

STEFAN ZAHORSKI

**KOŁOWO-SYMETRYCZNE I PŁASKIE ŚCINANIE  
ŁĄCZNIKÓW GUMOWYCH W ŚWIELE NIELINIOWEJ TEORII  
SPRĘŻYSTOŚCI**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLV**

**TOM VIII · ZESZYT 2 · ROK 1960**

## SPIS TREŚCI

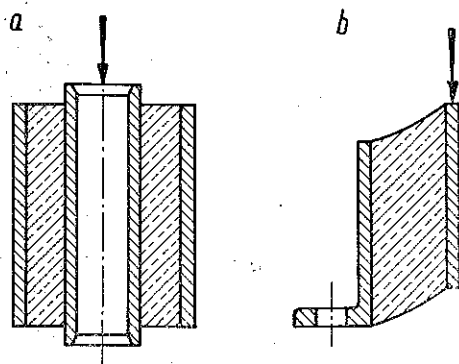
1. Stan odkształcenia	276
2. Stan naprężenia i warunki równowagi	278
3. Przypadek pierwszy $k > 0$	280
4. Przypadek drugi $k < 0$	281
5. Naprężenia na powierzchniach tworzących walca. Związek pomiędzy siłą i przemieszczeniem	283
6. Przypadek materiału Mooney'a	285
7. Płaskie ścinanie	286
8. Porównanie z wynikami eksperymentów	288

Współczesny rozwój techniki motoryzacyjnej i lotniczej wywołał zwiększone zainteresowanie takimi materiałami, jak kauczuki naturalne i syntetyczne, gumy, różne tworzywa sztuczne itp.; wzrosło również zainteresowanie metodami obliczeń konstrukcji, wykonanych z tych materiałów. Istotną cechą powyższych materiałów jest ich duża elastyczność oraz zdolność dobrego na ogół tłumienia drgań i znoszenia dużych przeciążeń.

Materiały o własnościach zbliżonych do kauczuku charakteryzują się nieliniowymi związkami fizycznymi w zakresie odwracalnych odkształceń sprężystych. Licznym pracom poświęconym badaniom fizycznych i mechanicznych własności materiałów kauczukowych towarzyszył rozwój nieliniowej teorii sprężystości dużych odkształceń. R. S. RIVLIN, J. F. SMITH, A. E. GREEN, W. L. BIDERMAN i inni badacze rozwiązali przy użyciu różnych metod wiele konkretnych problemów tworząc obszerną literaturę zagadnienia (por. np. [1], [2], [6]).

Istnieje wielka ilość typów łączników sprężystych różniących się kształtem oraz sposobem wykonania, które poddane są różnym rodzajom obciążenia. Znalazły one szerokie zastosowanie m. in. w zawieszeniach zespołów napędowych, w zawieszeniach nadwozi i kabin samochodów, w różnych rodzajach amortyzatorów i stabilizatorów, [3] i [5]. Zasadniczą grupę łączników sprężystych tworzą tuleje metalowo-gumowe, tzw. silentbloki, składające się przeważnie z dwóch współśrodkowych tulejek metalowych, pomiędzy którymi znajduje się część gumowa (rys. 1a). Połączenie części metalowych z gumową uzyskuje się bądź na drodze zwulkanizowania gumy pomiędzy tulejami metalowymi, bądź przez odpowiednie wprasowanie tulei gumowej. Często zewnętrzna tuleja bywa poprzecinana wzdłuż tworzących, ażeby uniknąć wstępnych, wywołanych wulkanizacją, naprężeń ściskających.

W niniejszej pracy rozważamy dwa typy łączników przedstawionych na rys. 1a i 1b, poddanych odpowiednio kołowo-symetrycznemu i płaskiemu



Rys. 1

ścinaniu, przy założeniu statycznego sposobu obciążenia i bardziej ogólnej niż w innych dotychczasowych rozważaniach postaci potencjału sprężystości.

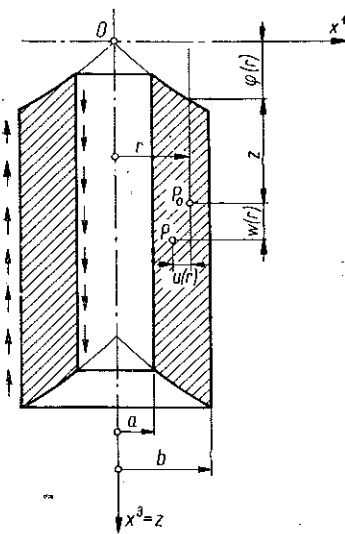
Obliczanie statyczne tego typu łączników uzasadnione jest niewielkim wpływem częstości zmian obciążenia na charakteryzujące materiał dynamiczne moduły sprężystości. W zakresie 10-200 hz moduły dynamiczne pozostają praktycznie niezmiennie, jakkolwiek mogą istotnie różnić się od odpowiednich wartości statycznych, [7].

Przyjęta ogólniejsza postać potencjału sprężystości prowadzi dla założonego schematu ścinania do nieliniowych charakterystyk pomiędzy obciążeniem i odpowiadającym mu przemieszczeniem, jakościowo zgodnych z wynikami eksperymentów.

W dalszych rozważaniach posłużymy się metodą opisaną w znanej książce A. E. GREENA i W. ZERNY, [2], korzystając z oznaczeń wprowadzonych przez autorów tej książki, co nas zwalnia od objaśniania i definiowania większości użytych pojęć.

### 1. Stan odkształcenia

Dany jest długi walec kołowy o promieniu zewnętrznym  $b$  i wewnętrznym  $a$ , którego powierzchnie czołowe określone są dowolną powierzchnią obrotową



Rys. 2

$\varphi(r)$  (rys. 2). Walec wykonany jest z materiału nieściśliwego charakteryzującego się sprężystością kauczukową. Załóżmy, że zewnętrzna powierzchnia tworząca jest nieruchoma, zaś wewnętrzna doznaje skończonego przemieszczenia  $w_0$  tylko w kierunku osi walca, a dowolny punkt  $P_0$  (rys. 2) przemieszcza się niezależnie od współrzędnej  $z$ . Układ utrzymywany jest w równowadze za pośrednictwem naprężeń stycznych rozłożonych równomiernie na powierzchniach tworzących walca. Postulowany schemat odkształcenia odpowiada dość dobrze przypadkowi przedstawionemu na rys. 1a.

W ciele nieodkształconym przyjmujemy układ współrzędnych kartezjańskich  $x^1, x^2, x^3$  z początkiem w punkcie  $O$ . Jeśli jako układ współrzędnych związanych z ciałem (unoszonych)

przyjmijemy uogólniony układ współrzędnych walcowych (rys. 2)

$$(1.1) \quad \Theta^1 = r, \quad \Theta^2 = \vartheta, \quad \Theta^3 = z,$$

to

$$(1.2) \quad x^1 = r \cos \vartheta, \quad x^2 = r \sin \vartheta, \quad x^3 = \varphi(r) + z.$$

Kowariantny i kontrawariantny tensor metryczny można przedstawić w postaci

$$(1.3) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1+\varphi'^2 & 0 & \varphi' \\ 0 & r^2 & 0 \\ \varphi' & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varphi' \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ -\varphi' & 0 & 1+\varphi'^2 \end{bmatrix},$$

$$(1.4) \quad g = |g_{ij}| = \det(g_{ij}) = r^2;$$

we wzorach tych występują pochodne względem zmiennej  $r$ .

W ciele odkształconym zgodnie z poczynionymi na wstępie założeniami punkt  $P_0$  (rys. 2) mógł doznać jedynie przemieszczenia promieniowego  $u(r)$  i osiowego  $w(r)$ , które nie zależą od zmiennej  $z$ . Współrzędne kartezjańskie punktu  $P$  po odkształceniu dadzą się napisać w postaci

$$(1.5) \quad y^1 = [r-u(r)] \cos \vartheta, \quad y^2 = [r-u(r)] \sin \vartheta, \quad y^3 = \varphi(r) + z + w(r).$$

Jeśli oznaczymy  $\varphi(r) + w(r) = \psi(r)$ , to ostatnie wyrażenie (1.5) przybierze postać

$$(1.6) \quad y^3 = \psi(r) + z.$$

Kowariantny tensor metryczny ma postać

$$(1.7) \quad \begin{cases} G_{ij} = \begin{bmatrix} (1-u')^2 + \psi'^2 & 0 & \psi' \\ 0 & (r-u)^2 & 0 \\ \psi' & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ G = |G_{ij}| = (1-u')^2 (r-u)^2. \end{cases}$$

Warunek nieściśliwości wymaga, żeby  $G/g = 1$ ; stąd otrzymujemy równanie

$$(1.8) \quad (1-u')^2 (r-u)^2 = r^2,$$

którego całka ogólna ma postać

$$(1.9) \quad u = r \pm \sqrt{r^2 - C^2}.$$

Jeśli zgodnie z założeniami  $[u]_{r=a} = 0$  i  $[u]_{r=b} = 0$ , to dla spełnienia warunku nieściśliwości musi być  $u \equiv 0$ , zaś kowariantny i kontrawariantny tensor metryczny przybiorą ostatecznie postać

$$(1.10) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1+\psi'^2 & 0 & \psi' \\ 0 & r^2 & 0 \\ \psi' & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\psi' \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ -\psi' & 0 & 1+\psi'^2 \end{bmatrix}.$$

Niezmienniki stanu odkształcenia są następujące:

$$(1.11) \quad \begin{cases} I_1 = g^{rs} G_{rs} = 3 + (\psi' - \varphi')^2 = 3 + w'^2, \\ I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - g^{rm} g^{sn} G_{rs} G_{mn}) = 3 + (\psi' - \varphi')^2 = 3 + w'^2, \\ I_3 = |g^{rm} G_{ms}| = G/g = 1. \end{cases}$$

Pomocniczy tensor  $B^{ij}$ , (por. [2])

$$(1.12) \quad B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs},$$

przybierze w naszym przypadku postać

$$(1.13) \quad B^{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -(\varphi' + \psi') \\ 0 & \frac{1}{r^2} [2 + (\psi' - \varphi')^2] & 0 \\ -(\varphi' + \psi') & 0 & 2 + \varphi'^2 + \psi'^2 \end{bmatrix}.$$

Symbole CHRISTOFFELA II rodzaju są równe tożsamościowo zeru prócz następujących:

$$(1.14) \quad \Gamma_{11}^3 = \psi'', \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{22}^3 = r\psi', \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r.$$

## 2. Stan naprężenia i warunki równowagi

Potencjał sprężystości (gęstość energii odkształcenia odniesiona do jednostki objętości przed odkształceniem) przyjmujemy w postaci wynikającej ze statystycznych rozważań A. ISHIHARY, N. HASHITSUME i M. TATIBANY, [4], i podanej w pracy [8]:

$$(2.1) \quad W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1^2 - 9),$$

gdzie  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  są to stałe charakterystyczne dla danego materiału.

Rozważania autorów pracy [4] zostały zweryfikowane doświadczalnie przy różnych stanach naprężenia i odkształcenia dając bardzo dobrą zgodność w dużym zakresie odkształceń, przewyższającym zakres stosowalności znanej formuły M. MOONEY'A. Wzór (2.1) przechodzi w formułę MOONEY'A, jeśli założymy  $C_3 \equiv 0$  (por. [7]).

Kontrawariantne współrzędne tensora naprężenia dadzą się obliczyć z zależności (por. [2] lub [8])

$$(2.2) \quad \tau^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + pG^{ij} = 2(C_1 + 2C_3 I_1)g^{ij} + 2C_2 B^{ij} + pG^{ij},$$

w której  $\gamma_{ij}$  oznacza kowariantny tensor odkształcenia,  $B^{ij}$  tensor określony wyrażeniem (1.12),  $p$  skalarną funkcję współrzędnych unoszonych zależną od warunków równowagi i warunków brzegowych.

Jeśli oznaczymy

$$(2.3) \quad 2C_1 + 4C_2 + 12C_3 = D, \quad 4C_3 = T,$$

to w myśl (2.2) otrzymamy kontrawariantny tensor naprężenia określony z dokładnością do funkcji  $p$ :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \tau^{11} = D + p + T(\psi' - \varphi')^2, \\ r^2 \tau^{22} = D + p + (T + 2C_2)(\psi' - \varphi')^2, \\ \tau^{33} = (D + p)(1 + \varphi'^2) + (2C_2 + p)(\psi'^2 - \varphi'^2) + T(1 + \varphi'^2)(\psi' - \varphi')^2, \\ -\tau^{31} = (D + p)\varphi' + (2C_2 + p)(\psi' - \varphi') + T(\psi' - \varphi')^2 \varphi', \\ \tau^{23} = \tau^{12} = 0. \end{cases}$$

Równania równowagi wewnętrznej w przypadku braku sił masowych można zapisać w postaci

$$(2.5) \quad \tau_{,i}^{ij} + I_{ir}^j \tau^{ir} + I_{ir}^r \tau^{ij} = 0$$

lub krótko

$$(2.5.1) \quad \tau^{ij} |_{,i} = 0,$$

przy czym dwie pionowe kreski oznaczają pochodną kowariantną w bazie odkształconej, zaś przecinek pochodną cząstkową.

W naszym przypadku z uwagi na kołową symetrię zagadnienia ilość równań sprowadzi się do dwóch równań następujących:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \tau_{,1}^{11} + I_{12}^2 \tau^{11} + I_{22}^1 \tau^{22} = 0, \\ \tau_{,1}^{13} + I_{11}^3 \tau^{11} + I_{12}^2 \tau^{13} + I_{22}^3 \tau^{22} = 0, \end{cases}$$

a po uwzględnieniu (1.14) i (2.4)

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dr} + 2T(\psi' - \varphi')(\psi'' - \varphi'') - \frac{2C_2}{r}(\psi' - \varphi')^2 = 0, \\ \psi' \frac{dp}{dr} - \frac{\psi' - \varphi'}{r} [2C_2(\psi' - \varphi')\psi' + (D - 2C_2) + T(\psi' - \varphi')^2] - \\ - (\psi'' - \varphi'') [(D - 2C_2) - 2T(\psi' - \varphi')\psi' + T(\psi' - \varphi')^2] = 0. \end{cases}$$

Rugując z powyższych równań  $dp/dr$  i pamiętając, że  $\psi - \varphi = w$ , otrzymamy równanie nieliniowe zawierające jedną nie znaną funkcję  $w(r)$ , a mianowicie

$$(2.8) \quad (D - 2C_2)w'' + (D - 2C_2)\frac{w'}{r} + 3Tw''w'^2 + T\frac{w'^3}{r} = 0.$$

Oznaczając

$$(2.9) \quad \frac{T}{D - 2C_2} = \frac{4C_3}{2(C_1 + C_2) + 12C_2} = k = \text{const},$$

otrzymamy po pierwszym scałkowaniu równania (2.8)

$$(2.10) \quad kw'^3 + w' = \frac{A}{r},$$

gdzie  $A$  oznacza stałą całkowania zależną od warunków brzegowych.

Całkę ogólną równania (2.8) można uzyskać w postaci parametrycznej, a mianowicie

$$(2.11) \quad w(r) = Af(A, r) + B = A \left[ \frac{1}{1 + kw'^2(r)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + kw'^2(r)}{kw'^2(r)} \right| \right] + B,$$

gdzie parametrem jest  $w'$  obliczone z równania trzeciego stopnia (2.10), zaś  $A$  i  $B$  są stałymi całkowania.

Warunki przemieszczeniowe na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni tworzącej walca: dla  $r = 9$ ,  $w = w_0$  dla  $r = b$ ,  $w = 0$  określają stałą  $B$ :

$$(2.12) \quad B = -Af(A, b) = -A \left[ \frac{1}{1+kw'^2(b)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+kw'^2(b)}{kw'^2(b)} \right| \right]$$

i równanie przestępne wiążące stałą  $A$  z odpowiednim przemieszczeniem  $w_0$  ma postać

$$(2.13) \quad w_0 = A[f(A, a) - f(A, b)] = A \left[ \frac{1}{1+kw'^2(a)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+kw'^2(a)}{kw'^2(a)} \right| - \frac{1}{1+kw'^2(b)} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+kw'^2(b)}{kw'^2(b)} \right| \right].$$

Wielkość  $p$  wyznaczyć można z pierwszego równania równowagi (2.7) napisanego w postaci

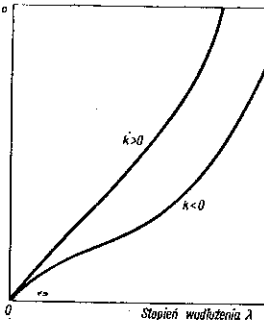
$$(2.14) \quad \frac{dp}{dr} + 2Tw''w' - \frac{2C_2}{r}w'^2 = 0,$$

o ile znamy rozwiązanie  $w'$  równania (2.10).

Wiadomo, że równanie trzeciego stopnia (2.10) posiada różne rozwiązania w zależności od tego, czy wyróżnik charakterystyczny posiada dodatnią czy ujemną wartość. W dalszym ciągu rozpatrzmy dwa możliwe przypadki, zależne przede wszystkim od znaku współczynnika  $k$ .

### 3. Przypadek pierwszy $k > 0$

Przypadek ten odpowiada dodatniej wartości stałej materiałowej  $C_3$  ( $C_1$  i  $C_2$  zawsze są dodatnie). Odpowiednia charakterystyka rozciągania w układzie  $\sigma, \lambda$  (naprężenie jest odniesione do przekroju początkowego) jest bardziej «sztywna» (tj. posiadająca mniej wyraźne przegięcie) niż w przypadku  $C_3$  ujemnego (por. rys. 3).



Rys. 3

Wyróżnik  $\Delta$  równania (2.10) jest wówczas zawsze większy od zera,

$$(3.1) \quad \Delta = \frac{1}{27k^3} + \frac{A^2}{4k^2r^2} > 0,$$

i równanie (2.10) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty

$$(3.2) \quad w'(r) = \left[ \frac{A}{2rk} - \left( \frac{A^2}{4r^2k^2} + \frac{1}{27k^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[ \frac{A}{2rk} + \left( \frac{A^2}{4r^2k^2} + \frac{1}{27k^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = -2 \sqrt[3]{\frac{1}{3k}} \operatorname{sh} \frac{\omega}{3},$$



gdzie oznaczono

$$(3.3) \quad \operatorname{sh} \omega = -\frac{3A}{2r} \sqrt{3k}.$$

Podstawiając funkcję (3.2) i jej pochodną do równania (2.14) oraz zastępując zmienną  $r$  przez  $x = \operatorname{sh} \omega/3$  na podstawie (3.3) otrzymamy po scałkowaniu zależność

$$(3.4) \quad p(x) = -\frac{C_2}{k}(4x^2+3) + \frac{2C_2}{k} \ln |4x^2+3| - \frac{4}{3} \frac{T}{k} x^2 + p_0,$$

w której  $p_0$  oznacza stałą noszącą charakter ciśnienia hydrostatycznego, zależną od warunków brzegowych na powierzchniach czołowych walca.

#### 4. Przypadek drugi $k < 0$

Przypadek ten, bardziej interesujący ze względu na to, że reprezentuje większą ilość materiałów kauczukowatych, odpowiada ujemnej wartości  $C_3$  [mianownik wyrażenia (2.9) jest zawsze dodatni, gdyż  $C_1 + C_2 > 6C_3$ ]. Charakterystyka rozciągania dla tego przypadku jest bardziej «miękką», tj. posiada bardziej wyraźne przegięcie niż dla  $C_3$  dodatniego (por. rys. 3).

Wyróżnik (3.1) równania (2.10) będzie mniejszy od zera, o ile<sup>1</sup>

$$(4.1) \quad -\frac{1}{27k} > \frac{A^2}{4r^2}.$$

Zakładając że warunek (4.1) jest spełniony, równanie (2.10) posiada trzy pierwiastki rzeczywiste:

$$(4.2) \quad w'(r) = 2 \sqrt{\frac{1}{-3k}} \cos \left( \frac{\omega}{3} + n \frac{2\pi}{3} \right) \quad (n = 0, 1, 2),$$

gdzie

$$(4.3) \quad \cos \omega = -\frac{3A}{2r} \sqrt{-3k}.$$

Blizsza analiza zależności (4.2) z uwzględnieniem (2.11) i (2.13) prowadzi do wniosku, że istnieje jeden ściśle określony pierwiastek równania (2.10), odpowiadający przyjętym na wstępie założeniom. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że

a) przemieszczenie  $w_0$  określone wzorem (2.14) musi być w przyjętym układzie współrzędnych dodatnie,  $w_0 \geq 0$  (czyli  $A \leq 0$ ), przy czym  $w_0 = 0$  odpowiada stałej  $A = 0$ ;

b) pochodna przemieszczenia  $w'(r)$  określona wzorem (4.2) spełnia warunek  $w' \leq 0$  i równa się tożsamościowo zeru dla każdego  $r$ , jeśli  $w_0 = 0$  (tj. w stanie nieodkształconym);

<sup>1</sup> W przeciwnym przypadku wyróżnik staje się dodatni i mamy rozwiązanie (4.8) podane dalej.

c)  $w'(r)$  i  $w(r)$  rozpatrywane jako funkcje  $w_0$  są monotoniczne, to rozwiązanie (4.2) równania (2.10) przybierze ostatecznie postać odpowiadającą  $n = 2$ ,

$$(4.4) \quad w'(r) = 2 \sqrt{\frac{1}{-3k}} \cos\left(\frac{\omega}{3} + \frac{4}{3}\pi\right),$$

o ile dla kąta  $\omega$  określonego wzorem (4.3) będziemy przyjmować wartości dodatnie  $(0 - \pi/2)$ . Identyczne z (4.4) wyniki otrzymamy dla  $n = 1$ , o ile dla kąta  $\omega$  przyjmować będziemy wartości ujemne  $(-\pi/2 - 0)$ .

Należy nadmienić, że przytoczone rozumowanie nie pozwala wnioskować o stateczności problemu, ujawniającej się dopiero po nałożeniu na odkształcenia skończone dodatkowych małych odkształceń. Charakter powierzchni czołowej  $\varphi(r)$  nie wpłynie w naszym zagadnieniu na funkcję przemieszczenia  $w(r)$ , natomiast istotnie wpływa na stan naprężenia określony zależnościami (2.4).

Postępując podobnie jak w p. 3 otrzymamy zależność na skalarną funkcję  $p$ . Wprowadzając oznaczenie

$$(4.5) \quad x = \cos \frac{\omega}{3}$$

i dokonując zamiany zmiennej  $r$  na  $x$ , otrzymamy z równania (2.14)

$$(4.6) \quad p(x) = \frac{8}{k} \left\{ C_2 \left[ \frac{4x^2 - 3}{8} + \frac{1}{4} \ln |4x^2 - 3| \right] \cos^2 \left( n \frac{2\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. - \frac{C_2}{2} \left[ x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{3} \sqrt{1 - x^2} + x} \right| \right] \sin \left( n \frac{4\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left[ \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} \right| \right] \sin^2 \left( n \frac{2\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{T}{6} x^2 \cos \left( n \frac{4\pi}{3} \right) - \frac{T}{6} x \sqrt{1 - x^2} \sin \left( n \frac{4\pi}{3} \right) \right\} + p_0,$$

gdzie  $p_0$  jest stałą, zależną od warunków brzegowych na powierzchniach czołowych walca.

Jeśli (w przypadku  $k < 0$ ) zachodzi nierówność,

$$(4.7) \quad -\frac{1}{27k} < \frac{A^2}{4r^2},$$

to zamiast rozwiązania (4.2) otrzymamy

$$(4.8) \quad w'(r) = 2 \sqrt{\frac{1}{-3k}} \operatorname{ch} \frac{\omega}{3},$$

gdzie

$$(4.9) \quad \text{ch } \omega = -\frac{3A}{2r} \sqrt{-3k}.$$

Oznaczając  $x = \text{ch } \omega/3$ , uzyskamy następnie z równania (2.14)

$$(4.10) \quad p(x) = \frac{C_2}{k} (4x^2 - 3) + \frac{2C_2}{k} \ln |4x^2 - 3| + \frac{4}{3} \frac{T}{k} x^2 + p_0.$$

### 5. Naprężenia na powierzchniach tworzących walca. Związek pomiędzy siłą i przemieszczeniem

Rozpatrzmy obecnie naprężenia występujące na powierzchniach tworzących walca. Określenie charakteru tych naprężeń jest bardzo istotne ze względu na możliwość odrywania się materiału łącznika od metalowych powierzchni.

Jednostkowy wektor normalny do wewnętrznej powierzchni walca  $r = a$  (skierowany na zewnątrz materiału) można wyrazić przez współrzędne

$$(5.1) \quad \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{G}^1}{\sqrt{G^{11}}}, \quad n_1 = -1, \quad n_2 = n_3 = 0.$$

Składową normalną napięcia powierzchniowego  $\mathbf{P}$  przypadającą na jednostkę powierzchni odkształconej otrzymamy z zależności

$$(5.2) \quad P_{(n)} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^1}{\sqrt{G^{11}}} = P^k \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}^1 = \tau^{k1} n_k \delta_k^1 = -\tau^{11}(a),$$

a po uwzględnieniu związków (2.4)

$$(5.3) \quad P_{(n)} = -\tau^{11}(a) = -[D + p + Tw'^2(a)].$$

Odpowiednia składowa styczna napięcia powierzchniowego  $\mathbf{P}$  wyrazi się wzorem

$$(5.4) \quad P_{(t)} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}_3}{\sqrt{G_{33}}} = P^k \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}_3 = \tau^{k1} n_k G_{k3} = -\tau^{k1} G_{k3},$$

lub

$$(5.5) \quad P_{(t)} = -[\tau^{11} G_{13} + \tau^{31} G_{33}] = -[(D - 2C_2)w'(a) + Tw'^3(a)].$$

Należy podkreślić, że wielkości  $P_{(n)}$  i  $P_{(t)}$  są odniesione do bazy jednostkowej z uwagi na zależności (5.2) i (5.4).

Zupełnie analogicznie można określić napięcia powierzchniowe na zewnętrznej powierzchni walca  $r = b$ ; otrzymamy wówczas wyrażenia z przeciwnym znakiem, w których zamiast  $w'(a)$  należy podstawić  $w'(b)$ .

Jeśli zgodnie z założeniem uczynionym na wstępie naprężenia styczne działające na wewnętrznej powierzchni walca wywołane są siłą  $S$  przypadającą na jednostkę długości walca, to

$$(5.6) \quad S = 2\pi a P_{(t)} = -2\pi a w'(a) [(D - 2C_2) + Tw'^2(a)],$$

a po uwzględnieniu (2.3) otrzymamy ostatecznie

$$(5.7) \quad S = -2\pi a w'(a) [(2C_1 + 2C_2 + 12C_3) + 4C_3 w'^2(a)].$$

Zależność powyższa wyrażająca nieliniowy związek pomiędzy siłą  $S$  i wywołanym przez nią przemieszczeniem stanowi w pewnym sensie podsumowanie dotychczasowych rozważań.

Powszechnie stosowana prosta formuła M. MOONEY'A na potencjał sprężystości dla materiałów kauczukowatych prowadzi przy naszych założeniach, zgodnie zresztą z intencjami jej autora, do liniowego związku pomiędzy siłą i przemieszczeniem. Wynika to w pewnej mierze z tego, że realizowany przez nas stan odkształcenia w gruncie rzeczy jest zgodny z przypadkiem prostego ścinania (posunięcia), dla którego M. MOONEY wyprowadzając swoją formułę postulował liniowy związek pomiędzy naprężeniem i odpowiednim odkształceniem. Do sprawy tej powrócimy jeszcze w dalszych rozważaniach.

Przejdźmy w dalszym ciągu do zbadania naprężeń występujących na powierzchniach czołowych walca (rys. 2). Należy przy tym pamiętać o odmiennym sposobie sformułowania zagadnienia brzegowego w teorii skończonych odkształceń w porównaniu z teorią klasyczną. Jeśli mając określoną formę ciała nieodkształconego  $B_0$  określamy pewną formę ciała  $B$  w stanie odkształconym, to otrzymamy w wyniku jednoznacznie określony stan naprężenia w ciele  $B$  łącznie z wymaganymi do realizowania tego stanu napięciami powierzchniowymi. Dla materiałów nieściśliwych stan naprężenia określony jest z dokładnością do stałego ciśnienia hydrostatycznego (por. [2]).

Jednostkowy wektor normalny do czołowej powierzchni walca ( $z = 0$ ) w stanie odkształconym posiada współrzędne

$$(5.8) \quad n = \frac{\mathbf{G}^3}{\sqrt{G^{33}}}, \quad n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2}}.$$

Odpowiednia składowa normalna napięcia powierzchniowego na tej powierzchni równa jest zatem

$$(5.9) \quad Q_{(n)} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}^3}{\sqrt{G^{33}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2}} (Q^k \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}^3) = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2}} (\tau^{k3} n_3 \delta_k^3) = \frac{\tau^{33}}{1 + \psi'^2}.$$

Jeśli zażądamy korzystając z założenia dotyczącego długości walca

$$(5.10) \quad \int_a^b Q_{(n)} r dr = \\ = \int_a^b [(D + p)(1 + \varphi'^2) + (2C_2 + p)(w'^2 + 2w' \varphi') + T(1 + \varphi'^2)w'^2] \frac{r dr}{1 + \psi'^2} = 0,$$

to otrzymamy równanie, z którego można wyznaczyć wielkość  $p_0$  występującą we wzorach (3.4), (4.6) i (4.10).

Jest rzeczą zrozumiałą, że całkowanie (5.10) powinno przebiegać dla obranej funkcji  $\varphi(r)$  jak również dla ustalonego współczynnika  $k > 0$  lub  $k < 0$ . W szczególnym przypadku  $\varphi(r) \equiv 0$  wyrażenie (5.10) przybiera prostszą postać i może być scałkowane w podobny sposób jak funkcja  $p$ ; niemniej rachunki są bardzo uciążliwe.

### 6. Przypadek materiału Mooney'a

W przypadku materiału MOONEY'A, tj. przy założeniu we wzorze (2.1)  $C_3 \equiv 0$ , poprzednie zależności i równania począwszy od p. 2 doznają znacznych uproszczeń.

Kontrawariantny tensor naprężenia przybiera teraz postać

$$(6.1) \quad \begin{cases} \tau^{11} = 2(C_1 + 2C_2) + p, \\ r^2 \tau^{22} = 2(C_1 + 2C_2) + 2C_2(\psi' - \varphi')^2 + p, \\ \tau^{33} = [2(C_1 + 2C_2) + p](1 + \varphi'^2) + (2C_2 + p)(\psi'^2 - \varphi'^2), \\ -\tau^{31} = [2(C_1 + 2C_2) + p]\varphi' + (2C_2 + p)(\psi' - \varphi'), \\ \tau^{23} = \tau^{12} = 0. \end{cases}$$

Rczuwając warunki równowagi (2.7) otrzymujemy na przemieszczenie  $w$  równanie

$$(6.2) \quad w'' + \frac{w'}{r} = 0,$$

którego całką ogólną jest funkcja

$$(6.3) \quad w(r) = A \ln r + B.$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych  $w(a) = w_0$ ,  $w(b) = 0$ , otrzymamy

$$(6.4) \quad w(r) = \frac{w_0}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b}.$$

Funkcję skalarną  $p(r)$  wyznaczmy z równania

$$(6.5) \quad \frac{dp}{dr} - \frac{2C_2}{r} w'^2 = 0;$$

otrzymamy

$$(6.6) \quad p(r) = -C_2 \frac{w_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \frac{1}{r^2} + p_0,$$

gdzie  $p_0$  jest stałym ciśnieniem hydrostatycznym.

Wreszcie składowa normalna napięcia odniesionego do jednostki powierzchni odkształconej, zgodnie z (5.3), wynosi

$$(6.7) \quad P_{(n)} = -\tau^{11}(a) = -2(C_1 + 2C_2) + \frac{C_2}{a^2} \frac{w_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} - p_0$$

i odpowiednia składowa styczna, zgodnie z (5.5),

$$(6.8) \quad P_{(t)} = -[\tau^{11}G_{13} + \tau^{31}G_{33}] = -2(C_1 + C_2)w'(a).$$

Związek (5.7) przybierze zatem postać

$$(6.9) \quad S = -2\pi aw'(a)(2C_1 + 2C_2) = -4\pi \frac{(C_1 + C_2)}{\ln \frac{a}{b}} w_0.$$

Wyrażenie (6.9) jest zgodne z rozwiązaniami uzyskanymi przez R.S. RIVLINA, a także A.E. GREENA (por. [2]) dla materiału podlegającego formule M. MOONEY'A.

Warto podkreślić, że funkcja (6.9) oprócz własności materiału  $(C_1 + C_2)$  uwzględnia jedynie stosunek  $b/a$ , dając z jego wzrostem «zmiękczenie» charakterystyki  $S-w_0$ . Natomiast związek nieliniowy (5.7) zależy nie tylko od stosunku  $b/a$ , ale także od samych wymiarów  $a$  i  $b$ .

Dla materiału MOONEY'A równanie (5.10) upraszcza się do postaci:

$$(6.10) \quad \int_a^b [(D+p)(1+\varphi'^2) + (2C_2+p)(w'^2 + 2w'\varphi')] \frac{rdr}{1+\varphi'^2} = 0.$$

Jeśli założymy dodatkowo  $\varphi(r) \equiv 0$  (tj.  $\varphi' = w'$ ) oraz weźmiemy pod uwagę, że  $A = w_0/\ln(a/b)$ , to otrzymamy

$$(6.11) \quad p_0 = \frac{(2C_1 + 4C_2)A^2 \ln \left( \frac{b^2 + A^2}{a^2 + A^2} \right) + C_2 A^2 \ln \frac{b^2}{a^2}}{b^2 - a^2} - 2(C_1 + 2C_2).$$

## 7. Płaskie ścinanie

Przejdźmy obecnie do rozważania przypadku płaskiego ścinania odpowiadającego dość dobrze łącznikowi przedstawionemu na rys. 1b.

Dany jest długi element gumowy (rys. 4) ograniczony dwiema płaskimi równoległymi powierzchniami odległymi od siebie o  $a$ . Załóżmy, że jedna z tych powierzchni jest nieruchoma, zaś druga doznaje skończonego przemieszczenia  $w_0$  nie zmieniając swojej odległości od pierwszej, a dowolny punkt  $P_0$  (rys. 4) przemieszcza się niezależnie od współrzędnej  $z$ . Układ utrzymywany jest w równowadze dzięki naprężeniom stycznym, rozłożonym równomiernie na płaskich powierzchniach.

W ciele nieodkształconym mamy zatem

$$(7.1) \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z + \varphi(x),$$

przy czym  $x, y, z$  grają rolę współrzędnych unoszonych.

W ciele odkształconym otrzymamy zgodnie z przyjętym odkształceniem

$$(7.2) \quad y^1 = x, \quad y^2 = y, \quad y^3 = z + \varphi(x) + w(x) = z + \psi(x).$$

Rozumując w dalszym ciągu analogicznie jak w punktach 1, 2 i dalszych oraz uwzględniając potencjał sprężystości zgodny z (2.1) uzyskamy — przy założeniu oznaczeń (2.3) — kontrawariantny tensor naprężenia w postaci (2.4) z tą tylko różnicą, że  $\tau^{22}$  należy zwiększyć  $r^2$  razy.

Mając na uwadze, że wszystkie symbole CHRISTOFFELA drugiego rodzaju z wyjątkiem

$$(7.3) \quad \Gamma_{11}^3 = \psi''$$

są równe zero, otrzymamy korzystając z równań równowagi wewnętrznej (2.5) następujące równania:

$$(7.4) \quad dp/dr = -2Tw'w'', \quad w'' + 3kw''w'^2 = 0.$$

Całką drugiego równania (7.4) spełniającą warunki brzegowe  $[w]_{x=0} = 0$ ,  $[w]_{x=a} = w_0$ , jest wyrażenie liniowe

$$(7.5) \quad w(x) = \frac{w_0}{a}x.$$

Z pierwszego równania (7.4) wynika zatem

$$(7.6) \quad p(r) = p_0 = \text{const.}$$

Kontrawariantne składowe tensora naprężenia przybiorą ostatecznie postać

$$(7.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^{11} = D + p_0 + T \frac{w_0^2}{a^2}, \\ \tau^{22} = D + p_0 + (T + 2C_2) \frac{w_0^2}{a^2}, \\ \tau^{33} = (D + p_0)(1 + \varphi'^2) + (2C_2 + p_0) \left( 2\varphi' \frac{w_0}{a} + \frac{w_0^2}{a^2} \right) + T(1 + \varphi'^2) \frac{w_0^2}{a^2}, \\ -\tau^{31} = (D + p_0)\varphi' + (2C_2 + p_0) \frac{w_0}{a} + T\varphi' \frac{w_0^2}{a^2}, \\ \tau^{23} = \tau^{12} = 0. \end{array} \right.$$

Składowa normalna napięcia powierzchniowego  $\mathbf{P}$  odniesionego do jednostki powierzchni odkształconej (dla  $x = a$ ) równa się

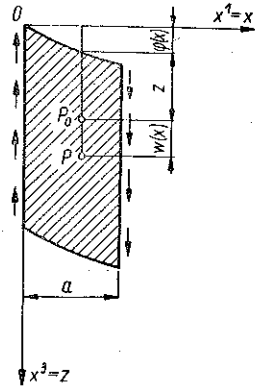
$$(7.8) \quad P_{(n)} = \tau^{11}(a) = D + p_0 + T \frac{w_0^2}{a^2},$$

zaś składowa styczna

$$(7.9) \quad P_{(t)} = \tau^{11}(a)\psi' + \tau^{31}(a) = (D - 2C_2)w'(a) + Tw'^3(a).$$

Związek pomiędzy jednostkową siłą  $S$  i przemieszczeniem  $w_0$  można zapisać w postaci

$$(7.10) \quad S = lw_0 \left[ (2C_1 + 2C_2 + 12C_3) + 4C_3 \frac{w_0^2}{a^2} \right],$$



Rys. 4

jeśli przez  $l$  rozumiemy całkowity wymiar łącznika w kierunku osi  $y^2 = y$  (por. rys. 4).

Odpowiednikiem (5.10) będzie warunek

$$(7.11) \quad \int_0^a \tau^{33} \frac{x dx}{1 + \psi'^2} = 0,$$

który w szczególnym przypadku  $\varphi(x) \equiv 0$  doprowadzi do zależności

$$(7.12) \quad -p_0 = 2(C_2 + 2C_3) + \frac{2(C_1 + C_2 + 4C_3)}{1 + \frac{w_0^2}{a^2}}.$$

### 8. Porównanie z wynikami eksperymentów

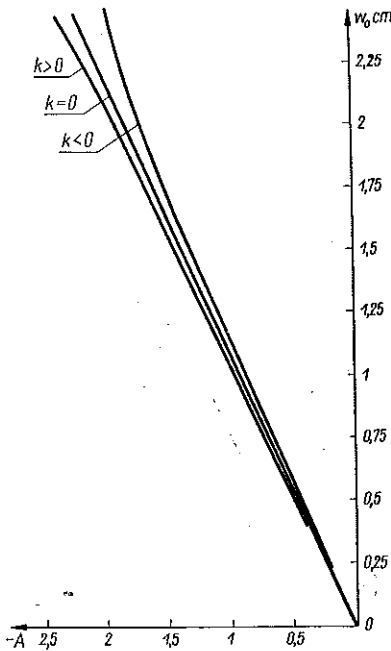
W celu lepszego zilustrowania poprzednich rozważań i porównania otrzymanych wyników z wynikami doświadczalnymi przeprowadzono obliczenia dla łącznika walcowego o promieniu zewnętrznym  $b = 3$  cm i wewnętrznym  $a = 1$  cm przy, czym obliczenia przeprowadzono w przypadku:

(a) kauczuku badanego przez A. ISHIHARĘ, N. HASHIŦSUME i M. TATIBANĘ, [4], dla którego  $C_1 = 1,5$  kG/cm<sup>2</sup>,  $C_2 = 0,04$  kG/cm<sup>2</sup>,  $C_3 = 0,01$  kG/cm<sup>2</sup> ( $k \approx 1/80 > 0$ ),

(b) gumy (8% siarki) badanej przez L. TRELOARA, [7], dla której  $C_1 = 1,9$  kG/cm<sup>2</sup>,  $C_2 = 0,1$  kG/cm<sup>2</sup>,  $C_3 = -0,038$  kG/cm<sup>2</sup> ( $k \approx -1/25 < 0$ ).

W przypadku (a) skorzystano z zależności (3.2), zaś w przypadku (b), z zależności (4.4). Rys. 5 przedstawia wykreślenie związku pomiędzy stałą  $A$  i przemieszczeniem  $w_0$  według wzoru (2.13). Łatwo zauważyć, że w obydwu przypadkach odpowiednie krzywe praktycznie niewiele odchylają się od linii prostej charakteryzującej materiał MOONEY'A. Pozwala to niejednokrotnie (w celu uproszczenia obliczeń wstępnych) korzystać z prostej liniowej zależności (6.4).

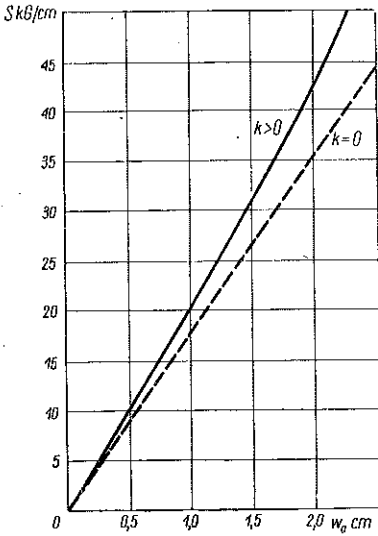
Rysunki 6 i 7 przedstawiają charakterystyki w układzie: przemieszczenie  $w_0$ , siła  $S$ , sporządzone według wzoru (5.7) odpowiednio dla przypadku (a) i (b). Charakterystyki dla materiału MOONEY'A według zależności (6.9) zaznaczono liniami przerywanymi.



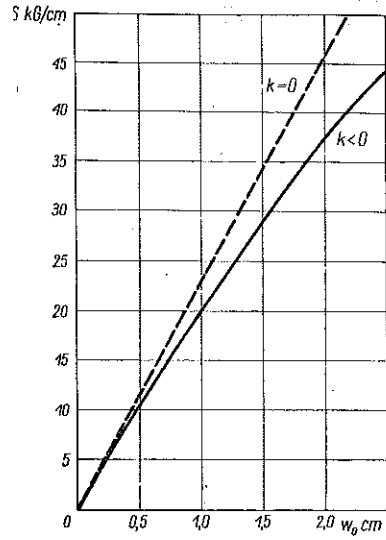
Rys. 5



Przedstawione na rys. 6 i 7 wykresy jakościowo dobrze odpowiadają eksperymentom przeprowadzonym dla materiałów o zbliżonych własnościach. Istotną trudnością w dokładnym, ilościowym porównaniu wyników jest brak odpo-



Rys. 6

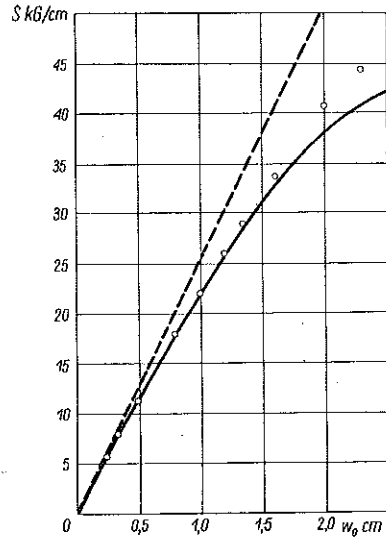


Rys. 7

wiednich doświadczalnych charakterystyk ścinania dla materiałów badanych przez wspomnianych wyżej autorów. Na przykład badacze japońscy, [4], wyznaczają stałe  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  w oparciu o inne schematy odkształcenia, mianowicie proste i dwuosiowe rozciąganie. Znane natomiast w literaturze zagadnienia charakterystyki doświadczalnej dotyczą na ogół innych materiałów, o dokładniej nie sprecyzowanych stałych materiałowych  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ .

Dokładne porównanie ilościowe można przeprowadzić w przypadku płaskiego ścinania dla gumy badanej przez L. TRELOARA, [7], gdyż znana jest odpowiednia charakterystyka doświadczalna.

Na rysunku 8 przedstawiono wykreślenie zależności (7.10), gdy  $a = 1$  cm i  $l = 2\pi$  cm oraz naniesiono pewną ilość punktów eksperymentalnych. Uzyskano dobrą zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych w stosunkowo szerokim (szerszym niż w praktycznych zastosowaniach) zakresie przemieszczeń.



Rys. 8

Нależy nadmienić, że rozważany przez nas schemat płaskiego ścinania i w konsekwencji formuła (7.10) może służyć do eksperymentalnego wyznaczenia stałej  $C_3$ , o ile stałe  $C_1$  i  $C_2$  ( $C_1 + C_2 \approx 1/2 G$ ) są znane.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] В. Л. БИДЕРМАН, *Вопросы расчета резиновых деталей*, Сб. Расчеты на прочность, 3, Москва 1958.
- [2] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
- [3] E. F. GÖBEL, *Gummifedern*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
- [4] A. ISHIHARA, N. HASHITSUME, M. TATIBANA, *Statistical Theory of Rubber-Like Elasticity*, J. Chem. Phys., 19 (1951).
- [5] Z. JAŚKIEWICZ, *Elementy pojazdów mechanicznych. Łączniki sprężyste*, Warszawa 1959.
- [6] R.S. RIVLIN, *Philos. Trans.*, A240, 459, 491 (1948).
- [7] L. TRELOAR, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford 1949.
- [8] S. ZAHORSKI, *A Form of Elastic Potential for Rubber-Like Materials*, Arch. Mech. stos., 5,10 (1959).

#### Резюме

### ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЙ И ПЛОСКИЙ СДВИГ РЕЗИНОВЫХ ШАРНИРОВ В СВЕТЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе рассматриваются два случая резиновых шарниров представленных на рис. 1а и 1в, для схем деформации, приведенных на рисунках 2 и 4. Шарниры этого типа применяются между прочим в автомобильной и авиационной технике. Рассуждения проводятся при предположении статического характера нагрузки, и более общего по сравнению с другими работами вида потенциала упругости для каучуко-подобных материалов. Этот потенциал, более обширно рассматриваемый в работе автора [8], зависит от трех постоянных материала.

Применяя метод А. Е. Грина и пользуясь в значительной степени обозначениями принятыми в книге [2], дается контрвариантный тензор напряжения для случая осесимметрического сдвига (2.4) и случая плоского сдвига (7.7). Определяются нормальные и касательные напряжения, выступающие на поверхностях шарниров (5.3) и (5.5), а также (7.8) и (7.9).

Даются зависимости (5.7) и (7.10) между единичной силой  $S$  и вызванным ею перемещением  $w_0$  (или его производной  $w'$ ). Полученные зависимости согласны формально с решениями полученными Р. С. Ривлином и А. Е. Грином, если ограничиться случаем материала, характеризующегося известной формулой М. Мунвья (ср. [7]).

Проводится дискуссия двух различных вариантов решения в зависимости от знака характеристической постоянной материала  $k$ , определенной зависимостью (2.9).

В заключительной части работы даются графики, иллюстрирующие зависимости (5.7) и (7.10) для двух конкретных материалов. Рисунки 6 и 7

касаются случаев осесимметрического сдвига, а рис. 8—случай плоского сдвига.

Сравниваются полученные теоретические кривые с результатами экспериментов, проведенных другими исследователями, констатируя их согласие с качественной точки зрения. Для случая плоского сдвига (рис. 8) констатируется согласие экспериментальных точек с теоретической кривой.

#### Summary

#### CIRCULARLY SYMMETRIC AND PLANE SHEAR OF RUBBER ELEMENTS IN THE LIGHT OF THE NON-LINEAR THEORY OF ELASTICITY

Two cases of rubber elements are considered as shown at Figs 1a and 1b the deformation schemes being shown at Figs. 2 and 4. Such elements find application in motor-car and aircraft engineering. The considerations are based on the assumption of static load and a more general form of the elastic potential than is used in other works concerning rubber-like materials. This potential, discussed in greater detail in the author's paper, [8], depends on three material constants (2.1).

Using A. E. GREEN's method and, to a considerable extent, the notations of the Ref. [2], the contravariant tensor is given in the form (2.4) for axially symmetric shear, and in the form (7.7) for plane shear. Normal and shear stresses appearing in the surfaces of the elements are determined by (5.3), (5.5) and (7.8), (7.9).

Relations (5.7), (7.10) between the unit force  $S$  and the corresponding displacement  $w_0$  (or its derivative  $w'$ ) are established. The relations obtained are formally in agreement with the solutions obtained by R. S. RIVLIN and A. E. GREEN, as confined to the case of material characterized by the familiar formula of MOONEY (cf. [7]).

Two different variants of the solution are discussed, depending on the sign of the material constant  $k$  determined by (2.9).

In the final part, graphs illustrate the relations (5.7) and (7.10) for two real materials. Figs. 6 and 7 concern circularly-symmetric shear, and Fig. 8 plane shear.

The theoretical curves obtained are confronted with the results of experiments carried out by other investigators. Good qualitative agreement is found. In the case of plane shear, Fig. 8, the agreement between the experimental points and the theoretical curve is also good.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 grudnia 1959 r.*