

ROMAN SOLECKI

ROZWIĄZANIE OGÓLNE PŁYTY
O KSZTAŁCIE TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLVI

TOM VIII . ZESZYT 2 . ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	295
2. Transformacja właściwa	295
3. Rozwiązanie ogólne płyty o kształcie trójkąta prostokątnego	296
4. Płyta o kształcie prostokątnego trójkąta równoramiennego	299

1. Wstęp

W pracy niniejszej, będącej kontynuacją i uogólnieniem pracy [1], zajmiemy się wyznaczeniem rozwiązania ogólnego płyty o kształcie trójkąta prostokątnego za pomocą metody transformacji właściwej.

Rozwiązanie to otrzymamy przyjmując za jądro transformacji funkcję właściwą płyty na obwodzie swobodnie podpartej. Ponieważ funkcja ta nie jest na ogół znana, przeto uzyskane rozwiązanie będzie miało w zasadzie charakter teoretyczny. Jedynie w przypadkach szczególnych trójkąta $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ oraz trójkąta $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ znane są funkcje właściwe, można zatem z rozwiązania teoretycznego uzyskać wyniki o znaczeniu praktycznym. Pierwszy z tych przypadków rozważany już był w pracy [1], ograniczymy się więc do rozpatrzenia przypadku drugiego, dla którego znane są niektóre rozwiązania szczególnie uzyskane przez Z. KĄCZKOWSKIEGO w pracy [2].

2. Transformacja właściwa

2.1. Definicja. Transformację właściwą zdefiniujemy w sposób następujący:

$$(2.1) \quad T_\Phi\{f(x, y)\} = f_\Phi(m, n) = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{y}{a})} f(x, y)\Phi(x, y) dx dy,$$

gdzie $\Phi(x, y)$ jest funkcją właściwą, odpowiadającą problemowi brzegowemu (rys. 1):

$$(2.2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) - k_{mn}^4 \Phi(x, y) = 0$$

oraz na obwodzie

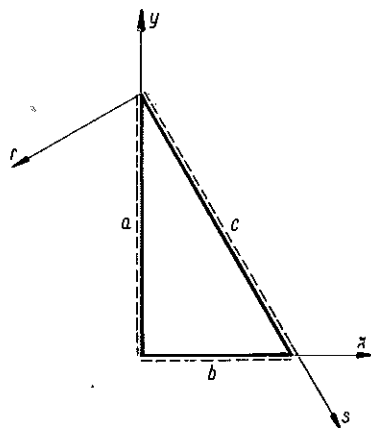
$$(2.2.2) \quad \Phi(x, y) = \nabla^2 \Phi(x, y) = 0,$$

gdzie

$$\Phi(x, y) \equiv \Phi_{mn}(x, y), \quad k_{mn} \equiv k(m, n).$$

Funkcja $\Phi(x, y)$ spełnia prócz warunków (2.2.2) również następujące warunki:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(x, y) = \Phi_{yy}(x, y) = 0, & \quad \text{gdy } x = 0 \text{ lub } y = 0; \\ \Phi_x(x, y) = 0, & \quad \text{gdy } y = 0; \quad \Phi_y(x, y) = 0, \quad \text{gdy } x = 0. \end{aligned}$$



Rys. 1

Transformacja odwrotna określona jest w sposób następujący:

$$(2.4) \quad f(x, y) = T_{\Phi}^{-1}\{f_{\Phi}(m, n)\} = \sum_{m, n} \frac{f_{\Phi}(m, n)}{\|\Phi_{mn}\|} \Phi_{mn}(x, y),$$

gdzie

$$(2.5) \quad \|\Phi_{mn}\| = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{y}{a})} [\Phi_{mn}(x, y)]^2 dx dy.$$

2.2. Transformaty operatorów $\nabla^2 \nabla^2$ i ∇^2 . Jeśli obliczymy transformaty pochodnych, a następnie dokonamy przekształceń podanych w pracy [1], wówczas otrzymamy

$$(2.6) \quad T_{\Phi}\{\nabla^2 \nabla^2 w(x, y)\} = k_{mn}^2 w_{\Phi} + \int_0^a w(0, y)[\nabla^2 \Phi_x(0, y) + \Phi_{xyy}(0, y)] dy + \\ + \int_0^b w(x, 0)[\nabla^2 \Phi_y(x, 0) + \Phi_{xxy}(x, 0)] dx + \int_0^c w(0, s)[\nabla^2 \Phi_r(0, s) + \Phi_{ssr}(0, s)] ds + \\ + \int_0^a w_{xx}(0, y) \Phi_x(0, y) dy + \int_0^b w_{yy}(x, 0) \Phi_y(x, 0) dx + \int_0^c w_{rr}(0, s) \Phi_r(0, s) ds + \\ + 2w(0, 0) \Phi_{xy}(0, 0) + w(0, a)[\Phi_{rs}(0, a) - \Phi_{xy}(0, a)] - \\ - w(b, 0)[\Phi_{rs}(b, 0) + \Phi_{xy}(b, 0)] + w_x(b, 0) \Phi_y(b, 0) + \\ + w_y(0, a) \Phi_x(0, a) + w_s(b, 0) \Phi_r(b, 0) - w_s(0, a) \Phi_r(0, a)$$

oraz

$$(2.7) \quad T_{\Phi}\{\nabla^2 w(x, y)\} = -k_{mn}^2 w_{\Phi} + \int_0^a w(0, y) \Phi_x(0, y) dy + \\ + \int_0^b w(x, 0) \Phi_y(x, 0) dx + \int_0^c w(0, s) \Phi_r(0, s) ds.$$

Ostatnie cztery wyrazy w wyrażeniu (2.6) są jednakże równe zeru. Wynika to z łatwego do wykazania faktu, że

$$\Phi_y(b, 0) = \Phi_x(0, a) = \Phi_r(b, 0) = \Phi_r(0, a) = 0.$$

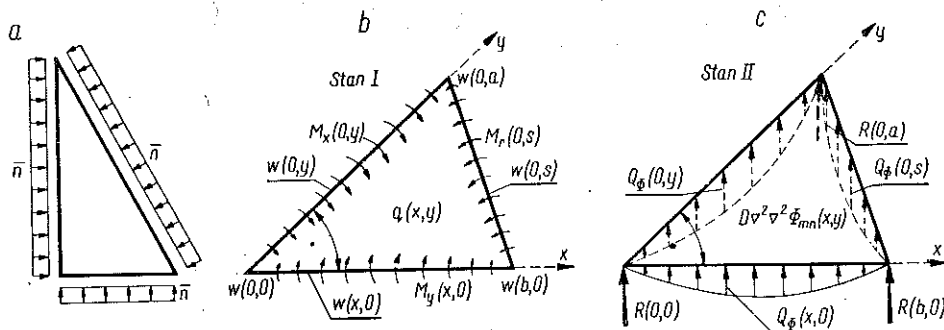
3. Rozwiązanie ogólne płyty o kształcie trójkąta prostokątnego

Niech płyta trójkątna spoczywa na podłożu sprężystym i niech będzie obciążona siłami normalnymi do jej powierzchni oraz również obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym wzdłuż obwodu i działającym w jej płaszczyźnie (rys. 2).

Równanie amplitud drgań ustalonych rozważanej płyty ma postać:

$$(3.1) \quad D\nabla^2\nabla^2 w(x, y) + \bar{n}\nabla^2 w(x, y) + \left(K - \frac{\gamma h}{g}\omega^2\right)w(x, y) = q(x, y).$$

Równanie to przekształćmy na podstawie zdefiniowanej w p. 2 transformacji właściwej i znajdziemy następnie funkcję niewiadomą według wzoru (2.4) na



Rys. 2

transformację odwrotną. Po przekształceniach otrzymamy następujące rozwiązanie ogólne:

$$(3.2) \quad w(x, y) = \sum_{m, n} \frac{1}{\|\Phi_{mn}\| D_{mn}} \left\{ q_0 - \int_0^a w(0, y) \{ D[\nabla^2 \Phi_x(0, y) + \Phi_{xyy}(0, y)] + \right. \\ \left. + \bar{n}\Phi_x(0, y) \} dy - \int_0^b w(x, 0) \{ D[\nabla^2 \Phi_y(x, 0) + \Phi_{xyx}(x, 0)] + \bar{n}\Phi_y(x, 0) \} dx - \right. \\ \left. - \int_0^c w(0, s) \{ D[\nabla^2 \Phi_r(0, s) + \Phi_{ssr}(0, s)] + \bar{n}\Phi_r(0, s) \} ds - D \int_0^a w_{xx}(0, y) \Phi_x(0, y) dy - \right. \\ \left. - D \int_0^b w_{yy}(x, 0) \Phi_y(x, 0) dx - D \int_0^c w_{rr}(0, s) \Phi_r(0, s) ds - D[2w(0, 0)\Phi_{xy}(0, 0) + \right. \\ \left. + w(0, a)[\Phi_{rs}(0, a) - \Phi_{xy}(0, a)] - w(b, 0)[\Phi_{rs}(b, 0) + \Phi_{xy}(b, 0)] \right\} \Phi_{mn}(x, y),$$

gdzie

$$(3.3) \quad D_{mn} = Dk_{mn}^4 - \bar{n}k_{mn}^2 + K - \frac{\gamma h}{g}\omega^2.$$

Równanie (3.2) można doprowadzić do innej postaci dającej się zinterpretować statycznie. Zauważmy, że np. ze wzoru określającego moment zginający

$$M_x(0, y) = -D[w_{xx}(0, y) + \nu w_{yy}(0, y)]$$

wynika (po scałkowaniu przez części i uwzględnieniu, że nachylenie powierzchni $\Phi(x, y)$ jest w każdym z naroży równe zero):

$$(3.4) \quad -D \int_0^a w_{xx}(0, y) \Phi_x(0, y) dy = \int_0^a M_x(0, y) \Phi_x(0, y) dy + \nu D \int_0^a w(0, y) \times \\ \times \Phi_{xyy}(0, y) dy + \nu D[w(0, 0)\Phi_{xy}(0, 0) - w(0, a)\Phi_{xy}(0, a)].$$

Jeśli podstawimy zależność (3.4) i podobne do (3.2), wówczas otrzymamy funkcję

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad w(x, y) = & \sum_{m, n} \frac{1}{\|\Phi_{mn}\| D_{mn}} \left\{ q_\phi - \int_0^a w(0, y) \{ D[\Phi_{xxx}(0, y) + (2-\nu) \times \right. \\
 & \times \Phi_{xyy}(0, y)] + \bar{n}\Phi_x(0, y) \} dy - \int_0^b w(x, 0) \{ D[\Phi_{yyy}(x, 0) + (2-\nu)\Phi_{xyy}(x, 0)] + \\
 & + \bar{n}\Phi_y(x, 0) \} dx - \int_0^c w(0, s) \{ D[\Phi_{rrr}(0, s) + (2-\nu)\Phi_{rss}(0, s)] + \\
 & + \bar{n}\Phi_r(0, s) \} ds + \int_0^a M_x(0, y)\Phi_x(0, y) dy + \int_0^b M_y(x, 0)\Phi_y(x, 0) dx + \\
 & + \int_0^c M_r(0, s)\Phi_r(0, s) ds - D(1-\nu) \{ 2w(0, 0)\Phi_{xy}(0, 0) + w(0, a)[\Phi_{rs}(0, a) - \\
 & - \Phi_{zy}(0, a)] - w(b, 0)[\Phi_{rs}(b, 0) + \Phi_{zy}(b, 0)] \} \Phi_{mn}(x, y).
 \end{aligned}$$

Otrzymaną funkcję (3.5) można — w przypadku statycznym — uzyskać również z twierdzenia o wzajemności prac (BETTIEGO).

Rozpatrzmy dwa stany badanej płyty wzdłuż obwodu swobodnie podpartej:

(a) Stan rzeczywisty I (rys. 2b). Na płytę działa obciążenie $q(x, y)$. Prócz tego jej krawędzie poddane są działaniu rozłożonych w sposób ciągły momentów $M_x(0, y)$, $M_y(x, 0)$ oraz $M_r(0, s)$. Krawędzie i naroża doznają ponadto przemieszczeń pionowych $w(0, y)$, $w(x, 0)$, $w(0, s)$, $w(0, 0)$, $w(0, a)$, oraz $w(b, 0)$. Powyższe obciążenie spowoduje ugięcie $w(x, y)$ dowolnego punktu płyty.

(b) Stan wirtualny II (rys. 2c). Na płytę działa obciążenie $D\nabla^2 \nabla^2 \Phi_{mn}(x, y)$. Pod wpływem tego obciążenia ugięcie dowolnego punktu płyty wyniesie $\Phi_{mn}(x, y)$. Stosując twierdzenie BETTIEGO otrzymamy równanie

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad \int_0^a M_x(0, y)\Phi_x(0, y) dy + \dots + \int_A \int q(x, y)\Phi_{mn}(x, y) dx dy = \\
 = - \int_0^a w(0, y) Q_\phi(0, y) dy - \dots - R(0, 0)w(0, 0) - \dots + \\
 + \int_A \int D\nabla^2 \nabla^2 \Phi_{mn}(x, y) w(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

We wzorze tym $Q_\phi(0, y)$ jest reakcją rozłożoną wzdłuż krawędzi $(0, y)$, a więc

$$Q_\phi(0, y) = -D[\Phi_{xxx}(0, y) + (2-\nu)\Phi_{xyy}(0, y)],$$

zaś $R(0, 0)$ oznacza reakcję skupioną w narożu $(0, 0)$:

$$R(0, 0) = -2(1-\nu)D\Phi_{xy}(0, 0).$$

Pamiętając o tym, że (por. 2.2.1)

$$\iint_{\Delta} D\nabla^2 \nabla^2 \Phi_{mn}(x, y) w(x, y) dx dy = Dk_{mn}^A \iint_{\Delta} \Phi_{mn}(x, y) w(x, y) dx dy = D_{mn} w_{\phi}$$

i stosując transformację odwrotną otrzymamy funkcję (w przypadku statycznym i przy założeniu $\bar{n} = K = 0$) identyczną z funkcją (3.5).

4. Płyta o kształcie prostokątnego trójkąta równoramiennego

Wykorzystamy rozwiązanie (3.2) dla zbadania płyty pokazanej na rys. 3. Z. KĄCZKOWSKI, jak już wspomnieliśmy, rozważał omawianą płytę w pracy [2] uzyskując za pomocą opracowanej przez siebie metody rozwiązania dla przypadków podparcia zestawionych na rys. 4.

Ustalmy najpierw postać funkcji właściwej.

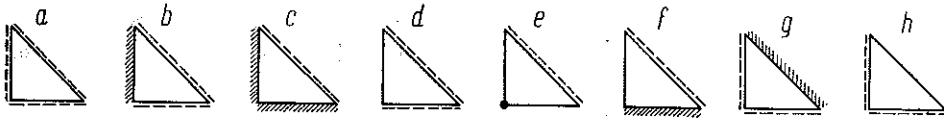
Ze wzoru (2.5) pracy [2] (str. 14) wynika

$$(4.1) \quad \Phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} - (-1)^{m+n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}$$

$$(m, n = 1, 2, \dots; m > n^1).$$

Jeśli podstawimy

$$(4.2) \quad x = \frac{a}{c}(s-r), \quad y = \frac{a}{c}(c-s-r),$$



Rys. 4

to otrzymamy

$$(4.3) \quad \Phi_{mn}(r, s) = \sin \frac{m\pi}{c}(s-r) \sin \frac{n\pi}{c}(c-s-r) - (-1)^{m+n} \sin \frac{n\pi}{c}(s-r) \sin \frac{m\pi}{c}(c-s-r),$$

gdzie $c = a\sqrt{2}$.

¹ Zastrzeżenie to jest istotne, bowiem eliminuje funkcje identyczne lub różniące się co najwyżej znakiem.

Z kolei obliczamy

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \Phi_{rs}(0, a) = \Phi_{xy}(0, a) = \Phi_{rs}(a, 0) = \Phi_{xy}(a, 0) = 0, \\
 & \Phi_{xy}(0, 0) = \frac{\pi^2}{a^2} mn[1 - (-1)^{m+n}], \\
 & \Phi_x(0, y) = \frac{\pi}{a} \left[m \sin \frac{n\pi y}{a} - (-1)^{m+n} n \sin \frac{m\pi y}{a} \right], \\
 & \Phi_y(x, 0) = \frac{\pi}{a} \left[n \sin \frac{m\pi x}{a} - (-1)^{m+n} m \sin \frac{n\pi x}{a} \right], \\
 & \Phi_r(0, s) = (-1)^n \frac{\pi}{c} \left[(m-n) \sin \frac{(m+n)\pi s}{c} - (m+n) \sin \frac{(m-n)\pi s}{c} \right], \\
 & \nabla^2 \Phi_x(0, y) + \Phi_{xyy}(0, y) = -\frac{\pi^3}{a^3} \left[m(m^2 + 2n^2) \sin \frac{n\pi y}{a} - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - (-1)^{m+n} n(2m^2 + n^2) \sin \frac{m\pi y}{a} \right], \\
 & \nabla^2 \Phi_y(x, 0) + \Phi_{xxy}(x, 0) = -\frac{\pi^3}{a^3} \left[n(2m^2 + n^2) \sin \frac{m\pi x}{a} - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - (-1)^{m+n} m(m^2 + 2n^2) \sin \frac{n\pi x}{a} \right], \\
 & \nabla^2 \Phi_r(0, s) + \Phi_{ssr}(0, s) = -\frac{\pi^3}{c^3} (-1)^n \left[(m-n)(3m^2 + 2mn + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 3n^2) \sin \frac{(m+n)\pi s}{c} - (m+n)(3m^2 - 2mn + 3n^2) \sin \frac{(m-n)\pi s}{c} \right], \\
 & \|\Phi_{mn}\| = \frac{a^2}{4}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Ponadto mamy (por. [2] str. 16 wzór (3.3.1))

$$D_{mn} = D \frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + n^2)^2 - \bar{n} \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + n^2) + K - \frac{\gamma \hbar}{g} \omega^2
 \tag{4.5.1}$$

albó

$$D_{mn} = \frac{D}{a^4} [(m\pi)^4 + 2\gamma_n (m\pi)^2 + \delta_n^2] = \frac{D}{a^4} \Delta_{mn}
 \tag{4.5.2}$$

oraz

$$\bar{D}_{mn} = \frac{D}{c^4} [(m\pi)^4 + 2\bar{\gamma}_n (m\pi)^2 + \bar{\delta}_n^2] = \frac{D}{c^4} \bar{\Delta}_{mn},
 \tag{4.5.3}$$

gdzie

$$(4.6.1) \quad 2\gamma_n = 2(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D}, \quad \delta_n^2 = (n\pi)^4 - \frac{\bar{n}a^2}{D}(n\pi)^2 + \frac{K - \frac{\gamma h}{g}\omega^2}{D} a^4$$

oraz

$$(4.6.2) \quad 2\bar{\gamma}_n = 2(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{D}, \quad \bar{\delta}_n^2 = (n\pi)^4 - \frac{\bar{n}c^2}{D}(n\pi)^2 + \frac{K - \frac{\gamma h}{g}\omega^2}{D} a^4.$$

Ze wzoru (3.2) wynika zatem następujące rozwiązanie ogólne płyty o kształcie prostokątnego trójkąta równoramiennego:

$$(4.7) \quad w(x, y) = \frac{4a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m>n}}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ q_{\phi} - \int_0^a w(0, y) \{ D[\nabla^2 \Phi_x(0, y) + \Phi_{xyy}(0, y)] + \right. \\ \left. + \bar{n}\Phi_x(0, y) \} dy - \int_0^a w(x, 0) \{ D[\nabla^2 \Phi_y(x, 0) + \Phi_{xxy}(x, 0)] + \bar{n}\Phi_y(x, 0) \} dx - \right. \\ \left. - \int_0^c w(0, s) \{ D[\nabla^2 \Phi_r(0, s) + \Phi_{ssr}(0, s)] + \bar{n}\Phi_r(0, s) \} ds - D \int_0^a w_{xx}(0, y) \Phi_x(0, y) dy - \right. \\ \left. - D \int_0^a w_{yy}(x, 0) \Phi_y(x, 0) dx - D \int_0^c w_{rr}(0, s) \Phi_r(0, s) ds - \right. \\ \left. - 2Dw(0, 0)\Phi_{xy}(0, 0) \right\} \left[\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} - (-1)^{m+n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \right].$$

Oznaczmy je w skrócie w sposób następujący:

$$(4.8.1) \quad w(x, y) = \frac{4a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m>n}}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} F(m, n) \left[\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \right]$$

lub

$$w(x, y) = \frac{4a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n>m}}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{nm}} F(n, m) \left[\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} - (-1)^{m+n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \right].$$

Ponieważ

$$\Delta_{nm} = \Delta_{mn}, \quad F(n, m) = -(-1)^{m+n}F(m, n), \quad \Phi_{nm} = -(-1)^{m+n}\Phi_{mn},$$

przeto ostatnią równość możemy przedstawić w postaci

$$(4.8.2) \quad w(x, y) = \frac{4a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n>m}}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} F(m, n) \left[\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \right].$$

Dodajemy z kolei (4.8.1) do (4.8.2) i dzieląc sumę przez 2 otrzymujemy

$$w(x, y) = \frac{2a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} F(m, n) \left[\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \right] = \frac{2a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} F(m, n) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} - \\ - \frac{2a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\Delta_{mn}} F(m, n) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a},$$

skąd po prostych przekształceniach

$$(4.9) \quad w(x, y) = \frac{4a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} F(m, n) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Założmy warunki brzegowe w postaci następującej:

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} -Dw_{xx}(0, y) = \sum_k A_k \sin \frac{k\pi y}{a}, \quad w(0, y) = \sum_k D_k \sin \frac{k\pi y}{a}, \\ -Dw_{yy}(x, 0) = \sum_k B_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad w(x, 0) = \sum_k E_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \\ -Dw_{rr}(0, s) = \sum_k C_k \sin \frac{k\pi s}{c}, \quad w(0, s) = \sum_k F_k \sin \frac{k\pi s}{c}. \end{array} \right.$$

Jeśli podstawimy (4.10) do (4.9) i uwzględnimy (4.4), wówczas otrzymamy równanie powierzchni odkształconej rozważanej płyty

$$(4.11) \quad w(x, y) = \frac{2a^2\pi}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{2}{\pi} q_{\phi} + [mA_n - (-1)^{m+n}nA_m] + \right. \\ \left. + [nB_m - (-1)^{m+n}mB_n] + (-1)^n [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] + \right. \\ \left. + \frac{D\pi^2}{a^2} \left[m \left(m^2 + 2n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) D_n - (-1)^{m+n}n \left(2m^2 + n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) D_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{D\pi^2}{a^2} \left[n \left(2m^2 + n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) E_m - (-1)^{m+n}m \left(m^2 + 2n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) E_n \right] + \right. \\ \left. + \frac{D\pi^2}{c^2} (-1)^n \left[(m-n) \left(3m^2 + 2mn + 3n^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right) F_{m+n} - (m+n) \left(3m^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2mn + 3n^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right) F_{m-n} \right] - \frac{4D}{\pi} \frac{\pi^2}{a^2} mn [1 - (-1)^{m+n}] w(0, 0) \right\} \times \\ \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Ustalimy wreszcie równanie powierzchni odkształconej płyty, której krawędzie i naroża poddane są drganiom harmonicznym o częstotliwości ω . Załóżmy ponownie

$$(4.12.1) \left\{ \begin{array}{l} w(0, y) = \sum_k D_k \sin \frac{k\pi y}{a}, \\ w(0, s) = \sum_k F_k \sin \frac{k\pi s}{c}, \quad w(x, 0) = \sum_k E_k \sin \frac{k\pi x}{a}. \end{array} \right.$$

Z warunków, że momenty zginające wzdłuż każdej z krawędzi równe są zeru znajdujemy (por. [3] str. 750 wzór (3.13))

$$(4.12.2) \left\{ \begin{array}{l} w_{xx}(0, y) = -\nu w_{yy}(0, y) = -\nu \sum_k \left\{ -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 D_k + \frac{2}{a} \frac{k\pi}{a} [w(0, 0) - (-1)^k w(0, a)] \right\} \sin \frac{k\pi y}{a}, \\ w_{yy}(x, 0) = -\nu w_{xx}(x, 0) = -\nu \sum_k \left\{ -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 E_k + \frac{2}{a} \frac{k\pi}{a} [w(0, 0) - (-1)^k w(a, 0)] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a}, \\ w_{rs}(0, s) = -\nu w_{ss}(0, s) = -\nu \sum_k \left\{ -\left(\frac{k\pi}{c}\right)^2 F_k + \frac{2}{c} \frac{k\pi}{c} [w(0, a) - (-1)^k w(a, 0)] \right\} \sin \frac{k\pi s}{c}. \end{array} \right.$$

Porównując (4.12.2) z (4.10) wyznaczamy następujące związki:

$$(4.13) \left\{ \begin{array}{l} A_k = -\nu D \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 D_k + \nu D \frac{2}{a} \frac{k\pi}{a} [w(0, 0) - (-1)^k w(0, a)], \\ B_k = -\nu D \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 E_k + \nu D \frac{2}{a} \frac{k\pi}{a} [w(0, 0) - (-1)^k w(a, 0)], \\ C_k = -\nu D \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2 F_k + \nu D \frac{2}{c} \frac{k\pi}{c} [w(0, a) - (-1)^k w(a, 0)]. \end{array} \right.$$

Po podstawieniu (4.13) do (4.11) otrzymamy poszukiwane równanie

$$(4.14) \quad w(x, y) = 2\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{mn}} \left\{ \frac{2a^2}{D\pi^3} q\varphi + mD_n \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] - (-1)^{m+n} nD_m \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] + nE_m \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^{m+n}mE_n \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] + \frac{1}{2} (-1)^n (m-n) F_{m+n} \times \\
& \times \left[2(m^2+n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] - \frac{1}{2} (-1)^n (m+n) F_{m-n} \times \\
& \times \left[2(m^2+n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] - \frac{4mn}{\pi} (1-\nu) [1 - (-1)^{m+n}] \times \\
& \times w(0, 0) \left. \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}.
\end{aligned}$$

Zapiszmy równanie (4.11) w skrócie w sposób następujący:

$$(4.15) \quad w(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{K(m, n)}{\Delta(m, n)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

zaś w układzie współrzędnych r, s :

$$w(r, s) = \sum_m \sum_n \frac{K(m, n)}{\Delta(m, n)} \sin \frac{m\pi}{c} (s-r) \sin \frac{n\pi}{c} (c-s-r).$$

Po prostych przekształceniach znajdziemy

$$\begin{aligned}
(4.16) \quad w(r, s) = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n K(m, n)}{\Delta(m, n)} \left[\cos \frac{(m+n)\pi s}{c} \cos \frac{(m-n)\pi r}{c} - \right. \\
\left. - \cos \frac{(m-n)\pi s}{c} \cos \frac{(m+n)\pi r}{c} + \sin \frac{(m+n)\pi s}{c} \sin \frac{(m-n)\pi r}{c} - \right. \\
\left. - \sin \frac{(m-n)\pi s}{c} \sin \frac{(m+n)\pi r}{c} \right].
\end{aligned}$$

Wprowadźmy nowe wskaźniki sumowania

$$m-n = p, \quad m+n = q, \quad \text{czyli } m = \frac{q+p}{2}, \quad n = \frac{q-p}{2}.$$

Równanie (4.16) przyjmie teraz postać:

$$\begin{aligned}
(4.17) \quad w(r, s) = 2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\Delta(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \left(\cos \frac{q\pi s}{c} \cos \frac{p\pi r}{c} + \right. \\
\left. + \sin \frac{q\pi s}{c} \sin \frac{p\pi r}{c} - \right. \\
\left. - 2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\Delta(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \left(\cos \frac{p\pi s}{c} \cos \frac{q\pi r}{c} + \right. \right. \\
\left. \left. + \sin \frac{p\pi s}{c} \sin \frac{q\pi r}{c} \right),
\end{aligned}$$

gdzie $p+q$ jest liczbą parzystą.

Uwzględniliśmy tożsamość

$$\Delta\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right) \equiv \frac{1}{4} \bar{\Delta}(q, p).$$

Zajmiemy się przekształceniem pierwszego z szeregów (4.17):

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{-1} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty}.$$

Lecz

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \left(\cos \frac{q\pi s}{c} \cos \frac{p\pi r}{c} + \sin \frac{q\pi s}{c} \sin \frac{p\pi r}{c} \right) = \\ & = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K\left(\frac{q-p}{2}, \frac{q+p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, -p)} (-1)^{\frac{q+p}{2}} \left(\cos \frac{q\pi s}{c} \cos \frac{p\pi r}{c} - \sin \frac{q\pi s}{c} \sin \frac{p\pi r}{c} \right) = \\ & = - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \left(\cos \frac{q\pi s}{c} \cos \frac{p\pi r}{c} - \sin \frac{q\pi s}{c} \sin \frac{p\pi r}{c} \right). \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika ze związków

$$\begin{aligned} K\left(\frac{q-p}{2}, \frac{q+p}{2}\right) &= -(-1)^q K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right) \\ (-1)^{\frac{q+p}{2}} &= (-1)^p (-1)^{\frac{q-p}{2}}, \end{aligned}$$

gdzie suma $p+q$ jest liczbą parzystą (ten sam warunek jest spełniony w następnych związkach).

Z kolei po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \left(\cos \frac{q\pi s}{c} \cos \frac{p\pi r}{c} + \sin \frac{q\pi s}{c} \sin \frac{p\pi r}{c} \right) = \\ & = 4 \sum_q \sum_p \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \sin \frac{q\pi s}{c} \sin \frac{p\pi r}{c} \end{aligned}$$

i podobnie

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \left(\cos \frac{p\pi s}{c} \cos \frac{q\pi r}{c} + \sin \frac{p\pi s}{c} \sin \frac{q\pi r}{c} \right) = \\ & = 4 \sum_q \sum_p \frac{K\left(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2}\right)}{\bar{\Delta}(q, p)} (-1)^{\frac{q-p}{2}} \sin \frac{p\pi s}{c} \sin \frac{q\pi r}{c}. \end{aligned}$$

Dalsze proste przekształcenia prowadzą do funkcji ugięcia

$$w(r, s) = 2 \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta(m, n)} K\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right) \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c},$$

skąd po wstawieniu odpowiednich wartości mamy ostatecznie:

$$(4.18) \quad w(r, s) = \frac{2c^2\pi}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{2}{\pi} \bar{q}_\phi + \frac{1}{2} [(m+n)A_{\frac{m-n}{2}} - (-1)^m n(m-n)A_{\frac{m+n}{2}}] + \frac{1}{2} [(m-n)B_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m (m+n)B_{\frac{m-n}{2}}] + (-1)^{\frac{m-n}{2}} (nC_m - mC_n) + \frac{D\pi^2}{2a^2} \left[(m+n) \left(\frac{3m^2 - 2mn + 3n^2}{4} - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) D_{\frac{m-n}{2}} - (-1)^m (m-n) \left(\frac{3m^2 + 2mn + 3n^2}{4} - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) D_{\frac{m+n}{2}} \right] + \frac{D\pi^2}{2a^2} \left[(m-n) \left(\frac{3m^2 + 2mn + 3n^2}{4} - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) E_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m (m+n) \times \left(\frac{3m^2 - 2mn + 3n^2}{4} - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right) E_{\frac{m-n}{2}} \right] + \frac{D\pi^2}{c^2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} \left[n(2m^2 + n^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D}) F_m - m(m^2 + 2n^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D}) F_n \right] - \frac{D}{\pi} \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 - n^2) [1 - (-1)^m] w(0, 0) \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c},$$

gdzie

$$\bar{q}_\phi = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{y}{a})} q(x, y) \left[\sin \frac{(m+n)\pi x}{2a} \sin \frac{(m-n)\pi y}{2a} - (-1)^m \sin \frac{(m-n)\pi x}{2a} \times \sin \frac{(m+n)\pi y}{2a} \right] dx dy.$$

W podobny sposób otrzymamy wyrażenie powierzchni odkształconej płyty o krawędziach poddanych drganiom harmonicznym [por. (4.14)] w układzie współrzędnych r, s :

$$(4.19) \quad w(r, s) = 4\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{2a^2}{D\pi^3} \bar{q}_\phi + \frac{1}{2} (m+n) \times \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - \frac{1}{2} (-1)^m (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \left] D_{\frac{m+n}{2}} + \frac{1}{2} (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] E_{\frac{m+n}{2}} - \frac{1}{2} (-1)^m (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] E_{\frac{m-n}{2}} + \\
& + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_m - \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \right. \\
& \left. - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_n - \frac{m^2-n^2}{\pi} (1-\nu) [1 - (-1)^{m+n}] w(0, 0) \left\} \sin \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{c}.
\end{aligned}$$

Równania (4.11), (4.14), (4.18) i (4.19) pozwolą rozwiązać szereg przykładów nie rozpatrywanych w pracy [2]. We wszystkich podanych tu przykładach ograniczymy się do zbadania drgań swobodnych (problemy stateczności wynikają stąd jako szczególny przypadek).

4.1. Powierzchnia odkształcona płyty przedstawionej na rys. 5 spełniać musi warunki

$$(4.20.1) \quad w_x(0, y) = 0,$$

$$(4.20.2) \quad w_y(0, s) = 0;$$

ponadto z warunków

$$(4.21) \quad w(x, 0) = w(0, y) = \\ = w(0, s) = w_{yy}(x, 0) = 0$$

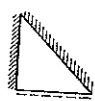
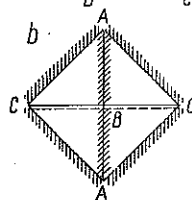
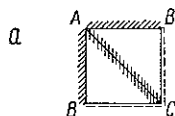
wynika, że współczynniki B , D , E i F równe są zeru.

Równania (4.11) i (4.18) przybiorą odpowiednio postać

$$(4.22.1) \quad w(x, y) = \frac{2a^2\pi}{D} \left\{ \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \{ [mA_n - (-1)^{m+n}nA_m] + \right. \\ \left. + (-1)^n [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.22.2) \quad w(r, s) = \frac{2c^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{1}{2} [(m+n)A_{\frac{m-n}{2}} - \right. \\ \left. - (-1)^m (m-n)A_{\frac{m+n}{2}}] + (-1)^{\frac{m-n}{2}} (nC_m - m_n C) \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c},$$

Jeśli przedłużymy funkcję $w(x, y)$ okresowo, tak by określona ona była w kwadracie $a \times a$ (rys. 6a) lub w kwadracie $c \times c$ (rys. 6b), to wówczas



Rys. 5

Rys. 6

przekonamy się, że szeregi (4.22.1) i (4.22.2) można różniczkować wyraz po wyrazie. Z warunku (4.20.1) otrzymujemy więc równanie

$$(4.23.1) \quad A_n Q_n - (-1)^n n\pi \sum_m \frac{(-1)^m m\pi}{\Delta(m, n)} A_m + (-1)^n \sum_m \frac{m\pi^2(m-n)}{\Delta(m, n)} C_{m+n} - \\ - (-1)^n \sum_m \frac{m\pi^2(m+n)}{\Delta(m, n)} C_{m-n} = 0,$$

natomiast z warunku (4.20.2) wynika, że

$$(4.23.2) \quad -\frac{\pi^2}{2} \sum_m \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\bar{\Delta}(m, n)} [m(m+n) A_{\frac{m-n}{2}} - \\ - (-1)^m m(m-n) A_{\frac{m+n}{2}}] + C_n [\bar{Q}_n + (-1)^n \bar{Q}'_n] - \\ - (n\pi) \sum_m \frac{[1 + (-1)^{m+n}] m\pi}{\bar{\Delta}(m, n)} C_m = 0,$$

gdzie [por. (4.5)]

$$(4.24) \quad \Delta(m, n) \equiv \Delta_{mn}, \quad \bar{\Delta}(m, n) \equiv \bar{\Delta}_{mn}.$$

Szeregi (4.23) poddajemy dalszym przekształceniom. Podobnego typu przekształcenia omawialiśmy już w pracy [1] oraz we wstępie punktu 4 niniejszej pracy, ograniczymy się przeto do podania ostatecznych wyników następujących:

$$(4.25.1) \quad A_n Q_n - (-1)^n n\pi \sum_m \frac{(-1)^m m\pi}{\Delta(m, n)} A_m + (-1)^n \sum_m \pi^2 \left[\frac{(m-n)(m-2n)}{\Delta(m-n, n)} - \right. \\ \left. - \frac{(m+n)(m+2n)}{\Delta(m+n, n)} \right] C_m = 0,$$

$$(4.25.2) \quad -\sum_m \pi^2 [(-1)^m + (-1)^n] \left[\frac{(m+n)(2m+n)}{\bar{\Delta}(m, 2m+n)} - \frac{(m-n)(2m-n)}{\bar{\Delta}(m, 2m-n)} \right] A_m + \\ + C_n [\bar{Q}_n + (-1)^n \bar{Q}'_n] - n\pi \sum_m \frac{[1 + (-1)^{m+n}] m\pi}{\bar{\Delta}(m, n)} C_m = 0.$$

Symbole Q_n i Q'_n oznaczają funkcje wyznaczone przez Z. KĄCZKOWSKIEGO w pracy [4] (wzór 2.7):

$$(4.26.1) \quad Q_n = \sum_m \frac{(m\pi)^2}{\Delta(m, n)}, \quad Q'_n = \sum_m \frac{(-1)^m (m\pi)^2}{\Delta(m, n)}$$

i podobnie

$$(4.26.2) \quad \bar{Q}_n = \sum_m \frac{(m\pi)^2}{\bar{\Delta}(m, n)}, \quad \bar{Q}'_n = \sum_m \frac{(-1)^m (m\pi)^2}{\bar{\Delta}(m, n)}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny układu (4.25) otrzymamy równanie częstości. Jeśli do równania (4.25.1) podstawimy $C_m = 0$, wówczas otrzymamy równanie (rys. 4b) identyczne ze związkim (3.10) Z. KĄCZKOWSKIEGO, [2]. Jeśli natomiast do (4.25.2) podstawimy $A_m = 0$, to uzyskany tą drogą związek (rys. 4g) będzie identyczny z równaniem (8.3) podanym w pracy [2].

4.2. W podobny sposób rozwiązujemy zagadnienie płyty całkowicie utwierdzonej na obwodzie (rys. 7). Posiada ona oś symetrii, możemy zatem badać oddzielnie drgania antysymetryczne i symetryczne. Częstości drgań antysymetrycznych są jednakże równe odpowiednim częstościom płyty omawianej w p 4.1 (należy tam jedynie podstawić $a\sqrt{2}/2$ na miejsce a). Pozostają zatem do zbadania drgania symetryczne. Podstawiamy do równań (4.11) i (4.18) $D = E = F = 0$, $B = A$; otrzymujemy



Rys. 7

$$(4.27.1) \quad w(x, y) = \frac{2a^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \{ [1 - (-1)^{m+n}] (mA_n + nA_m) + (-1)^n [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] \} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.27.2) \quad w(r, s) = \frac{2c^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{1}{2} [1 - (-1)^m] \times \right. \\ \left. \times [(m+n)A_{\frac{m-n}{2}} + (m-n)A_{\frac{m+n}{2}}] + (-1)^{\frac{m-n}{2}} (nC_m - mC_n) \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c}.$$

Z warunków (4.20) wynikają po przekształceniach równania:

$$(4.28.1) \quad A_n [Q_n - (-1)^n Q'_n] + n\pi \sum_m \frac{[1 - (-1)^{m+n}] m\pi}{\Delta(m, n)} A_m + (-1)^n \sum_m \pi^2 \left[\frac{(m-n)(m-2n)}{\Delta(m-n, n)} - \frac{(m+n)(m+2n)}{\Delta(m+n, n)} \right] C_m = 0,$$

$$(4.28.2) \quad \frac{\pi}{2} \sum_n \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta(m, n)} [(m+n)A_{\frac{m-n}{2}} + (m-n)A_{\frac{m+n}{2}}] + C_m [\bar{Q}_m + (-1)^m \bar{Q}'_m] - m\pi \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] n\pi}{\bar{\Delta}(m, n)} C_n = 0.$$

Jeśli do równania (4.28.1) podstawimy $C_m = 0$, to stwierdzimy identyczność otrzymanej zależności z równaniem (4.6) podanym w pracy [2] (rys. 4c).



Rys. 8

4.3. Zadanie komplikuje się, gdy choć jedna z krawędzi płyty jest swobodna. Rozwińmy najpierw płytę przedstawioną na rys. 8.

Podstawiając do równań (4.11) i (4.18)

$$(4.29) \quad A_k = -\nu D \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 D_k, \quad B_k = E_k = F_k = 0,$$

znajdujemy

$$(4.30.1) \quad w(x, y) = \frac{2a^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{D\pi^2}{a^2} m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} \frac{D\pi^2}{a^2} n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + (-1)^n (m-n) C_{m+n} - \right. \\ \left. - (m+n) C_{m-n} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

oraz

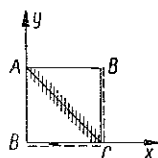
$$(4.30.2) \quad w(r, s) = \frac{2c^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\bar{A}_{mn}} \left\{ \frac{D\pi^2}{2a^2} (m+n) \times \right. \\ \times \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - (-1)^m \frac{D\pi^2}{2a^2} (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + (-1)^{\frac{m-n}{2}} n C_m - m C_n \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c}.$$

Powierzchnia odkształcona rozważanej płyty musi spełniać warunki

$$(4.31.1) \quad w_r(0, s) = 0,$$

$$(4.31.2) \quad t_x(0, y) = -D[w_{xxx}(0, y) + (2-\nu)w_{xyy}(0, y)] = 0.$$

Przedłużmy funkcję $w(x, y)$ okresowo, tak by była ona określona w kwadracie $a \times a$ (rys. 9). Jak widać z rysunku



Rys. 9

$$w(a, y) = w_{xx}(a, y) = 0$$

i ze wzorów (3.47) podanych w pracy [1] znajdujemy po przekształceniach

$$(4.32.1) \quad w_{xxx}(0, y) = \sum_n \left(-\nu \frac{\pi^2}{a^3} n^2 D_n + \sum_m \left\{ - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 A_{mn} + \frac{2}{a} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \nu \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] D_n \right\} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.32.2) \quad w_{xyy}(0, y) = - \sum_n \left(- \frac{\pi^2}{a^3} n^2 D_n + \sum_m \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 A_{mn} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{a} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 D_n \right\} \right) \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Z warunku (4.26.2) wynika zatem

$$(4.33.1) \quad D_n \Omega_n + \pi^6 \sum_m \frac{(-1)^{m+n} mn}{\Delta_{mn}} [m^2 + (2-\nu)n^2] \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \right. \\ \left. - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + \frac{\pi^4 a^2}{D} \sum_m \frac{(-1)^n m [m^2 + (2-\nu)n^2]}{\Delta_{mn}} [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] = 0,$$

natomiast warunek (4.31.1) prowadzi do równania

$$(4.33.2) \quad \frac{D\pi^4}{2a^2} \sum_n \frac{[1+(-1)^{m+n}](-1)^{\frac{m-n}{2}}}{A_{mn}} \left\{ (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - (-1)^m (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + C_m [\bar{Q}_m + (-1)^m \bar{Q}'_m] - m\pi \sum_n \frac{[1+(-1)^{m+n}]n\pi}{A_{mn}} C_n = 0; \right.$$

tuaj

$$(4.34) \quad \Omega_n = \left[(n\pi)^4 (1-\nu^2) - \frac{\bar{n}a^2}{D} (n\pi)^2 (1-\nu) + \frac{K - \frac{\gamma h}{g} \omega^2}{D} a^4 \right] \Omega_n + 2(1-\nu)(n\pi)^2 T_n,$$

gdzie [por. [4] wzór (3.8)]

$$(4.35) \quad T_n = \frac{1}{2} + \delta_n^2 \sum_m \frac{1}{A_{mn}}.$$

Łatwo się przekonać (por. również [1]), że funkcja Ω_n jest identyczna z funkcją Ω_n określoną przez Z. KĄCZKOWSKIEGO w pracy [4] [wzór (6.8)]. Jeśli do równania (4.33.1) podstawimy $C = 0$, to otrzymamy przypadek rozpatrywany w [2] [wzór (5.8), por. rys. 4d]. Porównując oba równania należy jednakże pamiętać o tym, że funkcja Ω_n (4.34) wyznaczona w pracy [4] jest $\pi^3/2$ krotnie większa od funkcji Ω_n określonej wzorem (5.4) w pracy [2]. Przekonać się o tym można porównując wyrażenia siły poprzecznej podane w pracach [4] i [5].

4.4. Powierzchnia odkształcona płyty pokazanej na rys. 10 musi prócz warunków (4.31) spełniać dodatkowo warunek

$$(4.36) \quad w_y(x, 0) = 0.$$



Rys. 10

Równania tej powierzchni przyjmują postać następującą:

$$(4.37.1) \quad w(x, y) = \frac{2a^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{1}{A_{mn}} \left\{ \frac{D\pi^2}{a^2} m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n - (-1)^{m+n} \frac{D\pi^2}{a^2} n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + [nB_m - (-1)^{m+n} mB_n] + + (-1)^n [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.37.2) \quad w(r, s) = \frac{2c^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}](-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{D\pi^2}{2a^2} (m+n) \times \right. \\ \times \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - (-1)^m \frac{D\pi^2}{2a^2} (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + \frac{1}{2} [(m-n)B_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m(m+n) \times \\ \left. \times B_{\frac{m-n}{2}}] + (-1)^{\frac{m-n}{2}} [nC_m - mC_n] \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c}.$$

Przedłużenia okresowe funkcji (4.37) przedstawione są na rys. 11. Ze wzoru (3.26) podanego w pracy [1] wynika, że

$$w_y(x, 0) = \sum_n \left\{ \frac{n\pi}{a} \left(\sum_m A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \right) - \frac{2}{a} [w(x, 0) - (-1)^m w(x, a)] \right\} + \\ + \frac{1}{a} [w(x, a) - w(x, 0)].$$

Jednakże

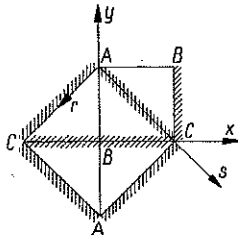
$$(4.38) \quad \begin{cases} w(x, 0) = 0 \\ w(x, a) = [-w(0, y)]_{y=a-x} = \sum_m (-1)^m D_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \end{cases}$$

a więc ostatecznie

$$(4.39) \quad w_y(x, 0) = \sum_m \left\{ \frac{1}{a} (-1)^m D_m + \sum_n \left[\frac{n\pi}{a} A_{mn} + \frac{2}{a} (-1)^{m+n} D_n \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Stąd i z warunku (4.36) po przekształceniach znajdujemy

$$(4.40.1) \quad B_m Q_m - \sum_n \frac{(-1)^{m+n} m n \pi^2}{\Delta_{mn}} B_n + \frac{D}{a^2} D_m (-1)^m [T'_m + \nu(m\pi)^2 Q'_m] + \\ + \pi^2 \sum_m \frac{(-1)^n n}{\Delta_{mn}} [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] + \\ + \frac{D\pi^4}{a^2} \sum_n \frac{mn}{\Delta_{mn}} \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n = 0.$$



Rys. 11

Z kolei stosując ponownie wzór (3.47) zawarty w pracy [1] i uwzględniając (4.38) znajdujemy

$$(4.41.1) \quad w_{xxx}(0, y) = \sum_n \left(-\nu \frac{\pi^2}{a^3} n^2 D_n - \frac{(-1)^n}{aD} B_n + \sum_m \left\{ - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 A_{mn} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{a} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \nu \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] D_n - \frac{2}{aD} (-1)^{m+n} B_n \right\} \right) \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.41.2) \quad w_{xyy}(0, y) = \sum_n \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 D_n - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sum_m \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right) A_{mn} - \frac{2}{a} D_n \right] \right\} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Warunek, że siła poprzeczna wzdłuż krawędzi $x = 0$ równa jest zeru prowadzi do równania

$$(4.40.2) \quad D_n \Omega_n - B_n \frac{a^2}{D} (-1)^n \left\{ T'_n + \left[\nu(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D} \right] Q'_n \right\} - \\ - \frac{a^2}{D} \sum_m \frac{m\pi\pi^2}{\Delta_{mn}} [(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2] B_m + \sum_m \frac{m\pi\pi^2 (-1)^{m+n}}{\Delta_{mn}} [(m\pi)^2 + \\ + (2-\nu)(n\pi)^2] \left[(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D} \right] D_m - \frac{a^2}{D} \sum_m \frac{m\pi^2 (-1)^n}{\Delta_{mn}} [(m\pi)^2 + \\ + (2-\nu)(n\pi)^2] [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] = 0.$$

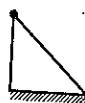
Wreszcie z warunku (4.31.1) wynika

$$(4.40.3) \quad C_m [Q_m + (-1)^m Q'_m] - m\pi \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] n\pi}{\Delta_{mn}} C_n + \\ + \frac{D\pi^4}{2a^2} \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - (-1)^m (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{D\pi^2} [(m-n)B_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m (m+n)B_{\frac{m-n}{2}}] \right\} = 0.$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny układu równań (4.40) wyznaczymy równania częstotliwości. Jeśli natomiast podstawimy do (4.40.1) i (4.40.2) $C = 0$, wówczas otrzymamy rozwiązanie dotyczące płyty przedstawionej na rys. 4f a uzyskane już przez Z. KĄCZKOWSKIEGO w pracy [2]. By przekonać się o identyczności obu rozwiązań, najdogodniej posłużyć się związkami wyprowadzonymi w pracy [4].

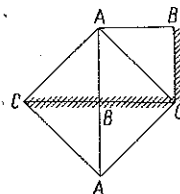
4.5. Równania powierzchni odkształconej płyty z rys. 12 mają postać następującą:

$$(4.41.1) \quad w(x, y) = 2\pi^3 \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n - (-1)^{m+n} n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (-1)^n (m-n) F_{m+n} \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (-1)^n (m+n) F_{m-n} \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{D\pi^2} [nB_m - (-1)^{m+n} mB_n] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$



Rys. 12

$$(4.41.2) \quad w(r, s) = 4\pi^3 \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m+n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{1}{2} (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - \frac{1}{2} (-1)^m (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_m - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_n + \right. \\ \left. + \frac{c^2}{D\pi^2} [(m-n)B_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m (m+n)B_{\frac{m-n}{2}}] \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c}.$$



Rys. 13

Powierzchnia ta musi spełniać warunki

$$(4.42) \quad w_y(x, 0) = 0, \quad t_x(0, y) = 0, \quad t_r(0, s) = 0.$$

Przedłużając funkcję w w sposób pokazany na rys. 13 i różniczkując zgodnie z podanymi w [1] wzorami znajdujemy w szczególności

$$(4.43.1) \quad w_{rr}(0, s) = \sum_n \left\{ - \left(\frac{n\pi}{c} \right)^3 \sum_m A_{mn} \sin \frac{m\pi s}{c} + \frac{2}{c} \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 [w(0, s) - \right. \\ \left. - (-1)^n w(c, s)] - \frac{2}{c} [w_{rr}(0, s) - (-1)^n w_{rr}(c, s)] \right\} + \frac{1}{c} [w_{rr}(c, s) - w_{rr}(0, s)],$$

$$(4.43.2) \quad w_{ss}(0, s) = \sum_n \left\{ - \frac{n\pi}{c} \left[\sum_m \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi s}{c} \right] - \frac{2}{c} [w_{ss}(0, s) - \right. \\ \left. - (-1)^n w_{ss}(c, s)] \right\} + \frac{1}{c} [w_{ss}(c, s) - w_{ss}(0, s)].$$

Należy tu z kolei podstawić (por. rys. 13)

$$w(0, s) = \sum_m F_m \sin \frac{m\pi s}{c}, \quad w(c, s) = - \sum_m (-1)^m F_m \sin \frac{m\pi s}{c}, \\ w_{rr}(0, s) = \nu \sum_m \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 F_m \sin \frac{m\pi s}{c}, \quad w_{rr}(c, s) = -\nu \sum_m (-1)^m \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 F_m \sin \frac{m\pi s}{c}, \\ w_{ss}(0, s) = - \sum_m \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 F_m \sin \frac{m\pi s}{c}, \quad w_{ss}(c, s) = \sum_m (-1)^m \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 F_m \sin \frac{m\pi s}{c}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy ostatecznie następujący układ jednorodnych równań algebraicznych:

$$(4.44.1) \quad B_m Q_m - \sum_n \frac{(-1)^{m+n} m n \pi^2}{\Delta_{mn}} B_n + \frac{D}{a^2} D_m (-1)^m [T'_m + \nu(m\pi^2) Q'_m] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D\pi^4}{a^2} \sum_n \frac{mn}{\Delta_{mn}} \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n + \frac{D\pi^4}{c^2} \sum_n \frac{(-1)^n n}{\Delta_{mn}} \left\{ (m-n) \left[2(m^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - (m+n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.44.2) \quad & D_n \Omega_n - B_n \frac{a^2}{D} (-1)^n \left\{ T'_n + \left[\nu(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D} \right] Q'_n \right\} - \\
& - \frac{a^2}{D} \sum_m \frac{mn\pi^2}{\Delta_{mn}} \left[(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2 \right] B_m + \sum_m \frac{mn\pi^2 (-1)^{m+n}}{\Delta_{mn}} \left[(m\pi)^2 + \right. \\
& \left. + (2-\nu)(n\pi)^2 \right] \left[(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D} \right] D_m - \frac{\pi^3}{2} \sum_m \frac{m\pi (-1)^n}{\Delta_{mn}} \left[(m\pi)^2 + \right. \\
& \left. + (2-\nu)(n\pi)^2 \right] \left\{ (m-n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - \right. \\
& \left. - (m+n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.44.3) \quad & F_m [\bar{\Omega}_m + (-1)^m \bar{\Omega}'_m] + \sum_m \frac{mn\pi^2 [1 + (-1)^{m+n}]}{\Delta_{mn}} \left[(n\pi)^2 + (2-\nu) \times \right. \\
& \times (m\pi)^2 \left. \right] \left[(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{D} \right] F_n - \pi^3 \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}} n\pi}{\Delta_{mn}} \times \\
& \times \left[(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2 \right] \left\{ \frac{1}{2} (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - \right. \\
& - \frac{1}{2} (-1)^m (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + \frac{c^2}{D\pi^2} \left[(m-n) \times \right. \\
& \left. \left. \times B_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m (m+n) B_{\frac{m-n}{2}} \right] \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Tutaj mamy

$$\begin{aligned}
(4.45.1) \quad \bar{\Omega}_m = & \left[(m\pi)^4 (1-\nu^2) - \frac{\bar{n}c^2}{D} (m\pi)^2 (1-\nu) + \frac{K - \frac{\gamma h}{g} \omega^2}{D} c^4 \right] \bar{Q}_m + \\
& + 2(1-\nu) (m\pi)^2 \bar{T}_m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.45.2) \quad \bar{\Omega}'_m = & \left[(m\pi)^4 (1-\nu^2) - \frac{\bar{n}c^2}{D} (m\pi)^2 (1-\nu) + \frac{K - \frac{\gamma h}{g} \omega^2}{D} c^4 \right] \bar{Q}'_m + \\
& + 2(1-\nu) (m\pi)^2 \bar{T}'_m.
\end{aligned}$$

4.6. Równania podane w p. 4.5 pozwolą na rozwiązanie nieco mniej ogólnych, lecz dotąd nie zbadanych przypadków. I tak dla płyty przedstawionej na rys. 14 znajdujemy, podstawiając do równań (4.44.2)-(4.44.3) $B = 0$, następujący układ równań:

$$(4.46.1) \quad D_n \Omega_n + \sum_m \frac{mn\pi^2 (-1)^{m+n}}{\Delta_{mn}} [(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2] \left[(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D} \right] D_m - \frac{\pi^2}{2} \sum_m \frac{m\pi (-1)^n}{\Delta_{mn}} [(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2] \left\{ (m-n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - (m+n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} = 0,$$

$$(4.46.2) \quad F_m [\bar{\Omega}_m + (-1)^m \bar{\Omega}'_m] + \sum_n \frac{mn\pi^2 [1 + (-1)^{m+n}]}{\Delta_{mn}} [(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2] \times \\ \times \left[(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{D} \right] F_n - \pi^3 \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} [(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2] \left\{ \frac{1}{2} (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} - \frac{1}{2} (-1)^m (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} \right\} = 0.$$



Rys. 14



Rys. 15

4.7. Podobnie w przypadku płyty, pokazanej na rys. 15, podstawiamy do związków (4.44.1-3) $D = 0$ otrzymując układ równań

$$(4.47.1) \quad B_n Q_m - \sum_n \frac{(-1)^{m+n} mn\pi^2}{\Delta_{mn}} B_n + \frac{D\pi^4}{c^2} \sum_n \frac{(-1)^n n}{\Delta_{mn}} \left\{ (m-n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - (m+n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} = 0,$$

$$(4.47.2) \quad F_m [\bar{\Omega}_m + (-1)^m \bar{\Omega}'_m] + \sum_n \frac{mn\pi^2 [1 + (-1)^{m+n}]}{\Delta_{mn}} [(n\pi)^2 + (2-\nu) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (m\pi)^2 \left[(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{D} \right] F_n - \frac{\pi^2 c^2}{D} \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}} n}{\Delta_{mn}} \times \\ & \times [(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2] [(m-n)B_{\frac{m+n}{2}} - (-1)^m(m+n)B_{\frac{m-n}{2}}] = 0. \end{aligned}$$

Jeśli z kolei podstawimy do (4.47.2) $B = 0$, otrzymamy rozwiązanie płyty z rys. 4h, które można łatwo utożsamić z rozwiązaniem (9.2) zawartym w pracy [2].

4.8. Płyta przedstawiona na rys. 16 posiada oś symetrii. Drgania antysymetryczne można badać za pomocą rozwiązania zawartego w p. 4.7 zmieniając odpowiednio wymiary płyty. Zajmiemy się więc analizą drgań symetrycznych. Ze względu na symetrię $E = D$ i równania powierzchni odkształconej przyjmują postać [por. (4.3)]



Rys. 16

$$\begin{aligned} (4.48.1) \quad w(x, y) = & \frac{2a^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{D\pi^2}{a^2} [1 - (-1)^{m+n}] m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n + \frac{D\pi^2}{a^2} [1 - (-1)^{m+n}] n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + \right. \\ & \left. + (-1)^n [(m-n)C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.48.2) \quad w(r, s) = & \frac{2c^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{D\pi^2}{2a^2} [1 - (-1)^m] (m+n) \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} + \frac{D\pi^2}{2a^2} [1 - (-1)^m] (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} + (-1)^{\frac{m-n}{2}} (nC_m - mC_n) \right\} \sin \frac{m\pi r}{c} \sin \frac{n\pi s}{c}. \end{aligned}$$

Z warunków

$$(4.49) \quad w_r(0, s) = 0, \quad t_x(0, y) = 0$$

wynika następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} (4.50.1) \quad C_m [\bar{Q}_m + (-1)^m \bar{Q}'_m] - m\pi \sum_m \frac{[1 + (-1)^{m+n}] n\pi}{\Delta_{mn}} C_n + \\ + \frac{D\pi^4}{2a^2} \sum_n \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} + (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. \left. + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} \right\} D_{\frac{m+n}{2}} = 0, \end{aligned}$$

$$(4.50.2) \quad D_n[\Omega_n - (-1)^n \Omega'_n] - \pi^6 \sum_m \frac{[1 - (-1)^{m+n}] mn}{\Delta_{mn}} [m^2 + (1-\nu)n^2] \left[n^2 + \right. \\ \left. + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + \frac{\pi^4 a^2}{D} \sum_m \frac{(-1)^n m [m^2 + (2-\nu)n^2]}{\Delta_{mn}} [(m-n) \times \\ \times C_{m+n} - (m+n)C_{m-n}] = 0.$$

Zachodzą przy tym następujące zależności:

$$(4.51) \quad \Omega'_n = \left[(n\pi)^4 (1-\nu^2) - \frac{\bar{n}a^2}{D} (n\pi)^2 (1-\nu) + \frac{K - \frac{\gamma h}{g} \omega^2}{D} a^4 \right] Q'_n + \\ + 2(1-\nu)(n\pi)^2 T'_n,$$

gdzie [por. [4] wzór (3.8)]

$$(4.52) \quad T'_n = \frac{1}{2} + \delta_n^2 \sum_m \frac{(-1)^m}{\Delta_{mn}}.$$

Podstawiając do (4.50.2) $C = 0$ sprowadzamy badany przypadek do rozważanego w [2] [równanie (6.2) por. również rys. 4e].



Rys. 17

4.9. Oś symetrii posiada również płyta z rys. 17. Drgania antysymetryczne rozważane już były w p. 4.3. W przypadku drgań symetrycznych mamy natomiast $B = A$. Wynikają stąd następujące równania powierzchni odkształconej:

$$(4.53.1) \quad w(x, y) = \frac{2a^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ [1 - (-1)^{m+n}] (mA_n + nA_m) + \right. \\ \left. + \frac{D\pi^2}{2a^2} (-1)^n (m-n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - \right. \\ \left. - \frac{D\pi^2}{2a^2} (-1)^n (m+n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.53.2) \quad w(r, s) = \frac{2c^2\pi}{D} \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} [1 - (-1)^m] \left[(m+n)A_{\frac{m-n}{2}} + (m-n)A_{\frac{m+n}{2}} \right] + \frac{D\pi^2}{c^2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} n \times \right. \\ \times \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_m - \frac{D\pi^2}{c^2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \right. \\ \left. - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_n \left. \right\} \sin \frac{m\pi r}{c} \sin \frac{n\pi s}{c}.$$

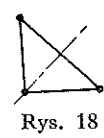
Warunki

$$(4.54) \quad w_x(0, y) = 0, \quad t_r(0, s) = 0$$

prowadzą do układu równań

$$(4.55.1) \quad A_n [Q_n - (-1)^n Q'_n] + n\pi \sum_m \frac{[1 - (-1)^{m+n}] m\pi}{\Delta_{mn}} A_m + \\ + \frac{D\pi^4}{2a^2} \sum_m \frac{(-1)^n}{\Delta_{mn}} \left\{ (m-n) \left[2(m^2+n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - \right. \\ \left. - (m+n) \left[2(m^2+n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} = 0,$$

$$(4.55.2) \quad F_m [\bar{Q}_m + (-1)^m \bar{Q}'_m] + \sum_n \frac{mn\pi^2 [1 + (-1)^{m+n}]}{\Delta_{mn}} [(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2] \times \\ \times \left[(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{D} \right] F_n - \\ - \frac{\pi^2 c^2}{2D} \sum_n \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} [(n\pi)^2 + \\ + (2-\nu)(m\pi)^2] \left[(m+n) A_{\frac{m-n}{2}} + (m-n) A_{\frac{m+n}{2}} \right] = 0.$$



Rys. 18

4.10. Płyta o krawędziach swobodnych, podparta w narożach (rys. 18) także posiada oś symetrii. Drgania antysymetryczne opisane są równaniami podanymi w p. 4.6, ograniczymy się zatem do zbadania drgań symetrycznych. Równania powierzchni odkształconej wynikają bezpośrednio z (4.14) i (4.19). Należy tam jedynie podstawić $E = D$. Otrzymamy wówczas

$$(4.56.1) \quad w(x, y) = 2\pi^3 \sum_m \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ [1 - (-1)^{m+n}] m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_n + [1 - (-1)^{m+n}] n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_m + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (-1)^n (m-n) F_{m+n} \left[2(m^2+n^2) + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (-1)^n (m+n) F_{m-n} \left[2(m^2+n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(4.56.2) \quad w(r, s) = 4\pi^3 \sum_m \sum_n \frac{[1 + (-1)^{m+n}] (-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\Delta_{mn}} \left\{ \frac{1}{2} [1 - (-1)^m] (m+n) \times \right. \\ \times \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} + \frac{1}{2} [1 - (-1)^m] (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} \right\}$$

$$+ (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \left] D_{\frac{m+n}{2}} + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} n \left[n^2 + (2-\nu)m^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_m - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} m \left[m^2 + (2-\nu)n^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_n \right\} \sin \frac{m\pi s}{c} \sin \frac{n\pi r}{c}.$$

Z warunków

$$(4.57) \quad t_r(0, s) = 0, \quad t_x(0, y) = 0$$

po przekształceniach naświetlonych w poprzednich punktach wynika następujący układ jednorodnych liniowych równań algebraicznych:

$$(4.58.1) \quad F_m [\bar{\Omega}_m + (-1)^m \bar{\Omega}'_m] + \sum_n \frac{mn\pi^2 [1 + (-1)^{m+n}]}{\bar{A}_{mn}} [(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2] \times \\ \times \left[(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{D} \right] F_n - \pi^3 \sum_n \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n](-1)^{\frac{m-n}{2}}}{\bar{A}_{mn}} n\pi \times \\ \times [(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2] \left\{ (m+n) \left[\left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m-n}{2}} + \right. \\ \left. + (m-n) \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{\pi^2 D} \right] D_{\frac{m+n}{2}} \right\} = 0,$$

$$(4.58.2) \quad D_n [\Omega_n - (-1)^n \Omega'_n] - \sum_m \frac{mn\pi^2 [1 - (-1)^{m+n}]}{\bar{A}_{mn}} [(m\pi)^2 + (2-\nu)(n\pi)^2] \times \\ \times \left[(n\pi)^2 + (2-\nu)(m\pi)^2 - \frac{\bar{n}a^2}{D} \right] D_m - \frac{\pi^3}{2} \sum_n \frac{(-1)^n}{\bar{A}_{mn}} \left\{ (m-n) \left[2(m^2 + n^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\nu)(m+n)^2 - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m+n} - (m+n) \left[2(m^2 + n^2) + (1-\nu)(m-n)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{n}c^2}{\pi^2 D} \right] F_{m-n} \right\} = 0.$$

Podobnie jak w poprzednich przykładach przyrównanie do zera wyznacznika charakterystycznego układu równań (4.58) prowadzi do równania częstotliwości.

Omówiona tu metoda znajduje również zastosowanie wówczas, gdy naroża płyty są swobodne (np. tzw. «płyta pływająca»). Wynikające stąd układy równań są jednak bardziej skomplikowane od podanych poprzednio. Nadmienimy na zakończenie, że podobnie jak w p. 4.1 i 4.2 można by i pozostałe układy równań sprowadzić do nieco bardziej zwartej postaci.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty trójkątnej 30° - 60° - 90° za pomocą transformacji właściwej*, Arch. Inżyn. lądow., 2, 6 (1960).
[2] Z. KĄCZKOWSKI, *Drgania swobodne i wyboczenie płyty trójkątnej*, Arch. Mech. stos., 1, 8 (1956).

[3] P. WILDE, *The General Solution for a Rectangular Orthotropic Plate Expressed by Double Trigonometric Series* [Ogólne rozwiązanie prostokątnej płyty ortotropowej wyrażone podwójnymi szeregi trygonometrycznymi], Arch. Mech. stos., 5,10(1958).

[4] Z. KAÇZKOWSKI, *Orthotropic Rectangular Plates with Arbitrary Boundary Conditions* [Ortotropowe płyty prostokątne o dowolnych warunkach brzegowych], Arch. Mech. stos., 2,8 (1956).

[5] Z. KAÇZKOWSKI, *Ortotropowe płyty prostokątne o brzegach swobodnych*, Arch. Mech. stos., 4,7(1955).

Резюме

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ПЛАСТИНКИ В ВИДЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Дается общее решение пластинки в виде прямоугольного треугольника (3.2) с помощью собственного преобразования (ср. [1]). Полученное решение можно использовать для исследования конкретных примеров в случае когда известен вид собственной функции, а таким образом как до сих пор — в случае двух треугольников: 30° - 60° - 90° и 45° - 45° - 90° . Первый из них был исследован в работе [1], а второй З. Кончковским, [2]. Метод применяемый в [2] дал возможность решить часть вопросов, среди возможных, для однородных и непрерывных краевых условий рассматриваемой пластинки. Вытекающие же из (3.2) решения (4.11), (4.14) и дальнейших, позволяют получить решение для остальных случаев. Среди решенных в настоящей работе десяти примеров приводятся решения: пластинки защемленной по контуру (4.28) и пластинки со свободно опертыми краями по углам (4.58). Все решения сводятся, очевидно, к бесконечным однородным или неоднородным системам линейных, алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных и касаются вопросов: стационарных колебаний, устойчивости и одновременного сжатия и изгиба пластинки на упругом основании.

Summary

GENERAL SOLUTION FOR A PLATE HAVING THE FORM OF A RIGHT-ANGLED TRIANGLE

The solution is found for a plate whose form is that of a right-angled triangle (3.2) by means of eigen-transforms (see [1]). The solution obtained may be used for the investigation of concrete cases if the form of the eigen-function is known. This is, as yet, the case of 30° - 60° - 90° and 45° - 45° - 90° triangles, the first being considered in the Ref. [1], the other in [2], by Z. KAÇZKOWSKI. The method used in [2], enabled the solution of some of the possible problems, for homogeneous and continuous supports. The solutions (4.11) and (4.14) following from (3.2) and further solutions enable also the solution of the remaining cases. Of the ten examples solved in the present paper let us mention the plate with the entire periphery clamped,

(4.28), and the plate supported on the corners (all the edges being free), (4.58). All the solutions reduce of course to infinite homogeneous systems or non-homogeneous linear algebraic equations with infinite number of unknowns and concern the problems of: steady state vibration, stability and combined compression and bending of a plate resting on an elastic foundation.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1960 r.
