

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

WPLYW SZTYWNOŚCI GIĘTNEJ PRZEPOŃ
NA STATECZNOŚĆ PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXII

TOM IX . ZESZYT 4 . ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	745
2. Przekrój dwuteowy symetryczny. Wyboczenie skrętne	747
3. Przekrój ceowy. Wyboczenie giętno-skrętne	753

1. Uwagi wstępne

Klasyczna teoria prętów cienkościennych, jakkolwiek ze względu na przyjętą nieodkształcalność przekroju poprzecznego zakłada istnienie przepon, pomija jednak wpływ ich sztywności giętej (płytovej) na pracę pręta jako całości. Wpływ ten w odniesieniu do sztywności skrętnej i zachowania się pręta pod obciążeniem zewnętrznym był rozważany przez WŁASOWA, [1]. Przedmiotem niniejszej pracy jest zbadanie charakteru oddziaływania tego czynnika na stateczność pręta cienkościennego o przekroju otwartym. Rozważymy dwa typy przekroju: dwuetowy i ceowy. Dla pierwszego z nich łatwo można uzyskać rozwiązanie zamknięte, dla drugiego otrzymanie takiego rozwiązania byłoby bardzo pracochłonne, dlatego poprzestaniemy na podaniu metody przybliżonej (w granicy — ścisłej), która jest jednocześnie ciekawym przykładem zastosowania szeregów Fouriera w przypadku, w którym nie spełniają one wprost warunków brzegowych zadania.

Wprowadzimy następujące oznaczenia: osie u , v będą głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego, oś x osią ciężkości pręta; przemieszczenia w kierunku tych osi oznaczymy odpowiednio przez ξ , η , ϑ , zaś kąt obrotu (dodatni, widziany od strony dodatniej półosi x ma zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara) przez φ . Długość pręta oznaczymy przez l . Poza tym będziemy używać znanych typowych oznaczeń teorii prętów cienkościennych i teorii płyt.

Rozważymy zagadnienie oddziaływania przepon. Przepony do chwili wyboczenia są nieobciążone, zaś po utracie stateczności jedynym ich obciążeniem są reakcje działające między nimi i ściankami pręta. Wynika stąd, że jedynym oddziaływaniem wypadkowym tych reakcji będzie bimoment, ponieważ wypadkowa siła i wypadkowy moment zrównoważonego układu sił muszą być równe zeru.

Każdą przeponę traktować będziemy jako płytę, której brzegi podparte na ściankach pręta doznają wymuszonych przez jego odkształcenia przemieszczeń brzegowych. Osiove rozciąganie, jak również zginanie pręta nie powodują pacyenia przekroju poprzecznego, zatem nie wywołują stanu naprężeń w przeponie. Stan naprężeń powstać może jedynie na skutek skręcania pręta, ponieważ w tym przypadku przemieszczenia osiove ϑ poszczególnych punktów na konturze przekroju poprzecznego określone są na podstawie znanego wzoru (por. np. [1], [2])

$$(1.1) \quad \vartheta = -\varphi' \omega,$$

gdzie $\varphi' = d\varphi/dx$, zaś ω jest polem powierzchni wycinkowej; powierzchnia ϑ nie jest nigdy płaszczyzną.

Rozważane przez nas przekroje (rys. 1) są symetryczne względem osi u , zatem wykresy pól powierzchni wycinkowych ω będą dla nich antysymetryczne względem tej osi. Biorąc poza tym pod uwagę, że wykres ω jest prostoliniowy dla każdej ścianki obu wymienionych przekrojów, możemy przyjąć na określenie powierzchni odkształcenia płyty-przepony następujące równanie:

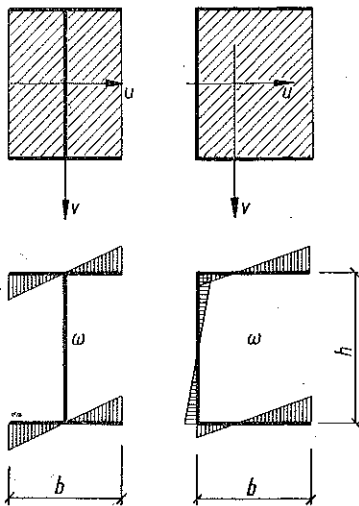
$$(1.2) \quad w(u, v) = 2\Delta(u) \frac{v}{h},$$

gdzie $\Delta(u)$ przedstawia funkcję (w myśl powyższych uwag zawsze liniową) przemieszczenia osiowego punktów krawędzi przepony spoczywającej na dolnej półce ($v = h/2$; por. rys. 2). Funkcja (1.2), spełnia równanie różniczkowe zginania płyty $\Delta\Delta w = 0$, ponieważ zaś otrzymane na jej podstawie momenty zginające płytowe m_x, m_y oraz reakcje r_x, r_y będą równe zero, zatem funkcja ta spełnia też warunki brzegowe dla krawędzi swobodnej i (przy przyjęciu wolnego podparcia przepony na ściankach) również statyczne i geometryczne warunki brzegowe na pozostałych trzech krawędziach. Jedyną istniejącą siłą wewnętrzną w przeponie będzie zatem moment skręcający

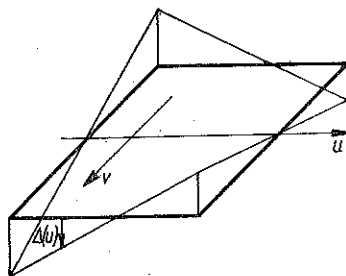
$$m_{xy} = -\frac{2D(1-\nu)}{h} \Delta'(u), \quad \Delta'(u) = \frac{d\Delta(u)}{du},$$

który, jak widać, ma wartość stałą, ponieważ $\Delta(u)$ jest funkcją liniową. Otrzymamy zatem, że jedynymi oddziaływaniami ścianek pręta na przeponę są cztery reakcje skupione $R = 2m_{xy}$, działające w czterech narożach przepony i wynoszące

$$R = -\frac{4D(1-\nu)}{h} \Delta'(u).$$



Rys. 1



Rys. 2

Podstawiając $\Delta(u) = -\vartheta(u, h/2)$ oraz $\vartheta = -\varphi'\omega$, otrzymamy $\Delta'(u) = -\varphi'h/2$, zatem ostatecznie

$$(1.3) \quad R = 2D(1-\nu)\varphi',$$

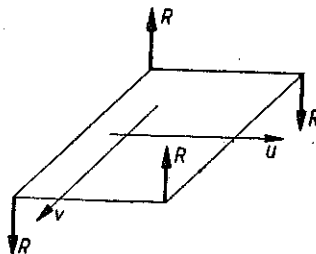
przy czym rzeczywiste kierunki oddziaływania sił R na przepony (przy dodatnim φ') przedstawiono na rys. 3. Takie same, lecz przeciwnie skierowane siły działają na ścianki pręta, zatem bimoment działający na pręt będzie równy $B = R(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4)$, przy czym $\omega_1, \dots, \omega_4$ przedstawiają wartości funkcji ω w punktach narożnych przepony. Jak łatwo stwierdzić, wyrażenie w nawiasie jest równe polu powierzchni bh przepony, zatem¹

$$B = 2Dbh(1-\nu)\varphi'.$$

Wzór ten zapiszemy krótko

$$(1.4) \quad B = K\varphi', \quad K = \frac{Ebhg^3}{6(1-\nu)},$$

gdzie g jest grubością przepony.



Rys. 3

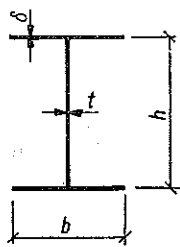
2. Przekrój dwuteowy symetryczny. Wyboczenie skrętne

Przekrój ten (rys. 4) ulega jak wiadomo trzem rodzajom utraty stateczności: wyboczeniu giętnemu w płaszczyźnie jednej z osi głównych i wyboczeniu skrętnemu. Ponieważ oddziaływania przepon zależą wyłącznie od φ' , przeto mogą mieć one wpływ tylko na wyboczenie skrętne. Przytoczymy tu znany wzór klasycznej teorii prętów cienkościennych dla siły krytycznej wyboczenia skrętnego:

$$(2.1) \quad P_\omega = \frac{A}{I_u + I_v} \left(\frac{n^2 \pi^2 EI_\omega}{l^2} + GI_s \right).$$

W dalszym ciągu będziemy używać bezwymiarowego współczynnika $k = P/EA$ (będącego jednostkowym odkształceniem osiowym), który zatem będzie równy

$$(2.2) \quad k_\omega = \frac{1}{I_u + I_v} \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} I_\omega + \frac{I_s}{2(1+\nu)} \right).$$



Rys. 4

Dwie przepony na końcu pręta. Równanie równowagi pręta podlegającego skręcaniu i obciążonego siłą osiową jest w naszym wypadku niezależne od pozostałych równań równowagi i ma znaną postać (por. np. [1], [2]):

$$(2.3) \quad EI_\omega \varphi^{IV} + (r^2 P - GI_s) \varphi^{II} = 0, \quad r^2 = \frac{I_u + I_v}{A}$$

lub

$$(2.4) \quad \varphi^{IV} + \gamma^2 \varphi^{II} = 0, \quad \gamma^2 = \frac{r^2 P - GI_s}{EI_\omega} = \frac{I_u + I_v}{I_\omega} k - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{I_s}{I_\omega}.$$

¹ Pierwszy podał ten wzór WŁASOW, [1], wyprowadzając go na nieco innej drodze (z rozważań energetycznych).

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać

$$(2.5) \quad \varphi = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \gamma x + C_4 \sin \gamma x.$$

Przyjmijmy początek układu $x = 0$ w środku długości pręta. Ponieważ praktyczne znaczenie posiada tylko pierwsza wartość siły krytycznej, to ograniczymy się do rozpatrzenia symetrycznej postaci wybożenia, zatem przyjmijmy $C_2 = C_4 = 0$. Warunki brzegowe przy założeniu wolnego podparcia i skrepowania deplanacji przekrojów skrajnych tylko przez przepony będą następujące:

$$(2.6) \quad x = l/2, \quad \varphi = 0, \quad B = -EI_\omega \varphi'' = K\varphi'.$$

Prowadzą one do układu równań

$$(2.7) \quad \begin{cases} C_1 + C_3 \cos \bar{\gamma} = 0, \\ C_3 (EI_\omega \gamma^2 \cos \bar{\gamma} + K\gamma \sin \bar{\gamma}) = 0, \quad \bar{\gamma} = \gamma \frac{l}{2}, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy równanie przestępne do wyznaczenia współczynnika γ ,

$$(2.8) \quad \operatorname{tg} \bar{\gamma} + \frac{EI_\omega}{K} \gamma = 0,$$

z którego następnie można wyliczyć współczynnik k według wzoru

$$(2.9) \quad k = \frac{1}{I_u + I_v} \left(I_\omega \gamma^2 + \frac{I_s}{2(1+\nu)} \right).$$

W przypadku skrajnym $K = 0$ (przepona idealnie wiotka) będziemy mieli równanie $\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \infty$, skąd $\gamma = n\pi/l$ ($n = 1, 3, 5, \dots$); podstawiając tę wartość do (2.9) otrzymamy wzór (2.2)

W drugim skrajnym przypadku $K = \infty$, to znaczy gdy przepona jest nieskończenie sztywna, równanie (2.8) przybiera postać $\operatorname{tg} \bar{\gamma} = 0$, skąd $\gamma = 2n\pi/l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Podstawiając powyższą wartość do (2.9) otrzymamy wzór na siłę krytyczną pręta o obu końcach doskonale utwierdzonych:

$$(2.10) \quad k = \frac{1}{I_u + I_v} \left(\frac{4n^2 \pi^2}{l^2} I_\omega + \frac{I_s}{2(1+\nu)} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Obliczymy siłę krytyczną dla pręta o wymiarach: $l = 6$ m, $h = 30$ cm, $b = 20$ cm, $t = 1$ cm, $\delta = 2$ cm, przyjmując $\nu = 0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm² i biorąc różne grubości g przepon.

Według (1.4) otrzymamy $K = 109,89 g^3 E$; pozostałe wielkości nie zależą od g i wynoszą: $A = 110$ cm², $I_u + I_v = 22950$ cm⁴, $I_\omega = 2,4 \cdot 10^6$ cm⁶, $I_s = 116,68$ cm⁴.

Równanie (2.8) przybiera postać

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} + \frac{21840}{g^3} \gamma = 0.$$

Zestawienie wartości krytycznych współczynnika k obliczonych z powyższego równania w zależności od grubości g przepony zawiera tablica 1.

Tablica 1

g cm	0	1	1,5	2	3	5	∞
$k \cdot 10^3$	4,82	4,85	4,93	5,07	5,62	8,02	13,42
$\Delta k\%$	—	0,6	2,3	3,9	16,6	66,4	178,5

W ostatnim wierszu tablicy zestawiono procentowe zwiększenie siły krytycznej w stosunku do siły dla pręta bez przepon ($g = 0$). Jak widać, wpływ przepon rośnie szybko ze zwiększeniem ich grubości, niemniej jednak nawet grube (w praktycznym tego słowa znaczeniu) przepony dają zwiększenie siły krytycznej rzędu zaledwie kilka procent. Oznacza to, że dopiero masywne, blokowe przepony końcowe zapewniają pracę pręta w warunkach uniemożliwienia deplanacji przekrojów skrajnych. W tych przypadkach wzrost siły krytycznej jest przeszło 2,5-krotny.

Przepony gęsto rozmieszczone. Rozważmy pręt stężony przeponami w takiej ilości, że ich oddziaływanie bez uszczerbku dla dokładności można uważać za rozłożone w sposób ciągły wzdłuż osi pręta. Przyjmiemy, że wszystkie przepony są jednakowe, a ich liczba wynosi m .

Jako równanie wyjściowe przyjmujemy (2.3) uzupełnione wyrazem przedstawiającym wpływ sił t_i równoległych do osi x , rozłożonych wzdłuż długości pręta (por. [3]):

$$(2.11) \quad EI_{\omega} \varphi^{IV} + (r^2 P - GI_s) \varphi'' = \Sigma t_i' \omega_i,$$

gdzie $t_i' = dt_i/dx$, zaś ω_i przedstawia wartość pola powierzchni wycinkowej w punkcie zaczepienia siły t_i . W celu otrzymania dokładniejszych wyników działania przepon skrajnych uwzględnimy ściśle w sposób podany w rozważaniach poprzednich, zatem będziemy mieli uwzględniając tylko przepony wewnętrzne:

$$t_i = \pm \frac{R_i}{l} (m-2);$$

biorąc pod uwagę, że wszystkie siły R przekazywane z przepon są jednakowe co do wielkości i dane są za pomocą wzoru (1.3), otrzymamy

$$t_i = \pm \frac{2D(1-\nu)(m-2)}{l} \varphi';$$

zatem

$$t_i' = \pm \frac{2D(1-\nu)(m-2)}{l} \varphi''.$$

Znak w powyższych wzorach należy ustalić w zależności od kierunku działania siły R biorąc pod uwagę, że dodatnie obciążenie t we wzorze (2.11) działa w kierunku zgodnym z dodatnim kierunkiem osi x . Uwzględniając działanie wszystkich czte-

rech sił R i pamiętając o uwagach wypowiedzianych przy wyprowadzeniu wzoru (1.4), otrzymamy ostatecznie równanie różniczkowe

$$EI_{\omega} \varphi^{IV} + (r^2 P - GI_s) \varphi'' = \frac{2bhD(1-\nu)(m-2)}{l} \varphi''$$

lub krócej

$$(2.12) \quad \varphi^{IV} + \gamma_*^2 \varphi'' = 0,$$

gdzie

$$\gamma_*^2 = \frac{I_u + I_v}{I_{\omega}} k - \frac{I_s}{2(1+\nu)I_{\omega}} - \frac{1}{6} \frac{bhg^3}{I_{\omega} l(1+\nu)} (m-2).$$

Rozwiązanie ogólne tego równania i warunki brzegowe nie różnią się od podanych wzorami (2.5) i (2.6). Zatem równanie przestępne zagadnienia będzie

$$(2.13) \quad \operatorname{tg} \bar{\gamma}_* + \gamma_* \frac{EI_{\omega}}{K} = 0, \quad \bar{\gamma}_* = \gamma_* \frac{l}{2},$$

przy czym współczynnik k obliczać należy ze wzoru

$$(2.14) \quad k = \frac{1}{I_u + I_v} \left[I_{\omega} \gamma_*^2 + I_s \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{6} \frac{bhg^3}{l(1+\nu)} (m-2) \right].$$

Krytyczne wartości współczynnika k dla pręta rozważanego poprzednio w zależności od ilości przepon m przy stałej grubości $g = 1$ cm zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 2

m	0	2	8	10	12
k · 10 ⁸	4,82	4,85	4,87	4,88	4,89

Jak widać, przepony pośrednie dają znacznie mniejsze zwiększenie siły krytycznej niż przepony skrajne. Ta mała efektywność przepon pośrednich tłumaczy się tym, że φ' osiąga największą wartość w okolicy podpór, zaś w środku pręta jest $\varphi' = 0$ (przy rozważanej przez nas symetrycznej postaci wyboczenia).

Zastosowanie szeregów Fouriera. Wyprowadzone poprzednio wzory umożliwiają ściśle rozwiązanie zagadnienia w przypadku dwu przepon, przy czym konieczne jest rozwiązanie równania przestępnego (2.8). Zastosujemy obecnie szeregi Fouriera, które umożliwiają uzyskanie prostych i dokładnych wzorów przybliżonych, a poza tym, w konfrontacji z rozwiązaniami ścisłymi, dadzą materiał porównawczy pozwalający na rozszerzenie metody na zagadnienia bardziej skomplikowane. Stosowanie szeregów Fouriera wprost nie jest jednak możliwe, ponieważ nie spełniają one wszystkich warunków brzegowych.

Rozważać będziemy symetryczną postać wyboczenia, początek układu $x = 0$ przyjmiemy na podporze. Przyjmijmy rozwiązanie równania (2.4) postaci funkcji

$$(2.15) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x + Cx(l-x), \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l},$$

która spełnia wymagania symetrii oraz warunek brzegowy $\varphi = 0$ dla $x = 0$ oraz $x = l$. Wielkość C jest dowolną stałą. Obliczymy pochodne funkcji $\varphi(x)$:

$$(2.16) \quad \begin{cases} \varphi' = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \alpha_n \cos \alpha_n x + C(l-2x), \\ \varphi'' = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \alpha_n^2 \sin \alpha_n x - 2C. \end{cases}$$

Wykorzystamy teraz drugi warunek brzegowy, mianowicie

$$x = l \quad -EI\varphi'' = K\varphi'.$$

Podstawiając (2.16) oraz $x = l$ otrzymamy równanie

$$2EI_{\omega} C = -K \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \alpha_n - KlC,$$

z którego można obliczyć stałą C :

$$(2.17) \quad C = - \frac{K \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \alpha_n}{2EI_{\omega} + Kl}.$$

Funkcję $C = \text{const}$ przedstawimy za pomocą szeregu Fouriera

$$(2.18) \quad C = - \frac{K \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \alpha_k}{2EI_{\omega} + Kl} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin \alpha_n x.$$

Obecnie możemy podstawić (2.15) do równania różniczkowego (2.4) uwzględniając przy tym (2.18); otrzymamy

$$(2.19) \quad EI_{\omega} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \alpha_n^4 \sin \alpha_n x - (r^2 P - GI_s) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(A_n \alpha_n^2 - \frac{2K \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \alpha_k}{2EI_{\omega} + Kl} \frac{4}{n\pi} \right) \sin \alpha_n x = 0.$$

Po skreśleniu znaku sumowania po wskaźniku n oraz funkcji $\sin \alpha_n x$ otrzymamy dla każdego n jedno równanie zawierające wszystkie, to znaczy nieskończoną ilość niewiadomych A_n :

$$\alpha_n^4 A_n - \gamma^2 \left(A_n \alpha_n^2 - \frac{8K}{2EI_{\omega} + Kl} \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \alpha_k \right) = 0$$

lub po podzieleniu przez α_n^2

$$(2.20) \quad A_n (\alpha_n^2 - \gamma^2) + \gamma^2 \mu \frac{1}{n^2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} k A_k = 0, \quad \mu = \frac{8Kl}{2EI_{\omega} + Kl} \frac{1}{\pi^2}.$$

Równań typu (2.20) należy napisać tyle, ile chcemy uwzględnić wyrazów A_n . Otrzymamy w ten sposób układ równań algebraicznych jednorodnych, z którego warunek wybozeniowy da się uzyskać przez przyrównanie wyznacznika do zera.

Jako pierwsze przybliżenie przyjmujemy jeden tylko wyraz rozwinięcia, mianowicie A_1 . Równanie przedstawia się następująco:

$$A_1(\alpha_1^2 - \gamma^2) + \gamma^2 \mu A_1 = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$(2.21) \quad \gamma^2 = \frac{\alpha_1^2}{1 - \mu} = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{1 - \mu}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (2.9) mamy ostatecznie

$$(2.22) \quad k = \frac{I_\omega}{I_u + I_v} \left[\frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{1 - \mu} + \frac{1}{2(1 + \nu)} \frac{I_s}{I_\omega} \right].$$

Wzór ten różni się od analogicznego wzoru klasycznej teorii prętów cienkościennych tylko obecnością czynnika $1/(1 - \mu)$ i przy $g = 0$, a zatem przy $\mu = 0$ daje ścisłą wartość współczynnika k dla pręta pozbawionego przepon. Zestawienie ścisłych i przybliżonych wartości współczynnika k dla rozmaitych grubości g przepony dla pręta rozważonego poprzednio przedstawiono w tabelicy 3.

Tablica 3

g cm	0	1	2	3	∞
$k_{\text{śc}} \cdot 10^3$	4,82	4,85	5,07	5,62	13,42
$k_{\text{przyb}} \cdot 10^3$	4,82	4,85	5,07	5,65	17,1

Biorąc pod uwagę, że przepony nigdy nie są zbyt grube, można przyjąć, że wzór (2.22) zawsze jest wystarczająco dokładny, nie dając w praktycznie ważnych przypadkach błędów większych niż jeden procent.

Lepsze przybliżenie można uzyskać biorąc pod uwagę dwa wyrazy rozwinięcia, mianowicie A_1 i A_3 . Otrzymamy układ równań

$$A_1(\alpha_1^2 - \gamma^2) + \gamma^2 \mu (A_1 + 3A_3) = 0,$$

$$A_3(\alpha_3^2 - \gamma^2) + \gamma^2 \frac{\mu}{27} (A_1 + 3A_3) = 0$$

lub po uporządkowaniu

$$(2.23) \quad \begin{cases} A_1[\alpha_1^2 - \gamma^2(1 - \mu)] + 3\gamma^2 A_3 \mu = 0, \\ A_1 \frac{\mu}{27} \gamma^2 + A_3 \left[\alpha_3^2 - \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{9} \mu \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Przyrównanie wyznacznika układu do zera daje równanie kwadratowe ze względu na γ^2 :

$$(2.24) \quad \gamma^4(9 - 10\mu) - \gamma^2 \frac{\pi^2}{l^2} (90 - 82\mu) + 81 \frac{\pi^4}{l^4} = 0.$$

Dla $g = 3$ cm, tzn. $\mu = 0,21929$, otrzymujemy równanie

$$6,8071\gamma^4 - 19,7442 \cdot 10^{-4}\gamma^2 - 6,08808 \cdot 10^{-4} = 0,$$

którego mniejszy pierwiastek wynosi $\gamma^2 = 0,35062 \cdot 10^{-8}$, skąd otrzymujemy $k = 5,62 \cdot 10^{-3}$, tzn. wielkość równą wartości otrzymanej z rozwiązania zamkniętego, podczas gdy w pierwszym przybliżeniu błąd wynosił jeszcze 0,53%.

Dla $g = \infty$, tzn. $\mu = 8/\pi^2$, mamy równanie

$$0,89430\gamma^4 - 6,4518 \cdot 10^{-4}\gamma^2 + 6,08808 \cdot 10^{-8} = 0,$$

którego pierwiastek wynosi $\gamma^2 = 1,1165 \cdot 10^{-4}$; skąd mamy $k = 13,04 \cdot 10^{-3}$ zamiast ściślej wartości $k = 13,42 \cdot 10^{-3}$, tzn. błąd wynosi w tym skrajnym wypadku zaledwie 2,8%, czyli jest pozbawiony większego znaczenia praktycznego. Stąd wniosek, że drugie przybliżenie można stosować w przypadku przepon dowolnej grubości, pamiętając jednak, że w praktycznie realnych wypadkach wystarczy pierwsze przybliżenie dane za pomocą prostego wzoru (2.22).

3. Przekrój ceowy. Wyboczenie giętno-skrętne

Rozważany przekrój przedstawiono na rys. 5. Równania równowagi dla skrećania i zginania w płaszczyźnie osi v przedstawiają się jak następuje (por. np. [1], [2]):

$$(3.1) \quad \begin{cases} EI_u \eta^{IV} + P\eta'' - a_u P\varphi'' = 0, \\ EI_\omega \varphi^{IV} + (P^2 - GI_s)\varphi'' - a_u P\eta'' = 0, \end{cases}$$

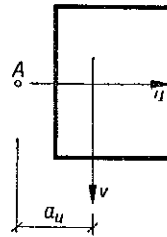
gdzie a_u jest współrzędną u środka zginania A w układzie u, v .

Trzecie równanie równowagi jest niezależne i nie zawiera kąta φ , wobec tego istnienie przepony nie wpływa na jego rozwiązanie i odpowiadającą mu siłę krytyczną wyboczenia giętnego w płaszczyźnie symetrii. Natomiast siła krytyczna wyboczenia giętno-skrętnego wynikająca z rozwiązania powyższego układu równań będzie oczywiście zależna od wpływu przepon. Warunki brzegowe naszego zagadnienia są:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x = 0, \quad \eta = \eta'' = 0, \quad \varphi = 0, \\ x = l, \quad -EI_\omega \varphi'' = \pm K\varphi'. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zamknięte układu równań nie nastęrcza trudności matematycznych, lecz ze względu na wysoki stopień równania charakterystycznego jest zawikłane. Dlatego poprzestaniemy na rozwiązaniu przy użyciu szeregów Fouriera. Niewiadome funkcje przyjmiemy w postaci następującej (zakładając symetryczną postać wyboczenia i początek układu na podporze):

$$(3.3) \quad \begin{cases} \varphi = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x + Cx(l-x), \\ \eta = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = n\pi/l. \end{cases}$$



Rys. 5

Funkcje te spełniają warunki $\varphi = 0$ oraz $\eta = \eta'' = 0$ dla obu podpór. Warunek dotyczący bimomentu prowadzi do równania identycznego z otrzymanym dla przekroju dwuteowego i do wzoru na stałą C identycznego z (2.17). Rozwijając tę wielkość stałą w szereg Fouriera i podstawiając równania (3.3) do układu (3.1) otrzymamy

$$EI_u \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n^4 B_n \sin \alpha_n x - P \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n^2 B_n \sin \alpha_n x +$$

$$+ \alpha_n P \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n^2 A_n \sin \alpha_n x - Pa_u \frac{2K \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_k A_k}{2EI_\omega + KI} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin \alpha_n x = 0,$$

$$EI_\omega \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n^4 A_n \sin \alpha_n x - (r^2 P - GI_s) \left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n^2 A_n \sin \alpha_n x + \right.$$

$$\left. + \frac{2K \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_k A_k}{2EI_\omega + KI} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin \alpha_n x \right) + a_u P \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n^2 B_n \sin \alpha_n x = 0.$$

Po skróceniu znaku sumowania względem wskaźnika n i funkcji $\sin \alpha_n x$ oraz po prostych przekształceniach dochodzimy do układu równań jednorodnych ze względu na stałe A_n i B_n :

$$(3.4) \quad \begin{cases} B_n (EI_u \alpha_n^2 - P) + A_n a_u P - Pa_u \mu \frac{1}{n^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} k A_k = 0, \\ A_n (\alpha_n^2 - \gamma^2) + \gamma^2 \mu \frac{1}{n^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} k A_k + B_n \frac{a_u P}{EI_\omega} = 0. \end{cases}$$

Podstawiając kolejno $n=1,3,5,\dots$ otrzymamy pary równań. W każdym z równań wystąpią wszystkie stałe A_n i jedna stała B_n . W praktycznych obliczeniach należy zachować skończoną ilość niewiadomych i odpowiednią ilość równań. Należy spodziewać się, że metoda powinna być tutaj jeszcze bardziej efektywna niż w przypadku przekroju dwuteowego, ponieważ jedna z funkcji (3.3), mianowicie $\eta(x)$ spełnia ściśle wszystkie warunki zadania dla każdego wyrazu rozwinięcia z osobna. Dlatego można przyjąć, że w praktyce wystarczy ograniczyć się do jednego wyrazu obu szeregów, co prowadzi do układu dwu równań jednorodnych o dwóch niewiadomych

$$(3.5) \quad \begin{cases} A_1 Pa_u (1 - \mu) + B_1 (EI_u \alpha_1^2 - P) = 0, \\ A_1 [\alpha_1^2 - \gamma^2 (1 - \mu)] + B_1 \frac{a_u P}{EI_\omega} = 0. \end{cases}$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje równanie kwadratowe względem siły krytycznej P .

Литература цитована в текście

- [1] В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
- [2] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957 PWN.
- [3] A. CHUDZIKIEWICZ, *Ogólna teoria stateczności prętów cienkościennych z uwzględnieniem odkształcalności przekroju poprzecznego*, Rozpr. Inżyn., 4, 8 (1960).

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ДИАФРАГМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Решение задачи проводится, основываясь на теории тонкостенных стержней и пластинок. В разделе 1 выводится формула для воздействия диафрагмы на стержень. Это воздействие сводится к бимоменту (1.4), так как реакции между диафрагмой и стержнем должны составлять уравновешенную систему сил.

В разделе 2 рассматривается потеря устойчивости при кручении двутаврового сечения. В случае двух диафрагм на концах стержня дифференциальное уравнение (2.4), при крайних условиях (2.6) приводит к трансцендентному уравнению (2.8). Сопоставление критических единичных осевых деформаций k , в зависимости от толщины g диафрагм — дается на табл. 1. Для случая густо расположенных диафрагм получается приближенное решение при предположении непрерывного распределения их воздействия [формулы (2.12)–(2.14)]: результаты, в зависимости от количества m диафрагм приводятся на табл. 2. Далее дается решение при помощи рядов Фурье. Так как этот ряд не удовлетворяет крайним условиям, его следует дополнить добавочной функцией (2.15), что приводит к бесконечным системам однородных уравнений (2.20). Первое приближение дает простую формулу, ошибка которой в практически важных случаях (малое g) не превышает доли процента. Второе приближение ведет к квадратному уравнению (2.24); полученные из этого уравнения результаты достаточно точны для каждого значения g а также для полного защемления концов стержня ($g = \infty$).

В разделе 3 рассматривается случай потери устойчивости при изгибе и кручении коробчатого сечения. Автор задерживается на решении с помощью рядов Фурье (3.3).

Полученные числовые результаты приводят к заключению, что рассматриваемое влияние диафрагм обычно так мало (несколько процентов), что нет необходимости учитывать его в расчетах. Внутренние диафрагмы значительно менее эффективные чем крайние.

Summary

THE INFLUENCE OF FLEXURAL STIFFNESS OF DIAPHRAGMS ON THE STABILITY OF THIN-WALLED BEAM

The problem is solved on the basis of the theory of thin-walled beams and the theory of plates. In Chapter 1 the formula (1.4) is derived giving the bimoment constituting the only interaction between the diaphragm and the beam, since the interaction forces must constitute a self-balanced system.

In Chapter 2 the torsional buckling of n I-beam is considered. In the case where the end diaphragms are the only two, the differential equation (2.4) and the boundary conditions (2.6) result in the transcendental equation (2.8). The critical values of axial strain are collated in Table 1 in terms of the thickness g of the diaphragm. In the case of many diaphragms with small spacing, an approximate solution is obtained, the continuous distribution of interactions being assumed; the results are shown in Table 2 in terms of the number m of diaphragms. Next, so-

lution by means of Fourier series is described; the series does not fulfil the boundary conditions; therefore it must be completed with an additional function (2.15), thus obtaining an infinite set of homogeneous equations. The first approximation gives the simple formula (2.22). In practical cases (i. e. if g is small the error involved does not exceed a fraction per cent. The second approximation gives a quadratic equation (2.24); the results obtained are satisfactory for any value of g , including the beam with clamped ends i.e. $g=w$.

In Chapter 3 the flexural-torsional buckling of a channel is considered, the solution by Fourier series being presented, of which the practical efficiency has been proved for the I-beam.

The numerical results obtained lead to the conclusion, that the influence of the diaphragms is usually insignificant and may be disregarded in statical analysis. The intermediate diaphragms are much less efficient than the end ones.

**ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1961 r.
