JÓZEF IGNACZAK

ROZWÓJ TERMOSPRĘŻYSTOŚCI W LATACH 1945-1960

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXVI

TOM VIII · ZESZYT 3 · ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Teoria sprężystości do 1945 r. 583

2. Rozwój termosprężystości od 1945 r. do chwili obecnej 584

2.1. Zagadnienia dystorsji termicznych jako problemy podstawowe przy rozwiązywaniu klasycznych zagadnień statycznych i dynamicznych termosprężystości 589

2.2. Nowe kierunki badań w termosprężystości w ostatnim dziesiątku lat. Pojęcie ciała termosprężystego — zagadnienia sprzężone termosprężystości. Naprężenia termiczne w strukturach lepko-sprężystych 593

1. Teoria termosprężystości do 1945 r.

Pierwsze problemy dotyczące wyznaczania naprężeń cieplnych w ciele sprężystym, wywołanych polem temperatury, zostały sformułowane jeszcze w początkach XIX wieku (1837-1838) przez I. M. C. DUHAMELA, [1] i [2]. DUHAMEL ustalił równania dla zjawiska termosprężystego polegającego na sprzężeniu pola temperatury i pola deformacji ciała.

Sformułowaniem równań termosprężystości zajmował się później F. E. NEUMANN (1885), [3], W. VOIGT (1910), [4], H. JEFFREYS (1930), [5]. W późniejszych latach zagadnienia termosprężystości weszły jako niewielki rozdział do ogólnej teorii sprężystości i dotyczyły przeważnie problemów statycznych. W tych przypadkach teoria rozwiązań równań termosprężystości jest częścią ogólnej teorii sprężystości. Całkowanie równań termosprężystości sprowadzono do problemu działania sił masowych potencjalnych o potencjale, którego gęstość jest temperaturą ciała. Metoda sprowadzenia problemu termosprężystości do problemu klasycznego teorii sprężystości, gdy na ciało działają siły objętościowe i powierzchniowe, jest bardzo dawna i obmyślona niezależnie przez wielu pionierów z teorii równań cząstkowych oraz ojców teorii sprężystości B.D.SAINT VENANTA, [6], G.LAMÉGO, [7] i P.S.LAPLACE'A. Znalezienie rozwiązań równań LAMÉGO w przemieszczeniach, gdy na ciało działają dowolne siły masowe, rozwiązuje problem termosprężystości. Stąd dla rozmaitych ciał sprężystych o rozmaitym kształcie typowych konstrukcji, jak walce, cylindry, płyty lub ściany, stalowe zbiorniki, problem poszukiwania naprężeń termicznych zawierał się w klasycznych i elementarnych problemach teorii sprężystości. Zagadnienia termosprężystości nie były przedmiotem specjalnych zainteresowań poza ramami teorii sprężystości. Z bardzo dawnych traktatów o naprężeniach termicznych wymieńmy klasyczną pracę z roku 1873 C.W.BORCHARDTA, [8], dotyczącą rozwiązania w całkowej reprezentacji dla kuli poddanej dowolnemu rozkładowi temperatury.

Zainteresowanie się problematyką naprężeń termicznych obserwujemy w latach 1930-tych. Z tego okresu mamy pracę J. N. GOODIERA (1937), [9], oraz prace M. BIOTA (1935), [10]. Praca [9] traktuje o ogólnych, klasycznych metodach całkowania równań termosprężystości i wprowadza teorię naprężeń termicznych wywołanych nieciągłymi, ustalonymi polami temperatur. Ponadto

Goodier wznawia zapoczątkowaną jeszcze przez Duhamela problematykę naprężeń wywołanych nieustalonymi polami temperatur. Prace Biota, [10], mają na celu podanie ogólnych własności dwuwymiarowych rozkładów naprężeń termicznych.

Z okresu międzywojennego wymieńmy jeszcze pracę N. Muscheliszwilego z roku 1923, [11], N.N. Lebiediewa (1934), [12], i P.F. Papkowicza (1937), [13], które jak szereg innych w tym czasie uzupełniały problematykę naprężeń termicznych. Prace dotyczące naprężeń termicznych z tego okresu znalazły odbicie w monografii S. Timoszenki i J. N. Goodiera, [14], wydanej po drugiej wojnie światowej (1951).

Pojawienie się prędkości naddźwiękowych samolotów i pocisków rakietowych w drugiej wojnie światowej oraz opancerzenie atomowej energii wprowadza skomplikowane problemy przenoszenia ciepła i naprężeń termicznych przy projektowaniu konstrukcji silnikowych i reaktorów nuklearnych. Jeszcze w okresie trwania drugiej wojny światowej powstaje szereg rozwiązań problemów termosprężystości o charakterze praktycznym i teoretycznym. Z problemów teoretycznych wymieńmy przykładowo pracę N.O. Myklestadta (1942), [15], określającą naprężenia termiczne w ciele sprężystym z inkluzją elipsoidalną oraz W. M. Majziela (1941), [16], uogólniającą twierdzenia Betti-Maxwella na przypadek naprężeń termicznych.

Zagadnienia praktyczne dotyczą wyznaczania naprężeń konstrukcji lotniczych poddanych aerodynamicznym ogrzaniom. Problematyka naprężeń termicznych w konstrukcjach najrozmaitszych rozwinie się jeszcze bardziej po zakończeniu drugiej wojny światowej.

[2. Rozwój termosprężystości od 1945 r. do chwili obecnej

Począwszy od 1945 r. można zauważyć, że w światowej literaturze technicznej dużo miejsca poświęcono zagadnieniom termosprężystości. Problematyka termosprężystości jest nie tylko ograniczona do klasycznych problemów naprężeń termicznych, polegających na znalezieniu naprężeń dla danego rozkładu temperatury w określonej, wyjętej i niepowiązanej części maszyny lub innej konstrukcji, lecz dotyczy pracy konstrukcji złożonej. Rozkład temperatury, sprężyste i niesprężyste naprężenia termiczne w rozmaitych elementach powiązanych ze sobą, łączenie sprężystych i niesprężystych sił i naprężeń termicznych, dopuszczalne naprężenia dla rozmaitych materiałów i warunków obciążenia, problemy zgięcia, sztywności, zmęczenia materiału, problem uderzenia termicznego — są przedmiotem najnowszych badań ośrodków naukowych w USA, ZSRR, W. Brytanii, Austrii i w Polsce. W Polsce w ostatnich latach obserwujemy znaczny rozwój problematyki dotyczącej quasi-ustalonych pól naprężeń termicznych oraz zagadnień dynamicznych termosprężystości i lepko-termosprężystości. Szkoła W. Nowackiego jest szeroko znana zagranicą (por. np [49]). Badania naukowe w dziedzinie określania naprężeń termicznych są przedmiotem licznych prac i rozpraw naukowych. Jak silnie rozwinęła się ta dziedzina dziś, niech świadczy fakt, że po drugiej wojnie światowej ukazały się cztery obszerne monografie z termosprężystości, z których jedna napisana przez W. NOWACKIEGO w Polsce. Krótki przegląd niektórych ważniejszych prac teoretycznych najlepiej rzuca światło na rozwój termosprężystości po ostatniej wojnie.

W latach 1945-1950 obserwujemy dużo prac o charakterze praktycznym, dotyczących naprężeń termicznych w obracających się dyskach, w łopatkach turbinowych, w turbinach gazowych (por. np. prace J. LIGHTILL i J. BRADSHAW (1949), [17], A. D. KOWALENKO, [18] oraz S. S. MANSON, [19]). Rozwiązywane są również problemy naprężeń termicznych w płytach o specjalnych warunkach brzegowych, J. ALECK, [20].

Konieczność uzyskiwania danych liczbowych w problemach natury inżynierskiej jest przyczyną powstania numerycznych metod dla analizy naprężeń w strukturach poddanych niejednorodnym rozkładom temperatury, [21], por. np. R.H. HELDENFELS, (1950).

W roku 1950 R. D. MINDLIN i D. H. Cheng, [22], a w rok później B. SEN, [23], rozwiązują ustalony problem termosprężystości dla półprzestrzeni sprężystej. Ten problem będzie w późniejszych latach podejmowany przez innych autorów, którzy zajmą się specyfiką naprężeń termicznych przy rozmaitych ogrzaniach półprzestrzeni. B. SEN w pracy [23] wprowadza do literatury pojęcie jądra termosprężystego odkształcenia, które, jak pokażemy później, jest fundamentalnym pojęciem w teorii ustalonych naprężeń cieplnych. W pięć lat później E. STERNBERG i E. L. Mc DOWELL, [24], podają szczegółowe rozwiązania dotyczące ustalonego problemu termosprężystości dla półprzestrzeni oraz ciekawą własność, że stan naprężeń w półprzestrzeni sprężystej ogrzanej na płaszczyźnie ograniczającej w sposób dowolny, gdy wewnątrz półprzestrzeni nie ma źródeł ciepła, jest płaskim stanem naprężenia względem płaszczyzny ograniczającej. Do tych samych wniosków doszedł W. NOWACKI (1957), [25], który rozważał również problem z nieciągłymi warunkami brzegowymi dla temperatury na brzegu półprzestrzeni. W dziesięć lat później, w roku 1960, ukazała się praca I.N. SNEDDONA i F.J. LOCKETTA, [26], traktująca również o ustalonym problemie termosprężystości dla półprzestrzeni i warstwy sprężystej, w której nowością było to, że autorzy uzyskali dla pewnych typów ogrzań powierzchni rozwiązania w postaci zamkniętej, dotyczące osiowo-symetrycznego ogrzania grubej warstwy. Rozwiązanie dla nieskończonej grubej warstwy było uzyskane wcześniej (1956) przez B. SHARMA, [27], ale nie zostało doprowadzone do tak efektywnych wyników jak w pracy [26].

Dziesięcioletni okres począwszy od 1950 do 1960 r. wskazuje na to, jak bardzo interesowano się ustalonym ogrzaniem półprzestrzeni. Niemniej dociekań naukowych w tym czasie poświęcono termicznemu uderzeniu na półprzestrzeń sprężystą, a więc zagadnieniom dynamicznym termosprężystości dla półprzestrzeni. Za pionierską pracę, która pobudziła do dalszych rozwiązań problemów termicznego uderzenia, należy uważać pracę W. I. Daniłowskiej, [28]. Problem Daniłowskiej jest jednowymiarowym zagadnieniem dynamicznym termosprężystości i określa stan naprężeń wywołanych nagłym ogrzaniem brzegu półprzestrzeni. Tym samym zagadnieniem zajmie się w kilka lat później Japończyk T. MURA, [29], a w dziesięć lat później E. STERNBERG i J.G. CHAKRAVORTY, [30], którzy wykazują, jak zmienia się przebieg fali naprężeń w czasie, gdy modyfikować warunek brzegowy dla temperatury. Obok zagadnień dynamicznych jednowymiarowych dla półprzestrzeni wymieńmy pracę [31] J. IGNACZAKA dotyczącą nagłego ogrzania brzegu półprzestrzeni utwierdzonej, trójwymiarowej.

Szereg prac dotyczących termicznego uderzenia na półprzestrzeń zakłada, że zjawisko ogrzewania półprzestrzeni zachodzi stopniowo w czasie, a więc że wyrazy inercyjne w równaniach ruchu termosprężystości mogą być pominięte (zagadnienia quasi-statyczne). Należą do nich prace M.A. SADOWSKY'EGO (1955), [32], J.L. BAILEYA (1958), [33], i W. NOWACKIEGO, [34]. Metoda rozwiązywania zagadnień quasi-statycznych pokrywa się ze sposobem całkowania równań termosprężystości dla przypadku statycznego, gdyż czas występuje tutaj jako parametr.

Osobny rozdział w teorii naprężeń cieplnych ustalonych, quasi-ustalonych lub naprężeń o charakterze fali stanowią zagadnienia wyznaczania naprężeń, wywołanych źródłami ciepła, znajdującymi się bądź to wewnątrz, bądź na powierzchni rozpatrywanego ciała. Problematyka źródeł została szeroko opracowana przez W. NOWACKIEGO w jego oryginalnych pracach [35], [36], [37] i [38], dotyczących stanu naprężeń, wywołanych nieustalonymi źródłami ciepła w przestrzeni nieograniczonej oraz półprzestrzeni sprężystej. Podobnie jak problem DANIŁOWSKIEJ, [28], pobudził uczonych do dyskusji nad termicznym uderzeniem, tak również podstawowa praca W. NOWACKIEGO, [39], dotycząca propagacji naprężeń termicznych, wywołanych chwilowym źródłem ciepła w nieograniczonym ciele sprężystym, dała bodziec do poszukiwania nowych rozwiązań zagadnień dynamicznych o symetrii punktowej[1]. Problem NOWACKIEGO, [39], jest jednym z niewielu problemów dynamicznych, które udało się dotąd rozwiązać za pomocą znanych funkcji stabelaryzowanych. Do takich problemów, które udało się rozwiązać w postaci zamkniętej, pozwalającej na zbadanie efektów inercji, zaliczymy pracę, która ukazała się w dwa lata później, E. STERNBERGA i J. G. CHAKRAVORTY, 1959 r., [40]. Praca ta dotyczy termicznego szoku na powierzchnię otworu kulistego w ciele nieograniczonym.

[1] Problem W. NOWACKIEGO, [39], dla ciągłego źródła w czasie i problem W.I. DANIŁOWSKIEJ, [28], zawierają identyczne postacie potencjałów opóźnionych. W obu jednak przypadkach mamy różne wzory na naprężenia cieplne i inną interpretację otrzymanych wyników.

W monografii W. NOWACKIEGO pt. «Zagadnienia termosprężystości» wydanej w r. 1960, [34], autor poświęcił dużo miejsca metodzie rozwiązywania typowych problemów klasycznej termosprężystości. Jedną z najczęściej stosowanych metod szukania rozwiązań jest metoda GREENA lub metoda MAJZIELA, [16]. Ta ostatnia oddaje duże usługi przy rozwiązywaniu problemów teorii płyt i powłok znajdujących się w dowolnym ustalonym lub nieustalonym polu temperatury. Znamienne dla metody MAJZIELA jest to, że pozwala rozwiązać doświadczalnie problem termosprężysty za pomocą eksperymentowania nad nieogrzanym ciałem. Dzięki temu technika eksperymentowania bardzo się upraszcza i krąg zagadnień, które mogą być rozwiązane za pomocą przedłożonej metody, okazuje się bardzo szeroki. Włącza się do niego również problemy odnoszące się nie tylko do oddzielnych elementów konstrukcji, lecz do całej konstrukcji. Obok metody MAJZIELA w monografii [34] znajduje odbicie szereg metod rozwiązywania znamiennych dla teorii płyt, np. analogia płytowa i membranowa. Analogia płytowa pozostaje w ścisłym związku z metodą MAJZIELA i polega na podobieństwie problemu termosprężystego w sensie sformułowanych równań różniczkowych i warunków brzegowych z problemem poszukiwania powierzchni ugięcia dla płyty. Podobieństwo równań jest tak duże, że nie dziwimy się kilku niezależnym pracom na temat analogii płytowej, które ukazały się w tym czasie (por. praca P. DUBASA (1955), [41], i F. TROMMELA (1957), [42]). Ta sama analogia podyktowała W. NOWACKIEMU metodę rozwiązania problemu działania źródła ciepła w tarczach (1956), [43].

Problematyka tarcz i płyt znajdujących się w polu temperatury opracowywana była w latach 1950-1960 przez wielu innych autorów. Wymieńmy dla przykładu prace G. HORVAYA (1952 i 1954), [44], [45], dotyczące ogrzania pasma tarczowego, płyt perforowanych, w dziedzinie naprężeń termicznych nieustalonych prace B.A. BOLEYA i A.D. BARBERA (1957), [46], H. PARKUSA, [47], o naprężeniach cieplnych w centralnie ogrzanym dysku nieograniczonym. Niektóre prace odnoszące się do nieustalonych naprężeń termicznych, np. praca [47] i inne, np. prace dotyczące naprężeń termicznych w grubych płytach skończonych rozmiarów, umieszczone w monografii W. NOWACKIEGO, [34], E. MELANA i H. PARKUSA, [48], H. PARKUSA [49], podają przybliżone rozwiązania sformułowanych problemów termosprężystości. Np. przybliżenie w teorii grubych płyt polega na spełnieniu warunków brzegowych na denkach płyty w sposób ścisły, zaś na pobocznicy w sposób całkowy. Sposób ten jest znany od dawna i pochodzi od A. NÁDAIA z 1925 r., [50].

Z problemów dotyczących naprężeń termicznych w płytach i tarczach wymieńmy jeszcze płyty o brzegach nieswobodnych i dowolnych warunkach mieszanych. W tej dziedzinie rozwiązano szereg tarcz utwierdzonych na kawałku brzegu i na pozostałych swobodnych i poddanych bezźródłowemu polu temperatury (por. praca J. H. HUTH, [51]). Podstawowe znaczenie przy poszukiwaniu naprężeń cieplnych w tarczach o mieszanych warunkach brzegowych posiada metoda W. Nowackiego, [52], podana w r. 1955 i polegająca na sprowadzeniu problemu termosprężystości do rozwiązania równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju.

Innym obszernym rozdziałem teorii termosprężystości, który rozrósł się dzięki pracom autorów po drugiej wojnie światowej, jest rozdział o temperaturowych naprężeniach w ciałach obrotowych. Jakkolwiek problem walca ogrzanego jest tak starym problemem, jak stara jest teoria sprężystości, to jednak po roku 1950 ukazało się wiele nowych prac naświetlających problematykę sił wewnętrznych walca, wywołanych bądź nieustalonym polem temperatury, bądź nieciągłym ogrzaniem pobocznicy walca, bądź wreszcie termicznym uderzeniem na pobocznicę walca (por.: M. Sokołowski (1958), [53], J. Ignaczak (1958), [54], T. Mura (1956), [55], R. Trostel (1956), [56]).

Konieczność ulepszania konstrukcji lotniczych spowodowała poszukiwanie nowych rozwiązań powłok obrotowo-symetrycznych. Należy tu zaliczyć prace o charakterze inżynierskim, które za pomocą metod numerycznych podają dane liczbowe o rozkładzie naprężeń termicznych w skrzydle samolotu lub jego kadłubie lub prace o charakterze teoretycznym dotyczące rozkładów temperatury w dowolnych, cienkich powłokach obrotowo-symetrycznych. W r. 1957 ukazała się monografia B. E. Gatewooda, [57], z zastosowaniami do samolotów, pocisków rakietowych, turbin i nuklearnych reaktorów. Książka ta posiada przede wszystkim charakter praktyczny i podaje, jak rozwiązać wiele problemów projektowania konstrukcji łupinowych przy podwyższonych temperaturach.

Z problemów teoretycznych ustalony, osiowo-symetryczny problem termosprężystości w obszarze ograniczonym przez dwie współśrodkowe sfery został rozwiązany przez E. L. Mc Dowella i E. Sternberga w r. 1957, [58]. W tym samym czasie (1957) B. D. Sharma, [59], podał rozwiązanie dla naprężeń, wywołanych jądrem termosprężystego odkształcenia w nieskończonym ciele sprężystym przy obecności kulistego otworu i także w pełnej kuli sprężystej. Problem w pracy [59] został potraktowany ogólniej od problemu w pracy [58], gdyż dotyczy zarówno ciągłych jak i nieciągłych, ustalonych, osiowo-symetrycznych pól temperatur w obszarze grubej, zamkniętej powłoki kulistej. Z prac dotyczących osiowo-symetrycznego rozkładu naprężeń, wywołanych siłowym jądrem w ciele ograniczonym zewnętrznie przez kulisty otwór i w kuli sprężystej wymienimy jeszcze pracę D. Collinsa (1960), [60].

Interesujące z punktu widzenia praktycznego są przypadki naprężeń termicznych w grubych łupinach kulistych o profilu otwartym rozwiązane w r. 1960. Obok wymienionych prac istnieje cały szereg innych dotyczących naprężeń termicznych w powłokach cienkich, np. prace H. Parkusa (1950-1951), [61], [62] i [63], W. Nowackiego (1956), [64].

Nowym i nie rozwijanym dotąd działem termosprężystości, który pojawił się w latach 1950-tych, jest problem naprężeń termicznych w ciałach anizotropowych. Tak zwana metoda wyznaczników operatorowych dla operacji liniowych, różniczkowych dowolnego rzędu, pozwoliła zredukować problem skomplikowanych równań liniowych cząstkowych, rządzących anizotropią, do klasycznych równań typu quasi-biharmonicznych i do zastosowania funkcji przemieszczeń analogicznych do funkcji przemieszczeń GALERKINA, występującej w klasycznej teorii sprężystości. Z prac dotyczących anizotropii wymienimy pracę W.H.PELLA (1946), [65], W. NOWACKIEGO (1954), [66], dotyczącą ogólnych rozważań o naprężeniach termicznych w anizotropowych ciałach; prace Z. MOSSAKOWSKIEJ i W. NOWACKIEGO (1958), [67], J. NOWIŃSKIEGO (1955), [68], J. MOSSAKOWSKIEGO (1957), [69], B. SHARMA (1958), [70], J. NOWIŃSKIEGO, W.OLSZAKA i W.URBANOWSKIEGO (1956), [71]. Ta ostatnia praca dotyczy problemu termosprężystego dla ciał o ortotropii krzywoliniowej.

Zanim przejdziemy do opisywania nowych kierunków badań z termosprężystości w ostatnim dziesiątku lat, zatrzymamy się nieco nad problematyką tzw. dystorsji termicznych zarówno ustalonych jak i nieustalonych. Problematyka ta jest związana również z metodą rozwiązywania problemów uprzednio cytowanych, a więc z metodami całkowania klasycznych równań termosprężystości i obejmuje zarówno problemy elastokinetyki jak i elastostatyki przy obecności pól temperaturowych nie sprzężonych z polem deformacji termicznych.

2.1. Zagadnienia dystorsji termicznych jako problemy podstawowe przy rozwiązywaniu klasycznych zagadnień statycznych i dynamicznych termosprężystości. Rozważmy dowolne ciało sprężyste, izotropowe i jednorodne. Załóżmy, że poszukujemy naprężeń cieplnych w ciele, które poddane jest polu temperatury T. W najogólniejszym przypadku elastokinetyki należy rozwiązać równania ruchu LAMÉGO

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}-(3\lambda+2\mu)\alpha_t T_{,i} = \varrho \ddot{u}_i \qquad (i,\ k = 1,2,3) \tag{2.1}$$

w obszarze V zajmowanym przez ciało, przy danych warunkach brzegowych i początkowych. W równaniu (2.1) $u_i = u_i(x_k, t)$ oznacza wektor przemieszczenia w układzie kartezjańskim x_k, λ, μ stałe LAMÉGO, ϱ gęstość ciała oraz α_t współczynnik rozszerzalności termicznej. Ponadto zwykła konwencja tensorowa dla sumowania oraz przestrzennego i czasowego różniczkowania jest użyta w kartezjańskim układzie współrzędnych. Tensor odkształcenia ε_{ij}

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

jest związany z tensorem naprężenia σ_{ij} za pomocą relacji DUHAMELA-NEUMANNA

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}-(3\lambda+2\mu)\alpha_t T\delta_{ij}. \tag{2.2}$$

Jako typowe warunki brzegowe dla klasycznych problemów termosprężystości przyjmujemy swobodną od naprężeń powierzchnię ograniczającą ciało oraz jednorodne warunki początkowe dla przemieszczeń lub naprężeń

$$u_i(x_k, 0) = \dot{u}_i(x_k, 0) = 0, \tag{2.3}$$

przy czym $\sigma_{ij}n_j = 0$ na brzegu ciała, gdzie n_j oznacza normalną do powierzchni ograniczającej.

Obok tego sformułowania problemu termosprężystości w przemieszczeniach można przyjąć metody bezpośredniego określania naprężeń z naprężeniowych równań ruchu polegające na rozwiązaniu równania tensorowego

$$(2.4)\qquad \Box_2^2\sigma_{ij}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\sigma_{kk,ij}+\left(\frac{1}{c_2^2}-\frac{1}{c_1^2}\right)\frac{\lambda\delta_{ij}}{3\lambda+2\mu}\ddot{\sigma}_{kk}+$$

$$+2\mu a_t\left(T_{,ij}+\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}T_{,kk}\delta_{ij}\right)-\frac{5\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}a_t\ddot{T}\varrho\,\delta_{ij}=0$$

z następującymi warunkami brzegowymi i początkowymi:

$$(2.5)\qquad \sigma_{ij}n_j=0 \text{ na brzegu ciała oraz } \sigma_{ij}(x_k,0)=\dot{\sigma}_{ij}(x_k,0)=0.$$

We wzorze (2.4) c_1 i c_2 oznaczają kolejno prędkość podłużną i poprzeczną rozchodzenia się fali sprężystej wywołanej ciepłem, zaś $\Box_2^2$ oznacza operator d'Alemberta w odniesieniu do prędkości c_2.

Z równania tensorowego (2.4) można wydedukować interesujące równanie bifalowe, które muszą spełnić naprężenia cieplne w dowolnym ciele sprężystym:

$$(2.6)\qquad \Box_2^2\{\Box_1^2\sigma_{ij}-\vartheta_0[2\mu(T_{,ij}-T_{,kk}\delta_{ij})+\varrho\ddot{T}\delta_{ij}]\}=0,\qquad \vartheta_0=\frac{1+\nu}{1-\nu}a_t.$$

Tutaj ν jest współczynnikiem Poissona.

Równanie (2.6) pozwala na ogólną orientację przy poszukiwaniu termicznych fal naprężeniowych w ciele sprężystym, analogiczną do orientacji na funkcje biharmoniczne przy poszukiwaniu rozwiązań równań równowagi w przemieszczeniach, gdy sił masowych nie ma. Przypominamy, że w przypadku statycznym i przy braku sił masowych dowolne rozwiązanie w przemieszczeniach jest brane z klasy funkcji biharmonicznych.

Pole temperatury $T(x_k, t)$ występujące w równaniach (2.1), (2.2), (2.4) i (2.6) może być wytworzone w dowolny sposób na ogół zmienny w czasie. Zakładamy zatem, że temperatura może być ciągła w czasie lub przestrzeni, lub nieciągła, może spełniać równanie przewodnictwa ciepła w klasycznym sensie Fouriera lub go nie spełniać. Na przykład dopuszczamy temperaturę ciała obszarami stałą dla każdego czasu lub stałą tylko w pewnych przedziałach czasu. Jeżeli rozważany problem jest scharakteryzowany nieciągłym w przestrzeni i czasie polem temperatury, to nazwiemy go problemem dynamicznych dystorsji cieplnych odnoszących się do danego ciała. Dla zagadnień statycznych termosprężystości problemy dystorsyjne są określone przez rozwiązanie tzw. problemu ustalonego jądra termosprężystego odkształcenia. Jak już wspominaliśmy uprzednio, to ostatnie pojęcie wprowadził do literatury technicznej J. N. Goodier (1937), [9], oraz B. Sen (1951), [23]. Problem ustalonego jądra termosprężystego odkształcenia rozwiązany dla danego obszaru ciała V pozwala na rozwiązanie problemu ustalonych naprężeń cieplnych dla dowolnego pola temperatury. I tak niech ciało V będzie odniesione do kartezjańskiego układu współrzędnych (x_i) $(i = 1, 2, 3)$. Niech w punkcie wewnętrznym tego ciała (ξ_i) znajduje się jądro. Oznacza to, że rozkład temperatury w rozważanym ciele ma postać:

$$T^*(x_i, \xi_i) = \delta(x_i - \xi_i), \tag{2.7}$$

gdzie $\delta = \delta(x)$ jest funkcją DIRACA w układzie kartezjańskim.

Oznaczmy przez $[S^*(x_i, \xi_i)]$ rozwiązanie problemu określonego równaniami (2.1), (2.2), (2.3) lub (2.4) i (2.5), w których należy pominąć wyrazy inercyjne. Wtedy rozwiązanie problemu termosprężystości, gdy w danym ciele V panuje dowolna temperatura

$$T = T(x_i) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.8}$$

spełniająca żądane warunki wymiany ciepła na powierzchni ciała, jest splotem postaci:

$$[S(x_i)] = \int_V [S^*(x_i, \xi_i)]\, T(\xi_i)\, dV(\xi_i). \tag{2.9}$$

I tak dla przykładu zagadnienie B. SENA, [23], podane w r. 1951 i dotyczące naprężeń wywołanych przez jądro termosprężystego odkształcenia w półnieskończonym ciele, rozwiązuje dowolny ustalony problem termosprężystości dla półprzestrzeni. Zatem problem E. STERNBERGA i E.L. Mc DOWELLA, [24], rozwiązany w r. 1957 i podający stan naprężeń w półprzestrzeni dla niektórych pól temperatur spełniających równanie przewodnictwa ciepła, mieści się w zagadnieniu B. SENA, [23]. Analogiczny problem termosprężystości dla warstwy sprężystej nieograniczonej, rozwiązany przez I. N. SNEDDONA i LOCKETTA, [26], w r. 1959, jest zawarty w problemie jądra termosprężystego umieszczonego wewnątrz warstwy swobodnej, rozwiązanym przez W. NOWACKIEGO w jego monografii, [34]. We wspomnianej monografii [34] znajdziemy dużo miejsca poświęconego wyznaczaniu naprężeń wywołanych nieciągłymi polami temperatur. Autor już na początku książki formułuje równania termosprężystości przy uwzględnieniu pola tensorowego odkształceń początkowych, dystorsyjnych (szczególnym przypadkiem tego pola jest diagonalny tensor o składowych proporcjonalnych do funkcji temperatury), aby w dalszych rozdziałach rozwiązać ciekawe przypadki inkluzji prostopadłościennej lub walcowej w półprzestrzeni, [72]. Problemy naprężeń termicznych w ciałach z wkładkami (wtrąceniami), gdy w zwykłym jednorodnym ciele znajduje się wkładka z materiału mającego te same własności sprężyste co otaczające ciało, lecz z innym współczynnikiem rozszerzalności termicznej, były przedmiotem innych prac. W pracy MINDLINA i CHENGA (1950), [22], o której wspominaliśmy uprzednio, autorzy rozwiązali przypadek inkluzji kulistej znajdującej się w wewnętrznym sąsiedztwie swobodnej od naprężeń powierzchni brzegu półprzestrzeni. Inne rozwiązanie problemu wkładki we wnętrzu półprzestrzeni, gdy w obszarze półkulistej łupiny położonej w sąsiedztwie swobodnego brzegu panuje jednostkowa temperatura, zaś w uzupełnieniu półprzestrzeni temperatura równa się zeru, podane zostało w r. 1960.

Z płaskich zagadnień dystorsyjnych można wymienić rozwiązanie podstawowe, określające naprężenia wywołane jądrem w płaszczyźnie nieograniczonej (por. GOODIER (1937), [9], oraz prace W. NOWACKIEGO, [73], i PARII, [74], o naprężeniach cieplnych w nieskończonym pasmie tarczowym, wywołanych jądrem termosprężystego odkształcenia). Problem jądra statycznego w tarczy kołowej został rozwiązany znów przez B. SENA, [75], w r. 1950. Rozmaite szczególne przypadki nieciągłego ogrzania tarczy kołowej zostały przedyskutowane w późniejszych latach 1954-1955 przez M. HIEKEGO, [76] i [77], za pomocą całkowego przedstawienia funkcji HEAVISIDEA. Metoda HIEKEGO polega na wykonaniu formalnych operacji na całce konturowej występującej w twierdzeniu o retransformacji LAPLACE'A.

Ta krótka i niepełna charakterystyka rozwiązań problemów ustalonego jądra termosprężystego odkształcenia wskazuje, że w wielu pracach wcześniejszych dotyczących jądra rozwiązano problemy nie tylko z nieciągłymi polami temperatury, lecz z konkretnymi funkcjami temperatur spełniającymi równanie przewodnictwa ciepła. Jednak w wielu przypadkach bezpośrednie rozpatrywanie konkretnych pól temperaturowych prowadzi szybciej do efektywnych wyników niż wykonanie splotu przepisanego wzorem (2.9). Również w tych przypadkach sposób ogrzania ciała może posiadać bezpośrednie znaczenie praktyczne lub mieć wpływ decydujący na rozkład naprężeń. Np. z problemu B. SENA, [23], dotyczącego półprzestrzeni, nie widać od razu, że słuszne jest twierdzenie o płaskim charakterze pola naprężeń, $[\sigma_{i3}] = 0$, w trójwymiarowej półprzestrzeni sprężystej lub grubej nieograniczonej warstwie ogrzanych dowolnie na brzegu i nie zawierających źródeł ciepła w swoim wnętrzu. Twierdzenie to należy przypisać późniejszej pracy E. STERNBERGA i Mc DOWELLA, [24]. Podobnie z rozwiązania płaskiego problemu termosprężystości dla jądra położonego wewnątrz obszaru jednospójnego bezźródłowego i przy braku naprężeń na brzegu ciała nie wynika bezpośrednio twierdzenie MUSCHIELISZWILEGO o znikaniu tożsamościowym pola naprężeń w tym przypadku.

Rozważmy jeszcze zagadnienia związane z problematyką dynamicznych dystorsji cieplnych w klasycznej termosprężystości (por. W. PIECHOCKI i J. IGNACZAK (1960), [78]). Wprowadzimy analogicznie do przypadku statycznego nieustalone jądro termosprężystego odkształcenia. Przez pojęcie nieustalonego jądra w ciele o objętości V rozumiemy następujący rozkład temperatury:

$$T^*(x_i, \xi_i, t) = \delta(x_i - \xi_i)\,\delta(t), \tag{2.10}$$

gdzie t oznacza zmienną czasową.

Znajomość rozwiązania dynamicznego problemu dla jądra nieustalonego, które oznaczymy przez $[S^*(x_i, \xi_i, t)]$ [problem określony przez równania (2.1) (2.2), (2.3) lub (2.4) i (2.5)] pozwala na znalezienie rozwiązania dla dowolnego innego rozkładu temperatury $T = T(x_k, t)$, zależnego od czasu lub niezależnego, ze związku:

$$(2.11) \qquad [S(x_i, t)] = \int_0^t d\tau \int_V [S^*(x_i, \xi_i, t-\tau)] T(\xi_i; \tau) dV(\xi_i).$$

W cytowanej uprzednio pracy [78] autorzy rozwiązują problemy punktowo-symetryczne dla sfery sprężystej i ciała z otworem kulistym używając do rozważań powierzchniowego nieustalonego jądra. Są rozważane przypadki nieciągłych pól temperatur zarówno w przestrzeni jak i w czasie. Tą drogą znaleziono stan naprężeń cieplnych w ciele nieograniczonym, zawierającym gruby pierścień sprężysty o innym współczynniku rozszerzalności termicznej niż otaczający go ośrodek i ogrzanym na krótkim skończonym odcinku czasu. Jako przykład zastosowania równania (2.11) do klasycznych problemów dynamicznych termosprężystości autorzy pracy [78] uzyskali rozwiązanie problemu Nowackiego, [39], dotyczące rozchodzenia się naprężeń cieplnych, wywołanych nieustalonym źródłem ciepła. Za pomocą funkcji dynamicznych dystorsji cieplnych odnoszących się do otworu kulistego praca [78] podaje również jako przypadek szczególny rozwiązanie problemu termicznego uderzenia na powierzchnię otworu kulistego, rozwiązanego w pracy uprzednio cytowanej, [40]. Problematyka nieustalonego jądra dotyczy również obszernego kręgu zagadnień naprężeń termicznych wywołanych periodycznie w czasie zmieniającymi się polami temperatur. Należy wymienić tu quasi-ustalone problemy periodyczne zapoczątkowane jeszcze przez Goodiera (1937), [9] i problematykę wszelkich źródeł, dipoli periodycznych, rozwiniętą szeroko przez W. Nowackiego (por. cyt. uprzednio monografia H. Parkusa, [49]).

Metoda jądra termosprężystego odkształcenia jako metoda całkowania klasycznych równań termosprężystości pozostaje w ścisłym związku z innymi metodami całkowania, np. z uprzednio cytowaną metodą Majziela (1941), [16]. Jest ona jednak bliższa metodzie funkcji Greena, natomiast dość znacznie różni się od metody Majziela, gdyż jądro równania (2.11) nie odnosi się do ciała niepodgrzanego. Metoda jądra nieustalonego oczekuje na rozszerzenie jej na problemy dynamiczne sprzężone termosprężystości, które pojawiły się ostatnio w literaturze, zapoczątkowane pracami M. A. Biota (1956), [79] i M. Lessena (1956), [80].

2.2. Nowe kierunki badań w termosprężystości w ostatnim dziesiątku lat. Pojęcie ciała termosprężystego — zagadnienia sprzężone termosprężystości. Naprężenia termiczne w strukturach lepko-sprężystych. Jak zaznaczyliśmy w pierwszej części tego krótkiego rysu historycznego termosprężystości, już w roku 1837 przez Duhamela zostały podane podstawowe równania termosprężystości, postulujące sprzężenie pola tensorowego odkształceń i pola temperatury. Rok 1956 przyniósł prace M.A. Biota, [79], i Lessena, [80], które pobudziły do studium nad zjawiskami termosprężystymi na podstawie sprzężonych równań termosprężystości. W dotychczasowym sformułowaniu problemów termosprężystości zakładaliśmy prawdziwość klasycznego równania przewodnictwa ciepła, z którego wyznaczyliśmy pole temperatury T [por. równania (2.1), (2.2) (2.3) oraz (2.4) i (2.5)]. Lecz prawa termodynamiki wskazują, że zmianie odkształceń ciała towarzyszą zmiany temperatury i *vice versa*. Poprawne równanie ciepła będzie sprzężone z elastycznymi deformacjami i nie może być rozwiązane niezależnie, jak to było w klasycznej formie. Jeżeli traktować problem sprzężony w naprężeniach, to do naprężeniowego równania ruchu pola tensorowego σ_{ij} (2.4) należy dołączyć równanie przewodnictwa ciepła, zawierające pierwszy niezmiennik tensora naprężeń:

$$T_{,kk}-\left(\frac{1}{\varkappa}+3\alpha_t\eta\right)\dot{T}-\frac{\eta}{3\lambda+2\mu}\dot{\sigma}_{kk}=-\frac{Q}{\varkappa}. \tag{2.12}$$

W równaniu (2.12) $\varkappa$ określa przewodnictwo ciepła, a współczynnik η jest wielkością sprzęgającą równania (2.4) i (2.12), Q oznacza funkcję źródeł ciepła.

Problematyka dotycząca zagadnień sprzężonych odnosi się wyłącznie do zagadnień dynamicznych, rozchodzenia się fal w anizotropowych, termosprężystych ciałach, gdyż dla zagadnień statycznych wpływ sprzężenia odpada. Dla zagadnień quasi-statycznych uwzględnienie wzajemnego oddziaływania zmian temperatury i zmian objętościowych prowadzi do równania ciepła w swej strukturze podobnego do równania klasycznego Fouriera.

Z licznych prac dotyczących problemów sprzężonych termosprężystości wymienimy pracę Chadwicka i Sneddona (1958), [81], w której autorzy zanalizowali w sposób bardzo szczegółowy wpływ powiązanych ze sobą zmian objętościowych i cieplnych ciała na postać płaskich fal harmonicznych. Autorzy, [81], wykazali, że fale poprzeczne nie mają wpływu na efekty termiczne, lecz istnieją dwie odrębne fale podłużne, z których jedna w swojej naturze jest podobna do czysto podłużnej fali rozpraszanej i pochłanianej przez ośrodek, zaś druga jest podobna do fali czysto termicznej. Efekt termicznych własności ciała na prędkość rozchodzenia się fal powierzchniowych Rayleigha oraz podłużne fale sprężyste w walcach i rurach były przedmiotem prac Locketta (1958), [82], [83], i Deresiewicza, [84]. W r. 1957 J. H. Weiner uzupełnia teorię równań sprzężonych podając dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań dla ciała termosprężystego, [85]. Lata 1956-1960 przynoszą prace dotyczące rozchodzenia się sprzężonych elastycznych i termicznych deformacji w półprzestrzeni sprężystej. Wymienimy tu prace Easona i Sneddona, [86], Sneddona [87], Nowackiego, [88], i Parii, [89]. W pracy [86] autorzy posługując się poczwórną transformacją całkową Fouriera podali rozwiązania dla rozmaitych przypadków źródeł punktowych, liniowych i płaskich. W trójwymiarowym zagadnieniu, w części określającej tzw. problem residualny, autorzy rozwiązali ten problem jako zagadnienie niesprzężone. Pełne potraktowanie problemu półprzestrzeni znajdziemy w pracach Nowackiego, [88], i Parii, [89].

Wszystkie rozwiązane dotąd problemy sprzężone nie doczekały się pełnej dyskusji dynamicznych efektów, gdyż rozwiązano tylko harmoniczne fale i dotąd nie udało się odwrócić transformacji LAPLACE'A najprostszych rozwiązań. I. N. SNEDDON w pracy [87] traktującej o propagacji termicznych naprężeń w prętach metalowych odwrócił transformację LAPLACE'A w jednym, wygodnym punkcie rozważanej półprostej, mianowicie na brzegu półnieskończonego pręta. W pracy [89] G. PARIA podał osiowo-symetryczny rozkład temperatury dla małych wartości czasu. Również dotąd w teorii równań sprzężonych nie znaleziono analogonu formuły KIRCHHOFFA klasycznej dla rozchodzenia się fal w ośrodkach sprężystych.

Obok kierunku, który wniósł do literatury pojęcie ciała termosprężystego w latach 1950-tych, obserwujemy zainteresowanie się termicznymi naprężeniami w ciałach lepko-sprężystych. Pierwszymi, którzy odnowili tę problematykę, byli FREUDENTHAL (1954), [90], W. PRAGER (1956), [91], E. LEE (1955), [94]. I. BABUŠKA, [92], w roku 1956 i w rok później. E. STERNBERG, [93], opracowali zasadę odpowiedniości, pozwalającą na wykorzystanie rozwiązań dla ośrodka doskonale sprężystego do skonstruowania analogicznych rozwiązań dla ciała lepkosprężystego. Obok bezpośrednich metod całkowania równań termo-lepkosprężystości W. NOWACKI, [95], stosuje metodę MAJZIELA rozszerzoną na zagadnienia quasi-statyczne i dynamiczne. Problemu rozprzestrzeniania się naprężeń cieplnych w nieograniczonym ciele sprężystym, wykazującym własności lepkie, wywołanych chwilowym źródłem ciepła, nie udało się jednak autorowi, [95], doprowadzić do tak efektywnej postaci jak analogiczny problem dotyczący ciała doskonale sprężystego, [39]. Spośród innych prac dotyczących naprężeń w ciałach lepko-sprężystych wymieńmy pracę M. SOKOŁOWSKIEGO, [96], o naprężeniach cieplnych w kuli lepko-sprężystej oraz problem dynamiczny rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku lepkim przy obecności pustki kulistej, nagle ogrzanej, rozważany przez KATASONOWA (1957), [97]. Ten ostatni problem, w którym występuje punktowa symetria, jest ogólniejszy od problemu termicznego uderzenia na powierzchnię otworu kulistego w ciele sprężystym (por. E. STERNBERG i J. G. CHAKRAVORTY, [40]).

Zarówno teoria naprężeń cieplnych w ciałach lepko-sprężystych jak i teoria ciała termosprężystego uzupełniają teorię ciała doskonale sprężystego. Te kierunki i badania w termosprężystości, które w ostatnich latach nabrały świeżego rozmachu, rozwijają się pośród licznych prac eksperymentalnych, dotyczących pomiaru naprężeń cieplnych. Wymienić tu należy metody tensometryczne oraz elastooptyczne (por. np. z pracę G. GERARDA i C. GILBERTA z r. 1956, [98]). Obok tych prac wymieńmy nieliczne prace dotyczące skończonych odkształceń termicznych, np. B. SETHA z 1957r., [99], oraz prace poświęcone rozwiązaniom problemów termosprężystości, gdy stałe sprężyste i termiczne są funkcjami temperatury. J. NOWIŃSKI w pracy z 1959 r., [100], całkuje równanie pierwszego niezmiennika deformacji w założeniu materiału nieściśliwego i przy dowolnej, punktowo-symetrycznej zależności współczynnika rozszerzalności od temperatury.

Obszerną literaturę dotyczącą zagadnień niejednorodności w termosprężystości i innych prac o problematyce naprężeń termicznych znajdzie czytelnik w podstawowych monografiach E. MELANA i H. PARKUSA, [48], B. E. GATEWOODA, [57], H. PARKUSA, [49], wreszcie w monografii W. NOWACKIEGO, [34].

Dużą liczbę zagadnień z teorii termosprężystości znaleźć można w światowej literaturze technicznej, która stale jest uzupełniana nowymi pracami z dziedziny naprężeń cieplnych.

Literatura cytowana w tekście

[1] I. M. C. DUHAMEL, J. de l'Ecole Polytechn., 15, **1** (1837).

[2] I. M. C. DUHAMEL, *Mémoir le calcul des astions moléculaires développées par les changements de temperature dans les corps solides*, Mémoires présentés par divers savant, 5, 440 (1838).

[3] F. E. NEUMANN, *Vorlesung über die Theorie der Elasticität der Festen Körper*, Leipzig 1885.

[4] W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner-Verlag, Berlin 1910.

[5] H. JEFFREYS, Proc. Cambridge Phil. Soc., 26, 101 (1930).

[6] B. SAINT-VENANT, *Mémoires de l'académie des sciences des savants étrangers*, V. 14, 1855.

[7] G. LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1852.

[8] C. W. BORCHARDT, *Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme*, Mber. Akad. d. Wiss., 9, Berlin 1873.

[9] J. N. GOODIER, *On the Integration of the Thermo-Elastic Equations*, Phil. Mag., VII, 23, 1017 (1937).

[10] M. A. BIOT, *General Property of Two-Dimensional Thermal Stress Distribution*, Phil. Mag., 1935.

[11] N. MUSCHELISVILI, *Sur l'équilibre des corps élastiques soumis à l'action de la chaleur*, Bull. de l'Université, Tiflis, nr 3, 1923.

[12] Н. Н. ЛЕБЕДЕВ, *Тепловые напряжения в теории упругости*, П.М.М., 1, **2** (1934.)

[13] П. Ф. ПАПКОВИЧ, *Общий интеграл тепловых напряжений*, П.М.М., Новая серия, т. 1. (1937).

[14] S. TIMOSCHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 1951.

[15] N. O. MYKLESTAD, *Two Problems of Thermal Stress in the Infinte Solid*, J. Appl. Mech., 9, 136 (1942).

[16] В. М. МАИЗЕЛЬ, *Обобщение теоремы Бетти-Максвелла на случай термического напряженного состояния и некоторые его приложения*, Докл. АН СССР, 2, **30** (1941).

[17] J. LIGHTHILL and J. BRADSHAW, *Thermal Stress in Turbine Blades*, Phil. Mag. 40, 770 (1949).

[18] А. Д. КОВАЛЕНКО, *Круглые пластинки переменной толщины*, Москва 1959.

[19] S. S. MANSON, *Determination of Elastic Stresses in Gas Turbine Discs*, NACA-Rep. 871, 1947.

[20] J. ALECK, *Thermal Stresses in a Rectangular Plate Clamped Along an Edge*, J. Appl. Mech., 16, **118** (1949).

[21] R.H. HELDENFELS, *A Numerical Method for the Stress Analysis of Stiffened-Shell Structures under Non-uniform Temperature Distribution*, NACA Techn. Note 2241, 1950.

[22] R. D. MINDLIN and D. H. CHENG, *Thermoelastic Stress in the Semi-Infinite Solid*, J. Appl. Phys., **21** (1950), 931.

[23] B. SEN, *Note on the Stresses Produced by Nuclei of Thermoelastic Strain in a Semi-infinite Solid*, Quart. Appl. Math., **8**, (1951), 365.

[24] E. STERNBERG and E. L. Mc DOWELL, *On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space*, Quart. Appl. Math., **14**, (1957), 381.

[25] W. NOWACKI, A. *Three-Dimensional Thermoelastic Problem with Discontinuous Boundary Condition*, A.M.S. 9 (1957), 319.

[26] I. N. SNEDDON. and F. J. LOCKETT, *On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space and the Thick Plate*, Quart. J. Appl. Math. Brow. Univ., 1960.

[27] B. SHARMA, Thermal *Stresses in Infinite Elastic Discs, J. Appl. Mech.*, **23** (1956), 527.

[28] В. И. ДАНИЛОВСКАЯ, *Температурные напряжения в упругом полупространстве возникающие вследствие внезапного нагрева его границы*, П.М.М., **14** (1950).

[29] T. MURA, *Thermal Strains and Stresses in Transient State*, Proc. Sec. Japan Nat. Congr. Appl. Mechan., **9** (1952).

[30] E. STERNBERG and J. G. CHAKRAVORTY, *On Inertia Effects in a Transient Thermoelastic Problem*, J. Appl. Mech., 1959.

[31] J. IGNACZAK, *Thermal Displacements in an Elastic Semi-Space Due to Sudden Heating of the Boundary Plane*, Arch Mech. stos., **9**, (1957), 395.

[32] M. A. SADOWSKY, *Thermal Shock on a Circular Surface of Exposure of an Elastic Half--Space*, J. Appl. Mech., **22** (1955).

[33] J. L. BAILEY, *A Thermoelastic Problem in the Half-Space*, Dissertation, Michigan State University, 1958.

[34] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN Warszawa 1960.

[35] W. NOWACKI, *State of Stress in an Infinite and Semi-Infinite Elastic Space Due to an Instantaneous Source of Heat*, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. IV, **5** (1957), 77.

[36] W. NOWACKI, *The State of Stress in an Elastic Space Due to a Source of Heat Varying Harmonically in Function of Time*, Bull. Acad. Pol. Sci Cl. IV, **5** (1957), 145.

[37] W. NOWACKI, *A Quasi-Stationary Thermo-Elastic Problem in Three Dimensions*, Bull. Acad, Pol. Sci. Cl. IV, **5** (1957), 155.

[38] W. NOWACKI *The State of Stress in an Elastic Semi-Space Due to an Instantaneous Source of Heat*, Bull. Acad. Pol. Cl. IV, **5** (1957), 165.

[39] W. NOWACKI, *A Dynamical Problem of Thermoelasticity*, Arch. Mech.Stos. **9**, (1957), 325.

[40] E. STERNBERG and J. G. CHAKRAVORTY, *Thermal Shock in an Elastic Body with a Spherical Cavity*, Quart. Appl. Math., 2, **17** (1959).

[41] P. DUBAS, *Calcul numérique de plaques et des parois minces*, Zurich 1955.

[42] F. TROMMEL, *Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung Wärmespannungs-felder Österreich*, Ing-Archiv, 1957.

[43] W. NOWACKI, *State of Stress in a Thin Plate due to the Action of Sources of Heat*, Publ. Int. Assoc. Bridge Struct. Enging., **16** (1956), s. 373.

[44] G. HORVAY, *Thermal Stresses in Perforated Plates*, Proc. First U.S. Nat. Congr. Appl. Mech, 1952, p. 247.

[45] G. HORVAY, *Thermal Stresses in Rectangular Strips*, I, II. Proc. Second U.S. Nat. Congr. Appl. Mechan., 1954, p. 313.

[46] B. A. BOLEY and A. D. BARBER, *Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid Heating*, J. Appl. Mech., **24** (1957), 413.

[47] H. PARKUS, *Stress in a Centrally Heated Disc*, Proc. Second. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, p. 307.

[48] E. MELAN und H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer temperaturfelder*, Vien 1953.

[49] H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Vien 1959.

[50] A. NÁDAI, *Elastische Platten*, Berlin 1925.

[51] J. H. HUTH, *Thermal Stresses in a Partially Clamped Elastic Half-Plane*, J. Appl. Phys., **23** (1952).

[52] W. NOWACKI, *O pewnych zagadnieniach brzegowych teorii sprężystości*, Arch. Mech. stos. **7** (1955).

[53] M. SOKOŁOWSKI, *Axially-Symmetrical Problems of Thermo-Elasticity for a Cylinder of Unlimited Length*, Bull. Acad. Pol. Sci. s. Tech., **6** (1958), 207.

[54] J. IGNACZAK, *Thermal Stresses in a Long Cylinder Heated in a Discontinuous Manner over the Lateral Surface*, Arch. Mech. stos. (1958), 25.

[55] T. MURA, *Dynamical Thermal Stresses Due to Thermal Shocks*, Res. Rep. Fac. of Enging. Meiji. Univ., 8 (1956).

[56] R. TROSTEL, *Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern mit Kreisringquerschnitt*, Ing. Arch., 1, **24** (1956).

[57] B. E. GATEWOOD, *Thermal Stresses*, Mc Graw-Hill, 1957.

[58] E. L. Mc DOWELL and E. STERNBERG, *Axisymmetric Thermal Stresses in a Spherical Shell of Arbitrary Thickness*, J. Appl. Mech., 2, **4** (1957), 376.

[59] B. SHARMA, *Stresses Due to a Nucleus of Thermoelastic Strain* (1) *in an Infinite Elastic Solid with Spherical Cavity* and (2) in a Solid Elastic Sphere, ZAMP, **8** (1957), 142.

[60] D. COLLINS, *On the Stress Distribution Due to Force Nuclei in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow and in an Elastic Sphere*, ZAMP, **11** (1960).

[61] H. PARKUS, *Die Grundgleichungen der allgemeinen Zylinderschale*, Österr. Ing. Arch., **6** (1951), 30.

[62] H. PARKUS, *Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten*, Österr. Ing. Arch., **4** (1950), 160.

[63] H. PARKUS, *Wärmespannungen in Rotationsschalen bei drehsymmetrischer Temperaturverteilung*, Sitzungsber. Öster. Akad. Wiss. Abt. IIa, 1, 1951, 160.

[64] W. NOWACKI, *Wärmespannungen in Zylinderschalen* (in polish), Arch. Mech. stos., **8** (1956).

[65] W. H. PELL, *Thermal Deflection of Anisotropic Thin Plates*, Quart. Appl. Math., 4, **27** (1946).

[66] W. NOWACKI, *Wärmespannungen in anisotropen Körpern.*, Arch. Mech. stos., **6** (1954), 481.

[67] Z. MOSSAKOWSKA and W. NOWACKI, *Thermal Stresses in Transversaly Isotropic Bodies*, Arch. Mech. stos., **10** (1958), 569.

[68] J. NOWIŃSKI, *Wärmespannungen in einen dickwandigen Kugelbehälter aus transversal isotropem Werkstoff*, (in polnisch) Arch. Mech. stos., **7** (1955).

[69] J. MOSSAKOWSKI, *The State of Stress and Displacement in a Thin Anisotropic Plate Due to a Concentrated Source of Heat*, Arch. Mech. stos., **9** (1957).

[70] B. SHARMA, *Thermal Stresses in Transversaly Isotropic Semi-Infinite Solids*, J. Appl. Mech., **25** (1958).

[71] J. NOWIŃSKI, W. OLSZAK and W. URBANOWSKI, *On the Thermoelastic Problem in the Case of Bodies of any Type of Curvilinear Orthotropy*, Bull. Acad. Pol. Cl. 4, 1956, 97.

[72] J. IGNACZAK and W. NOWACKI, *Two Cases of Discontinuous Temperature Field in an Elastic Space and Semi-Space*, Bull. Acad. Pol s. Tech., **6** (1958), 309.

[73] W. NOWACKI, *The Stresses in a Thin Plate Due to a Nucleus of Thermoelastic Strain*, Arch. Mech. stos., **9** (1957), 89.

[74] G. PARIA, *Stresses in an Infinite Strip Due to a Nucleus of Thermoelastic Strain Inside it*, Bull. Calcutta. Math. Soc., 45, 83, 1953.

[75] B. SEN, *Stresses Due to Nuclei of Thermoelastic Strain in a Thin Circular Plate*, Bull. Calcutta Math. Soc., 42, **4** (1950), 253.

[76] M. HIEKE, *Über ein ebenes unstetiges Temperaturspannungsproblem*, ZAMM., **34** (1954), 121.

[77] M. HIEKE, *Über ein ebenes Distorsionproblem*, ZAMM, **35** (1955), 54.

[78] W. PIECHOCKI i J. IGNACZAK, *Pewne zagadnienia dynamicznych dystorsji cieplnych w termosprężystości*, Arch. Mech. stos., **12** (1960).

[79] M. A. BIOT, J. Appl. Phys., **27** (1956), 240.

[80] M. LESSEN, J. Mech. Phys. Solids, **5** (1957).

[81] P. CHADWICK and I. N. SNEDDON, *Plane Waves in an Elastic Solids Conducting Heat*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958).

[82] F. J. LOCKETT, *Effect of Thermal Properties of a Solid on the Velocity of Rayleigh Waves*, J. Mech. Phys. Solids, **7** (1958).

[83] F. J. LOCKETT, *Longitudinal Waves in Cylinders and Tubes-Including Thermoelastic Effects*, Proc. Edinburgh. Math. Soc, 3, **11** (1959).

[84] H. DERESIEWICZ, *Solution of the Equations of Thermoelasticity*, Proc. of the Third. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1958.

[85] J. H. WEINER, *A Uniqueness Theorem for the Coupled Thermoelastic Problem*, Quart. Appl. Math., **15** (1957), 102.

[86] G. EASON and I. N. SNEDDON, *The Dynamic Stresses Produced in Elastic Bodies by Uneven Heating*, Proc. Roy. Soc. S.A., 1959.

[87] I. N. SNEDDON, *The Propagation of Thermal Stresses in Thin Metalic Rods*, Proc. Roy. Soc. Edin. S.A., 1959.

[88] W. NOWACKI, *Some Dynamic Problems of Thermoelasticity* Arch. Mech. stos., **11**, 1959.

[89] G. PARIA, *Coupling of Elastic and Thermal Deformations*, Indian Inst. of Tech. Kharagpur, India, 1959.

[90] A. M. FREUDENTHAL, *Effect of Rheological Behavior on Thermal Stresses*, J. Appl. Phys., **25** (1954).

[91] W. PRAGER, *Thermal Stresses in Viscoelastic Structures*, ZAMP, **7** (1956).

[92] I. BABUSKA, MEJZLIK, *Vystavba moznostibetonaze wysokich pracownych vrsiev na priehrade Orlik s chladom na termickie vlasnosti danych złoziek betonu*, Praha-Bratisława 1956.

[93] E. STERNBERG, *On Transient Thermal Stress in Linear Viscoelasticity*, Techn. Rep. 3. Brown Univ., 1957.

[94] E. H. LEE, *Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies*, Quart. Appl. Math., 2, **13** (1955).

[95] В. НОВАЦКИ, *Некоторые диналические задачи термоупругости*, Прикл. Мат. Мех., **23** (1959), 456.

[96] M. SOKOŁOWSKI, *O naprężeniach cieplnych w kuli wykonanej z materiału lepko-sprężystego*, Księga pamiątkowa dla uczczenia zasług naukowych prof. Wierzbickiego, Warszawa 1959.

[97] А. М. КАТАСОНОВ, *Распространение сферических термо-вязко-упругих возмущений*, Вестн. Моск. Унив., 2, **12** (1957).

[98] G. GERARD and A. C. GILBERT, *Photo-Thermoelasticity an Exploratory Study*, New. York Univ. Res. Div. TN Rep. SM., 1956.

[99] B. R. SETH, *Finite Thermal Strain in Spheres and Circular Cylinders*, Arch. Mech. stos., **9** (1957).

[100] J. NOWIŃSKI, *Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature Dependent* Properties, ZAMP, **25** (1959), 565-575.

Резюме

РАЗВИТИЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ В 1945-1960 ГОДАХ

Работа является обзором некоторых теоретических исследований в области термоупругости, проводимых в 1945-1960 г.г. более крупными научно-исследовательскими центрами во всем мире.

Работа делится на несколько частей:

(1) Развитие термоупругости до 1945 г. (2) Развитие термоупругости от 1945 г. до настоящего времени. (2.1) Проблемы термических дисторсии как основные вопросы при решении классических, статических и динамических задач по термоупругости. (2.2) Новые направления исследований в термоупругости за последнее десятилетие. Понятие термоупругого тела: сопряженная задача по термоупругости. Термические напряжения в вязко-упругих структурах.

Краткий исторический очерк некоторых более важных теоретических работ по термоупругости указывает на факт широкого развития этой научной области после второй Мировой Войны.

Summary

THE DEVELOPMENT OF THE SCIENCE OF THERMOELASTICITY
IN THE YEARS 1945-1960

This is a brief survey of some theoretical investigations in thermo elasticity perfomed in the years 1945-1960 in more important scientific centres of the world.

The survey is subdivided into the following sections: (1) The development of the science of thermoelasticity up to 1945. (2) The development of the science of thermoelasticity since 1945 up to the present. (2.1) The problem of thermal distortions as a basic problem for the solution of classical static and dynamic problems of thermoelasticity. (2.2) The new investigation trends in the last decade. The notion of thermoelastic solid—coupled problems of thermoelasticity. Thermal stresses in viscoelastic structures.

A brief description of some more important theoretical papers on thermoelastic problems indicates the high degree to which this domain of science developed after the Second World war.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1960