

KAZIMIERZ PISZCZEK
PARAMETRYCZNY REZONANS KOMBINACYJNY
W UKŁADACH NIELINIOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLII

TOM VIII • ZESZYT 2 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

| | |
|--|-----|
| 1. Wyprowadzenie równań ruchu | 213 |
| 2. Sprowadzenie układu równań do postaci normalnej | 217 |
| 3. Wyznaczenie obszarów rezonansowych i amplitudy drgań ustalonych metodą małego parametru | 219 |
| 4. Przykład | 226 |

W teorii rezonansu parametrycznego stwierdzono, że gdy równanie charakterystyczne układu równań ma pierwiastki wielokrotne różne od ± 1 , to w przypadku tym wystąpi zjawisko rezonansu kombinacyjnego (drugiego rodzaju) dla dwóch częstości własnych układu Ω_1 i Ω_2 , [1], [3]. Jeśli θ oznacza częstość kątową siły parametrycznie wymuszającej drgania, to rezonans kombinacyjny wystąpi w otoczeniu punktu $\theta = |\Omega_1 \pm \Omega_2|/k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Zjawisko to dotychczas nie zostało należycie wyjaśnione, szczególnie jeśli chodzi o przypadek dla częstości kątowej siły wymuszającej w pobliżu $\theta = |\Omega_1 - \Omega_2|$, [2], [3], [4].

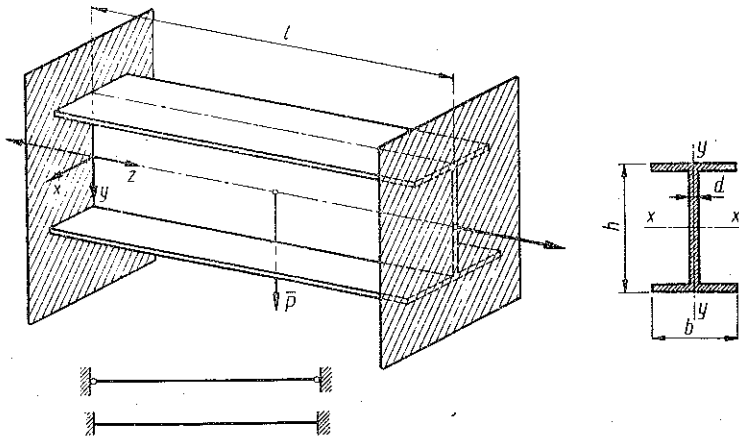
W pracy niniejszej rozważano to zagadnienie, gdy modelem jest belka jednorodna o stałym przekroju w kształcie dwuteownika. Parametryczne drgania tej belki są wymuszane siłą skupioną działającą w środku ciężkości i w płaszczyźnie największej sztywności prostopadle do osi belki. Uwzględniono również nieliniowość geometryczną występującą wskutek założenia o niezbliżaniu się końców belki, przy czym uwzględniono osiową reakcję pochodzącą zarówno od przemieszczenia poprzecznego osi, jak również od obrotu przekrojów belki. Rozważono dwa przypadki siły wymuszającej: (a) siła nie zmienia swego kierunku w czasie drgań, (b) jej część zmienna ma charakter siły «śledzącej» i obraca się wraz z obrotem przekroju w miejscu jej przyłożenia. Zadanie zostało rozwiązane metodą małego parametru. Zagadnienia zbieżności nie rozważano. Pominięto wpływ tłumienia tak zewnętrznego jak i wewnętrznego. Założono warunki brzegowe dwojakiego rodzaju: zamocowanie przegubowe i utwierdzenie zupełne. Do przejścia od równań ruchu (równania różniczkowo-całkowe o pochodnych cząstkowych) do równań różniczkowych zwyczajnych użyto metody GALERKINA.

1. Wyprowadzenie równań ruchu

Rozważmy belkę jednorodną o przekroju stałym w kształcie dwuteownika o dwóch osiach symetrii zamocowaną na końcach tak, aby niemożliwe było zbliżanie się jej końców w czasie drgań (rys. 1). Przypuśćmy, że drgania belki wymuszane są siłą

$$(1.1) \quad P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t,$$

działającą dla uproszczenia w środku ciężkości belki, w płaszczyźnie największej sztywności prostopadle do osi belki. Uwzględnimy dwojakiego rodzaju działanie części zmiennej siły wymuszającej: pierwsze — gdy siła ta nie zmienia swego kierunku w czasie drgań; drugie — gdy obraca się ona wraz z obrotem przekroju w miejscu jej przyłożenia. W tym ostatnim przypadku siłę nazywać będziemy «siłą śledzącą». Część stała siły P należeć będzie stale do pierwszego rodzaju.



Rys. 1

Równania ruchu w postaci ogólnej (bez uwzględnienia siły osiowej) zostały podane w monografii W. W. BOŁOTINA, [1], które w rozważanym przez nas przypadku mają postać następującą:

$$(1.2) \quad \begin{cases} L_1[u, \varphi] \equiv EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M\varphi) - N \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f_1(z, t) = 0, \\ L_2[u, \varphi] \equiv EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - r^2 N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Trzecie równanie określające drgania giętne w kierunku osi y jest niezależne od dwu poprzednich i nim zajmować się nie będziemy. W równaniach (1.1) uwzględniono działanie siły osiowej, której wartość średnia wynosi

$$(1.3) \quad N = \frac{EF}{2l} \left[\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz + \alpha \int_0^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz \right],$$

gdzie pierwszy wyraz przedstawia wpływ przemieszczenia poprzecznego punktów osi belki, drugi — wpływ obrotu przekrojów belki.

W równaniach (1.2) i (1.3) przyjęto następujące oznaczenia:

E moduł Younga,

I_y geometryczny moment bezwładności pola przekroju belki względem osi symetrii równoległej do y ,

- M moment zginający w płaszczyźnie yz ,
 m masa belki na jednostkę długości,
 I_{ω} wycinkowy moment bezwładności,
 G moduł Kirchhoffa,
 I_d geometryczny czynnik sztywności przy czystym skręcaniu,
 $r^2 = I_{\rho}/F$,
 I_p geometryczny biegunowy moment bezwładności,
 $I = r^2 m$ biegunowy masowy moment bezwładności na jednostkę długości,
 F pole poprzecznego przekroju,
 l długość belki,
 α współczynnik liczbowy,
 $u(z, t)$ przemieszczenie w kierunku osi x punktów osi z belki,
 $\varphi(z, t)$ kąt obrotu około osi z przekrojów belki,
 $f_1(z, t) = -q_1^* \varphi(z, t) \cos \theta t$,
 q_1^* obciążenie zewnętrzne na jednostkę długości działające w płaszczyźnie yz wzdłuż osi belki.

Jeśli obciążenie q_1^* nie zmienia swego kierunku w czasie drgań, to $f_1(z, t) \equiv 0$. Jeśli końce belki są zamocowane przegubowo z niemożliwością obrotu około osi z , to funkcje $u(z, t)$ i $\varphi(z, t)$ powinny spełniać warunki brzegowe

$$(1.4) \quad \begin{cases} u(0, t) = \varphi(0, t) = u(l, t) = \varphi(l, t) = 0, \\ u_{zz}(0, t) = \varphi_{zz}(0, t) = u_{zz}(l, t) = \varphi_{zz}(l, t) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \varphi_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Ograniczając się do podstawowej postaci drgań przyjmiemy

$$(1.5) \quad u(z, t) = l p_1(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi(z, t) = p_2(t) \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Funkcje te spełniają warunki brzegowe (1.4). Funkcje czasu $p_1(t)$ i $p_2(t)$ są bezwymiarowymi współzrzednymi uogólnionymi.

Moment zginający pochodzący od siły skupionej (1.1) jest określony w sposób następujący:

$$(1.6) \quad \begin{cases} M(z) = \frac{P}{2} z, & \text{jeśli } 0 \leq z \leq \frac{l}{2}; \\ M(z) = \frac{P}{2} (l-z), & \text{jeśli } \frac{l}{2} \leq z \leq l. \end{cases}$$

Stosując metodę GALERKINA, tj. przyjmując, że

$$\int_0^l L_1[u, \varphi] \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0, \quad \int_0^l L_2[u, \varphi] \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0,$$

otrzymamy nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(1.7) \quad \begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 + a_{12} \left(1 + \beta \frac{P_1}{P_0} \cos \theta t \right) p_2 + k_1 p_1 (p_1^2 + \gamma p_2^2) = 0, \\ \ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 + a_{21} \left(1 + \frac{P_1}{P_0} \cos \theta t \right) p_1 + k_2 p_2 (p_1^2 + \gamma p_2^2) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.8) \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{EI_2 \pi^4}{ml^4}, & a_{12} = -\frac{(4 + \pi^2) P_0}{8ml^2}, & k_1 = \frac{EF \pi^4}{4ml^2}, & \gamma = \frac{\alpha}{\pi^2}, \\ \beta = -\frac{12 - \pi^2}{4 + \pi^2}, & \omega_2^2 = \frac{EI_\omega \pi^4 + GI_a \pi^2 l^2}{Il^4}, \\ a_{21} = -\frac{(4 + \pi^2) P_0}{8I}, & k_2 = \frac{EF \pi^4 r^2}{4Il^2} = k_1. \end{cases}$$

Układ równań (1.7) został wyprowadzony przy założeniu, że część stała siły P nie zmienia swego kierunku, zaś część zmienna tej siły ma charakter obciążenia «śledzącego». W przypadku gdy również część zmienna siły P nie zmienia swego kierunku, to w (1.7) należy przyjąć

$$(1.9) \quad \beta = 1.$$

Jeśli końce belki są utwierdzone zupełnie, to warunki brzegowe mają postać

$$(1.10) \quad \begin{cases} u(0, t) = \varphi(0, t) = u(l, t) = \varphi(l, t) = 0, \\ u_z(0, t) = \varphi_z(0, t) = u_z(l, t) = \varphi_z(l, t) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Przyjmując w tym przypadku upraszczające założenie, że postać drgań da się wyrazić funkcjami

$$(1.11) \quad \begin{cases} u(z, t) = l \check{p}_1(t) \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right), \\ \varphi(z, t) = \check{p}_2(t) \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right) \end{cases}$$

spełniającymi warunki brzegowe (1.10) i po zastosowaniu metody GALERKINA przy postaci momentu zginającego

$$(1.12) \quad \begin{cases} M(z) = \frac{Pl}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{4} \right), & \text{jeśli } 0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \\ M(z) = \frac{Pl}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{l} \right), & \text{jeśli } \frac{l}{2} \leq z \leq l, \end{cases}$$

otrzymamy również układ (1.7). Jednakże obecnie zamiast p_1 i p_2 wystąpią \tilde{p}_1 i \tilde{p}_2 , a współczynniki (1.8) zastąpione będą przez wielkości

$$(1.13) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_1^2 = \frac{16EI_y \pi^4}{3ml^4}, & \tilde{a}_{12} = -\frac{4P_0}{3ml^2}, & \tilde{\beta} = -1, \\ \tilde{k}_1 = \frac{4\pi^4 EF}{3ml^2}, & \tilde{\gamma} = \frac{3a}{4\pi^2}, & \tilde{a}_{21} = -\frac{4P_0}{3I}, \\ \tilde{\omega}_2^2 = \frac{16EI_\omega \pi^4 + 4GI_a \pi^2 l^2}{3I l^4}, & \tilde{k}_2 = \frac{4EF\pi^4 r^2}{3I l^2} = \tilde{k}_1. \end{cases}$$

Również w przypadku, gdy część zmienna siły wymuszającej nie zmienia swego kierunku w czasie drgań, w układzie (1.7) należy przyjąć

$$(1.14) \quad \tilde{\beta} = 1.$$

2. Sprowadzenie układu równań (1.7) do postaci normalnej

W dalszym ciągu wygodniej będzie rozważać układ równań (1.7) w postaci normalnej. Z uwagi na to, że $a_{12} \neq a_{21}$, wprowadzimy nowe współrzędne uogólnione q_1 i q_2 , tak aby

$$(2.1) \quad p_1 = q_1 \quad \text{i} \quad p_2 = a_2 q_2,$$

gdzie

$$(2.2) \quad a_2 = \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}}.$$

Układ (1.7) przyjmie postać

$$(2.3) \quad \begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + a \left(1 + \beta \frac{P_1}{P_0} \cos \theta t \right) q_2 + k_1 q_1 (q_1^2 + \bar{\gamma}_1 q_2^2) = 0, \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + a \left(1 + \frac{P_1}{P_0} \cos \theta t \right) q_1 + k_2 q_2 (q_1^2 + \bar{\gamma}_1 q_2^2) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.4) \quad a = a_2 a_{12}, \quad \bar{\gamma}_1 = a_2^2 \gamma.$$

Przez dokonanie transformacji

$$(2.5) \quad q_1 = a_{11} V_1 + a_{12} V_2, \quad q_2 = a_{21} V_1 + a_{22} V_2,$$

w której współczynniki a_{ik} są tak dobrane, aby był spełniony układ równań

$$(2.6) \quad \begin{cases} a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0, \\ \omega_1^2 a_{11} a_{12} + \omega_2^2 a_{21} a_{22} + a(a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) = 0, \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \end{cases}$$

układ (2.3) przechodzi w układ następujący:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \theta^2 \ddot{V}_1 + \Omega_1^2 V_1 + \bar{\varepsilon} \cos \tau \sum_{m=1}^2 F_{1m} V_m + \sum_{m=0}^3 \bar{\beta}_{1m} V_1^{3-m} V_2^m = 0, \\ \theta^2 \ddot{V}_2 + \Omega_2^2 V_2 + \bar{\varepsilon} \cos \tau \sum_{m=1}^2 F_{2m} V_m + \sum_{m=0}^3 \bar{\beta}_{2m} V_1^{3-m} V_2^m = 0. \end{cases}$$

Wprowadzono tutaj «bezwymiarowy czas» $\tau = \theta t$ oraz oznaczono $\bar{\varepsilon} = aP_1/P_0$. Częstości kątowe Ω_1 i Ω_2 dają się określić z układu

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + a q_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + a q_1 = 0,$$

przy czym

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \Omega_1^2 \Omega_2^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 - a^2.$$

Przy użyciu transformacji (2.5) częstości kątowe Ω_1 i Ω_2 wyrażają się następująco:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \Omega_1^2 = \omega_1^2 a_{11}^2 + 2a a_{11} a_{21} + \omega_2^2 a_{21}^2, \\ \Omega_2^2 = \omega_1^2 a_{12}^2 + 2a a_{12} a_{22} + \omega_2^2 a_{22}^2. \end{cases}$$

Łatwo wykazać, że obliczone tymi dwoma sposobami częstości kątowe Ω_1 i Ω_2 są te same.

Z układu równań (2.6) wynika również, że współczynniki a_{ik} są związane zależnościami

$$(2.9) \quad a_{11} = \mp a_{22}, \quad a_{21} = \pm a_{12}.$$

Występujące w (2.7) pozostałe współczynniki mają następującą postać:

$$(2.10) \quad \begin{cases} F_{11} = -(1+\beta)a_{22}a_{12}, & F_{21} = -\beta a_{12}^2 + a_{22}^2, \\ F_{12} = -a_{12}^2 + \beta a_{22}^2, & F_{22} = (1+\beta)a_{12}a_{22}, \\ \bar{\beta}_{10} = a_1 a_3, & \bar{\beta}_{20} = b_1 a_3, \\ \bar{\beta}_{11} = a_1 a_4 + a_2 a_3, & \bar{\beta}_{21} = b_1 a_4 + b_2 a_3, \\ \bar{\beta}_{12} = a_1 a_5 + a_2 a_4, & \bar{\beta}_{22} = b_1 a_5 + b_2 a_4, \\ \bar{\beta}_{13} = a_2 a_5, & \bar{\beta}_{23} = b_2 a_5, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \begin{cases} a_1 = k_2 + (k_1 - k_2)a_{22}^2, \\ a_2 = -(k_1 - k_2)a_{22}a_{12}, & a_3 = a_{12}^2 + \bar{\gamma}_1 a_{22}^2, \\ a_3 = a_{22}^2 + \bar{\gamma}_1 a_{12}^2, & b_1 = (k_1 - k_2)a_{22}a_{12}, \\ a_4 = -2a_{12}a_{22}(\bar{\gamma}_1 - 1), & b_2 = k_1 + (k_2 - k_1)a_{22}^2. \end{cases}$$

W związkach (2.10) i (2.11) wykorzystano zależności (2.9) przyjmując znaki dolne. Wobec (1.8) i (1.13) mamy oczywiście $a_2 = b_1 = 0$.

Współczynniki transformacji (2.5) wyznaczymy w sposób następujący. Przyjmijmy zależności

$$(2.12) \quad \alpha_{11} = \beta_1 a_{21}, \quad \alpha_{12} = \gamma_1 a_{22}.$$

Pierwsze równanie (2.6) daje $\beta_1 \gamma_1 = -1$, zaś drugie równanie (2.6) pozwoli wyznaczyć β_1 :

$$\beta_1 = -\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{\Delta},$$

gdzie

$$\Delta = \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{a} \right)^2 + 4.$$

Równania trzecie i czwarte układu (2.6) dają wzory

$$(2.13) \quad \alpha_{21} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_1^2}}, \quad \alpha_{22} = \pm \frac{|\beta_1|}{\sqrt{1 + \beta_1^2}}.$$

Z zależności (2.12) mamy

$$(2.14) \quad \alpha_{11} = \pm \frac{\beta_1}{\sqrt{1 + \beta_1^2}}, \quad \alpha_{12} = \pm \frac{\gamma_1 |\beta_1|}{\sqrt{1 + \beta_1^2}}.$$

W ostatnim paragrafie do obliczeń numerycznych przyjęto znaki górne i $\beta_1 > 0$.

Układ równań (2.7) można napisać krótko:

$$(2.15) \quad \theta^2 \ddot{V}_f + \Omega_f^2 V_f + \bar{\varepsilon} \cos \tau \sum_{m=1}^2 F_{fm} V_m + \sum_{m=0}^3 \bar{\beta}_{fm} V_1^{3-m} V_2^m = 0$$

$$(f = 1, 2).$$

3. Wyznaczenie obszarów rezonansowych i amplitudy drgań ustalonych metodą małego parametru

3.1. Rozważmy najpierw drgania odpowiadające rezonansowi kombinacyjnemu (drugiego rodzaju) w otoczeniu wartości częstości kątowej siły wymuszającej (podstawowy obszar rezonansowy $k = 1$):

$$(3.1) \quad \theta = \theta_0 = \Omega_1 + \Omega_2.$$

Podzielmy każde z równań układu (2.15) przez θ_0^2 ; oznaczmy

$$(3.2) \quad \begin{cases} v = \frac{\theta}{\theta_0}, & v_f = \frac{\Omega_f}{\theta_0}, & G_{fm} = F_{fm}, \\ \varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}}{\theta_0^2}, & \beta_{fm} = \frac{\bar{\beta}_{fm}}{\theta_0^2}. \end{cases}$$

Przy tych oznaczeniach otrzymamy

$$(3.3) \quad v^2 \ddot{V}_f + v_f^2 V_f + \varepsilon \cos \tau \sum_{m=1}^2 G_{fm} V_m + \sum_{m=0}^3 \beta_{fm} V_1^{3-m} V_2^m = 0 \quad (f = 1, 2).$$

Rozwiązania powyższego układu przedstawiamy w postaci podwójnych szeregów typu

$$(3.4) \quad V_f = \sum_{m,n} A \cos(m\tau + n\tau_1),$$

gdzie

$$(3.5) \quad \tau = \theta t, \quad \tau_1 = \bar{v}\theta_0 t + \psi = \bar{v} \frac{\theta_0}{\theta} \tau + \psi, \quad \bar{v} = \frac{\theta}{\theta_0} h.$$

Symbol ψ oznacza fazę początkową, przy czym h związane jest z wykładnikiem charakterystycznym, $\varrho = ih$ ($i = \sqrt{-1}$). Z (3.4) widać, że funkcje V_f mogą być uważane za funkcje dwóch zmiennych τ i τ_1 . Układ równań (3.3) przyjmie więc postać

$$(3.6) \quad v^2 \frac{\partial^2 V_f}{\partial \tau^2} + 2v\bar{v} \frac{\partial^2 V_f}{\partial \tau \partial \tau_1} + \bar{v}^2 \frac{\partial^2 V_f}{\partial \tau_1^2} + v_f^2 V_f + \varepsilon \cos \tau \sum_{m=1}^2 G_{fm} V_m + \sum_{m=0}^3 \beta_{fm} V_1^{3-m} V_2^m = 0 \quad (f = 1, 2).$$

Rozwiązań V_f szukać będziemy w postaci szeregów według potęg małego parametru ε

$$(3.7) \quad V_f = A(V_f^{(0)} + \varepsilon V_f^{(1)} + \varepsilon^2 V_f^{(2)} + \dots) \quad (f = 1, 2),$$

gdzie A jest pewną stałą. Przedstawiamy również w postaci szeregów potęgowych v i \bar{v} , a mianowicie

$$(3.8) \quad v = 1 + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots, \quad \bar{v} = v_1 + \varepsilon \bar{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{v}^{(2)} + \dots,$$

w których $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots; \bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)}, \dots$ pozostają do wyznaczenia.

Przyjmijmy również, że β_{fm} i A^2 wyrażają się następująco:

$$(3.9) \quad \beta_{fm} = \gamma_f \delta_{fm}, \quad \gamma_f A^2 = \varepsilon \Gamma_f,$$

gdzie γ_f i Γ_f oraz δ_{fm} mają pewne wartości stałe. Po wstawieniu szeregów (3.7), (3.8) i (3.9) do układu równań (3.6) i przyrównaniu do zera współczyn-

ników przy ε^0 i ε^1 (ograniczamy się do pierwszego przybliżenia) otrzymamy układy równań

$$(3.10) \quad \frac{\partial^2 V_f^{(0)}}{\partial \tau^2} + 2v_1 \frac{\partial^2 V_f^{(0)}}{\partial \tau \partial \tau_1} + v_1^2 \frac{\partial^2 V_f^{(0)}}{\partial \tau_1^2} + v_f^2 V_f^{(0)} = 0 \quad (f = 1, 2),$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V_f^{(1)}}{\partial \tau^2} + 2v_1 \frac{\partial^2 V_f^{(1)}}{\partial \tau \partial \tau_1} + v_1^2 \frac{\partial^2 V_f^{(1)}}{\partial \tau_1^2} + v_f^2 V_f^{(1)} = \\ = -2v^{(1)} \frac{\partial^2 V_f^{(0)}}{\partial \tau^2} - 2(v_1 v^{(1)} + \bar{v}^{(1)}) \frac{\partial^2 V_f^{(0)}}{\partial \tau \partial \tau_1} - 2v_1 \bar{v}^{(1)} \frac{\partial^2 V_f^{(0)}}{\partial \tau_1^2} - \\ - \cos \tau (G_{f1} V_1^{(0)} + G_{f2} V_2^{(0)}) - \Gamma_f (\delta_{f0} V_1^{(0)3} + \delta_{f1} V_1^{(0)2} V_2^{(0)} + \\ + \delta_{f2} V_2^{(0)2} V_1^{(0)} + \delta_{f3} V_2^{(0)3}) \quad (f = 1, 2). \end{aligned}$$

Rozwiązaniami układu (3.10) są funkcje

$$(3.12) \quad V_1^{(0)} = \cos \tau_1, \quad V_2^{(0)} = C^{(0)} \cos(\tau - \tau_1),$$

przy czym w pierwszym rozwiązaniu przyjęto stałą równą jedności, zaś $C^{(0)}$ pozostaje do wyznaczenia. Z uwagi na postać rozwiązania (3.7) amplitudy obydwu rozwiązań będą na ogół różne. Drugie rozwiązanie (3.12) spełnia równanie (3.10) przy wykorzystaniu związku wynikającego z (3.1), (3.2) $v_1 + v_2 = 1$. Wstawiając rozwiązania (3.12) w prawe strony układu (3.11) otrzymamy, jako warunki znikania współczynników przy $\cos \tau_1$ (dla $f = 1$) i $\cos(\tau - \tau_1)$ (dla $f = 2$), związki

$$(3.13) \quad \begin{cases} 2v_1 \bar{v}^{(1)} - \frac{1}{2} C^{(0)} G_{12} - \frac{3}{4} \Gamma_1 \delta_{10} - \frac{1}{2} \Gamma_1 C^{(0)2} \delta_{12} = 0, \\ 2v_2 (v^{(1)} - \bar{v}^{(1)}) C^{(0)} - \frac{1}{2} G_{21} - \frac{1}{2} \Gamma_2 \delta_{21} C^{(0)} - \frac{3}{4} \Gamma_2 \delta_{23} C^{(0)3} = 0. \end{cases}$$

Z równań tych obliczamy

$$(3.14) \quad \bar{v}^{(1)} = \frac{1}{4v_1} C^{(0)} G_{12} + \frac{3}{8v_1} \Gamma_1 \delta_{10} + \frac{1}{4v_1} \Gamma_1 \delta_{12} C^{(0)2},$$

$$(3.15) \quad \begin{aligned} v^{(1)} = \frac{C^{(0)}}{4v_1} G_{12} + \frac{3}{8v_1} \delta_{10} \Gamma_1 + \frac{C^{(0)2}}{4v_1} \delta_{12} \Gamma_1 + \\ + \frac{G_{21}}{4v_2 C^{(0)}} + \frac{\Gamma_2 \delta_{21}}{4v_2} + \frac{3}{8v_2} \delta_{23} \Gamma_2 C^{(0)2}, \end{aligned}$$

przyjmując w powyższych związkach $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ i pisząc warunek konieczny istnienia ekstremum, [3], $v^{(1)}$ jako funkcji $C^{(0)}$, tj. $\partial v^{(1)} / \partial C^{(0)} = 0$ otrzymamy

$$(3.16) \quad C^{(0)} = \pm \sqrt{\frac{v_1 G_{21}}{v_2 G_{12}}}.$$

Wstawiając (3.16) do (3.15) otrzymamy

$$(3.17) \quad v^{(1)} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G_{21}G_{12}}{v_1v_2}} + \frac{G_{21}v_1}{G_{12}v_2} \left(\frac{3\Gamma_2}{8v_2} \delta_{23} + \frac{\Gamma_1}{4v_1} \delta_{12} \right) + \\ + \frac{3}{8v_1} \delta_{10} \Gamma_1 + \frac{1}{4v_2} \delta_{21} \Gamma_2.$$

Przy pomocy pierwszego związku (3.8) otrzymamy kwadrat amplitudy

$$(3.18) \quad A^2 = D \left(v - 1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{G_{12}G_{21}}{v_1v_2}} \right),$$

gdzie

$$(3.19) \quad D = \frac{4G_{12}v_2}{G_{21}v_1 \left(\frac{3}{2} \frac{\beta_{23}}{v_2} + \frac{\beta_{12}}{v_1} \right) + G_{12}v_2 \left(\frac{3}{2} \frac{\beta_{10}}{v_1} + \frac{\beta_{21}}{v_2} \right)}.$$

Rozwiązaniami układu (3.6) w pierwszym przybliżeniu są więc funkcje

$$(3.20) \quad V_1 = A \cos \tau_1, \quad V_2 = \pm A \sqrt{\frac{v_1 G_{21}}{v_2 G_{12}}} \cos(\tau - \tau_1),$$

a na podstawie (2.5), (2.1) i (3.5) mamy

$$p_1 = A \left\{ \alpha_{11} \cos(\bar{v}\theta_0 t + \psi) \pm \alpha_{12} \sqrt{\frac{v_1 G_{21}}{v_2 G_{12}}} \cos[(\theta - \bar{v}\theta_0)t - \psi] \right\}, \\ p_2 = A \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}} \left\{ \alpha_{21} \cos(\bar{v}\theta_0 t + \psi) \pm \alpha_{22} \sqrt{\frac{v_1 G_{21}}{v_2 G_{12}}} \cos[(\theta - \bar{v}\theta_0)t - \psi] \right\}.$$

Rozwiązania te przekształcimy następująco. Niech

$$A_1 = A\alpha_{11}, \quad A_2 = \pm A\alpha_{12} \sqrt{\frac{v_1 G_{21}}{v_2 G_{12}}}, \\ B_1 = A\alpha_{21} \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}}, \quad B_2 = \pm A\alpha_{22} \sqrt{\frac{v_1 G_{21} a_{21}}{v_2 G_{12} a_{12}}}.$$

Wtedy układ powyższy przyjmie postać

$$(3.21) \quad \begin{cases} p_1(t) = C_1(t) \cos \left[\frac{\theta}{2} t - \chi_1(t) \right], \\ p_2(t) = C_2(t) \cos \left[\frac{\theta}{2} t - \chi_2(t) \right], \end{cases}$$

gdzie χ_1 i χ_2 określone są za pomocą wzorów

$$\operatorname{tg} \chi_1(t) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \operatorname{tg} \left[\left(\frac{\theta}{2} - \bar{v}\theta_0 \right) t - \psi \right], \\ \operatorname{tg} \chi_2(t) = \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2} \operatorname{tg} \left[\left(\frac{\theta}{2} - \bar{v}\theta_0 \right) t - \psi \right],$$

zaś kwadraty $C_1(t)$ i $C_2(t)$ są odpowiednio równe:

$$C_1^2(t) = (A_1 + A_2)^2 \cos^2 \left[\left(\frac{\theta}{2} - \bar{v}\theta_0 \right) t - \psi \right] + (A_1 - A_2)^2 \sin^2 \left[\left(\frac{\theta}{2} - \bar{v}\theta_0 \right) t - \psi \right],$$

$$C_2^2(t) = (B_1 + B_2)^2 \cos^2 \left[\left(\frac{\theta}{2} - \bar{v}\theta_0 \right) t - \psi \right] + (B_1 - B_2)^2 \sin^2 \left[\left(\frac{\theta}{2} - \bar{v}\theta_0 \right) t - \psi \right].$$

Widać stąd, że okresem zmiany «fazy» i «amplitudy» jest $T_1 = 2\pi/(\theta - 2\bar{v}\theta_0)$. Postacie rozwiązań (3.21) różnią się od analogicznych rozwiązań (w pierwszym przybliżeniu) w przypadku zwykłego rezonansu parametrycznego tym, że «amplitudy» C_i i «fazy» χ_i są tutaj funkcjami czasu. Charakterystyczny jest występujący również tutaj wyraz $\theta t/2$. Jeśli przyjmiemy w przybliżeniu (dla małych ε) $\theta \approx \theta_0$ oraz $\bar{v} \approx v_1$, to $T_1 = 2\pi/(\Omega_2 - \Omega_1)$ i ruch ma cechy «dudnienia», przy czym wystąpi to tym wyraźniej, im mniej Ω_1 różni się od Ω_2 ($\Omega_2 > \Omega_1$).

Ze związku (3.16) widać, że $C^{(0)}$ ma wartości rzeczywiste, gdy

$$(3.22) \quad G_{21} G_{12} > 0,$$

co w oparciu o (3.2) i (2.10) daje

$$(3.23) \quad (\beta a_{22}^2 - a_{12}^2)(a_{22}^2 - \beta a_{12}^2) > 0.$$

Ponieważ przy obciążeniu «śledzącym» $\beta < 0$, to z (3.23) wynika, że w przypadku tym nie może wystąpić rezonans kombinacyjny w otoczeniu częstości kątowej (3.1), $\theta_0 = \Omega_1 + \Omega_2$. Dla obciążenia nie zmieniającego swego kierunku w czasie drgań mamy $\beta = 1$ i granice podstawowego obszaru rezonansowego znajdziemy z (3.18) podstawiając $A = 0$. Otrzymamy

$$(3.24) \quad v = 1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{G_{12} G_{21}}{v_1 v_2}}.$$

3.2. Rozważmy obecnie drgania w przypadku rezonansu kombinacyjnego w otoczeniu wartości częstości kątowej siły wymuszającej (podstawowy obszar rezonansowy),

$$(3.25) \quad \theta = \theta_0 = \Omega_2 - \Omega_1,$$

przy czym zakładamy, że $\Omega_2 > \Omega_1$ (co wymaga jedynie odpowiedniej numeracji). Prowadząc te same przekształcenia jak poprzednio stwierdzamy, że rozwiązaniem układu (3.10) są funkcje

$$(3.26) \quad V_1^{(0)} = \cos \tau_1, \quad V_2^{(0)} = C^{(0)} \cos(\tau + \tau_1),$$

przy czym w pierwszej przyjęto stałą równą jedności. Druga funkcja (3.26) spełnia równanie (3.10) dla $f = 2$ przy wykorzystaniu związku $v_2 - v_1 = 1$. Oznaczenia poprzedniego punktu pozostają te same z tym zastrzeżeniem, że wartość θ_0 określa wzór (3.25). Podstawiając funkcje (3.26) w prawe strony

układu (3.11), jako warunki znikania współczynników dla $f = 1$ przy $\cos \tau_1$ i dla $f = 2$ przy $\cos(\tau + \tau_1)$, otrzymamy równania

$$(3.27) \quad \begin{cases} 2v_1 \bar{v}^{(1)} - \frac{1}{2} C^{(0)} G_{12} - \frac{3}{4} \Gamma_1 \delta_{10} - \frac{1}{2} \Gamma_1 C^{(0)2} \delta_{12} = 0, \\ 2v_2 C^{(0)} (v^{(1)} + \bar{v}^{(1)}) - \frac{1}{2} G_{21} - \frac{C^{(0)}}{2} \Gamma_2 \delta_{21} - \frac{3}{4} C^{(0)3} \Gamma_2 \delta_{23} = 0. \end{cases}$$

Z równań tych obliczamy

$$(3.28) \quad \bar{v}^{(1)} = \frac{C^{(0)} G_{12}}{4 v_1} + \frac{3 \Gamma_1 \delta_{10}}{8 v_1} + \frac{C^{(0)2} \Gamma_1 \delta_{12}}{4 v_1},$$

$$(3.29) \quad v^{(1)} = \frac{1}{4} \frac{G_{21}}{v_2 C^{(0)}} + \frac{1}{4} \frac{\Gamma_2 \delta_{21}}{v_2} + \frac{3}{8} \Gamma_2 \delta_{23} \frac{C^{(0)2}}{v_2} - \frac{G_{12} C^{(0)}}{4 v_1} - \frac{3 \Gamma_1 \delta_{10}}{8 v_1} - \frac{1}{4} \frac{\Gamma_1 \delta_{12} C^{(0)2}}{v_1}.$$

Przyjmując w powyższych związkach $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ i pisząc analogicznie jak poprzednio warunek konieczny istnienia ekstremum $v^{(1)}$ jako funkcji $C^{(0)}$, otrzymamy

$$(3.30) \quad C^{(0)} = \pm \sqrt{-\frac{G_{21} v_1}{G_{12} v_2}}.$$

Obecnie $C^{(0)}$ ma wartość rzeczywistą, gdy $G_{21} G_{12} < 0$, czyli gdy

$$(3.31) \quad (\beta a_{22}^2 - a_{12}^2) (a_{22}^2 - \beta a_{12}^2) < 0.$$

Dla obciążenia nie zmieniającego swego kierunku w czasie drgań $\beta = 1$ i warunek (3.31) nie może być spełniony. W przypadku zaś obciążenia «śledzącego» mamy $\beta < 0$ i warunek (3.31) jest spełniony. Tak więc przy obciążeniu «śledzącym» rezonans kombinacyjny wystąpi w sąsiedztwie częstości kątowej $\theta_0 = \Omega_2 - \Omega_1$. Wstawiając (3.30) do związku (3.29) otrzymamy (zakładając $G_{21} < 0$)

$$(3.32) \quad v^{(1)} = \mp \sqrt{-\frac{G_{12} G_{21}}{v_1 v_2} - \left(\frac{3 \Gamma_1 \delta_{10}}{8 v_1} - \frac{\delta_{21} \Gamma_2}{4 v_2} + \frac{3 \Gamma_2 \delta_{23} v_1 G_{21}}{v_2^2 G_{12}} - \frac{\Gamma_1 \delta_{12} G_{21}}{4 v_2 G_{12}} \right)},$$

skąd i z (3.8) i (3.9) znajdziemy kwadrat amplitudy:

$$(3.33) \quad A^2 = D_1 \left(v - 1 \mp \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{-\frac{G_{12} G_{21}}{v_1 v_2}} \right),$$

gdzie

$$(3.34) \quad D_1 = \frac{4 G_{12} v_2}{G_{12} v_2 \left(\frac{\beta_{21}}{v_2} - \frac{3 \beta_{10}}{2 v_1} \right) + G_{21} v_1 \left(\frac{\beta_{12}}{v_1} - \frac{3 \beta_{23}}{8 v_2} \right)}.$$

Rozwiązaniami w pierwszym przybliżeniu są funkcje

$$(3.35) \quad V_1 = A \cos \tau_1, \quad V_2 = \pm A \sqrt{-\frac{G_{21}v_1}{G_{12}v_2}} \cos(\tau + \tau_1).$$

Na podstawie (2.1), (2.5) i (3.15) możemy napisać rozwiązania w tym przypadku:

$$(3.36) \quad \begin{cases} \tilde{p}_1 = \tilde{C}_1(t) \cos \left[\frac{\theta}{2} t - \tilde{\chi}_1(t) \right], \\ \tilde{p}_2 = \tilde{C}_2(t) \cos \left[\frac{\theta}{2} t - \tilde{\chi}_2(t) \right], \end{cases}$$

gdzie

$$\tilde{C}_1^2 = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^2 \cos^2 \left[\left(\bar{v}\theta_0 + \frac{\theta}{2} \right) t + \psi \right] + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 \sin^2 \left[\left(\bar{v}\theta_0 + \frac{\theta}{2} \right) t + \psi \right],$$

$$\tilde{C}_2^2 = (\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2)^2 \cos^2 \left[\left(\bar{v}\theta_0 + \frac{\theta}{2} \right) t + \psi \right] + (\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2)^2 \sin^2 \left[\left(\bar{v}\theta_0 + \frac{\theta}{2} \right) t + \psi \right],$$

$$\operatorname{tg} \tilde{\chi}_1(t) = \frac{\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2}{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2} \operatorname{tg} \left[\left(\bar{v}\theta_0 + \frac{\theta}{2} \right) t + \psi \right],$$

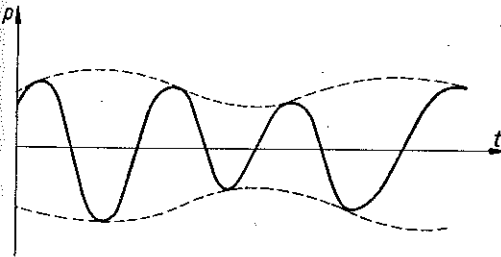
$$\operatorname{tg} \tilde{\chi}_2(t) = \frac{\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2}{\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2} \operatorname{tg} \left[\left(\bar{v}\theta_0 + \frac{\theta}{2} \right) t + \psi \right],$$

zaś

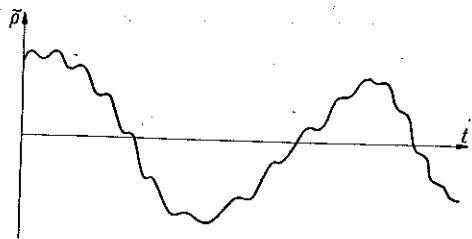
$$\tilde{A}_1 = A a_{11}, \quad \tilde{A}_2 = \pm a_{12} A \sqrt{-\frac{G_{21}v_1}{G_{12}v_2}},$$

$$\tilde{B}_1 = A a_{21} \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}}, \quad \tilde{B}_2 = \pm a_{22} A \sqrt{-\frac{v_1 G_{21} a_{21}}{v_2 G_{12} a_{12}}}.$$

Jeśli w powyższych związkach przyjmiemy dla małych ε $\theta \approx \theta_0$ oraz $\bar{v} \approx v_1$, to okresem «amplitudy» i «fazy» jest $T_1 = 2\pi/(\Omega_1 + \Omega_2)$. Tak więc «amplituda» i «faza» w przypadku siły «śledzącej» zmieniają się w przybliżeniu z częstością



Rys. 2



Rys. 3

równą sumie częstości częściowych $\Omega_1 + \Omega_2$, zaś w przypadku siły nie zmieniającej kierunku w czasie drgań wielkości te mają, przeciwnie, częstość kątową równą różnicy częstości $\Omega_2 - \Omega_1$. Charakter krzywych (3.21) i (3.36) podają odpowiednio rys. 2 i 3.

Granice obszaru rezonansowego otrzymamy przyjmując w (3.33) $A = 0$. Są one określone wzorem

$$(3.37) \quad v = 1 \mp \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{-\frac{G_{12}G_{21}}{v_1 v_2}}$$

Ponieważ $\Omega_2 - \Omega_1 < \Omega_2 + \Omega_1$, to stwierdzenie możliwości wystąpienia rezonansu kombinacyjnego przy obciążeniu «sledzącym» ma również znaczenie praktyczne. Należy się bowiem go spodziewać przy praktycznie realnych częstościach kątowych siły wymuszającej. Zwykle obciążenie zewnętrzne jest związane z drgającą belką i wraz z nią zmienia położenie w przestrzeni.

4. Przykład

Przyjmijmy dla obliczeń numerycznych belkę stalową o stałym przekroju dwuteowym (rys. 1) o następujących wymiarach: $l = 100$ [cm], $h = 10$ [cm], $b = 6,8$ [cm]. Przyjmijmy również dla stali $E = 2,1 \cdot 10^6$ [kG cm⁻²], $G = 0,81 \cdot 10^6$ [kG cm⁻²], ciężar długości jednego metra $Q = 11,2$ [kG]. Obliczone momenty bezwładności wynoszą $I_x = 245,0$ [cm⁴], $I_y = 33,0$ [cm⁴], zaś $I_{\omega} = b^3 h^3 d / 24 = 589,5$ [cm⁶], $I_d = \alpha \sum_i (a_i^3 b_i / 3) = 0,892$ [cm⁴], (symbole a_i i b_i oznaczają szerokość i długość i -go prostokąta, na jakie da się podzielić pole przekroju, $\alpha = 1,3$), $m = Q/g = 1,14 \cdot 10^{-4}$ [kG sek² cm⁻²],

$$\begin{aligned} i_p^2 &= (I_x + I_y) / F = 19,44 \text{ [cm}^2\text{]}, & I &= 22,16 \cdot 10^{-4} \text{ [kG sek}^2\text{]}, \\ EI_y &= 69,3 \cdot 10^6 \text{ [kG cm}^2\text{]}, & EI_{\omega} &= 1238,05 \cdot 10^6 \text{ [kG cm}^4\text{]}, \\ GI_d &= 0,7225 \cdot 10^6 \text{ [kG cm}^2\text{]}, \end{aligned}$$

Dla warunków brzegowych wolnego podparcia mamy z (1.8) $\omega_1 = 768,6$ [sek⁻¹],

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 929,8 \text{ [sek}^{-1}\text{]}, & a_{12} &= -17,02 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & a_{21} &= -8756,0 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ a_2 &= 22,68 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & a &= -386,0 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \end{aligned}$$

przy obciążeniu «sledzącym» $\beta = -0,154$. Przyjęto również $P_0 = Q = 11,2$ [kG]. Pomijając wpływ obrotu przekroju na siłę osiową ($\alpha = 0$) mamy $k_1 = k_2 = 640,19 \cdot 10^6$ [sek⁻²].

Współczynniki transformacji wynoszą, jak łatwo obliczyć,

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,99995, & a_{21} &= 0,00141, \\ a_{22} &= 0,99995, & a_{12} &= -0,00141. \end{aligned}$$

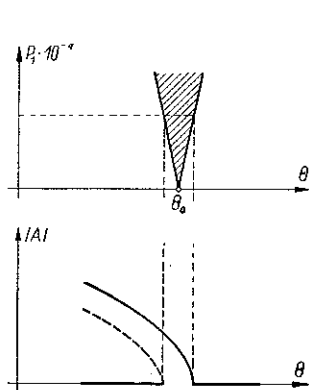
Z (2.10) mamy

$$\begin{aligned} G_{11} &= 0,00119, & G_{21} &= 0,99990, \\ G_{12} &= -0,1544, & G_{22} &= -0,00119, \\ \bar{\beta}_{10} = \bar{\beta}_{21} &= 640,13 \cdot 10^6 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & \bar{\beta}_{12} = \bar{\beta}_{23} &= 0,001267 \cdot 10^6 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ \bar{\beta}_{11} = \bar{\beta}_{22} &= -1,8053 \cdot 10^6 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & \bar{\beta}_{13} = \bar{\beta}_{20} &= 0. \end{aligned}$$

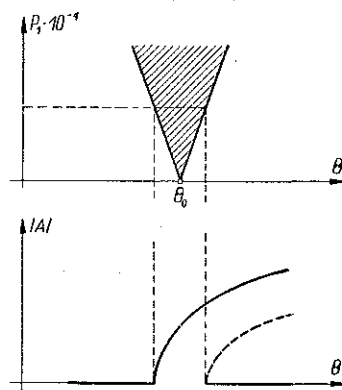
Częstości kątowe, na podstawie (2.8) są równe: $\Omega_1 = 766,02$ [sek⁻¹], $\Omega_2 = = 930,0$ [sek⁻¹]. Dla obciążenia «śledzącego» $\theta_0 = \Omega_2 - \Omega_1 = 163,98$ [sek⁻¹], $v_1 = 4,671$, $v_2 = 5,671$ oraz $\varepsilon = -0,00128 P_1$. Z (3.34) znajdujemy $D_1 = = -0,00116$, zaś bezwzględna wartość «amplitudy» wyniesie

$$|A| = 0,0304 \sqrt{1 - v \pm 0,484 \cdot 10^{-4} P_1}.$$

Granice obszaru rezonansowego i zależność «amplitudy» od v podano na rys. 4. Z rysunku widać, że w przypadku obciążenia «śledzącego» zaciąganie amplitudy ma miejsce dla malejących v (malejących częstości θ).



Rys. 4



Rys. 5

W przypadku obciążenia nie zmieniającego swego kierunku w czasie drgań, z wyżej podanych wartości ulegają zmianie tylko niektóre. W tym przypadku

$$\begin{aligned} \beta &= 1, & \theta_0 &= 1696,02 \text{ [sek}^{-1}\text{]}, & v_1 &= 0,4516, \\ v_2 &= 0,5484, & G_{11} &= 0,00282, & G_{12} &= 0,99989, \\ G_{21} &= 0,99989, & G_{22} &= -0,00282, & \beta_{10} = \beta_{21} &= 222,53, \\ \beta_{12} = \beta_{23} &= 0,00044, & \beta_{11} = \beta_{22} &= -0,6276, & D &= 0,00349, \end{aligned}$$

a bezwzględna wartość «amplitudy»

$$|A| = 0,0590 \sqrt{v - 1 \mp 0,1205 \cdot 10^{-4} P_1}.$$

Granice obszaru rezonansowego i zależność «amplitudy» od v podano na rys. 5. Przyjmując dla przykładu $P_1 \cdot 10^{-4} = 0,5$ [kG], otrzymamy dla obciążenia «śledzącego» wartości rezonansowe częstości kątowej siły wymuszającej θ :

$$124,29 \text{ [sek}^{-1}\text{]} < \theta < 203,60 \text{ [sek}^{-1}\text{]},$$

zaś dla obciążenia zachowującego kierunek

$$1593,83 \text{ [sek}^{-1}\text{]} < \theta < 1798,20 \text{ [sek}^{-1}\text{]}.$$

Widać stąd, że przy tej samej wartości P_1 szerokość obszaru rezonansowego w przypadku siły «śledzącej» jest mniejsza od szerokości obszaru rezonansowego dla obciążenia zachowującego kierunek w procesie drgań.

Literatura cytowana w tekście

- [1] В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Москва 1957.
- [2] В. В. БОЛОТИН, В. Э. ВЛАСОВ, И. И. ГОЛЬДЕНВЛАТ, *О развитии строительной механики*, Изв. Акад. Наук. Отд. Техн. Наук СССР, 2, 1959.
- [3] E. METTLER, *Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper*, Ing. Archiv, Vol. 17, 1949.
- [4] E. METTLER, *Nonlineare Schwingungen und kinetische Stabilität bei Saiten und Stäben*, Ing. Archiv, Vol. 23, 1955.

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КОМБИНАТОРНЫЙ РЕЗОНАНС (ВТОРОГО РОДА) В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается вопрос комбинационного резонанса (второго рода) основываясь на модели в форме однородной, двутавровой балки постоянного сечения, колебания которой возмущаются параметрически силой сосредоточенной в центре тяжести и в плоскости наибольшей жесткости перпендикулярно к оси балки.

Учитывается также геометрическая нелинейность, выступающая в следствие предположения не сближения концов балок, при чем принимается осевая реакционная сила, возникающая в следствие поперечных оборота сечений балки. Относительно возмущающей силы, то предполагается двойко: что (а) она не изменяет своего направления в процессе колебаний и (б) что ее изменяющаяся часть имеет характер «следящей» силы, т.е. что она вращается вместе с оборотом сечения в точке ее приложения.

Констатируется, что параметрический резонанс выступает действительно в соседстве угловой частоты возмущающей силы, равной сумме частот собственных колебаний в случае сохранения постоянного направления в процессе колебаний.

В случае «следящей» нагрузки, параметрический резонанс возможен в соседстве угловой частоты возмущающей силы, равной разнице угловых частот собственных колебаний.

Из рассуждений вытекает также, что при одном и том-же значении P_1 ширина резонансной зоны в случае «следящей» силы — меньше ширины резонансной зоны для нагрузки, сохраняющей направление в процессе колебаний. Затягивание амплитуды в случае «следящей» нагрузки имеет место при уменьшении угловой частоты возмущающей силы, что подтверждается в конкретном числовом примере.

Summary

PARAMETRIC COMBINATION RESONANCE (OF THE SECOND KIND) IN NON-LINEAR SYSTEMS

The problem of combination resonance (of the second kind) is considered for a model constituting a homogeneous beam with constant double-tee cross-section whose vibration is excited parametrically by a concentrated force in its middle point and in the plane of maximum rigidity, normally to the beam axis. The geometrical non-linearity is accounted for, by assuming that the ends do not approach each other. The axial reaction force is assumed to be due to both the transverse displacement of the points of the axis and the rotation of the cross-sections. For the shaking force it is assumed that (1) it does not change direction, (2) it rotates together with the cross-section, the relative position being not changed.

It is found that the parametric resonance appears in the neighbourhood of the shaking frequency equal to the sum of free frequency in the case where the force preserves its direction during the process of vibration. In the case of rotating load parametric resonance is possible in the neighbourhood of the angular shaking frequency equal to the difference of the angular frequencies of free vibration. From the considerations it follows also that with the same value of P_1 the width of the resonance region, in the case of the «rotating» force is less than the width of the resonance region for a load preserving its direction during the vibration process. In the case of «rotating» load amplitude increases with decreasing frequency.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji 20 października 1959 r.
