ZBIGNIEW OSIŃSKI

O NAPRZEMIENNOŚCI RUCHU PRZY PEWNYM TŁUMIENIU NIELINIOWYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLVIII
TOM VIII • ZESZYT 2 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp

Weźmy pod uwagę równanie ruchu w postaci

$$\ddot{x}+R(\dot{x})+\omega^2 x = 0, \tag{1.1}$$

w którym $\omega^2 = \text{const}$ oraz $R(\dot{x})$ jest nieliniową funkcją prędkości. Badaniem ruchu opisanego tym równaniem zajmowali się G. SANSONE, [1], oraz S. ZIEMBA, [2]. G. SANSONE podał szereg własności tego ruchu przy założeniu, że funkcja $R(\dot{x})$, którą można przedstawić w postaci funkcji $R(\dot{x}) = [B+F(\dot{x})\dot{x}]$ spełnia założenia

$$R(\dot{x})\dot{x} > 0, \quad R(-\dot{x}) = -R(\dot{x}), \quad F(\dot{x}) > 0, \quad F(0) = 0, \quad B \geqslant 0 \tag{1.2}$$

oraz jest ciągłą i spełnia warunek LIPSCHITZA. Przy tych założeniach ruch układu jest ograniczony i gasnący oraz jest naprzemienny, gdy $B < 2\omega$, a nienaprzemienny, gdy $B \geqslant 2\omega$, przy czym rozwiązanie ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.

Założenia (1.2) oznaczają, że wykres funkcji $R(\dot{x})$ (charakterystyka tłumienia) leży przy $v > 0$ całkowicie powyżej, a przy $v < 0$ całkowicie poniżej prostej stycznej do charakterystyki w punkcie $v = 0$.

S. ZIEMBA przeprowadza dowód podobnych własności dla szeregu przypadków charakterystyki, która nie spełnia ostatniego warunku, to znaczy leży przy $v > 0$ poniżej swej stycznej w punkcie $v = 0$. Dla rozpatrzonych przypadków podaje kryteria naprzemienności rozwiązań. Praca S. ZIEMBY obejmuje tylko charakterystyki rosnące ze wzrostem v. Nie obejmuje natomiast charakterystyk, które mają w pewnych przedziałach pierwszą pochodną ujemną.

W pracy niniejszej przedstawiamy ogólne kryteria naprzemienności ruchu opisanego równaniem (1.1) czyniąc założenia bardziej ogólne co do wyglądu charakterystyki tłumienia. Zakładamy, że w pewnym przedziale $(-V, V)$, który może być także nieograniczony, charakterystyka spełnia warunek

$$R(\dot{x})\dot{x} > 0. \tag{1.3}$$

Zakładając, że spełnione są warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania (1.1), stwierdzić można, że rozwiązanie tego równania posiada następujące cechy:

1) istnieje w przedziale $(0, \infty)$;

2) jest ograniczone, jeżeli energia początkowa $E_0 < V^2/2$, przy czym ograniczenie wyraża się wzorem

$$(1.4) \qquad |x| \leqslant \frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}, \qquad |\dot{x}| \leqslant \sqrt{2E_0} < V;$$

3) jest gasnące, to znaczy

$$(1.5) \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} E(t) = 0;$$

4) miejsca zerowe wychylenia i prędkości przegradzają się wzajemnie. Dowodu tych własności równania nie przeprowadzamy. Dowód taki znaleźć można w pracy G. SANSONE'A, [1], dla założeń mniej ogólnych od przyjętych przez nas. Łatwo jednak sprawdzić, że przyjęte przez nas założenia prowadzą do tych samych wniosków.

Aby ustalić kryteria naprzemienności, przeprowadzimy odnośną analizę równania, której wyniki wykorzystamy w dalszym ciągu, oraz podamy pewne geometryczne kryteria naprzemienności. Rozważania nasze przeprowadzimy przy podanych wyżej założeniach. Założymy dodatkowo, że funkcję tłumienia można przedstawić w postaci:

$$(1.6) \qquad R(\dot{x}) = a\dot{x} + \varphi(\dot{x}),$$

przy czym

$$a = \left[\frac{dR(\dot{x})}{d\dot{x},}\right]_{\dot{x}=0},$$

a więc wyraz $a\dot{x}$ jest pierwszym wyrazem w rozwinięciu funkcji $R(\dot{x})$ na szereg MACLAURINA, a funkcja $\varphi(\dot{x})$ nie zawiera pierwszej potęgi $\dot{x}$. Założymy, że $a > 0$, natomiast funkcja $\varphi(\dot{x})$ może mieć znak dowolny. Przypadek $\varphi(\dot{x}) = 0$ oznacza znane równanie liniowe. Przypadek $\varphi(\dot{x})\dot{x} > 0$ w całym przedziale zbadany został przez G. SANSONE'A. Pozostaje do zbadania przypadek $\varphi(\dot{x})\dot{x} < 0$ w całym przedziale oraz przypadki, gdy $\varphi(\dot{x})$ i $\dot{x}$ może zmieniać znak w badanym przedziale. Oddzielnie zbadać musimy przypadki $a \gtreqless 2\omega$, które przez analogię do drgań liniowych nazwiemy: nadkrytycznym $a > a_{kr} = 2\omega$, krytycznym $a = a_{kr}$ oraz podkrytycznym $a < a_{kr}$.

2. Charakter ruchu przy tłumieniu podkrytycznym

Ze względu na warunek $a < 2\omega$ jest spełniona dla rzeczywistych wartości r nierówność

$$r^2 + ar + \omega^2 > 0.$$

Z ograniczonych prędkości [wzór (1.4)] wynika także, że funkcja $\varphi(\dot{x})$ ma wartość ograniczoną. Z założenia, że $\varphi(0) = 0$ wynika, że $\varphi(\dot{x})/\dot{x}$ ma także wartość ograniczoną. Jednocześnie

$$\left[\frac{d[\varphi(\dot{x})]}{d\dot{x}}\right]_{\dot{x}=0} = 0,$$

więc

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\varphi(\dot{x})}{\dot{x}}\right| = \lim_{\dot{x}\to 0}\left|\frac{\varphi(\dot{x})}{\dot{x}}\right| = 0.$$

Przyjęte założenia pozwalają stwierdzić, że można znaleźć taką chwilę $\bar{t}$, że dla każdego $t < \bar{t}$ istnieje taka liczba $\tau > 0$, że spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{\varphi(\dot{x})}{\dot{x}}\,\frac{r}{r^2+ar+\omega^2}\right| \leqslant \frac{\tau}{\frac{\pi}{\lambda}+\tau},$$

gdzie

$$\lambda = \sqrt{\omega^2-\frac{a^2}{4}}.$$

Badając zachowanie się funkcji rzeczywistej $r(t) = \dot{x}(t)/x(t)$ analogicznie, jak to przeprowadza G. Sansone, dochodzimy do następującego wniosku: przy spełnieniu założenia (1.3) i $a < 2\omega$ ruch układu jest naprzemienny i ma nieskończoną liczbę miejsc zerowych [niezależnie od znaku $\varphi(\dot{x})$].

3. Charakter ruchu przy tłumieniu nadkrytycznym i krytycznym ($a \geqslant 2\omega$)

Napiszmy badane równanie różniczkowe

(3.1) $$\ddot{x}+a\dot{x}+\varphi(\dot{x})+\omega^2 x = 0$$

w postaci

(3.2) $$\ddot{x}+2\omega\dot{x}+\psi(\dot{x})+\omega^2 x = 0,$$

gdzie $\psi(\dot{x}) = (\alpha-2\omega)\dot{x}+\varphi(\dot{x})$.

Równanie (3.2) przekształcamy na równanie całkowe

(3.3) $$x = z+\int_0^t \psi[\dot{x}(\xi)]e^{-\omega(t-\xi)}(\xi-t)\,d\xi.$$

Funkcja podcałkowa

(3.4) $$\Phi(\xi) = e^{-\omega(t-\xi)}(\xi-t)\,d\xi$$

ma w przedziale (θ, t) znak stały, a mianowicie

(3.5) $$\Phi(\xi) < 0.$$

Obierzemy warunki początkowe

$$x(0) = z(0) = A > 0,\qquad \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Z warunku $R(\theta) = 0$ wynika, że przy takich warunkach początkowych $\ddot{x}(0) < 0$, a stąd, że istnieje przedział $(0, \tau)$, w którym $\dot{x}(t) < 0$. Poza tym istnieje też przedział $(0, \bar{\tau})$, w którym $x(t) > 0$. Przy omówionych warunkach początkowych jest stale $z(t) > 0$ w przedziale $(0, \infty)$. Wartość x może być wyznaczona ze wzoru

$$x(t) = z(t) + A(t),$$

gdzie

$$A(t) = \int_0^t \psi[\dot{x}(\xi)] e^{-\omega(t-\xi)}(\xi - t) d\xi.$$

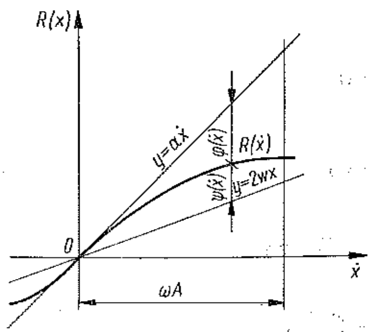
Znak $A(t)$ zależeć będzie wobec (3.5) od znaku $\psi[\dot{x}(\xi)]$. Z podanych na wstępie cech ruchu wynika, że prędkość jest ograniczona i ograniczenie to wyraża się nierównością

$$\dot{x}(t) < \sqrt{2E_0} = \omega A.$$

Założymy, że w przedziale $(-\omega A, +\omega A)$ spełniona jest nierówność

$$|R(\dot{x})| = |2\omega\dot{x} + \psi\dot{x}| > |2\omega\dot{x}|, \tag{3.6}$$

która oznacza, że charakterystyka tłumienia $R(\dot{x})$ leży w przedziale $(0, \omega A)$ całkowicie ponad prostą $y = 2\omega\dot{x}$, a w przedziale $(-\omega A, 0)$ całkowicie powyżej tej prostej (rys. 1). Przy tym założeniu funkcja $\psi(\dot{x})$ spełnia warunek $\psi(\dot{x})\dot{x} > 0$, to znaczy ma stale ten sam znak co prędkość.



Rys. 1

Założymy, że istnieje w przedziale $(0, \infty)$ taka chwila $\bar{t}$, w której x osiąga wartość zerową

$$x(\bar{t}) = 0. \tag{3.7}$$

Z warunku przegradzania się miejsc zerowych wynika, że w przedziale $(0, \bar{t})$, $\dot{x}(t)$ nie ma wartości zerowej, a więc $\dot{x}(t) < 0$ w przedziale $(0, \bar{t}]$. A w związku z tym i $\psi(\dot{x}) < 0$ w przedziale $(0, \bar{t}]$, co wobec (3.5) pociąga za sobą nierówność $A(t) > 0$ w przedziale $(0, \bar{t}]$ i z kolei $x(t) = z(t) + A(t) > 0$ w przedziale $(0, \bar{t}]$. A więc założenie (3.7) jest nieprawdziwe i x nie ma miejsca zerowego w przedziale $(0, \infty)$

Jeżeli jednak charakterystyka $R(\dot{x})$ nie spełni nierówności (3.6), to znaczy będzie w przedziale $(0, \omega A)$ leżeć częściowo poniżej prostej $y = 2\omega\dot{x}$, lub w przedziale $(-\omega A, 0)$ częściowo powyżej tej prostej, wtedy funkcja $\psi(\dot{x})$ może mieć znak dodatni i całka $A(t)$ może stać się ujemną. W tym przypadku $\dot{x}$ może stać się zerem w pewnej chwili $\bar{t}$. W następstwie x osiągnie w pewnej chwili t_1 wartość ekstremalną A_1, przy której $\dot{x}(t_1)$ osiągnie wartość zerową. Zaczynając od nowych warunków początkowych $(A_1,0)$ możemy wtedy sprawę zbadać jak poprzednio. Jeżeli charakterystyka $R(\dot{x})$ spełni w całym przedziale $(-\omega A_1, +\omega_1 A)$ nierówność (3.6), to znaczy, że będzie leżała powyżej prostej $y = 2\omega\dot{x}$ w przedziale $(0, \omega A)$ lub poniżej tej prostej w przedziale $(-\omega A, 0)$ to x nie będzie miało więcej miejsc zerowych. Jeżeli charakterystyka $R(\dot{x})$ nie spełni tej nierówności, to może znów wystąpić następne miejsce zerowe i następne ekstremum A_2. Z warunku malenia energii wynika, że kolejne ekstrema spełniają warunek

$$A > A_1 > A_2 >, \dots, > A_n.$$

Ponieważ $R(\dot{x})$ ma w punkcie $x = 0$ styczną $\alpha \geqslant 2\omega$, więc na pewno znajdziemy takie A_n, dla którego charakterystyka $R(\dot{x})$ będzie leżała powyżej prostej $y = 2\omega\dot{x}$ lub będzie się z nią pokrywała. Tak więc poczynając od pewnej chwili wartość $\dot{x}$ nie będzie miała miejsc zerowych.

Powyższe rozumowanie nie obejmuje jednego przypadku szczególnego, a mianowicie gdy $\alpha = 2\omega$ i $\varphi(\dot{x})\,\dot{x} < 0$ w przedziale $(0, \bar{\dot{x}})$, wtedy funkcja $\psi(\dot{x}) < 0$ w przedziale $(0, \bar{\dot{x}})$. Jednak i w tym przypadku ruch będzie nienaprzemienny, co możemy stwierdzić badając ruch na płaszczyźnie fazowej. Istnieje wtedy dla powyższego równania różniczkowego przy danych założeniach punkt osobliwy $(0,0)$. W punkcie tym możemy stwierdzić istnienie kierunku wyjątkowego określonego równaniem $\dot{x} = -\omega x$. Istnienie zaś kierunku wyjątkowego oznacza, że można znaleźć tak małe otoczenie punktu osobliwego, w którym trajektoria nie przetnie prostej $\dot{x} = -\omega x$. Można więc znaleźć taką chwilę $\bar{t}$, że ruch w przedziale $(\bar{t}, \infty)$ nie będzie miał miejsc zerowych. Tym samym i ten szczególny przypadek spełnia także podane wyżej twierdzenie o naprzemienności ruchu.

Widzimy więc, że w przypadku, gdy spełniony jest warunek $\alpha \geqslant 2\omega$ ruch układu może mieć co najwyżej skończoną liczbę miejsc zerowych.

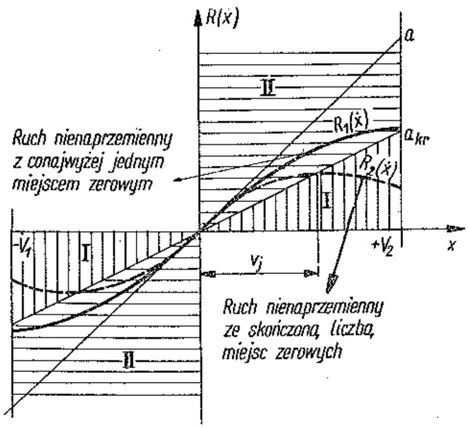
Można zauważyć, że znak funkcji $\psi(\dot{x})$ nie wpływa na tok powyższego rozumowania. Jeżeli funkcja x będzie miała w całym przedziale $(-V_1 + V_2)$ znak prędkości, a więc $\varphi(\dot{x})\dot{x} > 0$, to funkcja $\psi(\dot{x}) = (\alpha - 2\omega)\dot{x} + \varphi(\dot{x})$ także będzie przy $\alpha \geqslant 0$ miała znak prędkości i nierówność (3.6) będzie spełniona w całym przedziale $(-\omega A, +\omega A)$. W tym przypadku oczywiście wychylenie x będzie miało co najwyżej jedno miejsce zerowe. Jeżeli funkcja $\varphi(\dot{x})$ będzie miała znak prędkości w przedziale nieograniczonym $(-\infty, \infty)$ wtedy liczba miejsc zerowych nie zależy w ogóle od amplitudy A i wynosi co najwyżej jedno.

W przypadku, gdy funkcja $\varphi(\dot{x})$ zmienia znak w przedziale $(-V_1, +V_2)$ nasze rozumowanie pozostaje w mocy.

W przedziałach, w których $\varphi(\dot{x})$ ma znak prędkości nierówność (3.6) jest spełniona zawsze. Natomiast w przedziałach, gdzie $\varphi(\dot{x})$ ma znak przeciwny do prędkości, może ona nie być spełniona. W tym przypadku o liczbie miejsc zerowych decydują właśnie te przedziały, dla których $\varphi(\dot{x})\dot{x} < 0$.

4. Interpretacja geometryczna

Z poprzednich rozważań wynika, że naprzemienność ruchu opisanego równaniem (1.1) zależy tylko od stosunku wartości współczynnika a przy liniowym wyrazie w rozwinięciu funkcji tłumienia na szereg MACLAURINA do wartości $a_{kr} = 2\omega$. Pod tym względem rozwiązania równania nieliniowego zachowują się więc podobnie jak rozwiązania odpowiedniego równania liniowego. Natomiast spostrzegamy wyraźną różnicę w zachowaniu się rozwiązań nienaprzemiennych. Ruch opisany odpowiednim równaniem liniowym cechuje w tych warunkach co najwyżej jedno miejsce zerowe wychylenia niezależnie od warunków początkowych. Natomiast układy nieliniowe zachowują się inaczej zależnie od rodzaju charakterystyki $R(\dot{x})$. Przy pewnych charakterystykach wychylenie może mieć także co najwyżej jedno miejsce zerowe niezależnie od warunków początkowych. Przy innych wychylenie może mieć większą liczbę miejsc zerowych, która zależy od warunków początkowych.



Rys. 2

Wyniki poprzednich rozważań wykorzystamy dla ustalenia geometrycznych kryteriów naprzemienności, które mogą być pomocne do szybkiego określenia rodzaju ruchu opisanego równaniem typu (1.1).

Weźmy dla przykładu dowolną charakterystykę tłumienia spełniającą w przedziale $(-V_1, V_2)$ założenie (1.3) (rys. 2). Wykreślmy prostą a o równaniu $y = av$.

Wykreślmy na wykresie prostą a_{kr} o równaniu $y = a_{kr}\ v = 2\omega v$, którą nazwiemy prostą krytyczną. Prosta ta dzieli pole wykresu na dwa obszary I i II. Z położenia prostej a wnioskować możemy o naprzemienności ruchu. Jeżeli prosta leży w obszarze I, to ruch układu jest naprzemienny i rozwiązanie ma nieskończoną liczbę miejsc zerowych. W tym przypadku bowiem współczynniki kierunkowe prostych a i a_{kr} spełniają nierówność $a < a_{kr} = 2\omega$, która, jak wynika z rozważań poprzednich, stanowi kryterium istnienia nieskończonej liczby miejsc zerowych. Jeżeli prosta a leży w obszarze II, to ruch układu jest ruchem nienaprzemiennym i rozwiązanie ma skończoną liczbę miejsc zerowych. Do obszaru II należy także prosta a_{kr}. Współczynniki kierunkowe prostych a i a_{kr} spełniają w tym przypadku nierówność $a \geqslant a_{kr} = 2\omega$, co, jak wyżej zauważyliśmy, warunkuje istnienie skończonej liczby miejsc zerowych. Jeżeli prosta a leży w obszarze II, to korzystając z ustalonych kryteriów możemy ustalić, czy mamy najwyżej jedno miejsce zerowe, czy też więcej.

Jeżeli mianowicie charakterystyka (np. $R_1(\dot{x})$ rys. 2) leży całkowicie w obszarze II [wewnątrz danego przedziału $(-V_1, +V_2)$] wtedy, jak wynika z rozważań punktu 3, ruch ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Jeżeli charakterystyka (np. $R_2(\dot{x})$ rys. 2) wychodzi z obszaru II, wtedy ruch może mieć skończoną liczbę miejsc zerowych większą od jedności.

Uzasadnienie powyższej konstrukcji jest następujące. Jeżeli charakterystyka $R(\dot{x})$ leży całkowicie w obszarze II, wtedy spełnia ona nierównosć (3.6) w całym przedziale $(-V_1, +V_2)$, a to z kolei pociąga niemożliwość uzyskania przez x większej niż jedno miejsc zerowych. Jeżeli $R(\dot{x})$ wychodzi z tego obszaru, to dla pewnych wartości $\dot{x}$ nierównosć (3.6) nie jest spełniona, co pociąga za sobą możliwość uzyskania przez x większej niż jedno liczby miejsc zerowych. Ustalone tu kryteria nie dają odpowiedzi, ile miejsc zerowych ustali się dla przypadku, gdy charakterystyka wchodzi do obszaru I. Zależy to bowiem i od charakterystyki i od wartości początkowej energii. Natomiast można wyznaczyć prędkość v_j taką, że jeżeli od pewnej chwili t_j prędkość ruchu będzie stale mniejsza od v_j, to mamy od tej chwili co najwyżej jedno miejsce zerowe (rys. 2).

Literatura cytowana w tekście

[1] G. Sansone, *Equazioni differentiali nel campo reale*, t. 2 (tłum. rosyjskie), Moskwa 1954.

[2] S. Ziemba, *Free Vibration with Damping of Marked Non-Linear Character*, Arch. Mech. stos., 5, 9 (1957).

Резюме

О КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НЕКОТОРОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕМПФИРОВАНИИ

В работе исследуется движение описанное уравнением (1. 1) для характеристик демпфирования удовлетворяющих условию $R(\dot{x})\,\dot{x} > 0$ в ограниченном или неограниченном интервале $(-V, V)$, а также даются критерии колебательности движения. Используя результаты работ [1] и [2] и дополняя их собственными рассуждениями автор констатирует, что колебательность движения зависит только от значения коэффициента при первой степени разложения функции $R(x)$ в степенный ряд. Автор вводит так называемую критическую прямую.

О колебательности движения можно судить по взаимному положению критической прямой и характеристки демпфирования. Доказывается также, что в случае неколебательности возможно движение, при котором имеем максимально одну нулевую точку отклонения, независимо от начальных условий, или же некоторое конечное число нулевых точек зависящее от начальных условий.

Автор приводит аналитические критерия и графическое различие этих двух случаев.

S u m m a r y

ON THE OSCILLATION PROBLEM OF MOTION WITH NON-LINEAR DAMPING OF A CERTAIN TYPE

The author is concerned with the investigation of the motion described by the equation (1.1).

For damping characteristics satisfying the condition $R(\dot{x})\,\dot{x} > 0$ in a certain finite or infinite interval $(-V, V)$. He establishes certain of the oscillatory characteristics of the motion. Making use of Refs. [1], [2] supplementing them with his own considerations, he finds that the oscillatory nature of the motion depends only on the coefficient of the first power of the power expansion of the function $R(\dot{x})$. The notion of the «critical line» is introduced. The oscillatory character of the motion is determined by the mutual position of the critical line and the damping characteristic $R(\dot{x})$. It is also shown that in the non-alternating case a motion is possible for which the deflection has at most one zero independent of the initial conditions, or a finite number of zeros depending on the initial conditions. Mathematical and graphical criteria are given for the distinction between the two cases.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 lutego 1959 r.