

STEFAN ZAHORSKI

**ZASTOSOWANIE NIELINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
DO OBLICZANIA PEWNYCH TYPÓW ŁĄCZNIKÓW GUMOWYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXI**

TOM IX - ZESZYT 4 - ROK 1961

SPIS TREŚCI

I. Kołowo-symetryczne ścinanie łącznika walcowego poddanego wstępnemu odkształceni, wywołanemu wprasowaniem części gumowej	
1. Stan odkształcenia	725
2. Stan naprężenia i warunki równowagi wewnętrznej	727
3. Związek między siłą i przemieszczeniem	730
4. Przypadek materiału M. Mooneya	730
II. Osiove skręcanie łączników walcowych	
5. Stan odkształcenia	731
6. Stan naprężenia i warunki równowagi	733
7. Przypadek $k > 0$ i $k < 0$	735
8. Naprężenia na powierzchniach walca. Związek między momentem skręcającym i kątem skręcenia	737
9. Przypadek materiału M. Mooneya	739

Praca stanowi kontynuację teoretycznych rozważań autora (por. [1] i [2]), poświęconych zastosowaniu metod nieliniowej geometrycznej i fizycznie teorii sprężystości do statycznego obliczania łączników, wykonanych z gumy lub innych materiałów o własnościach mechanicznych, zbliżonych do własności kauczuku.

Cytowane wyżej prace dotyczyły zagadnień związanych z kołowo-symetrycznym ścinaniem łączników walcowych (tzw. silent-bloków), w których walcowa część gumowa została zawulkanizowana pomiędzy dwiema tulejami metalowymi, jak również zagadnień związanych z pseudo-płaskim równoległym ścinaniem łączników płytkowych. Wszystkie wyniki uzyskano w założeniu pewnej szczególnej postaci potencjału sprężystości (por. [1]), dobrze opisującej rzeczywiste własności gumy dla różnych stanów odkształcenia, [8].

W niniejszej pracy rozważono przypadek kołowo-symetrycznego ścinania łączników walcowych, w których walcowa część gumowa została wprasowana między dwie tuleje metalowe i przypadek osiowego skręcania łączników walcowych obliczanych w pracy [2].

Rozważania przeprowadzono w założeniu nieściśliwości materiału (por. [3]) posługując się metodą opisaną w książce A. E. GREENA i W. ZERNY, [4] (por. również [2]).

I. KOŁOWO-SYMETRYCZNE ŚCINANIE ŁĄCZNIKA WALCOWEGO PODDANEGO WSTĘPNEMU ODKSZTAŁCENIU, WYWOŁANEMU WPRASOWANIEM CZĘŚCI GUMOWEJ

1. Stan odkształcenia

Dany jest długi walec kołowy o promieniu zewnętrznym d , wewnętrznym c i o płaskich powierzchniach czołowych (rys. 1). Załóżmy, że na skutek wprasowania walca między tuleje metalowe jego promień zewnętrzny zmienił się do wartości b , wewnętrzny do wartości a , zaś początkowa długość l zwiększyła się λ razy. Następnie wewnętrzna powierzchnia tworząca walca doznała przemieszczenia w_0 tylko w kierunku osi walca. Przemieszczenie to zostało wywołane działaniem naprężeń stycznych równomiernie rozłożonych na powierzchni walca (rys. 1).

Wielkość λ określona jest za pomocą wzoru

$$(1.1) \quad \lambda = \frac{d^2 - c^2}{b^2 - a^2}.$$

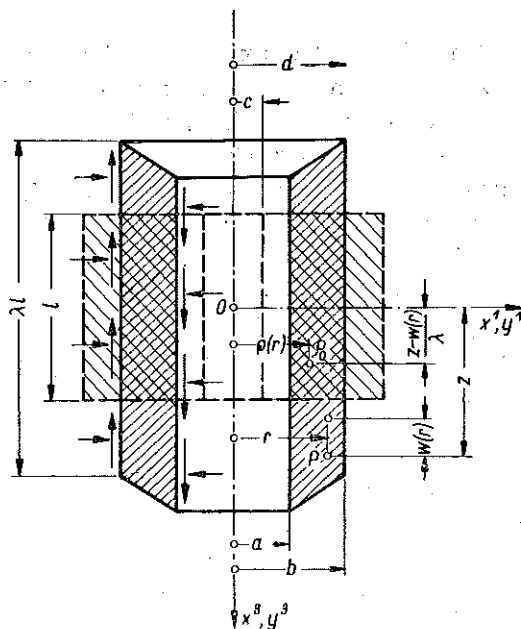
Jeśli jako układ współrzędnych ruchomych (przemieszczających się wraz z materiałem) obierzemy układ współrzędnych walcowych r, ϑ, z , to w ciełe

odkształconym współrzędne kartezjańskie dowolnego punktu P wyniosą

$$(1.2) \quad y^1 = r \cos \vartheta, \quad y^2 = r \sin \vartheta, \quad y^3 = z$$

i współrzędne tensora metrycznego przybiorą postać

$$(1.3) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = r^2.$$



Rys. 1

W ciele nieodkształconym współrzędne kartezjańskie punktu P_0 (odpowiadającego po odkształceniu punktowi P) dadzą się zapisać jako

$$(1.4) \quad x^1 = \varrho(r) \cos \vartheta, \quad x^2 = \varrho(r) \sin \vartheta, \quad x^3 = \frac{1}{\lambda} [z - w(r)],$$

zaś współrzędne tensora metrycznego jako

$$(1.5) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} (Q+rQ')^2 + \frac{w'^2}{\lambda^2} & 0 & -\frac{w'}{\lambda^2} \\ 0 & r^2 Q^2 & 0 \\ -\frac{w'}{\lambda^2} & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{Q^2}{\lambda^2} & 0 & \frac{Q^2 w'}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{r^2 Q^2} & 0 \\ \frac{Q^2 w'}{\lambda^2} & 0 & \lambda^2 + \frac{Q^2 w'^2}{\lambda^2} \end{bmatrix},$$

$$g = (Q+rQ')^2 Q^2 \frac{r^2}{\lambda^2},$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie $(1/r)Q(r) = Q(r)$, zaś kreską oznaczyliśmy pochodne względem zmiennej r .

Warunek nieściśliwości materiału prowadzi do równania

$$(1.6) \quad G = g, \quad \text{czyli} \quad (Q+rQ')Q = \lambda,$$

którego całką ogólną jest funkcja

$$(1.7) \quad Q(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\lambda(r^2 + K)}.$$

Pamiętając że dla $r = a$, $Q = c$ i dla $r = b$, $Q = d$, otrzymamy

$$(1.8) \quad \lambda K = c^2 - \lambda a^2 = d^2 - \lambda b^2.$$

Niezmienniki stanu odkształcenia są następujące:

$$(1.9) \quad \begin{cases} I_1 = g^{rs} G_{rs} = \frac{1}{Q^2} + \lambda^2 + \frac{Q^2}{\lambda^2} + \frac{Q^2 w'^2}{\lambda^2}, \\ I_2 = g_{rs} G^{rs} I_3 = Q^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2}, \\ I_3 = G/g = 1. \end{cases}$$

Pomocniczy tensor B^{ij} (por. p. 2) przybierze postać

$$(1.10) \quad B^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} + Q^2 & 0 & \frac{w'}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{\lambda^2}{r^2 Q^2} + \frac{1}{\lambda^2 r^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2 r^2} & 0 \\ \frac{w'}{\lambda^2} & 0 & Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \end{bmatrix},$$

zaś symbole Christoffela II rodzaju dla układu odkształconego są równe zeru prócz następujących:

$$(1.11) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

2. Stan naprężenia i warunki równowagi wewnętrznej

Jeśli założymy, że wstępne wprasowanie części gumowej nie zmienia istotnie izotropowych własności materiału, punktem wyjścia do dalszych rozważań może być potencjał sprężystości rozważany w pracy [1],

$$(2.1) \quad W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1^2 - 9),$$

przy czym C_1 , C_2 i C_3 grają rolę stałych materiałowych nie zależnych od postulowanego schematu odkształcenia.

Kontrawariantne składowe tensora naprężenia otrzymamy według zależności (por. [1])

$$(2.2) \quad \tau^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + p G^{ij} = 2(C_1 + 2C_3 I_1) g^{ij} + 2C_2 B^{ij} + p G^{ij},$$

w postaci

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^{11} = \frac{Q^2}{\lambda^2} (2C_1 + 4C_3 I_1) + \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) 2C_2 + p, \\ r^2 \tau^{22} = \frac{1}{Q^2} (2C_1 + 4C_3 I_1) + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) 2C_2 + p, \\ \tau^{33} = \left(\lambda^2 + \frac{Q^2 w'^2}{\lambda^2} \right) (2C_1 + 4C_3 I_1) + \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) 2C_2 + p, \\ \tau^{13} = \frac{Q^2}{\lambda^2} (2C_1 + 4C_3 I_1) w' + \frac{2C_2}{\lambda^2} w', \\ \tau^{12} = \tau^{23} = 0. \end{array} \right.$$

Równania równowagi wewnętrznej po uwzględnieniu (1.11) można napisać jako

$$(2.4) \quad \tau_{,1}^{11} + \frac{1}{r} (\tau^{11} - r^2 \tau^{22}) = 0, \quad \tau_{,1}^{13} + \frac{1}{r} \tau^{13} = 0.$$

Całkując drugie z tych równań oraz biorąc pod uwagę (2.3) otrzymamy

$$(2.5) \quad w' (2C_1 Q^2 + 4C_3 Q^2 I_1 + 2C_2) = \frac{4D}{r},$$

a po dalszych przekształceniach

$$(2.6) \quad w'^3 + \left[\left(\frac{C_2}{2C_3} + 1 \right) \frac{\lambda^2}{Q^2} + \left(\frac{C_1}{2C_3} + \lambda^2 \right) \frac{\lambda^2}{Q^2} + 1 \right] w' - \frac{A}{C_3 Q^4 r} = 0$$

lub

$$w'^3 + R(r) w' - \frac{A}{C_3 Q^4 r} = 0,$$

przy czym A jest stałą zależną od warunków brzegowych.

Biorąc pod uwagę znak C_3 (C_3 może przybierać wartości zarówno dodatnie jak i ujemne) i znak wyróżnika charakterystycznego równania (2.6) otrzymamy następujące przypadki:

$$(2.7) \quad w'(r) = -2 \sqrt{\frac{R(r)}{3}} \operatorname{sh} \frac{\omega}{3},$$

gdzie ..

$$\operatorname{sh} \omega = -\frac{3A}{2C_3 Q^4 r R(r)} \sqrt{\frac{3}{R(r)}},$$

jeżeli

$$(2.8) \quad R(r) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{27} R^3 + \frac{1}{4} \frac{A^2}{C_3^2 Q^8 r^2} > 0;$$

$$(2.9) \quad w'(r) = 2 \sqrt{\frac{-R(r)}{3}} \cos \left(\frac{\omega}{3} + \frac{4\pi}{3} \right),$$

gdzie

$$\cos \omega = -\frac{3A}{2C_3 Q^4 r R(r)} \sqrt{-\frac{3}{R(r)}}$$

jeżeli

$$(2.10) \quad R(r) < 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{27} R^3 > \frac{A^2}{4C_3^2 Q^8 r^2};$$

$$(2.11) \quad w'(r) = 2 \sqrt{\frac{-R(r)}{3}} \operatorname{ch} \frac{\omega}{3},$$

gdzie

$$\operatorname{ch} \omega = -\frac{3A}{2C_3 Q^4 r R(r)} \sqrt{-\frac{3}{R(r)}},$$

jeżeli

$$(2.12) \quad R(r) < 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{27} R^3 < \frac{A^2}{4C_3^2 Q^8 r^2}.$$

Dalsze całkowanie równania (2.6) powinno być przeprowadzone z uwzględnieniem przypadków (2.7)-(2.12) i warunków brzegowych: $w(a) = w_0$, $w(b) = 0$. Unikając jednak bardzo dużych trudności rachunkowych można obliczyć stałą A [porównaj równanie (2.6)], korzystając z przybliżonego warunku brzegowego

$$(2.13) \quad w'(a) = -\frac{w_0}{b} \frac{1}{\ln \frac{a}{b}}$$

zamieszczonego w pracy [2] i odpowiadającego mniej «sztywnej» konstrukcji niż w rozpatrywanym obecnie przypadku.

Traktując warunek (2.13) jako pierwsze przybliżenie i wyznaczając stałą A z równania (2.6) jesteśmy w stanie określić drugie przybliżenie $w'(a)$ za pomocą odpowiedniej zależności (2.7)-(2.12). Ta ostatnia wartość $w'(a)$ wstawiona do do równania (2.6) pozwala obliczyć nową wartość stałej A i w konsekwencji trzecie przybliżenie $w'(a)$. Przedstawiona metoda «kolejnych przybliżeń» pozwala określić stałą A z żadaną dokładnością.

Dla stosunkowo niewielkiej różnicy promieni $b-a$ można uzyskać dobre przybliżenie przyjmując $w'(a) = w'(b) = -w_0/b-a$.

Funkcję skalarną $p(r)$ występującą w zależnościach (2.3) otrzymamy rozwiązując pierwsze równanie równowagi (2.4), mianowicie

$$(2.14) \quad p(r) = -\frac{Q^2}{\lambda^2} (2C_1 + 4C_3 I_1) - \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) 2C_2 + \\ + \int \left[\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) (2C_1 + 4C_3 I_1) + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) 2C_2 \right] \frac{dr}{r} + p_0$$

i korzystając z przybliżonego wyrażenia na $w'(r)$ w myśl (2.13).

3. Związek między siłą i przemieszczeniem

Składowa normalna napięcia powierzchniowego przypadającego na jednostkę powierzchni tworzącej walca $r = a$ wyniesie (por. [2])

$$(3.1) \quad P_{(n)} = -\tau^{11}(a) = -\frac{Q^2(a)}{\lambda^2} [2C_1 + 4C_3 I_1(a)] - 2C_2 \left[\frac{1}{\lambda^2} + Q^2(a) \right] - p(a),$$

zaś składowa styczna napięcia powierzchniowego przypadającego na jednostkę tej samej powierzchni

$$(3.2) \quad P_{(t)} = -\tau^{k1}(a) G_{k3} = - \left[2C_2 + 4C_3 + (2C_1 + 4C_3 \lambda^2) Q^2(a) + \right. \\ \left. + 4C_3 \frac{Q^4(a)}{\lambda^2} \right] \frac{w'(a)}{\lambda^2} - 4C_3 \frac{Q^4(a)}{\lambda^4} w'^3(a).$$

Siła S działająca na jednostkę długości walca przybierze ostatecznie postać

$$(3.3) \quad S = 2\pi a P_{(t)} = -\frac{4\pi a w'(a)}{\lambda^2} \left[C_2 + 2C_3 + (C_1 + 2C_3 \lambda^2) Q^2(a) + \right. \\ \left. + 2C_3 \frac{Q^4(a)}{\lambda^2} + 2C_3 \frac{Q^4(a)}{\lambda^2} w'^2(a) \right].$$

Ponieważ składowa normalna napięcia powierzchniowego na powierzchni czołowej walca $N_{(n)} = \tau^{33}$, to równanie określające stałą p_0 można wyznaczyć z zależności

$$(3.4) \quad \int_a^b N_{(n)} r dr = \int_a^b \left[\left(\lambda^2 + \frac{Q^2 w'^2}{\lambda^2} \right) (2C_1 + 4C_3 I_1) + \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) 2C_2 + p(r) \right] r dr = 0.$$

4. Przypadek materiału M. Mooneya

Jeśli założymy, że w (2.1) $C_3 \equiv 0$ (potencjał określony jest za pomocą wzoru M. Mooneya [3]), to poprzednie zależności począwszy od (2.3) doznają znacznych uproszczeń. Zamiast (2.3) otrzymamy

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tau^{11} = 2C_1 \frac{Q^2}{\lambda^2} + 2C_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) + p, \\ r^2 \tau^{22} = \frac{2C_1}{Q^2} + 2C_2 \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) + p, \\ \tau^{33} = 2C_1 \left(\lambda^2 + \frac{Q^2 w'^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) + p, \\ \tau^{13} = \left(2C_1 \frac{Q^2}{\lambda^2} + \frac{2C_2}{\lambda^2} \right) w', \\ \tau^{12} = \tau^{23} = 0, \end{cases}$$

a zamiast (2.5)

$$(4.2) \quad (C_1 Q^2 + C_2) w' = \frac{2A}{r}.$$

Biorąc pod uwagę (1.7), całkując i uwzględniając warunki brzegowe: $w(a) = w_0$, $w(b) = 0$, otrzymamy

$$(4.3) \quad w(r) = \frac{A}{(C_1 \lambda + C_2)} \ln \left[\frac{(C_1 \lambda + C_2) r^2 + C_1 \lambda K}{(C_1 \lambda + C_2) b^2 + C_1 \lambda K} \right],$$

gdzie

$$(4.4) \quad A = (C_1 \lambda + C_2) w_0 / \ln \left[\frac{(C_1 \lambda + C_2) a^2 + C_1 \lambda K}{(C_1 \lambda + C_2) b^2 + C_1 \lambda K} \right].$$

Wzór (2.14) doprowadzi nas do wyniku w postaci

$$(4.5) \quad p(r) = -\frac{2C_1(r^2+K)}{\lambda r^2} - 2C_2 \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda(r^2+K)}{r^2} \right] + \frac{(C_1 + \lambda C_2)}{\lambda} \ln(r^2 + K) + \\ + \frac{(C_1 + \lambda^2 C_2)}{\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - 2 \ln r \right) - \frac{4C_2 A^2}{(C_1 \lambda + C_2)[(C_1 \lambda + C_2)r^2 + C_1 \lambda K]} + p_0,$$

przy czym A określone jest za pomocą wzoru (4.4).

Zależności punktu 3 zastąpione zostaną przez następujące wzory:

$$(4.6) \quad P_{(a)} = -\frac{2C_1(a^2+K)}{\lambda a^2} - 2C_2 \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda(a^2+K)}{a} \right] - p(a),$$

$$(4.7) \quad P_{(t)} = -\frac{4A}{\lambda^2 a} = -\frac{4(C_1 \lambda + C_2) w_0}{\lambda^2 a} / \ln \left[\frac{(C_1 \lambda + C_2) a^2 + C_1 \lambda K}{(C_1 \lambda + C_2) b^2 + C_1 \lambda K} \right],$$

$$(4.8) \quad S = -\frac{8\pi A}{\lambda^2} = -\frac{8\pi(C_1 \lambda + C_2) w_0}{\lambda^2} / \ln \left[\frac{(C_1 \lambda + C_2) a^2 + C_1 \lambda K}{(C_1 \lambda + C_2) b^2 + C_1 \lambda K} \right],$$

$$(4.9) \quad \int_a^b \left[2C_1 \left(\lambda^2 + \frac{Q^2 w'^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{w'^2}{\lambda^2} \right) + p(r) \right] r dr = 0.$$

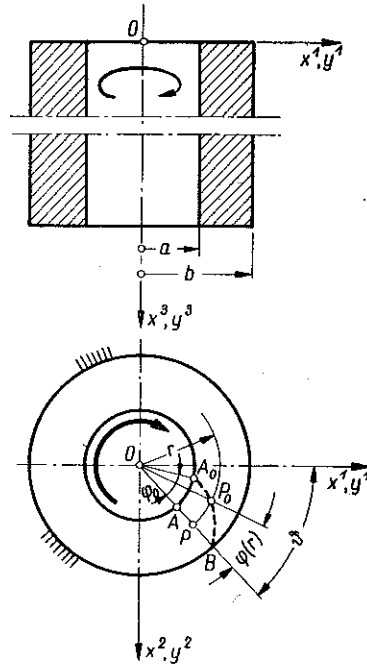
Wszystkie wyniki uzyskane w punkcie 4 są formalnie zgodne z wynikami otrzymanymi przez A. E. GREENA, [4]; stanowią one pewien szczególny przypadek ($C_3 \equiv 0$) naszych ogólniejszych rozwiązań uzyskanych w punktach 1, 2 i 3.

II. OSIOWE SKRĘCANIE ŁĄCZNIKÓW WALCOWYCH

5. Stan odkształcenia

Dany jest długi walec kołowy o promieniu zewnętrznym b i wewnętrznym a , ograniczony płaskimi powierzchniami czołowymi (rys. 2). Walec wykonany jest z materiału nieściśliwego charakteryzującego się sprężystością określoną potencjałem (2.1).

Założmy, że zewnętrzna powierzchnia tworząca jest nieruchoma, zaś wewnętrzna doznaje skończonego obrotu φ_0 wokół osi walca, tak że dowolny punkt P_0 (rys. 2) przemieszcza się niezależnie od współrzędnej z . Układ utrzymywany jest w równowadze za pośrednictwem naprężeń stycznych, rozłożonych równomiernie na powierzchniach tworzących walca. Naprężenia te tworzą moment M przypadający na jednostkę długości walca.



Rys. 2

W ciele *odkształconym* przyjmujemy nieruchomy układ współrzędnych kartezjańskich y^1, y^2, y^3 z początkiem w punkcie 0. Jeśli jako układ współrzędnych związanych z ciałem przyjmujemy układ współrzędnych walcowych $\Theta^1 = r, \Theta^2 = \vartheta, \Theta^3 = z$, dla którego

$$(5.1) \quad y^1 = r \cos \vartheta, \quad y^2 = r \sin \vartheta, \quad y^3 = z,$$

to

$$(5.2) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = r^2.$$

W ciele *nieodkształconym* współrzędne kartezjańskie punktu P_0 , który po odkształceniu zajmuje położenie P , można zapisać w postaci

$$(5.3) \quad x^1 = r \cos[\vartheta - \varphi(r)], \quad x^2 = r \sin[\vartheta - \varphi(r)], \quad x^3 = z,$$

przy czym przez funkcję $\varphi(r)$ będziemy rozumieć zmienny z promieniem r kąt skręcenia punktu P względem P_0 (por. rys. 2).

Kowariantny i kontrawariantny tensor metryczny w ciele nieodkształconym są odpowiednio równe

$$(5.4) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1+r^2\varphi'^2 & -r^2\varphi' & 0 \\ -r^2\varphi' & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi' & 0 \\ \varphi' & \frac{1}{r^2} + \varphi'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie kreską oznaczono pochodne względem r . Łatwo zauważyć, że wobec $g = r^2$ warunek nieściśliwości jest tożsamościowo spełniony.

Niezmienniki stanu odkształcenia zgodnie z (1.9) są następujące:

$$(5.5) \quad I_1 = 3 + r^2\varphi'^2, \quad I_2 = 3 + r^2\varphi'^2, \quad I_3 = 1.$$

Pomocniczy tensor B^{ij} określony formułą

$$(5.6) \quad B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs}$$

przybierze postać

$$(5.7) \quad B^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi' & 0 \\ \varphi' & \frac{2}{r^2} + \varphi'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + r^2\varphi'^2 \end{bmatrix},$$

a symbole Christoffela II rodzaju są równe tożsamościowo zeru, prócz następujących:

$$(5.8) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r.$$

6. Stan naprężenia i warunki równowagi

Wychodząc z potencjału sprężystości w postaci (2.1) i wprowadzając oznaczenia

$$(6.1) \quad 2C_1 + 4C_2 + 12C_3 = D, \quad 4C_3 = T,$$

otrzymamy składowe fizyczne naprężenia w postaci

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \tau^{11} = D + p + Tr^2\varphi'^2, \\ \sigma_{22} = r^2\tau^{22} = D + p + (D - 2C_2)r^2\varphi'^2 + T(1 + r^2\varphi'^2)r^2\varphi'^2, \\ \sigma_{33} = \tau^{33} = D + p + (T + 2C_2)r^2\varphi'^2, \\ \sigma_{12} = \tau^{12} = (D - 2C_2)\varphi' + Tr^2\varphi'^3, \\ \sigma_{23} = \sigma_{31} = \tau^{23} = \tau^{31} = 0, \end{array} \right.$$

gdzie $p(r)$ oznacza skalarną funkcję r , określoną przez warunki równowagi i warunki brzegowe.

Równania równowagi wewnętrznej mają postać

$$(6.3) \quad \begin{cases} \tau_{,1}^{11} + \Gamma_{12}^2 \tau^{11} + \Gamma_{22}^1 \tau^{22} = 0, \\ \tau_{,1}^{12} + \Gamma_{12}^2 \tau^{12} + \Gamma_{21}^2 \tau^{21} + \Gamma_{12}^2 \tau^{12} = 0, \end{cases}$$

lub

$$(6.4) \quad \tau_{,1}^{11} + \frac{\tau^{11} - r^2 \tau^{22}}{r} = 0, \quad \tau_{,1}^{12} + \frac{3\tau^{12}}{r} = 0,$$

przy czym przecinek oznacza pochodną cząstkową.

Po uwzględnieniu wzorów (6.2) otrzymamy

$$(6.5) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dr} + 2Tr\varphi'(\varphi' + r\varphi'') - 2(D - 2C_2)(\varphi' + r\varphi'')\varphi' - 4Tr^2\varphi'^3(\varphi' + r\varphi'') = 0, \\ (D - 2C_2)\left(\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi'\right) + Tr\varphi'^2(5\varphi' + 3r\varphi'') = 0. \end{cases}$$

Oznaczając

$$(6.6) \quad \frac{T}{D - 2C_2} = \frac{4C_3}{2(C_1 + C_2) + 12C_3} = k,$$

można drugiemu z równań (6.5) nadać postać

$$(6.7) \quad \frac{d}{dr}(\varphi' + kr^2\varphi'^3) + \frac{3}{r}(\varphi' + kr^2\varphi'^3) = 0,$$

a po pierwszym scałkowaniu

$$(6.8) \quad \varphi' + kr^2\varphi'^3 = \frac{A}{r^3},$$

gdzie A oznacza stałą całkowania zależną od warunków brzegowych.

Nieliniowe równanie (6.8) będziemy całkować wprowadzając nową zmienną $t = \ln r$ ($r = e^t$); otrzymamy

$$(6.9) \quad \varphi_t + k\varphi_t^3 = Ae^{-2t}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varphi_t + k\varphi_t^3}{A} \right|;$$

przez wielkość φ_t rozumiemy pochodną funkcji φ względem zmiennej t .

Mając na uwadze że

$$(6.10) \quad \varphi(t) = \int \frac{d\varphi}{dt} dt + B, \quad dt = -\frac{1}{2} \frac{1 + 3k\varphi_t^2}{\varphi_t + k\varphi_t^3} d\varphi_t,$$

całkę ogólną równania (6.9) można napisać w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest funkcja $\varphi_t(t)$ obliczona z równania trzeciego stopnia (6.9), a mianowicie

$$(6.11) \quad \varphi(t) = -\frac{3}{2} \int d\varphi_t + \int \frac{d\varphi_t}{1 + k\varphi_t^2} + B,$$

zaś B jest drugą stałą całkowania.

7. Przypadek $k > 0$ i $k < 0$

W założeniu że współczynnik $k > 0$, po scałkowaniu (6.11) i zastąpieniu zmiennej t przez zmienną r , otrzymamy

$$(7.1) \quad \varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{k}r\varphi'(r)] - \frac{3}{2}r\varphi'(r) + B_1 = g(r, A_1) + B_1 \quad (k > 0).$$

Zupełnie podobnie dla współczynników $k < 0$ otrzymamy

$$(7.2) \quad \varphi(r) = \frac{1}{2\sqrt{-k}} \ln \left| \frac{\sqrt{-k}r\varphi'(r) + 1}{\sqrt{-k}r\varphi'(r) - 1} \right| - \frac{3}{2}r\varphi'(r) + B_2 = h(r, A_2) + B_2 \quad (k < 0).$$

Warunki przemieszczeniowe na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni tworzącej walca, dla $r = a$, $\varphi = \varphi_0$ oraz dla $r = b$, $\varphi = 0$ określają stałe B_1 i B_2 :

$$(7.3) \quad \begin{cases} B_1 = -\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{k}b\varphi'(b)] + \frac{3}{2}b\varphi'(b) = -g(b, A_1), \\ B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{-k}} \ln \left| \frac{\sqrt{-k}b\varphi'(b) + 1}{\sqrt{-k}b\varphi'(b) - 1} \right| + \frac{3}{2}b\varphi'(b) = -h(b, A_2) \end{cases}$$

oraz równania przestępne wiążące stałe A_1 , i A_2 z odpowiednim kątem obrotu φ_0 :

$$(7.4) \quad \begin{cases} \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{k}a\varphi'(a)] - \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{k}b\varphi'(b)] \right\} - \\ \quad - \frac{3}{2}[a\varphi'(a) - b\varphi'(b)] = g(a, A_1) - g(b, A_1), \\ \varphi_0 = \frac{1}{2\sqrt{-k}} \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{-k}a\varphi'(a) + 1}{\sqrt{-k}a\varphi'(a) - 1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{-k}b\varphi'(b) + 1}{\sqrt{-k}b\varphi'(b) - 1} \right| \right\} - \\ \quad - \frac{3}{2}[a\varphi'(a) - b\varphi'(b)] = h(a, A_2) - h(b, A_2). \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę znak współczynnika k i znak wyróżnika charakterystycznego równania trzeciego stopnia (6.8) otrzymamy

$$(7.5) \quad \varphi'(r) = -2 \sqrt{\frac{1}{3kr^2}} \operatorname{sh} \frac{\omega}{3},$$

gdzie

$$\operatorname{sh} \omega = -\frac{3A_1}{2r^3} \sqrt{3kr^2},$$

jeżeli

$$(7.6) \quad k > 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{27k^3} + \frac{A_1^3}{4k^2r^4} > 0;$$

$$(7.7) \quad \varphi'(r) = 2 \sqrt{-\frac{1}{3kr^2}} \cos \left(\frac{\omega}{3} + \frac{4\pi}{3} \right),$$

gdzie

$$\cos \omega = -\frac{3A_2}{2r^3} \sqrt{-3kr^2},$$

jeżeli

$$(7.8) \quad k < 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{27k^3} > \frac{A_2^2}{4k^2r^4};$$

$$(7.9) \quad \varphi'(r) = 2 \sqrt{-\frac{1}{3kr^2}} \operatorname{ch} \frac{\omega}{3},$$

gdzie

$$\operatorname{ch} \omega = -\frac{3A_2}{2r^3} \sqrt{-3kr^2},$$

jeżeli

$$(7.10) \quad k < 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{27k^3} < \frac{A_2^2}{4k^2r^4}.$$

Występującą w związkach (6.2) funkcję skalarną $p(r)$ wyznaczyć można wychodząc z pierwszego równania równowagi (6.3). Równanie to zapisujemy w postaci

$$(7.11) \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} (\tau^{11} - p) + \frac{1}{r} (r^2 \tau^{22} - \tau^{11}),$$

z której po uwzględnieniu (6.2) otrzymamy

$$(7.12) \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} (D + Tr^2 \varphi'^2) + (D - 2C_2) r \varphi'^2 + Tr^3 \varphi'^4.$$

Pamiętając że zgodnie z (6.8) wynika

$$(7.13) \quad (D - 2C_2) \varphi' + Tr^2 \varphi'^3 = \frac{A}{r^3} (D - 2C_2),$$

możemy scałkować równanie (7.12), a mianowicie

$$(7.14) \quad p(r) = -D - Tr^2 \varphi'^2 + A(D - 2C_2) \int \frac{\varphi'}{r^2} dr + p_0,$$

przy czym p_0 jest stałą noszącą charakter ciśnienia hydrostatycznego. Dokonując jak poprzednio zamiany zmiennej r przez e^t , otrzymamy

$$(7.15) \quad \int \frac{\varphi'}{r^2} dr = \int \frac{A}{r^5} dr - k \int \varphi'^3 dr = \int \frac{A}{r^5} dr - k \int \frac{\varphi_t (\varphi_t + k\varphi_t^3)}{A} dt = \\ = \int \frac{A}{r^5} dr + \frac{k}{2A} \int \varphi_t^3 (1 + 3k\varphi_t^2) d\varphi_t = -\frac{A}{4r^4} + \frac{k}{8A} \varphi_t^4 + \frac{k^2}{4A} \varphi_t^6,$$

i funkcja $p(r)$ przybierze ostatecznie postać

$$(7.16) \quad p(r) = -D - Tr^2 \varphi'^2 + \frac{D - 2C_2}{8} kr^4 \varphi'^4 (1 + 2kr^2 \varphi'^2) - \frac{A^2 (D - 2C_2)}{4r^4} + p_0,$$

lub

$$(7.17) \quad p(r) = -D - Tr^2\varphi'^2 + \frac{T}{8}r^4\varphi'^4(1 + 2kr^2\varphi'^2) - \frac{A^2T}{4kr^4} + p_0.$$

Należy pamiętać, że przez stałą A rozumiemy stałą całkowania A_1 lub A_2 (A_1 dla $k > 0$ i A_2 dla $k < 0$).

Chcąc obliczyć kąt obrotu w dowolnym punkcie walca korzystamy ze związków (7.1) lub (7.2) w zależności od tego czy $k > 0$, czy też $k < 0$. Stałe całkowania określone są za pomocą wzorów (7.3) i (7.4), zaś funkcja $\varphi'(r)$ wzorami (7.5) do (7.10).

8. Naprężenia na powierzchniach walca. Związek między momentem skręcającym i kątem skręcenia

Przejdziemy obecnie do określenia naprężeń występujących na powierzchniach tworzących walca. Naprężenia te działają na powierzchniach połączenia gumy z metalem i głównie decydują o wytrzymałości łącznika.

Jednostkowy wektor normalny do wewnętrznej powierzchni tworzącej walca $r=a$ (skierowany na zewnątrz materiału) można wyrazić przez współrzędne kowariantne:

$$(8.1) \quad \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{G}^1}{\sqrt{G_{11}}}, \quad n_1 = -1, \quad n_2 = n_3 = 0.$$

Składową normalną napięcia powierzchniowego \mathbf{P} , przypadającą na jednostkę powierzchni odkształconej, otrzymamy z zależności

$$(8.2) \quad P_{(n)} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^1}{\sqrt{G_{11}}} = P^k \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}^1 = \tau^{ki} n_i \delta_k^1 = -\tau^{11}(a),$$

a po uwzględnieniu związków (6.2)

$$(8.3) \quad P_{(n)} = -\tau^{11}(a) = -[D + p(a) + Ta^2\varphi'^2(a)].$$

Odpowiednia składowa styczna (obwodowa) napięcia powierzchniowego \mathbf{P} wyrazi się za pomocą wzoru

$$(8.4) \quad P_{(t)} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}_2}{\sqrt{G_{22}}} = \frac{1}{a} [P^k \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}_2] = \frac{1}{a} [\tau^{ki} n_i G_{k2}] = -\frac{1}{a} \tau^{k1} G_{k2} = -a\tau^{12}(a),$$

lub

$$(8.5) \quad P_{(t)} = -a\tau^{12}(a) = -a[(D - 2C_2)\varphi'(a) + Ta^2\varphi'^3(a)].$$

Zupełnie analogicznie można określić napięcia powierzchniowe na zewnętrznej powierzchni tworzącej walca $r=b$; trzeba zamiast $\varphi'(a)$ i a w wyrażeniach (8.3) i (8.5) podstawić $\varphi'(b)$ i b oraz zmienić znak.

Jeśli zgodnie z założeniami uczynionymi na wstępie naprężenia styczne (obwodowe), działające na wewnętrznej powierzchni tworzącej walca, wywołane są jednostkowym momentem M , to

$$(8.6) \quad M = 2\pi a^2 P_{(t)} = -2\pi a^3 \varphi'(a) [(D - 2C_2) + Ta^2\varphi'^2(a)],$$

lub ostatecznie

$$(8.7) \quad M = -2\pi a^3 \varphi'(a) [(2C_1 + 2C_2 + 12C_3) + 4C_3 a^2 \varphi'^2(a)].$$

Zależność powyższa wyrażająca nieliniowy związek między momentem M i wywołanym przez niego kątem obrotu nosi podobny charakter do uzyskanej poprzednio w pracy [2] zależności pomiędzy jednostkową siłą ścinającą i wywołanym przez nią przemieszczeniem dla przypadku kołowo-symetrycznego ścinania.

Przejdziemy w dalszym ciągu do zbadania naprężeń występujących na powierzchniach czołowych walca (rys. 2). Jednostkowy wektor normalny do czołowej powierzchni walca $z = 0$ (w stanie odkształconym) posiada kowariantne współrzędne

$$(8.8) \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{G}^3}{\sqrt{G^{33}}}, \quad n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1.$$

Odpowiednia składowa normalna napięcia powierzchniowego na tej powierzchni równa jest

$$(8.9) \quad Q_{(n)} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}^3}{\sqrt{G^{33}}} = Q^k \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}^3 = \tau^{ki} n_i \delta_k^3 = \tau^{33}.$$

Jeśli zażądamy, korzystając z założenia dotyczącego długości walca, żeby wypadkowa naprężeń normalnych równa była zeru, tj.

$$(8.10) \quad \int_a^b Q_{(n)} r \, dr = \int_a^b [D + p + (T + 2C_2) r^2 \varphi'^2] r \, dr = 0,$$

to otrzymamy równanie, z którego można wyznaczyć stałą p_0 występującą w zależnościach (7.14), (7.16), i (7.17). Dokonując zamiany zmiennej r przez e^t i wykorzystując wyrażenia (6.9) i (6.10) dochodzimy po długotrwałych obliczeniach do zależności

$$(8.11) \quad \left\{ \begin{aligned} p_0 = & \frac{1}{b^2 - a^2} \left\{ \frac{7TA}{16k} \left[\frac{b\varphi'(b)}{1 + kb^2\varphi'^2(b)} - \frac{a\varphi'(a)}{1 + ka^2\varphi'^2(a)} \right] + \right. \\ & + \frac{TAk}{4} \left[\frac{b^5\varphi'^5(b)}{1 + kb^2\varphi'^2(b)} - \frac{a^5\varphi'^5(a)}{1 + ka^2\varphi'^2(a)} \right] - \\ & - \left(\frac{3TA}{8k} - 6C_2A \right) [b\varphi'(b) - a\varphi'(a)] - \frac{A^2T}{4k} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \\ & \left. + \left(\frac{19TA}{32k} - 2C_2A \right) [N(b) - N(a)] \right\}, \end{aligned} \right.$$

w której

$$(8.12) \quad N(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}[\sqrt{k}x\varphi'(x)], & \text{jeśli } k > 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{-k}} \ln \left| \frac{1+x\sqrt{-k}\varphi'(x)}{1-x\sqrt{-k}\varphi'(x)} \right| & \text{jeśli } k < 0. \end{cases}$$

Łatwo jest sprawdzić, że składowa styczna napięcia powierzchniowego na powierzchni $z = 0$ (podobnie na powierzchni $z = l$) równa jest tożsamościowo zeru, a mianowicie

$$(8.13) \quad Q_{(i)} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}_1}{\sqrt{G_{11}}} = Q^k G_k \cdot \mathbf{G}_1 = \tau^{ki} n_i G_{k1} = \tau^{k3} G_{k1} = 0.$$

9. Przypadek materiału M. Mooneya

W przypadku materiału M. Mooneya, tj. przy założeniu we wzorze (2.1) $C_3 \equiv 0$, poprzednie zależności i równania począwszy od punktu 6 doznają znacznych uproszczeń.

Fizyczne składowe stanu naprężenia przybierają teraz postać

$$(9.1) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \tau^{11} = 2(C_1 + 2C_2) + p, \\ \sigma_{22} = r^2 \tau^{22} = 2(C_1 + 2C_2) + 2(C_1 + C_2) r^2 \varphi'^2 + p, \\ \sigma_{33} = \tau^{33} = 2(C_1 + 2C_2) + 2C_2 r^2 \varphi'^2 + p, \\ \sigma_{12} = \tau^{12} = 2(C_1 + C_2) \varphi', \\ \sigma_{23} = \sigma_{31} = \tau^{23} = \tau^{31} = 0. \end{cases}$$

Na kąt obrotu $\varphi(r)$ otrzymujemy równanie

$$(9.2) \quad \varphi'' + \frac{3}{r} \varphi' = 0,$$

którego całką ogólną jest funkcja

$$(9.3) \quad \varphi(r) = -\frac{A}{r^2} + B.$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych $\varphi(a) = \varphi_0$, $\varphi(b) = 0$, otrzymamy (por. [4])

$$(9.4) \quad \varphi(r) = \frac{a^2 \varphi_0}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right).$$

Funkcję skalarną $p(r)$ wyznaczmy obecnie z uproszczonego równania (7.12)

$$(9.5) \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{dD}{dr} + A(D - 2C_2) \frac{\varphi'}{r^2};$$

otrzymamy

$$(9.6) \quad p(r) = -2(C_1 + 2C_2) - 2(C_1 + C_2) \frac{a^4 \varphi_0^2}{(b^2 - a^2)^2} \frac{b^4}{r^4} + p_0,$$

gdzie p_0 jest stałym ciśnieniem hydrostatycznym.

Składowa normalna napięcia powierzchniowego odniesionego do jednostki powierzchni odkształconej zgodnie z (8.3) wynosi

$$(9.7) \quad P_{(n)} = -\tau^{11}(a) = -2(C_1 + 2C_2) - p(a) = 2(C_1 + C_2) \frac{b^4 \varphi_0^2}{(b^2 - a^2)^2} - p_0$$

i odpowiednia składowa styczna, zgodnie z (8.5),

$$(9.8) \quad P_{(t)} = -a\tau^{12}(a) = -2a(C_1 + C_2)\varphi'(a) = 4(C_1 + C_2) \frac{b^2\varphi_0}{b^2 - a^2}.$$

Związek (8.7) przybierze zatem liniową postać

$$(9.9) \quad M = 8\pi(C_1 + C_2) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \varphi_0.$$

Wyrażenie (9.9) jest zgodne z rozwiązaniami uzyskanymi przez R.S. RIVLINA, [5], [6], A.E. GREENA, [4], oraz W.L. BIDERMANA, [7]; jest ono szczególnym przypadkiem naszego ogólniejszego wzoru (8.7).

Dla materiału Mooneya równanie (8.10) upraszcza się do postaci

$$(9.10) \quad \int_a^b Q_{(m)} r dr = \int_a^b [2(C_1 + 2C_2) + p + 2C_2 r^2 \varphi'^2] r dr = 0,$$

z której po scałkowaniu otrzymujemy

$$(9.11) \quad p_0 = 2(C_1 - 3C_2) \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2)^2} \varphi_0^2.$$

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. ZAHORSKI, *A Form of Elastic Potential for Rubber-Like Materials*, Arch. Mech. Stos., 5, 10 (1959).
- [2] S. ZAHORSKI, *Koło-symetryczne i płaskie ścinanie łączników gumowych w świetle nieliniowej teorii sprężystości*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
- [3] L. TRELOAR, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford 1949.
- [4] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
- [5] R. S. RIVLIN, *Torsion of Rubber Cylinder*, J. Appl. Phys., 18 (1947), 444-449.
- [6] R. S. RIVLIN, *A Note on the Torsion of an Incompressible Highly Elastic Cylinder*, Proc. Camb. Phil. Soc., 45 (1949), 485-487.
- [7] В. Л. ВИДЕРМАН, *Вопросы расчета резиновых деталей*, Сб. Расчеты на прочность, 3, Москва 1958.
- [8] S. ZAHORSKI, *Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy*, Rozpr. Inżyn., 1, 10 (1962).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К РАСЧЕТАМ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ РЕЗИНОВЫХ СОЕДИНИТЕЛЕЙ (ШАРНИРОВ)

Работа является продолжением работ автора [1] и [2], занимающихся применением методов геометрически и физически нелинейной теории упругости к статическому расчету резиновых соединителей.

Рассматривается: 1) осесимметрическая задача о срезе цилиндрических соединителей, в которых цилиндрическая резиновая часть впрессована между две металлические втулки и 2) задача об осевом кручении цилиндрических соединителей, в которых резиновая цилиндрическая часть соединена с металлическими втулками в процессе вулканизации.

Обе задачи решаются при предположении несжимаемости резины, принимая для этой последней упругий потенциал, характеризующийся тремя постоянными материала (ср. [1]). Особое внимание обращается на получение характеристических зависимостей между единичной срезывающей силой и соответствующей ей осевым перемещением — в первой задаче и единичным крутящим моментом и соответствующим ему углом кручения — во второй задаче.

Рассматривается случай материала М. Муни и показывается, что полученные автором решения являются обобщением результатов полученных Р. С. РИВЛИНОМ, А. Э. ГРИНОМ, В. Л. БИДЕРМАНОМ и другими исследователями при предположении, что свойства материала соответствуют формуле Муни.

S u m m a r y

APPLICATION OF THE NON-LINEAR THEORY OF ELASTICITY TO THE COMPUTATION OF RUBBER CONNECTING PIECES OF CERTAIN TYPES

This is a continuation of the author's papers [1] and [2] devoted to the application of the methods of (geometrically and physically) non-linear theory of elasticity to the computation of rubber connecting pieces.

The problem under consideration in the present paper is that of circularly symmetric shearing of cylindrical connecting pieces in which a cylindrical rubber part has been pressed between two metal tubes and the problem of axial torsion of cylindrical connecting pieces in which the cylindrical rubber part has been joined to the metal tubes during the vulcanization process.

Both problems are solved assuming that rubber is incompressible, the elastic potential being assumed in a form characterized by three material constants (cf. [1]). Particular attention is devoted to the obtainment of the relations between the unit-shear force and the corresponding axial displacement in the first problem and between the unit torque and the corresponding angle of twist in the second problem.

The case of the Mooney material is considered. It is shown that the present author's solutions constitute a generalization of the results obtained by R. S. RIVLIN, A. E. GREEN, W. L. BIDERMAN and others assuming that the properties of the material are in agreement with the Mooney model.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1961 r.