorów (3.4) otrzymamy:

$$(3.5) \quad \begin{cases} X_x = \frac{2\mu at}{k(1-m)^3} [k(1-m)^2 + m^2(m-3)], \\ Y_y = \frac{2\mu at}{k(1-m)^3} [m(3m^2 - 5m + 4) - k(1-m)^2], \\ X_y = 0. \end{cases}$$

Analogicznie przy  $\zeta = i$  mamy:

$$(3.6) \quad \begin{cases} X_x = -\frac{2\mu at}{k(1+m)^3} [k(1+m)^2 + 3m(m^2 + m + 2)], \\ Y_y = \frac{2\mu at}{k(1+m)^3} [k(1+m)^2 - m(m^2 + 5m - 2)], \\ X_y = 0. \end{cases}$$

Przypadek koła:  $m = 0$ . Naprężenia dla punktu  $\zeta = 1$  (rys. 2) możemy otrzymać ze wzorów (3.5). Wyniosą one:

$$X_x = 2\mu at, \quad Y_y = -2\mu at, \quad X_y = 0.$$

Dla punktu  $\zeta = i$  mamy:

$$X_x = -2\mu at, \quad Y_y = 2\mu at, \quad X_y = 0.$$

W tablicy 1 zestawiliśmy wielkości liczbowe naprężeń dla tarczy stalowej po przyjęciu oznaczenia  $K_t = atE$ .

Przypadek elipsy właściwej:  $m = 1/3$ . Z równań (3.5) otrzymamy przy  $\zeta = 1$  następujące naprężenia:

$$X_x = \frac{\mu at}{k}(3k-2), \quad Y_y = -\frac{3\mu at k}{k}(k-2), \quad X_y = 0.$$

Podobnie przy  $\zeta = i$  możemy naprężenia wyznaczyć z (3.6):

$$X_x = -\frac{3\mu at}{16k}(8k+11), \quad Y_y = \frac{\mu at}{16k}(1+24k), \quad X_y = 0.$$

Przypadek szczeliny prostej:  $m = 1$ . Zgodnie z (3.5) naprężenia przy  $\zeta = 1$  są następujące:

$$X_x = \infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

Podobnie przy  $\zeta = i$  naprężenia wyznaczone z (3.6) wynoszą:

$$X_x = -\frac{\mu at}{k}(3+k), \quad Y_y = \frac{\mu at}{k}(k-1), \quad X_y = 0.$$

**3.4. Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej w przypadku ośrodka sztywnego o kształcie elipsy uogólnionej.** Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej przy ośrodku sztywnym o kształcie uogólnionej elipsy ( $n = 1$ ) podane jest w tablicy 1.

Tablica 1. Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej przy ośrodku sztywnym o kształcie uogólnionej elipsy ( $n = 1$ )

m	Rysunek	Jednokierunkowe rozciąganie wzdłuż osi x		Działanie temperatury	
		punkt A	punkt B	punkt A	punkt B
0		$X_x = 1,509 p$ $Y_y = 0,452 p$ $X_y = 0$	$X_x = -0,950 p$ $Y_y = 0,990 p$ $X_y = 0$	$X_x = 0,768 K_t$ $Y_y = -0,768 K_t$ $X_y = 0$	$X_x = -0,768 K_t$ $Y_y = 0,768 K_t$ $X_y = 0$
$\frac{1}{3}$		$X_x = 2,079 p$ $Y_y = 0,635 p$ $X_y = 0$	$X_x = -0,283 p$ $Y_y = 0,433 p$ $X_y = 0$	$X_x = 0,783 K_t$ $Y_y = -0,044 K_t$ $X_y = 0$	$X_x = -0,958 K_t$ $Y_y = 0,587 K_t$ $X_y = 0$
1		$X_x = \infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0$	$X_x = 0,060 p$ $Y_y = 0,200 p$ $X_y = 0$	$X_x = \infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0$	$X_x = -0,939 K_t$ $Y_y = 0,199 K_t$ $X_y = 0$

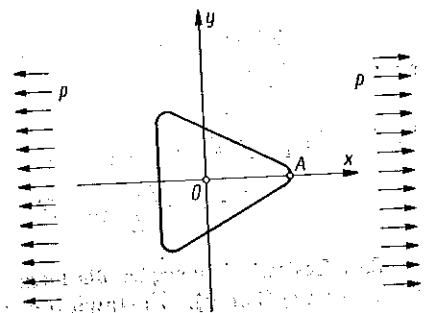
Z zestawionych wartości wynika, iż maksymalne naprężenia powstają w punkcie A. Dotyczy to zarówno rozciągania jednokierunkowego tarczy, jak też działania temperatury.

Najmniejsze naprężenie otrzymuje się dla ośrodka kołowego, największe natomiast dla ośrodka w kształcie szczeliny prostej. W tym przypadku naprężenia teoretycznie zbliżają się do nieskończoności.

#### 4. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n = 2$

4.1. Wiadomości ogólne. Przypadek  $n = 2$  stanowi odwzorowanie wiernokątne trójkąta krzywoliniowego na koło jednostkowe. W zależności od wartości współczynnika  $m$  otrzymamy bardziej ostre czy też łagodne wierzchołki trójkąta. Rozpatrzmy następujące przypadki:  $m = 0,250$ ,  $m = 0,375$ ,  $m = 0,500$ .

W celu ułatwienia wykreślenia ośrodka odwzorowanego podano w tabl. 2 współrzędne punktów obwodu trójkąta krzywoliniowego. Wystarczy podać współrzędne punktów obwodu tylko do wielkości kąta wewnętrznego  $\alpha = 60^\circ$ . Na rysunku 3 poka-



Rys. 3

zano przypadek rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym trójkątnym przy  $m = 0,250$ .

Tablica 2. Współrzędne punktów obwodu trójkąta krzywoliniowego

m	$\alpha$		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
	x, y								
0,250	x		0,667	0,651	0,603	0,529	0,431	0,320	0,200
	y		0	0,047	0,097	0,151	0,212	0,277	0,347
0,375	x		0,667	0,648	0,594	0,511	0,403	0,280	0,152
	y		0	0,022	0,049	0,085	0,133	0,192	0,262
0,500	x		0,667	0,647	0,588	0,489	0,379	0,247	0,111
	y		0	0,001	0,009	0,037	0,067	0,121	0,193

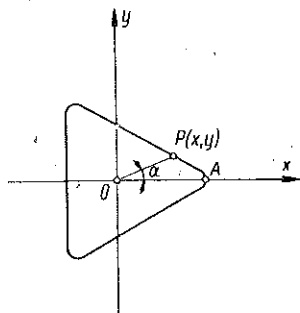
4.2. Jednokierunkowe rozciąganie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym w kształcie krzywoliniowego trójkąta: Wzory ogólne. Trójkąt krzywoliniowy możemy odwzorować wiernokątnie przy pomocy (2.4), gdy  $n = 2$ . Z równań (2.12) otrzymamy następujące zależności między naprężeniami stanu drugiego obciążenia:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= \frac{i2\mu\phi}{Ek(\zeta^3 - 2m)^3} \left\{ \frac{2\zeta^3(\zeta_1^3 + m)}{\zeta_1^2} [(1 + \sigma)(m + \zeta^3) + \right. \\ &\quad \left. + 3m\zeta^2(1 - \sigma)] - 3\zeta^5(1 + \sigma)(1 + 2m) + 2m\zeta(1 - \sigma)[m(2 - \zeta^6) - \right. \\ &\quad \left. - 4\zeta^3(1 + m^2)] + k(\zeta^3 - 2m)^2[2m(1 + \sigma) + \zeta(1 - \sigma)] \right\}, \\ X_x + Y_y &= \frac{2\mu\phi}{Ek} \left\{ [(1 + \sigma)\zeta + (1 - \sigma)2m] \frac{1}{\zeta^3 - 2m} + [(1 + \sigma)\zeta_1 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \sigma)2m] \frac{1}{\zeta_1^3 - 2m} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Na podstawie wzorów (4.1) można wyznaczyć naprężenia w dowolnym punkcie tarczy. Wyznamy jedynie naprężenia dla punktu  $\zeta = 1$ . Z równań (4.1) po podstawieniu  $\zeta = 1$  otrzymamy:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= \frac{\mu\phi}{Ek(1 - 2m)^3} \{ (1 + \sigma)[1 - 10m(1 - m)] + \\ &\quad + 2m(1 - \sigma)[1 - 4m(1 - m)] + k(1 - 2m)^2[2m(1 + \sigma) + (1 - \sigma)] \}, \\ Y_y &= -\frac{\mu\phi}{Ek(1 - 2m)^3} \{ k(1 - 2m)^2[2m(1 + \sigma) + (1 - \sigma)] + \\ &\quad + 3(1 + \sigma)[1 - 2m(1 - m)] + 6m(1 - \sigma)[1 - 4m(1 - m)] \}, \\ X_y &= 0. \end{aligned} \right.$$

Przypadek:  $m = 0,25$ . Przypadek powyższy odnosi się do ośrodka sztywnego o kształcie trójkąta krzywoliniowego. Na rysunku 4 pokazano zarys ośrodka sztywnego, przy czym współrzędne punktów obwodu można odczytać z tabl. 2.



Rys. 4

Naprężenia w punkcie tarczy  $\zeta = 1$  otrzymamy ze wzorów (4.2) po podstawieniu  $m = 0,25$ .

Po wykonaniu działań algebraicznych oraz po dodaniu stanów obciążeń znajdziemy

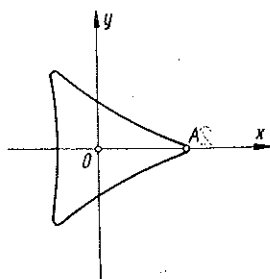
$$X_x = p \left\{ 1 - \frac{\mu}{Ek} [2(3+4\sigma) - k(3-\sigma)] \right\},$$

$$Y_y = \frac{\mu p}{Ek} [6(3+2\sigma) - k(3-\sigma)],$$

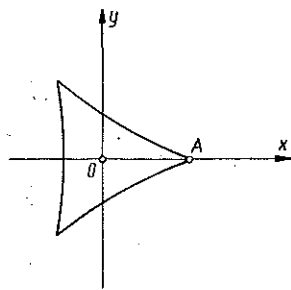
$$X_y = 0.$$

Składowe naprężeń dla tarczy stalowej zostały zestawione w tabl. 3.

Przypadek:  $m = 0,375$ . Powyższy przypadek w porównaniu z poprzednim wyróżnia się ostrzejszymi wierzchołkami trójkąta oraz lekko wklęsłymi bokami. Współrzędne punktów obwodu podane są w tabl. 2. Kształt ośrodka sztywnego widoczny jest na rys. 5.



Rys. 5



Rys. 6

Naprężenia w punkcie  $A$  tarczy otrzymamy ze wzorów (4.2) po podstawieniu  $m = 0,375$ . Naprężenia łączne obu stanów obciążeń są następujące:

$$X_x = p \left\{ 1 - \frac{2\mu}{Ek} [6 + 181(1+\sigma) - 2k(7-\sigma)] \right\},$$

$$Y_y = \frac{2\mu p}{Ek} [18 + 183(1+\sigma) - 2k(7-\sigma)],$$

$$X_y = 0.$$

Przypadek  $m = 0,5$ . Kształt ośrodka sztywnego ilustruje rys. 6. Współrzędne punktów obwodu zestawiono w tabl. 2. W porównaniu z przypadkiem poprzednim obecnie rozważany trójkąt krzywoliniowy ma bardzo ostre wierzchołki oraz wybitnie wklęsłe boki.

Z równania (4.2) można po podstawieniu  $m = 0,5$  obliczyć naprężenia panujące w punkcie  $\zeta = 1$ . Wynoszą one

$$X_x = -\infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

4.3. Wytrzymałość tarczy z ośrodkiem sztywnym w kształcie trójkąta krzywoliniowego, powracającego z temperatury wyższej do niższej. Wzory ogólne. Naprężenia określone są wzorami otrzymanymi z równań (2.15) po podstawieniu  $n = 2$ :

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = \frac{4\mu at \zeta}{k(\zeta^3 - 2m)^3} \left\{ \frac{\zeta^4(\zeta_1^3 + m)}{\zeta_1^2} m + k(\zeta^3 - 2m)^2 + \right. \\ \left. + 2m[m(2 - \zeta^6) - 4\zeta^3(1 + m^2)] \right\}, \\ X_x + Y_y = \frac{8\mu at m}{k} \left( \frac{1}{\zeta^3 - 2m} + \frac{1}{\zeta_1^3 - 3m} \right).$$

Z powyższych zależności możemy wyznaczyć naprężenia w dowolnym punkcie tarczy. Wyznamy je dla punktu  $\zeta = 1$ :

$$(4.3) \quad \begin{cases} X_x = \frac{2\mu at}{k(1-2m)^3} [k(1-2m)^2 - m(3+13m-8m^2)], \\ Y_y = -\frac{2\mu at}{k(1-2m)^3} [k(1-2m)^2 - m(11-19m+24m^2)], \\ X_y = 0. \end{cases}$$

Przypadek:  $m = 0,25$ . Naprężenia dla punktu  $A$  otrzymać można przez podstawienie do wzorów (4.3)  $m = 0,25$ . Wyniosą one

$$X_x = -\frac{\mu at}{k}(23-4k), \quad Y_y = \frac{\mu at}{k}(31-4k), \quad X_y = 0.$$

Przypadek:  $m = 0,375$ . Przypadek powyższy odnosi się do ośrodka sztywnego o kształcie widocznym na rys. 5. Wielkości naprężeń można wyznaczyć ze wzorów (4.3) po podstawieniu  $m = 0,375$ :

$$X_x = -\frac{4\mu at}{k}(81-2k), \quad Y_y = \frac{4\mu at}{k}(87-2k), \quad X_y = 0.$$

Przypadek:  $m = 0,5$ . Przypadek ten odnosi się do ośrodka sztywnego o kształcie według rys. 6. Ze wzorów (4.3) po podstawieniu  $m = 0,5$  wyznaczono następujące wielkości naprężeń:

$$X_x = -\infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

4.4. Zestawienie naprężeń dla przypadku tarczy stalowej z ośrodkiem sztywnym w kształcie trójkąta krzywoliniowego. W tablicy 3 zestawiono naprężenia panujące

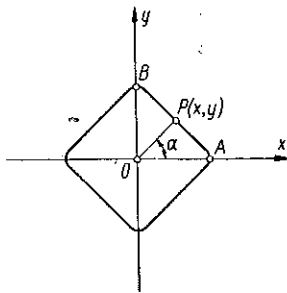
w punkcie  $A$  (rys. 3) tarczy stalowej. Zestawienie to pozwala na zanalizowanie wpływu zaostrenia wierzchołków trójkąta sztywnego oraz stopnia wklęsłości jego boków na wielkości naprężeń w przypadku jednokierunkowego rozciągania oraz działania temperatury.

Tablica 3. Zestawienie naprężeń panujących w punkcie  $A$  tarczy stalowej

$m$	Rysunek	Jednokierunkowe rozciąganie w kierunku osi $x$ punkt $A$	Działanie temperatury punkt $A$
$\frac{1}{4}$		$X_x = 0,483 p$ $Y_y = 2,955 p$ $X_y = 0$	$X_x = -2,713 K_t$ $Y_y = 4,190 K_t$ $X_y = 0$
$\frac{3}{8}$		$X_x = -77,9 p$ $Y_y = 84,5 p$ $X_y = 0$	$X_x = -56,760 K_t$ $Y_y = 61,260 K_t$ $X_y = 0$
$\frac{1}{2}$		$X_x = -\infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0$	$X_x = -\infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0$

### 5. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku $n = 3$

5.1. Wiadomości ogólne. Przypadek  $n = 3$  stanowi odwzorowanie wiernokątne kwadratu krzywoliniowego na koło jednostkowe. Rozpatrzmy następujące wielkości współczynnika  $m$ :  $m = 0,111$ ,  $m = 0,222$ ,  $m = 0,333$ .



Rys. 7

Dla umożliwienia wykreślenia zarysu ośrodka sztywnego podano w tablicy 4 współrzędne punktów obwodu kwadratu krzywoliniowego. Zarys ośrodka sztywnego uwidacznia rys. 7.

Wystarczy podać współrzędne jedynie do wielkości kąta wewnętrznego  $\alpha = 45^\circ$ . Na rysunku 1 przedstawiono przypadek rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym kwadratowym przy  $m = 0,111$ . W punkcie 5.2 rozpatrywać będziemy przypadek rozciągania tarczy nieograniczonej z kwadratem sztywnym, gdy rozciąganie następuje w kie-



runku jednej z przekątnych kwadratu. W następnym punkcie rozpatrzymy podobny przypadek, gdy rozciąganie następuje w kierunku równoległym do dwóch boków kwadratu (rys. 10):

Tablica 4. Współrzędne punktów obwodu kwadratu krzywoliniowego.

m	$\alpha$		0	7,5°	15°	22,5°	30°	37,5°	45°
	x, y								
$\frac{1}{9}$	x		0,709	0,691	0,638	0,560	0,461	0,354	0,251
	y		0	0,001	0,013	0,040	0,089	0,156	0,251
$\frac{2}{9}$	x		0,709	0,694	0,651	0,586	0,503	0,411	0,319
	y		0	0,026	0,059	0,103	0,161	0,230	0,319
$\frac{1}{3}$	x		0,709	0,698	0,666	0,617	0,553	0,479	0,402
	y		0	0,056	0,116	0,179	0,248	0,319	0,402

5.2. Jednokierunkowe rozciąganie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym w kształcie krzywoliniowego kwadratu, gdy rozciąganie następuje w kierunku jednej z jego przekątnych. Wzory ogólne. Kwadrat krzywoliniowy odwzorowujemy wiernokątnie za pomocą wzoru (2.4), gdy  $n = 3$ .

Z równań (2.12) otrzymamy następujące zależności między naprężeniami stanu drugiego obciążeń:

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= \frac{i2\mu p}{Ek(\zeta^4 - 3m)^3} \left\{ \frac{2\zeta^5(m + \zeta_1^4)}{\zeta_1^9} [(1 + \sigma)(\zeta^4 + 3m) + \right. \\ &\quad + 6m\zeta^2(1 - \sigma)] - (1 + \sigma)\zeta^4 [3\zeta^4(1 + 5m^2) + m(3 - \zeta^9)] - \\ &\quad - 3m\zeta^2(1 - \sigma) [\zeta^4(5 + 9m^2) + m(\zeta^8 - 3)] + k [3m(1 + \sigma) + \\ &\quad \left. + (1 - \sigma)\zeta^2](\zeta^4 - 3m)^2 \right\}, \\ X_x + Y_y &= \frac{2\mu p}{Ek} \left\{ [(1 + \sigma)\zeta^2 + (1 - \sigma)3m] \frac{1}{\zeta^4 - 3m} + [(1 + \sigma)\zeta_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \sigma)3m] \frac{1}{\zeta_1^4 - 3m} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Naprężenia w dowolnym punkcie tarczy wyznaczyć możemy z równań (5.1). Przy  $\zeta = 1$  otrzymamy

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= \frac{\mu p}{Ek(1 - 3m)} \{ k [3m(1 + \sigma) + 1 - \sigma] + 1 + \sigma + 3m(1 - \sigma) \}, \\ Y_y &= \frac{\mu p}{Ek(1 - 3m)} \{ 3 [1 + \sigma + 3m(1 - \sigma)] - k [3m(1 + \sigma) + 1 - \sigma] \}, \\ X_y &= 0. \end{aligned} \right.$$

Analogicznie przy  $\zeta = i$  otrzymamy

$$(5.3) \quad \begin{cases} X_y = \frac{\mu p}{Ek(1-3m)} \{k[3m(1+\sigma)-1+\sigma] + 3[3m(1-\sigma)-1-\sigma]\}, \\ Y_y = \frac{\mu p}{Ek(1-3m)} \{3m(1-\sigma)-1-\sigma - k[3m(1+\sigma)-1+\sigma]\}, \\ X_x = 0. \end{cases}$$

Przypadek:  $m = 0,111$ . Zarys ośrodka sztywnego pokazano na rys. 1. Współrzędne punktów obwodu można odczytać z tabl. 4.

Naprężenia panujące w punkcie  $A$  tarczy otrzymamy ze wzorów (5.2) po podstawieniu  $m = 0,111$ . Po wykonaniu przekształceń oraz dodaniu obu rozpatrywanych stanów obciążeń możemy naprężenia określić za pomocą następujących zależności:

$$X_x = p \left\{ 1 + \frac{\mu}{Ek} [k(2-\sigma) + 2 + \sigma] \right\},$$

$$Y_y = \frac{\mu p}{Ek} [3(2+\sigma) - k(2-\sigma)],$$

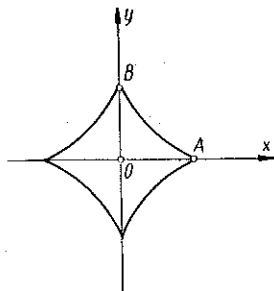
$$X_y = 0.$$

Podobnie z (5.3) otrzymamy dla punktu  $B$  wzory następujące:

$$X_x = p \left\{ 1 - \frac{\mu}{Ek} [k(1-2\sigma) + 3(1+2\sigma)] \right\},$$

$$Y_y = -\frac{\mu p}{Ek} [1 + 2\sigma - k(1-2\sigma)],$$

$$X_y = 0.$$



Rys. 8

Dla tarczy stalowej zestawiliśmy wielkości tych naprężeń w tabl. 5.

Przypadek:  $m = 0,222$ . Zarys ośrodka sztywnego pokazano na rys. 8. Współrzędne punktów obwodu można odczytać z tabl. 4. W stosunku do przypadku poprzedniego zauważymy bardziej ostre wierzchołki kwadratu oraz lekkie wklęsłości jego boków. Ze wzorów (5.2) wyznaczmy naprężenia panujące w punkcie  $A$  tarczy. Dodając oba stany obciążeń otrzymamy

$$X_x = p \left\{ 1 + \frac{\mu}{Ek} [k(5-\sigma) + 5 + \sigma] \right\},$$

$$Y_y = \frac{\mu p}{Ek} [3(5+\sigma) - k(5-\sigma)],$$

$$X_y = 0.$$

W sposób podobny na podstawie wzorów (5.3) dochodzimy do następujących wielkości naprężeń panujących w punkcie  $B$  tarczy:

$$X_x = p \left\{ 1 - \frac{\mu}{Ek} [3(1+5\sigma) - k(5\sigma-1)] \right\},$$

$$Y_y = - \frac{\mu p}{Ek} [k(5\sigma-1) + 1 + 5\sigma],$$

$$X_y = 0.$$

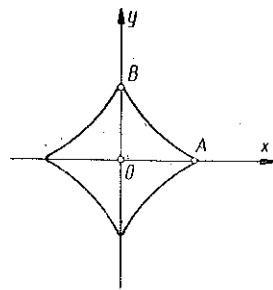
Przypadek:  $m = 0,333$ . Zarys ośrodka sztywnego ilustruje rys. 9. Współrzędne punktów obwodu zestawiono w tabl. 4. Ośrodek sztywny wykazuje silną zbieżność boków w pobliżu wierzchołków oraz znaczne wklęsłości boków.

Ze wzorów (5.2) wyznaczmy naprężenia panujące w punkcie  $A$  tarczy:

$$X_x = \infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

Dla punktu  $B$  na podstawie (5.3) znajdziemy następujące wielkości:

$$X_x = -\infty, \quad Y_y = -\infty, \quad X_y = 0.$$



Rys. 9

**5.3. Wytrzymałość tarczy z ośrodkiem sztywnym o kształcie kwadratu krzywoliniowego, powracającego z temperatury wyższej do niższej. Wzory ogólne.** Naprężenia określone są za pomocą następujących wzorów [otrzymamy je z (2.15) po podstawieniu  $n = 3$ ]:

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = \frac{4i\mu at \zeta^2}{k(\zeta^4 - 3m)^3} \left\{ \frac{\zeta^5(\zeta^4 + m)m}{\zeta_1^3} + k(\zeta^4 - 3m)^2 + 3m[m(3 - \zeta^8) - \zeta^4(5 + 9m^2)] \right\},$$

$$X_x + Y_y = \frac{12\mu at m}{k} \left( \frac{1}{\zeta^4 - 3m} + \frac{1}{\zeta_1^4 - 3m} \right).$$

Równania powyższe pozwalają na wyznaczenie stanu napięcia w dowolnym punkcie tarczy. Wyznaczmy naprężenia jedynie dla punktów  $A$  oraz  $B$  (rys. 7).

Dla punktu  $A$  ( $\zeta = 1$ ) otrzymamy

$$(5.4) \quad \begin{cases} X_x = \frac{2\mu at}{k(1-3m)^3} [k(1-3m)^2 - m(8+29m-27m^2)], \\ Y_y = \frac{2\mu at}{k(1-3m)^3} [m(20-43m+81m^2) - k(1-3m)^2], \\ X_y = 0. \end{cases}$$

Dla punktu  $B$  ( $\xi = i$ ) otrzymamy

$$X_x = \frac{2\mu at}{k(1-3m)^3} [m(20-43m+81m^2) - k(1-3m)^2],$$

$$Y_y = \frac{2\mu at}{k(1-3m)^3} [k(1-3)^2 - m(8+29m-27m^2)],$$

$$X_y = 0.$$

Przypadek:  $m = 0,111$ . Naprężenia w punkcie  $A$  tarczy otrzymamy po podstawieniu  $m = 0,111$  do (5.4). Znajdziemy

$$X_x = -\frac{\mu at}{6k}(49-18k), \quad Y_y = \frac{\mu at}{6k}(73-18k), \quad X_y = 0.$$

W sposób podobny wyznaczyć można również naprężenia panujące w punkcie  $B$  tarczy:

$$X_x = \frac{\mu at}{6k}(73-18k), \quad Y_y = -\frac{\mu at}{6k}(49-18k), \quad X_y = 0.$$

Przypadek:  $m = 0,222$ . Naprężenia panujące w punkcie  $A$  tarczy otrzymamy ze wzorów (5.4). Wyniosą one

$$(5.5) \quad X_x = -\frac{2\mu at}{3k}(236-9k), \quad Y_y = \frac{2\mu at}{3k}(260-9k), \quad X_y = 0.$$

Podobnie dla punktu  $B$  otrzymamy wprost z (5.5)

$$X_x = \frac{2\mu at}{3k}(260-9k), \quad Y_y = -\frac{2\mu at}{3k}(236-9k), \quad X_y = 0.$$

Przypadek:  $m = 0,333$ . Z równań (5.4) wyznaczono następujące wielkości naprężeń panujących w punkcie  $A$  tarczy:

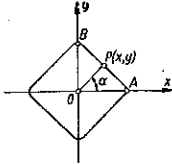
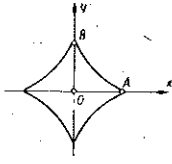
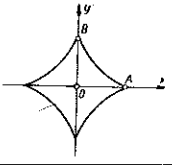
$$X_x = -\infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

Dla punktu  $B$  tarczy ważne będą wzory

$$X_x = \infty, \quad Y_y = -\infty, \quad X_y = 0.$$

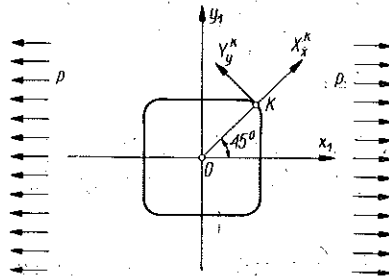
5.4. Zestawienie naprężeń dla przypadku tarczy stalowej z ośrodkiem sztywnym w kształcie kwadratu krzywoliniowego. W tablicy 5 zestawiono naprężenia panujące w punktach  $A$  oraz  $B$  (rys. 7) tarczy stalowej. Zestawienie powyższe pozwala na zanalizowanie wpływu stopnia zaostżenia wierzchołków oraz wklęsłości boków kwadratu krzywoliniowego na wielkości naprężeń.

Tablica 5. Zestawienie naprężeń panujących w punktach *A* i *B* tarczy stalowej

<i>m</i>	Rysunek	Jednokierunkowe rozciąganie tarczy wzdłuż kierunku osi <i>x</i>		Działanie temperatury	
		punkt <i>A</i>	punkt <i>B</i>	punkt <i>A</i>	punkt <i>B</i>
$\frac{1}{9}$		$X_x = 2,078 p$ $Y_y = 0,622 p$ $X_y = 0$	$X_x = -0,040 p$ $Y_y = -0,142 p$ $X_y = 0$	$X_x = -0,357 K_t$ $Y_y = 1,096 K_t$ $X_y = 0$	$X_x = 1,096 K_t$ $Y_y = -0,357 K_t$ $X_y = 0$
$\frac{2}{9}$		$X_x = 3,782 p$ $Y_y = 1,132 p$ $X_y = 0$	$X_x = -0,194 p$ $Y_y = -0,655 p$ $X_y = 0$	$X_x = -26,800 K_t$ $Y_y = 29,750 K_t$ $X_y = 0$	$X_x = 29,750 K_t$ $Y_y = -26,800 K_t$ $X_y = 0$
$\frac{1}{3}$		$X_x = \infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0$	$X_x = -\infty$ $Y_y = -\infty$ $X_y = 0$	$X_x = -\infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0$	$X_x = \infty$ $Y_y = -\infty$ $X_y = 0$

6. Wyznaczenie naprężeń dla przypadku  $n = 3$ , gdy jednokierunkowe rozciąganie tarczy następuje w kierunku równoległym do dwóch boków sztywnego kwadratu krzywoliniowego

6.1. Wiadomości ogólne. Usytuowanie ośrodka sztywnego w stosunku do osi współrzędnych pokazano na rys. 10.

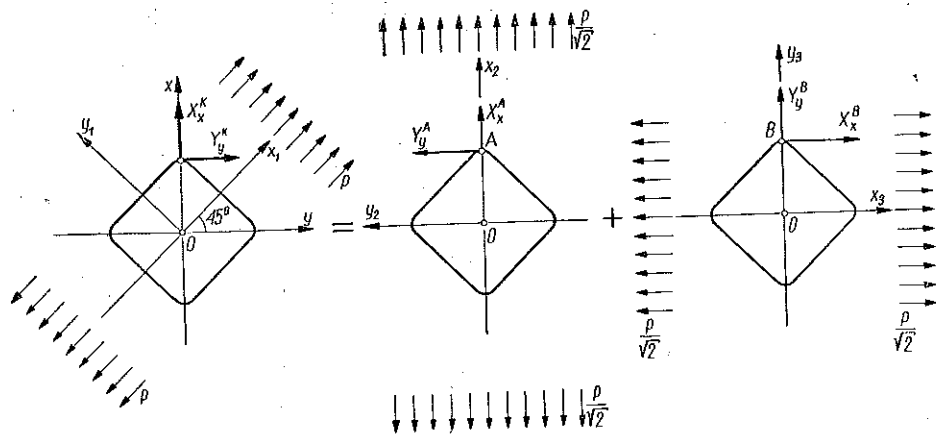


Rys. 10

Dążymy do wyznaczenia naprężeń panujących w punkcie *K* tarczy. Rozwiązanie otrzymać możemy na podstawie wyników z rozdziału 5. Stan obciążenia, pokazany na rys. 10, można rozłożyć na 2 stany obciążeń, rozpatrzone już uprzednio. Ilustruje to rys. 11.

Na podstawie rys. 11 łatwo można znaleźć wzory określające stan napięcia w punkcie  $K$  tarczy (rys. 10) poprzez wielkości naprężeń stanów obciążeń, rozpatrzonych już uprzednio w rozdziale 5. Zależności są następujące:

$$X_x^K = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_x^B - Y_y^A), \quad Y_y^K = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_x^A + Y_y^B), \quad X_y^K = 0.$$



Rys. 11

Na podstawie wzorów (5.2) i (5.3) możemy wypisać wielkości naprężeń w postaci następującej:

$$(6.1) \quad \begin{cases} X_x^K = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{6\mu(1+\sigma)(km-1)}{(1-3m)Ek} \right], \\ Y_y^K = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{2\mu(1-\sigma)(k+3m)}{(1-3m)Ek} \right], \\ X_y^K = 0. \end{cases}$$

**6.2. Wzory szczegółowe.** Na podstawie zależności (6.1) wyznaczono wielkości naprężeń, panujących w punkcie  $K$  tarczy przy różnych znaczeniach współczynnika  $m$ .

Przypadek:  $m = 0,111$ . Naprężenia określone są wzorami:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{\mu(1+\sigma)(9-k)}{Ek} \right], \\ Y_y &= \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{\mu(1-\sigma)(3k+1)}{Ek} \right], \\ X_y &= 0. \end{aligned}$$

Przypadek:  $m = 0,222$ . Na podstawie zależności (6.1) naprężenia można określić w następujący sposób:

$$X_x = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{\mu \cdot 2(1+\sigma)(9-2k)}{Ek} \right],$$

$$Y_y = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{\mu \cdot 2(1-\sigma)(3k+2)}{Ek} \right],$$

$$X_y = 0.$$

Przypadek:  $m = 0,333$ . Dla powyższego przypadku naprężenia normalne osiągały teoretycznie wartości nieskończenie wielkie:

$$X_x = -\infty, \quad Y_y = \infty, \quad X_y = 0.$$

6.3. Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej. Zestawienia naprężeń dokonano w tablicy 6. Są to naprężenia, jakie powstają w punkcie  $K$  tarczy stalowej, rozciąganej w sposób przedstawiony na rys. 11.

Tablica 6. Zestawienie naprężeń dla tarczy stalowej

$m$	Rysunek	Rozciąganie jednokierunkowe tarczy w kierunku równoległym do osi $x_1$
		punkt $K$
$\frac{1}{9}$		$X_x = -0,469 p,$ $Y_y = 1,370 p,$ $X_y = 0.$
$\frac{2}{9}$		$X_x = -0,937 p,$ $Y_y = 2,218 p,$ $X_y = 0.$
$\frac{1}{3}$		$X_x = -\infty$ $Y_y = \infty$ $X_y = 0.$

## 7. Wnioski

Wyprowadzone wzory pozwalają na wyznaczenie koncentracji naprężeń około ośrodka sztywnego rozciąganej tarczy nieograniczonej. W praktyce inżynierskiej mamy do czynienia również z przypadkiem ośrodka o odmiennej sztywności, aczkolwiek niezupełnie sztywnego. Dla powyższych zagadnień

wzory wyprowadzone nie będą już słuszne ściśle, mogą natomiast z powodzeniem służyć do przeprowadzenia analizy wpływu różnych kształtów ośrodka odmiennej sztywności na koncentrację naprężeń w ich otoczeniu.

Na podstawie niniejszych rozważań dochodzimy między innymi do następujących wniosków (liczby odnoszą się do tarczy stalowej).

1. Istnienie w tarczy rozciąganej ośrodka sztywnego prowadzi do dość znacznej koncentracji naprężeń, zależnej od kształtu ośrodka oraz jego usytuowania względem kierunku rozciągania.

2. W przypadku ośrodka sztywnego w kształcie uogólnionej elipsy koncentracja naprężeń jest tym większa, im większy jest stosunek półosi elipsy leżącej na kierunku rozciągania do półosi pozostałej. O ile dla ośrodka kołistego maksymalne naprężenie wynosi  $1,509 p$  ( $p$  — obciążenie rozciągające), o tyle dla sztywnej szczeliny prostej osiąga ono teoretycznie wartość nieskończenie wielką.

3. W przypadku ośrodka sztywnego w kształcie trójkąta krzywoliniowego oraz rozciągania tarczy nieograniczonej wzdłuż kierunku jednej z dwusiecznych kątów wierzchołkowych trójkąta, koncentracja naprężeń zależy od stopnia zaostrenia jego wierzchołków. Przy zaokrągleniu wierzchołków największe naprężenie wynosi  $2,955 p$ . Jest więc ono większe od największego naprężenia w przypadku ośrodka sztywnego w kształcie koła. Przy zaostreniu się wierzchołków trójkąta naprężenia teoretyczne rosną aż do wartości nieskończenie wielkiej.

4. Tarcza nieograniczona z ośrodkiem sztywnym w kształcie krzywoliniowego kwadratu, rozciągana w kierunku jednej z jego przekątni, charakteryzuje się stanem napięcia o największych naprężeniach mniejszych, aniżeli w przypadku ośrodka sztywnego trójkątnego. Również w tym przypadku koncentracja naprężeń zależy od stopnia zaostrenia wierzchołków kwadratu i zmienia się od wartości  $2,078 p$  aż do wartości nieskończenie wielkiej.

5. Przy takim usytuowaniu ośrodka sztywnego w kształcie krzywoliniowego kwadratu, ażeby rozciąganie tarczy następowało w kierunku dwóch jego boków, otrzymuje się dość znaczne zmniejszenie koncentracji naprężeń. Naprężenia zależne od stopnia zaostrenia wierzchołków kwadratu krzywoliniowego rosną od wielkości  $1,370 p$  aż do wartości nieskończenie wielkiej.

6. Naprężenia wywołane w tarczy wskutek powracania ośrodka sztywnego z temperatury wyższej do niższej są przy wszystkich rozpatrywanych rodzajach ośrodka sztywnego bardzo duże i zależne od jego kształtu.

#### Literatura cytowana w tekście

[1] F. SZELAĞOWSKI, *Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych*, Rozpr. inżyn., 1, 1 (1953).

[2] F. SZELAĞOWSKI, *O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego*, Rozpr. inżyn., 1, 1 (1953).

[3] Г. Н. САВИН, *Концентрация напряжений*, Москва 1951.



## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ДИСКА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассматривается вопрос бесконечного диска с жестким включением путем конформного отображения этого включения на единичную окружность. Эту задачу решил другими методами Г. Н. Савин, [3]. В настоящей работе были использованы методы Ф. Шелёнговского, при чем главное внимание обращается на получение числовых данных для стали.

Рассматривается однонаправленное растяжение бесконечного диска и случай обратного прохода жесткого включения из высшей температуры к низшей.

Выводятся формулы, определяющие напряженное состояние в бесконечном диске, когда жесткая инклюзия имеет форму обобщенного эллипса, круга, нормального эллипса, прямой щели, треугольника и криволинейного квадрата.

Задача диска с жестким включением в форме криволинейного квадрата рассматривается при различном его расположении относительно направления растяжения.

Все приведенные выше формы жесткого включения можно конформно отобразить при помощи одной отображающей функции. Эту функцию характеризует два коэффициента, которые решают о форме жесткого включения, что облегчает анализ влияния жесткого включения на напряженное состояние в диске.

Кроме общего решения определяются замкнутые формулы для напряжений, существующих в некоторых характерных точках бесконечного диска. При различных формах жесткого включения определяются числовые величины приведенных выше напряжений в случае стального диска. Результаты анализа имеют значение прежде всего в строительстве металлических мостов. Это дает возможность определить влияние формы накладок или других присваренных элементов на концентрацию напряжений.

В теоретической части работа является в некотором смысле обобщением работы [2].

### Summary

#### SOME PROBLEMS OF STRENGTH OF AN INFINITE PLATE WITH A RIGID INCLUSION

The problem of an infinite plate with a rigid inclusion is solved by conformal mapping of the rigid inclusion into the unit circle. This problem has been solved by G. N. SAVIN, [3], by different methods. In this paper the method of F. SZELĄGOWSKI is used, the principal stress being laid on the obtainment of numerical data for steel.

One-directional tension of an infinite plate is considered and the case where the rigid inclusion is cooled down from a higher temperature to a lower temperature. Equations for the state of stress in the plate are derived for an inclusion in the form of a generalized ellipse (circle, ellipse proper, rectilinear slit), a triangle and a curvilinear square.

The problem of a plate with a rigid inclusion in the form of a curvilinear square is considered for various positions in relation to the direction of tension.

All the above forms of the rigid inclusion may be mapped conformally by means of one mapping function.

This function is characterized by two coefficients deciding upon the shape of the rigid inclusion. This facilitates the analysis of the influence of the form of the inclusion on the state of stress in the plate.

Besides of the general solution, closed formulae are determined for stresses at some characteristic points of the infinite plate with various shapes of the rigid inclusion.

Numerical values of these stresses are determined for a steel plate. The results of analysis are important chiefly for steel bridge structures. For, they enable to determine the influence on stress concentration of the form of the elements welded to the plate.

The theoretical part of the present paper constitutes in a certain sense a generalization of Ref. [2].

**KATEDRA BUDOWY MOSTÓW STALOWYCH  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1959 r.*