

ZBIGNIEW BYCHAWSKI

BADANIE WYBOCZENIA PRZY PEŁZANIU PŁYT KOŁOWYCH
W ZAKRESIE MAŁYCH I DUŻYCH UGIĘĆ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCIX

TOM IX • ZESZYT 4 • ROK 1961

Wstęp

Przez badanie wyboczenia przy pełzaniu rozumiemy w szerszym pojęciu ogólną analizę zachowania się w czasie płyty z materiału pełzającego, która poddana jest działaniu kompresji w płaszczyźnie środkowej. Określenie to stosujemy niezależnie od stanu wyjściowego lub końcowego, w jakim płyta może się znaleźć w wyniku zachodzącego procesu odkształcenia. Przeprowadzając badanie wyboczenia analizujemy zatem ogół zjawisk, jakie zachodzą w płycie w warunkach wyżej podanych bez konieczności formułowania kryteriów stateczności w klasycznym pojęciu. Ze względu na specyficzne własności ośrodka pełzającego definicje wzięte z teorii klasycznej będą miały na ogół odmienne znaczenie, związane są bowiem z pojęciem czasu. Proces deformacji pierwotnej formy płyty charakteryzujący się tym, że małym przyrostom przemieszczenia na brzegu towarzyszą duże przyrosty ugięć, określa się jako wyboczenie przy pełzaniu. Zjawisko to może prowadzić w wyniku do nieograniczonego wzrostu ugięć, a czas w którym to następuje, nazywa się czasem krytycznym. Mówimy wtedy o utracie stateczności przy pełzaniu. Należy podkreślić dużą dowolność w interpretacji stosowanych ogólnie określeń. Dowolność ta wynika z technicznego raczej aniżeli ścisłego znaczenia problemu wyboczenia przy pełzaniu.

Zagadnienia związane z badaniem stateczności lub z wyboczeniem przy pełzaniu konstrukcji stały się przedmiotem zainteresowania dopiero w ostatnich kilkunastu latach. W chwili obecnej w związku z szybkim rozwojem nowoczesnej techniki, opartej w głównej mierze na pracy materiałów konstrukcyjnych w warunkach dużych obciążeń i wysokich temperatur, uwydatniających wpływ pełzania, zagadnienia te stają się pierwszorzędymi i znajdują się w centrum uwagi teoretyków i eksperymentatorów.

Pierwszą próbą analizy wpływu pełzania na kolumnę z materiału lepkosprężystego była praca W. SIEGFRIEDA, [22], z okresu wojennego. Następne prace z lat 1946-47 na ten sam temat, to niepublikowany referat A. M. FREUDENTHALA, [23], na VI kongresie mechaniki w Paryżu, praca A. D. ROSSA, [24], związana z badaniem wpływu pełzania na zachowanie się elementów betonowych ściskanych oraz matematyczne ujęcie wyboczenia przy pełzaniu przez J. MARINA, [25]. Szeroko omawia problem stateczności przy pełzaniu prętów w ujęciu liniowym książka A. R. RZANICYNA, [26] wydana w roku 1949. W dalszych latach ukazuje się wiele prac teoretycznych i eksperymentalnych, dotyczących głównie prętów, co świadczy o dużej uwadze badaczy dla tego problemu.

W ostatnich latach ukazało się kilka publikacji o charakterze przeglądowo-historycznym, również w formie książkowej, podsumowujących dotychczasowe osiągnięcia w dziedzinie teoretycznej i eksperymentalnej. Znajdujemy w nich wzmianki na temat badań, oprócz prętów, innych elementów konstrukcyjnych, m. in. płyt. Z publikacji tych wymienić należy przeglądy J. A. H. HULTA, [8], N. J. HOFFA, [7], I. FINNIE i W. R. HELLERA, [2] oraz I. FINNIE, [3].

W Polsce zagadnieniem wyboczenia przy pełzaniu prętów zajmowali się dotychczas J. MADEJSKI, [27], oraz M. ŻYCKOWSKI, [18], [19], [20]. Ostatni z autorów dał również przegląd i klasyfikację prac nad wyboczeniem przy pełzaniu, [21].

Z prac zajmujących się zagadnieniem stateczności przy pełzaniu płyt wymienić należy prace G. GERARDA, [4], T. H. LINA, [9], E. E. MATHAUSERA i W. D. DEVEIKISA, [10], N. J. HOFFA, [6], W. D. DEVEIKISA, [1], Ju. N. RABOTNOWA i S. A. SZESTERIKOWA, [12], T. H. H. PIANA i R. I. JOHNSONA, [11], W. ZUKA, [17], oraz J. L. SANDERSA, H. G. Mc COMBA i F. R. SCHLECHTE, [13]. Wszyscy wymienieni autorzy zajmowali się płytami w zakresie geometrycznej liniowości. W szczególności T. H. LIN podał rozwiązanie dla płyty wolnopodpartej o małym wygięciu początkowym przy zastosowaniu transformacji Laplace'a (materiał płyty był lepkosprężysty). W ścisłym sensie stateczności potraktowali zagadnienie Ju. N. RABOTNOW i S. A. SZESTERIKOW dla prętów. Dla płyt przeprowadzili oni zlinearyzowaną analizę stateczności przy założeniu nieliniowego materiału pełzającego. T. H. H. PIAN i R. I. JOHNSON rozważali prostokątną płytę typu «sandwich» z nieliniowo-lepkiego materiału w zakresie ustalonego pełzania.

Jak autorowi wiadomo, zagadnienie wyboczenia przy pełzaniu płyt w ujęciu geometrycznie nieliniowym nie było dotąd rozpatrywane w literaturze. Ujęcie takie jest szczególnie istotne, ponieważ dopiero założenie ugięć rzędu grubości płyty w przypadku pełzania zbliża teorię do zastosowań.

W tym miejscu zagadnienie postawione zostało odmiennie jak w dotychczasowych pracach na temat zarówno prętów, jak i płyt. O ile formułowane w nich warunki brzegowe odnoszą się do naprężeń, przeważnie stałych w czasie, co odpowiada działaniu ściśle określonych obciążeń, to w przedstawionej pracy przyjmuje się jako dane warunki przemieszczeniowe, a ściślej prędkości odkształcenia brzegu płyty, stałe lub zmienne (zależne od ugięcia). W ten sposób deformacja ma charakter wymuszony, a naprężenia są zmienne w czasie. Takie postawienie zagadnienia, zdaniem autora, zbliża przyjęte schematy do rzeczywistych warunków pracy konstrukcji, szczególnie w zakresie ustalonego procesu pełzania, jak również ułatwia interpretację fizyczną otrzymanych wyników. Jest to szczególnie ważne pod kątem widzenia badań laboratoryjnych, w których bezpośrednie pomiary odnoszą się do wielkości przyjętych w pracy za wyjściowe. Z konieczności rozważone zostały przypadki szczególne. Niemniej szczególnym przypadkiem jest jednak założenie stałych w czasie naprężeń, jak to się czyni w «klasycznej» analizie pełzania.

Praca składa się z części ogólnej i szczegółowej. W części ogólnej sformułowano problem oraz założenia, a następnie wyprowadzono podstawowe równania przy

ogólnym przyjęciu nieliniowości geometrycznej i fizycznej. Z równań tych wynikają przypadki szczególne. W części szczególnej podano przybliżone rozwiązania dla płyt kołowych utwierdzonych przesuwnie przy założeniu fizycznej i geometrycznej liniowości. Rozważono pewne szczególne przypadki nieliniowości fizycznej oraz wyznaczono odpowiednie naprężenia. W zakresie nieliniowości geometrycznej zbadano przypadek liniowości fizycznej przy uwzględnieniu odkształceń sprężystych oraz przypadek nieliniowości fizycznej z uwzględnieniem samych tylko odkształceń pełzania. Przeprowadzono również przybliżoną analizę wpływu zmian intensywności naprężeń wzdłuż grubości płyty.

I. Część ogólna

1. Rozważając klasyczny problem stateczności płyt korzystamy ze zwyczajnego równania płyty wyprowadzonego z warunku równowagi jej elementu. Jeżeli ugięcia są duże, problem sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych nieliniowych, wyprowadzonych przez Kármána.

Odpowiedni układ równań we współrzędnych walcowych dla płyty kołowej o symetrycznym ugięciu sprowadza się do zwyczajnych równań różniczkowych

$$(1.1) \quad \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) = -\frac{E}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \frac{h}{r} \frac{dF}{dr} \frac{dw}{dr}.$$

Funkcjami, które należy wyznaczyć z powyższego układu równań, jest funkcja naprężeń F oraz funkcja ugięcia w , przy czym E jest modułem sprężystości, a D sztywnością płyty.

Jeżeli rozważamy płyty z materiałów, które nie podlegają prawu Hooke'a, to musimy uwzględnić, oprócz nieliniowości geometrycznej, nieliniowość wynikającą z fizycznej natury ciała. Ta ostatnia występuje w związkach pomiędzy naprężeniami i odkształceniami.

Badając wyboczenie płyt z materiałów, które posiadają zdolność do zmiany pola odkształceń w czasie pod działaniem obciążenia, obserwujemy oprócz odkształceń sprężystych zjawisko analogiczne do plastycznego płynięcia. Zjawisko to zwane pełzaniem powoduje trwałe odkształcanie się płyty w czasie pod obciążeniem i związane jest w głównej mierze z nieliniowymi własnościami fizycznymi materiału.

2. Wyprowadzając odpowiedni do (1.1) układ równań dla płyty kołowej, posiadającej zdolność pełzania, uwzględnimy w ogólnym przypadku oprócz nieliniowości geometrycznej nieliniowość fizyczną zgodnie z danymi doświadczalnymi.

Rozważamy płytę kołową poddaną działaniu jednostajnej kompresji w płaszczyźnie środkowej. Zakładamy materiał płyty, że jest nieściśliwy sprężyste i plastycznie oraz wykazuje własności zarówno sprężyste jak i pełzania.

Przy obciążeniu płyty wypadkowa prędkość odkształcenia jest sumą składowej sprężystej $\dot{\epsilon}_{ik}^e$ i składowej pełzania $\dot{\epsilon}_{ik}^c$. Tak więc, całkowita prędkość odkształcenia jest równa

$$(2.1) \quad \dot{\epsilon}_{ik} = \dot{\epsilon}_{ik}^e + \dot{\epsilon}_{ik}^c,$$

gdzie kropką oznacza się różniczkowanie względem czasu.

Związki fizyczne dla nieściśliwego ośrodka sprężystego przyjmujemy w postaci

$$(2.2) \quad \dot{\sigma}_{ik}^e = \frac{\dot{\sigma}_{ik}^*}{2G},$$

zaś dla pełzania

$$(2.3) \quad \dot{\varepsilon}_{ik}^c = \Phi \sigma_{ik}^*,$$

gdzie σ_{ik}^* oznacza dewiator naprężenia, G moduł odkształcenia postaciowego oraz Φ ciekłość, w ogólności będącą funkcją stanu naprężenia.

Jest rzeczą stwierdzoną doświadczalnie, że intensywność naprężeń σ_i określa zdolność do wywołania plastycznego płynięcia w złożonym stanie naprężenia oraz że stan ustalonego pełzania określony intensywnością prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_i$ jest funkcją intensywności naprężeń. Wynika stąd ogólny związek dla pełzania

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_i^c = f(\sigma_i),$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_i^c$ jest intensywnością prędkości odkształceń pełzania oraz

$$(2.5) \quad \Phi = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_i^c}{\sigma_i} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_i)}{\sigma_i}.$$

Intensywność prędkości odkształceń przyjmujemy w postaci

$$(2.6) \quad \dot{\varepsilon}_i^c = A \sigma_i^n,$$

gdzie A i n są stałymi, przy czym n jest liczbą całkowitą większą od jedności.

Zgodnie z powyższymi założeniami otrzymujemy z (2.1) składowe prędkości odkształceń dla płyty kołowej w postaci

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\sigma}_r^*}{2G} + \Phi \sigma_r^*, \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{\dot{\sigma}_\varphi^*}{2G} + \Phi \sigma_\varphi^*, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.8) \quad \Phi = \frac{3}{2} A \sigma_i^{n-1},$$

zaś r i φ oznaczają odpowiednio kierunki promieniowy i obwodowy.

3. Rozważając zagadnienia geometrii odkształceń zakładamy, że ugięcia są symetryczne względem pionowej osi płyty. Wynika stąd, że ugięcie jest funkcją zmiennej promieniowej r oraz czasu t . Wszystkie wielkości określające aktualny w danej chwili stan naprężenia i odkształcenia płyty są poza tym w ogólności funkcjami r , z i t .

Geometryczne związki dla prędkości odkształceń w płaszczyźnie środkowej płyty mają postać

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr}, \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{\dot{u}}{r}, \end{cases}$$

gdzie \dot{u} jest prędkością przemieszczenia w kierunku promieniowym, zaś w oznacza funkcję ugięcia. Jeżeli płyta posiada ugięcie początkowe w_0 , to $w = \bar{w} + w_0$, gdzie \bar{w} oznacza przyrost ugięcia.

Ze względu na symetrię odkształceń kierunki r i φ są głównymi. Biorąc pod uwagę zależność pomiędzy odkształceniami głównymi (3.1) otrzymujemy warunek nierozdzielności w postaci

$$(3.2) \quad \dot{\epsilon}_r - \frac{d}{dr}(r\dot{\epsilon}_\varphi) = \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr}.$$

4. Stan naprężenia w płycie kołowej, symetrycznie obciążonej w jej płaszczyźnie środkowej, opisany jest tensorem lub dewiatorem naprężeń. Obydwu wielkościom odpowiadają składowe w kierunku promieniowym i obwodowym.

Związki pomiędzy składowymi dewiatora i tensora są następujące:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \sigma_r^* = \frac{2}{3} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\varphi \right), \\ \sigma_\varphi^* = \frac{2}{3} \left(\sigma_\varphi - \frac{1}{2} \sigma_r \right). \end{cases}$$

Obliczając z (4.1) składowe tensora naprężeń mamy

$$(4.2) \quad \begin{cases} \sigma_r = 2\sigma_r^* + \sigma_\varphi^*, \\ \sigma_\varphi = \sigma_r^* + 2\sigma_\varphi^*. \end{cases}$$

Intensywność naprężeń dla dwuwymiarowego stanu naprężenia ma postać

$$(4.3) \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2}$$

lub wyrażoną przez składowe dewiatora naprężeń

$$(4.4) \quad \sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{\sigma_r^{*2} + \sigma_r^* \sigma_\varphi^* + \sigma_\varphi^{*2}}.$$

Wprowadzając zależności (2.3) otrzymujemy intensywność naprężeń dla stanu pełzania w postaci

$$(4.5) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{\Phi} \sqrt{\dot{\epsilon}_r^{c2} + \dot{\epsilon}_r^c \dot{\epsilon}_\varphi^c + \dot{\epsilon}_\varphi^{c2}}.$$

Biorąc pod uwagę wzór dla ciekłości (2.5) możemy napisać (4.5) ostatecznie

$$(4.6) \quad \sigma_i = B \sqrt{\dot{\epsilon}_r^{c2} + \dot{\epsilon}_r^c \dot{\epsilon}_\varphi^c + \dot{\epsilon}_\varphi^{c2}},$$

gdzie

$$(4.7) \quad B = \sqrt[2n]{\frac{4}{3A^3}}.$$

5. Warunek równowagi naprężeń w płaszczyźnie środkowej płyty ma postać

$$(5.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0.$$

Aby otrzymać równoważny warunek wyrażony przez prędkości odkształceń, obliczamy z (2.7) składowe dewiatora naprężeń. W ten sposób otrzymujemy

$$(5.2) \quad \begin{cases} \sigma_r^* = e^{-2G \int \phi dt} \left[\sigma_{r0}^* + 2G \int_{t_0}^t \dot{\epsilon}_r e^{2G \int \phi dt} dt \right], \\ \sigma_\phi^* = e^{-2G \int \phi dt} \left[\sigma_{\phi 0}^* + 2G \int_{t_0}^t \dot{\epsilon}_\phi e^{2G \int \phi dt} dt \right], \end{cases}$$

gdzie σ_{r0}^* i $\sigma_{\phi 0}^*$ są początkowymi wartościami składowych dewiatora naprężeń w płaszczyźnie środkowej w chwili $t = t_0$. Stąd za pomocą formuł (4.2) wyznaczamy składowe tensora naprężeń

$$(5.3) \quad \begin{cases} \sigma_r = e^{-2G \int \phi dt} \left[\sigma_{r0} + 2G \int_{t_0}^t (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\phi) e^{2G \int \phi dt} dt \right], \\ \sigma_\phi = e^{-2G \int \phi dt} \left[\sigma_{\phi 0} + 2G \int_{t_0}^t (\dot{\epsilon}_r + 2\dot{\epsilon}_\phi) e^{2G \int \phi dt} dt \right], \end{cases}$$

gdzie

$$(5.4) \quad \begin{cases} \sigma_{r0} = 2\sigma_{r0}^* + \sigma_{\phi 0}^*, \\ \sigma_{\phi 0} = \sigma_{r0}^* + 2\sigma_{\phi 0}^*. \end{cases}$$

W dalszym ciągu pracy przyjmować będziemy stan neutralny płyty w płaszczyźnie środkowej w chwili $t = t_0$, tzn. $\sigma_{r0} = \sigma_{\phi 0} = 0$.

Podstawiając wyrażenia naprężeń (5.3) do warunku równowagi (5.1) otrzymujemy po dwukrotnym zróżniczkowaniu i eliminacji całki następujące równanie:

$$(5.5) \quad \Phi' \left[\left(2 \frac{d\ddot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\ddot{\epsilon}_\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\ddot{\epsilon}_r - \ddot{\epsilon}_\phi) \right] + (2G\Phi\Phi' - \dot{\Phi}^2) \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\phi) \right] - 2G\Phi'^2 (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\phi) = 0,$$

gdzie oznaczono

$$(5.6) \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dr}, \quad \dot{\Phi}' = \frac{d\dot{\Phi}}{dr}.$$

Jeżeli zmiany ciekłości w kierunku promieniowym w czasie są małe, co ma miejsce przy dostatecznie małych ugięciach i jednorodnym stanie wyjściowym, to pomijając $\dot{\Phi}'$ otrzymujemy z (5.5)

$$(5.7) \quad \left[\left(2 \frac{d\ddot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\ddot{\epsilon}_\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\ddot{\epsilon}_r - \ddot{\epsilon}_\phi) \right] + 2G\Phi \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\phi) \right] - 2G\Phi'^2 (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\phi) = 0.$$

Jeżeli odkształcenia sprężyste są małe, to pomijając przyspieszenia otrzymamy z (5.7)

$$(5.8) \quad \Phi \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) \right] - \Phi' (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) = 0.$$

6. Siły ściskające, działając w płaszczyźnie środkowej płyty, wywołują jej deformację. Siły te w przypadku dużych ugięć zależą nie tylko od sił zewnętrznych, ale również od aktualnego wygięcia płyty.

Aby określić wpływ naprężeń w płaszczyźnie środkowej na zginanie płyty, rozważamy warunek równowagi elementu wyciętego myślowo z odkształconej płyty. Oznaczając przez M_r oraz M_φ momenty odpowiednio w płaszczyznach rz oraz φz , mamy warunek

$$(6.1) \quad \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) = -h\sigma_r \frac{dw}{dr},$$

gdzie h jest grubością płyty. Momenty są równe

$$(6.2) \quad \begin{cases} M_r = \int_{-h/2}^{h/2} (2s_r^* + s_\varphi^*) z dz, \\ M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} (s_r^* + 2s_\varphi^*) z dz, \end{cases}$$

gdzie s_r^* , s_φ^* są składowymi dewiatora naprężeń zginających.

Oznaczając przez $\dot{\epsilon}_r$ oraz $\dot{\epsilon}_\varphi$ prędkość odkształceń przy zginaniu i wprowadzając składowe dewiatora naprężeń (5.2) do wyrażeń na momenty (6.2) mamy¹

$$(6.3) \quad \begin{cases} M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ e^{-2G \int \varphi dt} \left[s_{r0} + 2G \int_{t_0}^t (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) e^{2G \int \varphi dt} dt \right] \right\} z dz, \\ M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ e^{-2G \int \varphi dt} \left[s_{\varphi 0} + 2G \int_{t_0}^t (\dot{\epsilon}_r + 2\dot{\epsilon}_\varphi) e^{2G \int \varphi dt} dt \right] \right\} z dz, \end{cases}$$

gdzie

$$(6.4) \quad s_{r0} = 2s_{r0}^* + s_{\varphi 0}^*, \quad s_{\varphi 0} = s_{r0}^* + 2s_{\varphi 0}^*$$

są naprężeniami zginającymi w chwili początkowej.

Zauważamy, że ciekłość Φ występująca w wyrażeniach na momenty zginające zależy od zmiennej z . Oznacza to, że w ogólności intensywność naprężeń jest zmienna wzdłuż grubości płyty.

Mówiąc o dużych ugięciach płyty mamy na myśli odkształcenia rzędu grubości h , tzn. na tyle małe, że słuszne jest założenie uproszczonych związków dla krzywizn. Tak więc wyrażając prędkości odkształceń przez krzywizny mamy

$$(6.5) \quad \dot{\epsilon}_r = \dot{\chi}_r z, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\chi}_\varphi z,$$

¹ Naprężenia zginające wyrażają się formalnie identycznymi z (5.2) lub (5.3) formułami, wynikającymi ze związków fizycznych.

gdzie

$$(6.6) \quad \dot{\chi}_r = -\frac{d^2\dot{w}}{dr^2}, \quad \dot{\chi}_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr}.$$

Wprowadzając funkcje (6.5) do wyrażen na momenty (6.3) otrzymujemy

$$(6.7) \quad \begin{cases} M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ e^{-2G \int \phi dt} \left[\frac{1}{z} s_{r0} - 2G \int_{t_0}^t \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) e^{2G \int \phi dt} dt \right] \right\} z^2 dz, \\ M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ e^{-2G \int \phi dt} \left[\frac{1}{z} s_{\varphi 0} + 2G \int_{t_0}^t \left(\frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) e^{2G \int \phi dt} dt \right] \right\} z^2 dz. \end{cases}$$

W powyższych formułach

$$(6.8) \quad \Phi = \frac{3}{2} A \sigma_i^{n-1} = \frac{3}{2} A B^{n-1} \sqrt[2n]{(\dot{\epsilon}_r^c + \dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_\varphi^c + \dot{\epsilon}_\varphi^c)^{n-1}},$$

zaś

$$(6.9) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_r^c = -\frac{d^2\dot{w}}{dr^2} z + \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr}, \\ \dot{\epsilon}_\varphi^c = -\frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} z + \frac{\dot{u}}{r} \end{cases}$$

są prędkościami odkształceń pełzania w dowolnym punkcie płyty.

Dla dostatecznie małych ugięć zmiennosc Φ wzdłuż grubości h może być pominięta. Wtedy wykonując całkowanie w (6.7) mamy

$$(6.10) \quad \begin{cases} M_r = -\frac{h^3}{12} e^{-2G \int \phi dt} \left[-\frac{12}{h^2} M_{r0} + 2G \int_{t_0}^t \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) e^{-2G \int \phi dt} dt \right], \\ M_\varphi = -\frac{h^3}{12} e^{-2G \int \phi dt} \left[-\frac{12}{h^2} M_{\varphi 0} + 2G \int_{t_0}^t \left(\frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) e^{-2G \int \phi dt} dt \right], \end{cases}$$

gdzie

$$(6.11) \quad M_{r0} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{r0} z dz, \quad M_{\varphi 0} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{\varphi 0} z dz.$$

Zakładamy w dalszym ciągu stan neutralny w chwili początkowej, tzn. $M_{r0} = M_{\varphi 0} = 0$ dla $t = t_0$.

Podstawiając wyrażenia (6.10) do równania równowagi elementu płyty (6.1) otrzymujemy po dwukrotnym zróżniczkowaniu i eliminacji występujących całek następujące równanie różniczkowe:

$$(6.12) \quad G\Phi'^2 \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) + G\Phi' (2G\Phi\Phi' - \dot{\Phi}') \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - G^2\Phi'^3 \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \frac{3}{h^2} \left\{ \left[\Phi' \frac{d\ddot{w}}{dr} - \dot{\Phi}' \frac{d\dot{w}}{dr} \right] \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) \right] + 2G\Phi' \left[(2G\Phi\Phi' - \dot{\Phi}') \frac{d\dot{w}}{dr} + 2\Phi' \frac{d\dot{w}}{dr} \right] (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) + 2G\Phi'^2 \frac{d\dot{w}}{dr} (2\ddot{\epsilon}_r + \ddot{\epsilon}_\varphi) \right\}.$$

Jeżeli odkształcenia sprężyste ciekłości w czasie są małe i mogą być pominięte, to przyjmując w (6.12) $\dot{\Phi}' = 0$, otrzymujemy

$$(6.13) \quad G\Phi' \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) + 2G^2\Phi\Phi' \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - G^2\Phi'^2 \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \frac{3}{h^2} \left\{ \frac{d\dot{w}}{dr} \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) \right] + 2G\Phi' \left(2G\Phi \frac{d\dot{w}}{dr} + 2 \frac{d\dot{w}}{dr} \right) (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) + 2G\Phi' \frac{d\dot{w}}{dr} (2\ddot{\epsilon}_r + \ddot{\epsilon}_\varphi) \right\}.$$

Jeżeli prędkości deformacji są dostatecznie małe, to pomijając przyspieszenia w (6.13) mamy

$$(6.14) \quad 2G\Phi \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - G\Phi' \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \frac{12}{h^2} \left(G\Phi \frac{d\dot{w}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr} \right) (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi).$$

7. W uproszczonych równaniach (5.7), (6.13) oraz (5.8) i (6.14) podstawiamy ciekłość wyrażoną przez intensywność naprężeń ze związku (2.8) oraz jej pochodną względem r :

$$(7.1) \quad \Phi' = \frac{3}{2} A(n-1) \sigma_i^{n-2} \sigma_i'.$$

Biorąc pod uwagę wzór (4.6) oraz oznaczając

$$(7.2) \quad \Omega = \dot{\epsilon}_r^{c2} + \dot{\epsilon}_r^c \dot{\epsilon}_\varphi^c + \dot{\epsilon}_\varphi^{c2},$$

mamy

$$(7.3) \quad \sigma_i = B \sqrt[n]{\Omega},$$

a następnie

$$(7.4) \quad \Phi = \frac{3}{2} AB^{n-1} \sqrt[n]{\Omega^{n-1}}.$$

Pierwsza pochodna jest równa

$$(7.5) \quad \Phi' = \frac{3}{2} \frac{n-1}{2n} AB^{n-1} \frac{\Omega'}{\sqrt[n]{\Omega^{n+1}}}.$$

Podstawiając powyższe funkcje w równania (5.7) i (6.13) dostajemy układ

$$(7.6) \quad \sqrt[n]{\Omega^{n+1}} \left[\left(2 \frac{d\ddot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\ddot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\ddot{\epsilon}_r - \ddot{\epsilon}_\varphi) \right] + 3GAB^{n-1} \Omega \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) \right] - 3GAB^{n-1} \frac{n-1}{2n} \Omega' (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) = 0,$$

$$(7.7) \quad 2\sqrt[n]{\Omega^{n+1}} \Omega' \left(\frac{d^3\ddot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\ddot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\ddot{w}}{dr} \right) + 6GAB^{n-1} \Omega' \Omega \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - 3GAB^{n-1} \frac{n-1}{2n} \Omega'^2 \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \\ = \frac{8n}{GAB^{n-1}(n-1)h^2} \frac{d\ddot{w}}{dr} \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) \right] + \\ + \frac{12}{h^2} \left[\left(3GAB^{n-1} \sqrt[n]{\Omega^{n-1}} \frac{dw}{dr} + 2 \frac{d\dot{w}}{dr} \right) (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) + (2\ddot{\epsilon}_r + \ddot{\epsilon}_\varphi) \frac{dw}{dr} \right] \Omega' \sqrt[n]{\Omega^{n+1}}.$$

Wprowadzając związki (7.4) i (7.5) do równań (5.8) i (6.14), otrzymujemy układ

$$(7.8) \quad \Omega \left[\left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) \right] - \frac{n-1}{2n} \Omega' (2\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) = 0,$$

$$(7.9) \quad 2\Omega \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - G \frac{n-1}{2n} \Omega' \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \\ = \frac{8}{GAB^{n-1}h^2} \frac{d\dot{w}}{dr} (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi) \sqrt[n]{\Omega^{n+1}} + \frac{12}{h^2} \Omega \frac{dw}{dr} (2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi).$$

8. Jako szczególny rozważymy przypadek, gdy materiał płyty jest liniowo sprężysto-lepki. Wtedy ciekłość jest wielkością stałą lub, ewentualnie, zależną od czasu.

Korzystając, jak poprzednio, z równań (5.1) i (6.1) oraz z wyrażeń dla naprężeń (5.3) i momentów (6.3) przy założeniu $\Phi = \text{const} (r, z)$ dochodzimy po analogicznych jak poprzednio operacjach do następującego układu:

$$(8.1) \quad \left(2 \frac{d\dot{\epsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi) = 0,$$

$$(8.2) \quad \frac{d\dot{w}}{dr} \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) + \left(2G\Phi \frac{d\dot{w}}{dr} - \frac{d\dot{w}}{dr} \right) \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \frac{6}{h^2} \left\{ \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr} [(2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) + 2G\Phi(2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi)] + \left[2 \left(\frac{d\dot{w}}{dr} \right)^2 - \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr} \right] (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \right\}.$$

Pominięcie przyśpieszeń w ostatnim równaniu (8.2) upraszcza je do postaci

$$(8.3) \quad G\Phi \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \frac{6}{h^2} \left(G\Phi \frac{dw}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr} \right) (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi).$$

9. Równania wyprowadzone w poprzednich punktach dotyczą płyty, wykazującej odkształcenia sprężyste i pełzania. Równania te upraszczają się znacznie, jeżeli uczynimy dodatkowe założenie o stosunku odkształceń sprężystych do odkształceń pełzania. Jeżeli odkształcenia pełzania dominują, można pominąć prędkości odkształceń sprężystych w związkach fizykalnych (2.7). Uproszczenie to będzie słuszne dla wyraźnie zaznaczającego się zakresu ustalonego pełzania, w szczególności w przypadku, gdy dopuszczalne są duże ugięcia.

Tak więc dla znacznych prędkości odkształceń w płaszczyźnie środkowej płyty (w porównaniu ze sprężystymi) mamy

$$(9.1) \quad \dot{\varepsilon}_r = \Phi\sigma_r^*, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \Phi\sigma_\varphi^*,$$

gdzie ciekłość określona jest formułą (2.8), zaś składowe dewiatora naprężeń są odpowiednio równe:

$$(9.2) \quad \sigma_r^* = \frac{2}{3} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\varphi \right), \quad \sigma_\varphi^* = \frac{2}{3} \left(\sigma_\varphi - \frac{1}{2} \sigma_r \right).$$

Podstawiając (9.2) do (9.1), obliczając naprężenia oraz wprowadzając je do równania równowagi w płaszczyźnie środkowej płyty, otrzymujemy warunek

$$(9.3) \quad \Phi \left[\left(2 \frac{d\dot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) \right] - \Phi' (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) = 0.$$

Wyprowadzając warunek równowagi momentów korzystamy ze związków (6.2); w rozważanym przypadku dostajemy

$$(9.4) \quad \begin{cases} M_r = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\Phi} \left[2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right] z^2 dz, \\ M_\varphi = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\Phi} \left[\frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right] z^2 dz, \end{cases}$$

gdzie ciekłość zależna jest w ogólności od r , z i t .

Dla dostatecznie małych ugięć płyty zmienność ciekłości wzdłuż grubości h można pominąć i zamiast (9.4) mamy

$$(9.5) \quad \begin{cases} M_r = -\frac{h^2}{12} \frac{1}{\Phi} \left(2 \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right), \\ M_\varphi = -\frac{h^2}{12} \frac{1}{\Phi} \left(\frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right). \end{cases}$$

Wprowadzając do równania (6.1) wartości momentów (9.5) będziemy mieli

$$(9.6) \quad 2\Phi \left[\left(\frac{d^3 \dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - \frac{6}{h^2} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \frac{dw}{dr} \right] - \Phi' \left(2 \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = 0.$$

Tak więc układ równań (9.3) i (9.6) spełniony jest dla dostatecznie małych ugięć płyty pełzającej.

Jeżeli materiał płyty jest liniowo lepki, to znaczy jeśli Φ jest odwrotnością zwykłej lepkości Newtona, to przyjmując pochodną po r równą zeru w układzie (9.3) i (9.6), otrzymujemy

$$(9.7) \quad \left(2 \frac{d\dot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) = 0,$$

$$(9.8) \quad \frac{d^3 \dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} = \frac{6}{h^2} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \frac{dw}{dr}.$$

Zauważamy, że powyższy układ równań wynika z bardziej ogólnego układu (5.8) i (6.14) przy założeniu niezależnej od r ciekłości i sprężystej sztywności płyty.

Zauważamy dalej, że układ równań (9.3) i (9.6) wynika z bardziej ogólnego układu (5.8) i (6.14) przy założeniu w ostatnim równaniu zmierzającej do nieskończoności sprężystej sztywności płyty.

Biorąc pod uwagę zależności (7.4) i (7.5) przedstawiamy ostatecznie układ (9.3), (9.6) w postaci

$$(9.9) \quad \Omega \left[\left(2 \frac{d\dot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) \right] - \frac{n-1}{2n} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \Omega' = 0,$$

$$(9.10) \quad \frac{2\Omega}{n} \left[\left(\frac{d^3 \dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - \frac{6}{h^2} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \frac{dw}{dr} \right] - \frac{n-1}{2n} \left(2 \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) \Omega' = 0.$$

10. Układ trzech równań: równania równowagi naprężeń w płaszczyźnie środkowej płyty, równania równowagi momentów oraz równania nierozdzielności wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi, określa trzy funkcje: funkcję ugięcia w , oraz całkowite prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_r$ i $\dot{\varepsilon}_\varphi$ lub prędkości odkształceń pełzania $\dot{\varepsilon}_r^c$ i $\dot{\varepsilon}_\varphi^c$.

Badanie wyboczenia przy pełzaniu płyty kołowej w zakresie dużych ugięć, materiał której podlega fizycznemu prawu (2.7) lub (9.1), sprowadza się zatem do rozwiązania wyżej wspomnianego układu równań. Badanie wyboczenia ogranicza się w zasadzie do zakresu ustalonego pełzania. Ponieważ wymienione powyżej równania stanowią skomplikowany układ, jego bezpośrednie rozwiązanie natrafia na duże trudności. Aby uzyskać rozwiązania w poszczególnych przypadkach, przyjmujemy dodatkowe, przybliżone założenia odnośnie postaci przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej płyty lub prędkości odkształceń w tej płaszczyźnie oraz kształt wygiętej płyty. W celu uzyskania odpowiedniego przybliżenia stosujemy metodę Galerkina.

W naszej analizie ograniczymy się do przepowiadania wzrostu odkształceń płyty w czasie. Jeżeli istnieje taki punkt czasowy, w którym prędkość ugięcia wzrasta gwałtownie, teoretycznie obserwujemy nieskończony przyrost prędkości, to punkt ten nazwiemy teoretycznym czasem krytycznym. Tak więc warunek nieskończonej wartości prędkości ugięcia daje teoretyczny czas krytyczny utraty stateczności przy pełzaniu¹.

Droga postępowania przy badaniu jest następująca. Obieramy postać funkcji ugięcia w zależną od warunków brzegowych oraz postać przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej płyty względnie prędkości odkształceń głównych. Wszystkie wielkości rozważamy jako funkcje czasu. Założenia te pozwalają na spełnienie warunku nierozdzielności. W ten sposób pozostają do spełnienia dwa równania równowagi naprężeń i momentów. Wyrażając prędkości odkształceń przez funkcję przemieszczenia ze związków geometrycznych oraz przez funkcję ugięcia i podstawiając je do pozostałych równań równowagi otrzymujemy warunki, które muszą być spełnione ze względu na pewne wprowadzone i nieznanne parametry. Za pomocą tych parametrów będących w ogólności funkcjami czasu możemy przedstawić przybliżone rozwiązania problemu w taki sposób, by popełnić błąd możliwie jak najmniejszy. Warunek całkowity Galerkina pozwala na uzyskanie dodatkowych równań dla nieznananych parametrów, z których, obliczywszy je, możemy wyrazić funkcję ugięcia i przemieszczenie w sposób określony. Zwykle parametrem takim będzie ugięcie płyty w środku jako funkcja czasu. Parametr ten znajdujemy w ogólności ze zwyczajnych nieliniowych równań różniczkowych, otrzymanych w wyniku stosowania metody Galerkina. Jeżeli istnieje możliwość wyrażenia lub obliczenia pierwszej pochodnej ugięcia względem czasu w sposób bezpośredni, to znajdujemy niekiedy od razu teoretyczny czas krytyczny. Całkowanie dostarcza związków pomiędzy ugięciem i czasem, opisujących zachowanie się płyty przy pełzaniu.

¹ Zagadnienie czasu krytycznego przy wyboczeniu prętów omówione zostało m. in. w pracy [16]. Autor wykazuje tutaj, że w przypadku doraźnych odkształceń plastycznych niestateczny stan słupa występuje dla skończonego ugięcia. W odpowiedniej chwili krytycznej prędkość ugięcia rośnie nieograniczenie.

11. W badaniach konkretnych przypadków wybożenia przy pełzaniu płyt kołowych przyjmujemy dla celów porównawczych wykładnik potęgowej funkcji ciekłości $n = 3$.

Zatem przyjmujemy

$$(11.1) \quad \Phi = \frac{3}{2} A \sigma_i^2 = \frac{3}{2} A B^2 \sqrt[3]{\Omega}.$$

Otrzymujemy wtedy z (7.6) i (7.7) następujący układ:

$$(11.2) \quad \sqrt[3]{\Omega^2} \left[\left(2 \frac{d\ddot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\ddot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\ddot{\varepsilon}_r - \ddot{\varepsilon}_\varphi) \right] + 3GAB^2 \Omega \left[\left(2 \frac{d\dot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) \right] - GAB^2 \Omega' (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) = 0,$$

$$(11.3) \quad 2\sqrt[3]{\Omega^2} \Omega' \left(\frac{d^3\ddot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\ddot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\ddot{w}}{dr} \right) + 6GAB^2 \Omega' \Omega \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - GAB^2 \Omega'^2 \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \\ = \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{1}{GAB^2} \frac{d\ddot{w}}{dr} \left[\left(2 \frac{d\dot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) \right] + \right. \\ \left. + \Omega' \sqrt[3]{\Omega^2} \left[\left(3GAB^2 \sqrt[3]{\Omega} \frac{dw}{dr} + 2 \frac{d\dot{w}}{dr} \right) (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) + (2\ddot{\varepsilon}_r + \ddot{\varepsilon}_\varphi) \frac{dw}{dr} \right] \right\}.$$

Układ równań (7.8) i (7.9), w którym pominięto przyspieszenia, daje w rozwanym przypadku

$$(11.4) \quad 3\Omega \left[\left(2 \frac{d\dot{\varepsilon}_r}{dr} + \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) \right] - \Omega' (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) = 0,$$

$$(11.5) \quad 6\Omega \left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - \Omega' \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) = \\ = \frac{12}{h^2} \left[\frac{2}{GAB^2} \frac{d\dot{w}}{dr} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \sqrt[3]{\Omega^2} + 3\Omega \frac{dw}{dr} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \right].$$

Przy pominięciu odkształceń sprężystych otrzymujemy z (9.9) równanie identyczne z (11.4), zaś z (9.10):

$$(11.6) \quad 6\Omega \left[\left(\frac{d^3\dot{w}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) - \frac{6}{h^2} (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \frac{dw}{dr} \right] - \left(2 \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right) \Omega' = 0.$$

Dla innego szczególnego przypadku $n = 1$, to znaczy dla ciekłości Newtona, dostajemy z układu (9.9) i (9.10), układ (9.7) i (9.8).

II. Część szczegółowa

12. Badanie stateczności przy pełzaniu rozpoczynamy od najprostszego, geometrycznie i fizycznie liniowego przypadku płyty kołowej z utwierdzonymi brzegami,

posiadającymi swobodę przemieszczeń w kierunku radialnym. Związki fizyczne uwzględniające odkształcenia sprężyste i pełzanie są następujące:

$$(12.1) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{\sigma}_r^*}{2G} + \Phi \sigma_r^*, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{\sigma}_\varphi^*}{2G} + \Phi \sigma_\varphi^*,$$

gdzie $\Phi = \text{const}$ (r, z).

Układ równań podstawowych w tym przypadku ma postać (8.1) i (8.2), w którym odkształcenia w płaszczyźnie środkowej płyty mogą być funkcjami tylko czasu, ponieważ przemieszczenie jest funkcją liniową zmiennej promieniowej.

Tak więc przy założeniu geometrycznej liniowości funkcja przemieszczenia ma postać

$$(12.2) \quad u = -g\varrho,$$

gdzie $\varrho = r/R$ jest bezwymiarową zmienną oraz R promieniem płyty.

Prędkość przemieszczenia jest równa

$$(12.3) \quad \dot{u} = -\dot{g}\varrho.$$

Przez \dot{g} oznaczono daną prędkość odkształcenia na brzegu płyty, zaś składowe prędkości odkształceń są sobie równe i wynoszą

$$(12.4) \quad \dot{\epsilon}_r = -\dot{g}/R = -m, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = -\dot{g}/R = -m,$$

gdzie m przyjmujemy jako stałe.

Przybliżoną postać odkształconej płyty zakładamy w formie parabolicznej

$$(12.5) \quad w = fh(1-\varrho^2)^2,$$

gdzie f jest bezwymiarowym ugięciem w środku płyty; $f = \bar{f}/h$. Przyrost ugięcia w czasie wynosi zatem

$$(12.6) \quad \dot{w} = \dot{f}h(1-\varrho^2)^2.$$

Przyjęta jako przybliżenie postać funkcji ugięcia (12.5) występuje w rozwiązaniach dla płyty kołowej z małymi ugięciami przy obciążeniu jednostajnym.

W dalszym ciągu zakładamy stan neutralny płyty w chwili $t = t_0$ oraz początkową postać

$$(12.7) \quad w_0 = f_0 h (1-\varrho^2)^2,$$

gdzie f_0 jest bezwymiarową strzałką w środku płyty w chwili początkowej.

Możemy zastosować bezpośrednio warunek całkowity Galerkinia do różniczkowo-całkowego równania (6.1) przy uwzględnieniu (6.3) i (5.3) oraz neutralnego stanu płyty w chwili $t = t_0$. Podstawiając przyjętą funkcję ugięcia (12.5) oraz prędkości odkształceń (12.4) do tak uzyskanego równania, mnożąc je przez $(1-\varrho^2)^2\varrho$ oraz całkując w granicach od 0 do 1, otrzymujemy po przyrównaniu do zera warunek wynikający z zastosowania metody Galerkinia:

$$(12.8) \quad \frac{2}{m} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \int_{t_0}^t f e^{2G\Phi(t-t_0)} dt - f \int_{t_0}^t e^{2G\Phi(t-t_0)} dt = 0.$$

Równanie to spełniać musi parametr f . Zakładając dalej m oraz Φ jako stałe w czasie i różniczkując (12.8), dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$(12.9) \quad \dot{f}[(2a_0b-1)e^{b(t-t_0)}+1]-bf e^{b(t-t_0)}=0,$$

w którym oznaczają

$$(12.10) \quad a_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{m}, \quad b = 2G\Phi.$$

Wprowadzimy dalej oznaczenie

$$(12.11) \quad \kappa = \left(\frac{3}{2}\right)^3 a_0 b.$$

Z równania (12.9) znajdziemy pierwszą pochodną

$$(12.12) \quad \dot{f} = \frac{bf}{(2a_0b-1)+e^{-b(t-t_0)}},$$

a stąd teoretyczny czas krytyczny dla pochodnej ugięcia rosnącej nieograniczenie wynosi

$$(12.12.1) \quad t_{cr} = t_0 + \frac{1}{b} \ln \frac{1}{1-2a_0b}.$$

Jak widać z formuły (12.12) czas krytyczny istnieje dla wartości

$$(12.12.2) \quad a_0 b < \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \kappa < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

Z (12.12) otrzymujemy początkową wielkość prędkości ugięcia w środku płyty przyjmując $t = t_0$. Tak więc mamy

$$(12.13) \quad \dot{f}_0 = \frac{f_0}{2a_0}.$$

Rozdzielając zmienne w równaniu (12.9) i całkując dostajemy rozwiązanie w postaci

$$(12.14) \quad f = f_0 e^{\frac{b}{2a_0b-1}(t-t_0)} \left[\frac{(2a_0b-1)+e^{-b(t-t_0)}}{2a_0b} \right]^{\frac{1}{2a_0b-1}}$$

oraz wielkość pierwszej pochodnej jako funkcji czasu

$$(12.15) \quad \dot{f} = bf_0 \frac{e^{\frac{b}{2a_0b-1}(t-t_0)}}{(2a_0b-1)+e^{-b(t-t_0)}} \left[\frac{(2a_0b-1)+e^{-b(t-t_0)}}{2a_0b} \right]^{\frac{1}{2a_0b-1}}.$$

Jak widać z otrzymanego rozwiązania, zachowanie się płyty w czasie zależy od ugięcia początkowego f_0 oraz od wartości współczynników a_0 i b lub κ .

Z rozwiązania (12.4) powinniśmy otrzymać rozwiązanie dla szczególnego przypadku płyty czysto sprężystej.

Założmy, że taka płyta poddana jest jednostajnej kompresji w płaszczyźnie środkowej ze stałą w czasie prędkością m na brzegu. Dla płyty sprężystej współczynnik $\kappa = 0$, ponieważ $b = 0$. Obliczając granicę rozwiązań (12.14) i (12.15) gdy $\kappa \rightarrow 0$ mamy

$$(12.16) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \dot{f} = \frac{2a_0 f_0}{[2a_0 - (t - t_0)]^2}$$

oraz

$$(12.17) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} f = \frac{2a_0 f_0}{2a_0 - (t - t_0)}.$$

Ponieważ pochodna ugięcia wzrasta nieograniczenie dla

$$(12.18) \quad 2a_0 - (t - t_0) = 0,$$

istnieje teoretyczny czas krytyczny utraty stateczności, równy

$$(12.19) \quad t_{cr} = t_0 + 2a_0,$$

zaś odpowiednie ugięcie krytyczne z (12.17) jest równe nieskończoności. Identyfikując wynik otrzymujemy obliczając granicę (12.12.1) gdy $b \rightarrow 0$.

Istnienie teoretycznego czasu krytycznego w przypadku płyty idealnie sprężystej jest fizycznie uzasadnione, jeśli weźmiemy pod uwagę przyjęty schemat obciążenia, w którym kompresja na brzegu wzrasta liniowo z czasem (por. rys. 7). Z chwili gdy ciśnienia boczne osiągną wartość krytyczną (Eulera), ugięcia wzrastają nieograniczenie. Odpowiednie naprężenia krytyczne wyznaczone zostaną w p. 17.

Z drugiej strony, możemy zastosować warunek Galerkina bezpośrednio do równania różniczkowego (8.2), które jest prawdziwe zarówno dla małych jak i dużych ugięć. Wprowadzając wielkości przyjęte do tego równania, mnożąc przez $(1 - \varrho^2)^2 \varrho$ oraz całkując w granicach od 0 do 1, otrzymujemy po przyrównaniu do zera następujące równanie różniczkowe, które musi spełniać parametr f :

$$(12.20) \quad \ddot{f}f - 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{2G\Phi}{m} \left(\frac{h}{R} \right)^3 \right] \dot{f}^2 - \left(2G\Phi + \frac{\dot{m}}{m} \right) \dot{f}f = 0,$$

gdzie m jest dla ogólności funkcją czasu. Wprowadzając oznaczenia (12.10), mamy z (12.20)

$$(12.21) \quad \ddot{f}f - 2(1 - a_0 b) \dot{f}^2 - b \dot{f}f = 0,$$

jeśli dla porównania z (12.9) przyjmiemy $m = \text{const}$.

Łatwo się przekonać, że powyższe nieliniowe równanie różniczkowe posiada oprócz trywialnego rozwiązania $f = \text{const}$ rozwiązanie, które dane jest wzorem (12.14).

Linearyzując równanie (12.21) podstawiamy

$$(12.22) \quad \dot{f} = p, \quad \ddot{f} = p \frac{dp}{df} = pp'$$

skąd wynika

$$(12.23) \quad p' - \frac{2(1-a_0b)}{f} p = b,$$

którego rozwiązanie jest funkcją

$$(12.24) \quad p = p_0 \left(\frac{f}{f_0} \right)^{2(1-a_0b)} - \frac{b}{1-2a_0b} \left[f - f_0 \left(\frac{f}{f_0} \right)^{2(1-a_0b)} \right];$$

$p_0 = \dot{f}_0$ oznacza tutaj początkową prędkość ugięcia.

Przedyskutujemy powyższe rozwiązanie w związku z różnymi wartościami współczynnika κ .

Najpierw rozpatrzmy przypadek płyty czysto sprężystej. Dla niej $\kappa = 0$, a równanie (12.23) upraszcza się do postaci

$$(12.25) \quad p' - \frac{2}{f} p = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$(12.26) \quad p = p_0 (f/f_0)^2.$$

Rozwiązanie powyższe może być uzyskane bezpośrednio z rozwiązania ogólnego (12.24).

Całkując (12.26) mamy

$$(12.27) \quad f = \frac{f_0^2}{f_0 - p_0(t-t_0)},$$

co przy wykorzystaniu warunku początkowego (12.13), daje wyrażenie identyczne z (12.17), a co za tym idzie ten sam czas krytyczny.

Należy zauważyć, że dla sprężystej membrany $a_0 = 0$ oraz $t_{cr} = t_0$ tzn. utrata stateczności następuje doraźnie.

Dla płyty lepko-sprężystej $b > 0$, a współczynnik κ rośnie ze wzrostem ciekłości. I tak dla $a_0b = 0,5$, to znaczy dla $\kappa = 1/2 \cdot (3/2)^3$, otrzymujemy równanie

$$(12.28) \quad p' - \frac{1}{f} p = b,$$

z rozwiązaniem

$$(12.29) \quad p = b \frac{f}{f_0} \left[f_0 \ln \frac{f}{f_0} + \frac{p_0}{b} \right].$$

Całkując powtórnie dostajemy w wyniku relację ugięcie-czas w postaci

$$(12.30) \quad f = f_0 \exp \{ \exp [b(t-t_0)] - 1 \}.$$

Ten sam wynik uzyskamy, jeżeli obliczymy granicę rozwiązania (12.14) przy $\kappa \rightarrow 1/2 \cdot (3/2)^3$ lub znajdując rozwiązanie uproszczonego równania

$$(12.31) \quad f - b f e^{b(t-t_0)} = 0.$$

Dla $a_0 b = 1$, to znaczy dla $\kappa = (3/2)^3$, mamy

$$(12.32) \quad p' = b,$$

z rozwiązaniem

$$(12.33) \quad p = p_0 + b(f - f_0).$$

Powtórne całkowanie daje

$$(12.34) \quad f = \frac{f_0}{2} [e^{b(t-t_0)} + 1].$$

Identyczny wynik daje rozwiązanie równania (12.9) dla $a_0 b = 1$.

Dla $a_0 b > 1$ współczynnik przy p w równaniu (12.23) jest dodatni. Odpowiada to wartości $\kappa > (3/2)^3$. Tak, np. dla $a_0 b = 3/2$, $\kappa = (3/2)^4$, otrzymujemy równanie

$$(12.35) \quad p' + \frac{1}{f} p = b,$$

a jego rozwiązanie wynika z ogólnej formuły (12.24):

$$(12.36) \quad p = p_0 \frac{f}{f_0} + \frac{b}{2} f_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right).$$

Powtórne całkowanie daje związek ugięcie-czas:

$$(12.37) \quad f = \frac{f_0}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2e^{b(t-t_0)}},$$

który natychmiast może być uzyskany z (12.14).

Ogólną postać rozwiązania (12.24) otrzymamy dla $a_0 b > 1$, $\kappa > (3/2)^3$, przyjmując

$$(12.38) \quad \eta = 2(a_0 b - 1) > 0.$$

Mamy wtedy

$$(12.39) \quad p = p_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^\eta + \frac{b}{\eta + 1} \left[f - f_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^\eta \right],$$

oraz rozwiązanie w postaci

$$(12.40) \quad f = \frac{f_0}{\sqrt{\eta + 2}}^{\eta + 1} \sqrt{1 + (\eta + 1) e^{b(t-t_0)}}.$$

Jeżeli z powyższego rozwiązania obliczymy granicę przy η lub κ zmierzającym do nieskończoności, to okazuje się, że krzywa (12.40) zmierza do funkcji

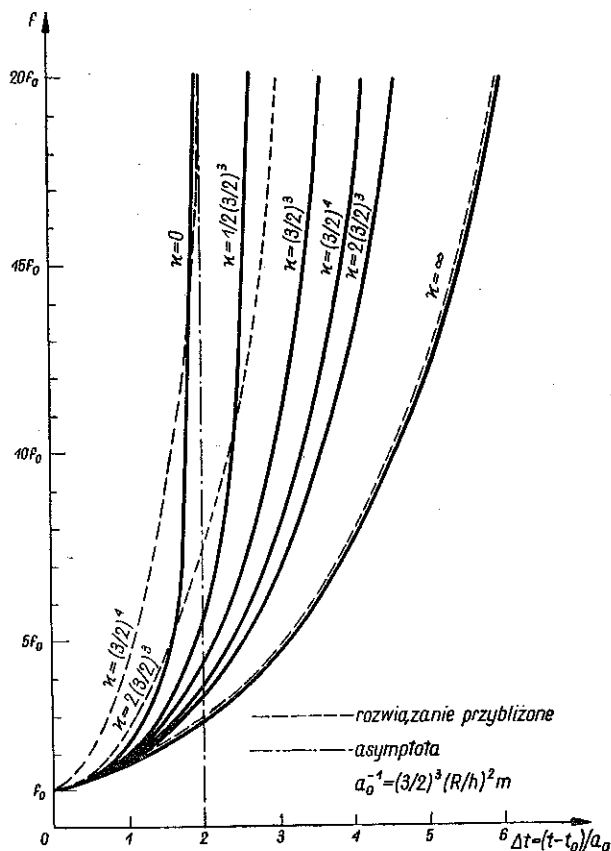
$$(12.41) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f = f_0 e^{\frac{1}{2a_0}(t-t_0)}.$$

Ten sam wynik otrzymujemy z wzoru (12.14), jeśli granica jest obliczona dla $\kappa \rightarrow \infty$.

13. Z rozwiązań uzyskanych w p. 12 wynika, że rodzina krzywych przedstawiająca związki ugięcie-czas dla wartości parametru κ w przedziale $[0, \infty]$ jest zawarta pomiędzy dwiema krzywymi granicznymi (12.27) i (12.41).

Na rysunku 1 pokazano kilka krzywych dla rozmaitych wartości współczynnika κ . Zauważamy, że ugięcia dla małych κ wzrastają znacznie szybciej, przy czym graniczny przypadek płyty sprężystej $\kappa = 0$ oraz $0 < \kappa < 1/2 \cdot (3/2)^3$ dają teoretyczny czas krytyczny.

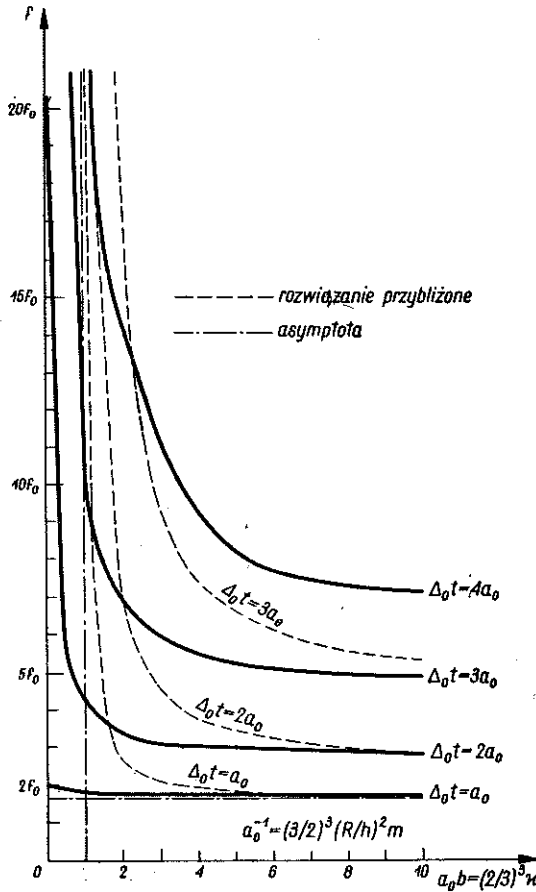
Większa możliwość utraty stateczności dla płyt z mniejszym współczynnikiem κ (im mniejsze κ tym wpływ pełzania mniejszy), jakkolwiek sprzeczna pozornie ze



Rys. 1

wszystkimi dotychczasowymi opiniami, ma uzasadnienie fizyczne w przyjętym schemacie obciążenia. Ze względu na wymuszony charakter deformacji płyty nagromadzona w niej energia sprężysta tym szybciej zbliży się do wielkości krytycznej (odpowiadającej chwili krytycznej dla płyty sprężystej przy $\kappa = 0$), im κ będzie mniejsze. Wraz ze wzrostem pełzania (zwiększenie się κ) wzrasta ilość rozproszony energii, a tym samym wydłuża się czas potrzebny na doprowadzenie do utraty stateczności płyty. W wyniku tego procesu obserwujemy wzrost czasu krytycznego wraz ze wzrostem pełzania dla tej samej wielkości naprężania krytycznego.

Na rysunku 2 pokazano kilka krzywych podających w zależności od κ ugięcia dla rozmaitych przedziałów czasowych $\Delta_0 t = t - t_0$. Jak widać, im mniejsze κ i im mniejszy przedział czasowy, tym większy wzrost ugięcia.



Rys. 2

Na rysunku 1 zastosowano bezwymiarową podziałkę czasu

$$(13.1) \quad \Delta t = \frac{\Delta_0 t}{a_0}.$$

Będziemy ją stosowali również w dalszych przykładach.

Będzie, jak się okaże, rzeczą pouczającą rozważenie przybliżonych rozwiązań równania (12.21) i porównanie wyników ze ścisłymi. Pomijając drugą pochodną (12.21) mamy

$$(13.2) \quad 2(a_0 b - 1)f' - bf = 0$$

oraz przybliżone rozwiązanie

$$(13.3) \quad f = f_0 e^{\frac{b}{2(a_0 b - 1)}(t - t_0)}$$

Zauważamy, że przybliżone rozwiązanie daje nieskończony wzrost ugięcia dla $a_0 b = 1$, to znaczy dla $\kappa = (3/2)^3$ oraz że

$$(13.4) \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} f = f_0 e^{\frac{1}{2a_0}(t - t_0)},$$

co jest wynikiem identycznym z (12.41).

Na rysunku 1 wykreślono kilka krzywych wynikających z przybliżonego rozwiązania (13.3) dla rozmaitych κ . Widać, że im większa wartość κ , tym lepsze przybliżenie rozwiązań ścisłych. Dla $\kappa = \infty$ obie krzywe nakładają się.

Na rysunku 2 przybliżone krzywe dają dobrą zgodność ze ścisłymi dla większych wartości κ .

14. Jak wynika z uzyskanych w p. 12 i p. 13 wyników, zachowanie się lepko-sprężystej płyty kołowej w zakresie małych ugięć zależne jest od wartości współczynnika κ , charakteryzującego płytę pod względem fizycznym i geometrycznym.

Graniczną wartość $\kappa = 0$ otrzymujemy przyjmując

$$(14.1) \quad a_0 \neq 0, \quad b = 0,$$

lub

$$(14.2) \quad a_0 = 0, \quad b \neq 0.$$

Pierwszy przypadek odnosi się do płyty czysto sprężystej, drugi natomiast do lepko-sprężystej membrany. W pierwszym przypadku istnieje teoretyczny czas krytyczny określony wzorem (12.19). Dla membrany utrata stateczności następuje doraźnie.

Należy podkreślić, że nasze badanie ogranicza się do małych prędkości odkształcenia na brzegu. W każdym razie nie rozważamy takich przypadków, dla których istniałaby konieczność uwzględnienia efektów dynamicznych.

Drugi graniczny przypadek otrzymujemy dla $\kappa = \infty$. Odpowiada on założeniu czysto lepkiej płyty, co w danym przypadku równoznaczne będzie z założeniem rosnącej nieograniczenie sprężystej sztywności, ponieważ dla $G = \infty$ mamy $\kappa = \infty$.

Zauważamy dalej, że κ rośnie nieograniczenie również dla dowolnej ciekłości oraz prędkości m zmierzającej do zera. Przypadek ten prowadzi jednakże do trywialnego rezultatu.

Im większa jest ciekłość lepkiego składnika płyty, tym mniejsza zdolność do osiągnięcia znacznych ugięć w krótkich przedziałach czasu w przyjętych warunkach obciążenia. Fakt ten może być wyjaśniony procesem relaksacji bardziej intensywnym dla mniejszych lepkości.

Ogólnie biorąc, jeżeli ustalimy wszystkie parametry charakteryzujące zachowanie się płyty w czasie z wyjątkiem ciekłości, to dla jej małych wielkości nie jesteśmy

w stanie zaobserwować pełzania płyty w krótkich okresach czasu. Notujemy jedynie sprężysty efekt obciążenia. W miarę jak ciekłość zwiększa się i efekt lepkości zaczyna dominować, pełzanie staje się zjawiskiem wyraźnym w dłuższych okresach czasu obserwacji. Efekt sprężysty obciążenia nie jest tutaj dostrzegalny. Powyższe własności materiału płyty znajdują obrazowe przedstawienie na modelu ciała Maxwella składającym się ze sprężyny (element sprężysty) i tłumika (element lepki).

Należy zwrócić jeszcze uwagę na to, że odwrotność współczynnika $b = 2G\Phi$ daje ważną charakterystykę fizyczną materiału, zwaną czasem relaksacji.

Rozważania dotychczasowe rozszerzyć można również na przypadek, gdy fizyczne własności materiału płyty są zmienne w czasie (np. wskutek zmian temperatury) lub jeżeli prędkość odkształcenia na brzegu nie jest stała. Wtedy rozwiązanie ogólne równania (12.23) może być napisane w postaci

$$(14.3) \quad p = e^{\int \frac{2(1-a_0b)}{f} df} \left[p_0 + \int_{t_0}^t b e^{-\int \frac{2(1-a_0b)}{f} df} df \right],$$

gdzie

$$(14.4) \quad b(t) = 2G\Phi + \frac{\dot{m}}{m}.$$

15. Rozważymy obecnie kilka szczególnych przypadków mających związek z nieliniowością fizyczną materiału płyty.

Przy założeniach p. 12 mamy z (7.2)

$$(15.1) \quad \Omega = 3m^2,$$

oraz na podstawie (7.4)

$$(15.2) \quad \Phi = \frac{3}{2} \sqrt[n]{A(2m)^{n-1}}.$$

Tak więc ciekłość zmienia się w zależności od danej prędkości na brzegu m . Jeśli ta ostatnia jest stała, równanie (12.23) jest słuszne w dalszym ciągu, przy czym wartości współczynników są równe

$$(15.3) \quad b = 3G \sqrt[n]{A(2m)^{n-1}}, \quad a_0b = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 G \sqrt[n]{A \frac{2^{n-1}}{m}}.$$

Rozwiązanie może być wtedy napisane w postaci

$$(15.4) \quad p = \frac{1}{2a_0(1-2a_0b)f_0^{1-2a_0b}} f(f^{1-2a_0b} - 2a_0bf_0^{1-2a_0b}),$$

a stąd

$$(15.5) \quad \int_{f_0}^f \frac{df}{f(f^{1-2a_0b} - 2a_0bf_0^{1-2a_0b})} = \frac{t-t_0}{2a_0(1-2a_0b)f_0^{1-2a_0b}}.$$

Dyskusja powyższych wyników postępuje tą samą drogą jak w p. 12 i 13.

Załóżmy z kolei, że prędkość odkształcenia brzegu płyty jest proporcjonalna do aktualnie wywołanego ugięcia w środku rozpiętości płyty f . Tak więc przyjmujemy

$$(15.6) \quad m = k_1 f,$$

gdzie k_1 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Zamiast równania (12.20) mamy teraz

$$(15.7) \quad \ddot{f}f^2 - (3f - 2ab)\dot{f}^2 - b\dot{f}f^2 = 0,$$

gdzie

$$(15.8) \quad a = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{k_1}, \quad b = 2G\Phi.$$

Linearyzując powyższe równanie otrzymujemy

$$(15.9) \quad p' - \frac{3f - 2ab}{f^2} p = b,$$

co daje rozwiązanie w postaci (por. rys. 4)

$$(15.10) \quad p = \frac{f^2}{4a^2 b f_0^2} \left\{ [2ab(1 - f_0) - f_0^2] e^{-2ab \frac{f - f_0}{f f_0}} + f_0^2 \right\} f + 2ab f_0^2,$$

przy warunku początkowym $p_0 = f_0/2a$.

Najpierw rozpatrzmy czysto sprężystą płytę. Ponieważ w tym przypadku $b = 0$, równanie (15.7) upraszcza się do postaci

$$(15.11) \quad p' - \frac{3}{f} p = 0,$$

skąd całkując mamy (rys. 4)

$$(15.12) \quad p = p_0 \left(\frac{f}{f_0}\right)^3.$$

Całkując powtórnie dostajemy ugięcie jako funkcję czasu

$$(15.13) \quad f = \frac{f_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{a}(t - t_0)}}.$$

Jak widać z (15.13) pochodna jak również sama funkcja rośnie nieograniczenie dla

$$(15.14) \quad t_{cr} = t_0 + a.$$

Wynika stąd, że jeżeli m w wyrażeniu (12.19) jest liczbowo równe współczynnikowi k_1 , to czas krytyczny w rozważanym przypadku jest dwukrotnie krótszy.

Rozwiązanie (15.10) znacznie się upraszcza w szczególnym przypadku, gdy

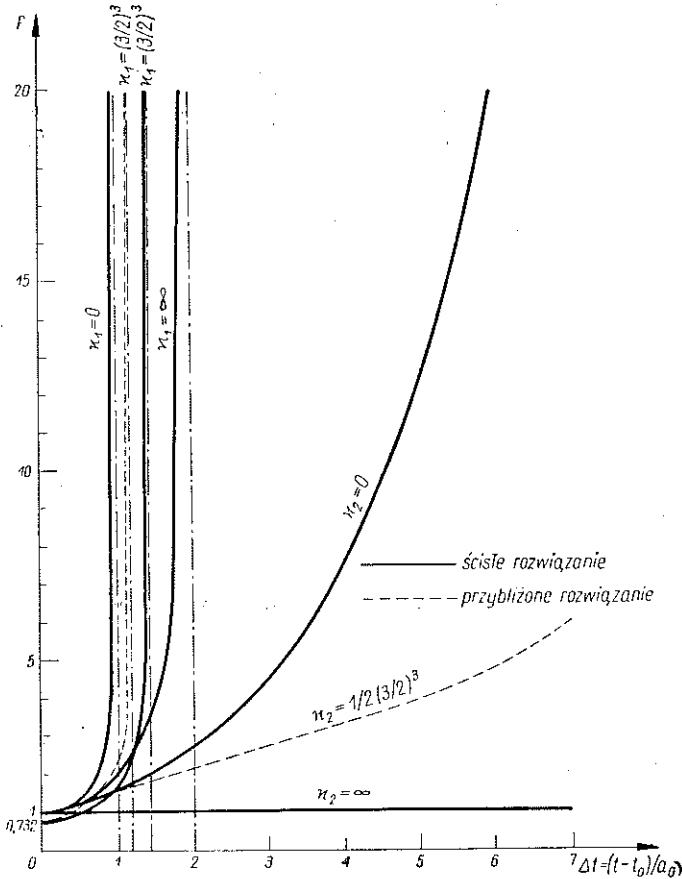
$$(15.15) \quad f_0^2 + 2abf_0 - 2ab = 0.$$

Otrzymujemy wtedy z (15.10) (rys. 5)

$$(15.16) \quad p = \frac{f^2}{4a^2b} (f + 2ab)$$

oraz rozwiązanie

$$(15.17) \quad \frac{f-f_0}{ff_0} + \frac{1}{2ab} \ln \frac{f_0(f+2ab)}{f(f_0+2ab)} = \frac{1}{2a} (t-t_0).$$



Rys. 3

Warunek (15.15) daje

$$(15.18) \quad f_0 = ab \left[\sqrt{1 + \frac{2}{ab}} - 1 \right],$$

co należy podstawić do rozwiązania (15.17).

Przyjmując

$$(15.19) \quad \kappa_1 = \frac{2G\Phi}{k_1} \left(\frac{h}{R} \right)^2,$$

mamy

$$(15.20) \quad ab = \left(\frac{2}{3} \right)^3 \kappa_1.$$

Jako przykład weźmy $ab = 1$, to znaczy $\kappa_1 = (3/2)^3$. Ze wzoru (15.18) obliczamy $f_0 = 0,732$, a rozwiązanie (15.17) daje

$$(15.21) \quad \frac{f-0,732}{0,732f} + \ln \sqrt{\frac{0,732f+2}{2,732f}} = \frac{1}{2a}(t-t_0).$$

Krzywe ugięcie-czas (15.13) i (15.21) przedstawione są na rys. 3.

Widać od razu, że lewa strona wyrażenia (15.17) osiąga skończoną wartość w skończonym okresie czasu przy f dążącym do nieskończoności. Obliczając granicę (15.17), gdy $f \rightarrow \infty$, otrzymujemy teoretyczny czas krytyczny:

$$(15.22) \quad t_{cr} = t_0 + \frac{2a}{f_0} + \frac{1}{b} \ln \frac{j_0}{f_0 + 2ab}.$$

Tak więc funkcja ugięcia z przykładu (15.21) posiada na rys. 3 pionową asymptotę w punkcie

$$(15.23) \quad \Delta t_{cr} = 1,421.$$

Zauważamy dalej, że dla κ_1 rosnącego nieograniczenie w rozwiązaniu (15.16) otrzymujemy (rys. 4)

$$(15.24) \quad p = \frac{f^2}{2a},$$

co po wykonaniu całkowania daje ugięcie jako funkcję czasu

$$(15.25) \quad f = \frac{f_0}{1 - \frac{1}{2a}(t-t_0)f_0}.$$

Zatem pochodna jak również sama funkcja rośnie nieograniczenie dla

$$(15.26) \quad t_{cr} = t_0 + \frac{2a}{f_0},$$

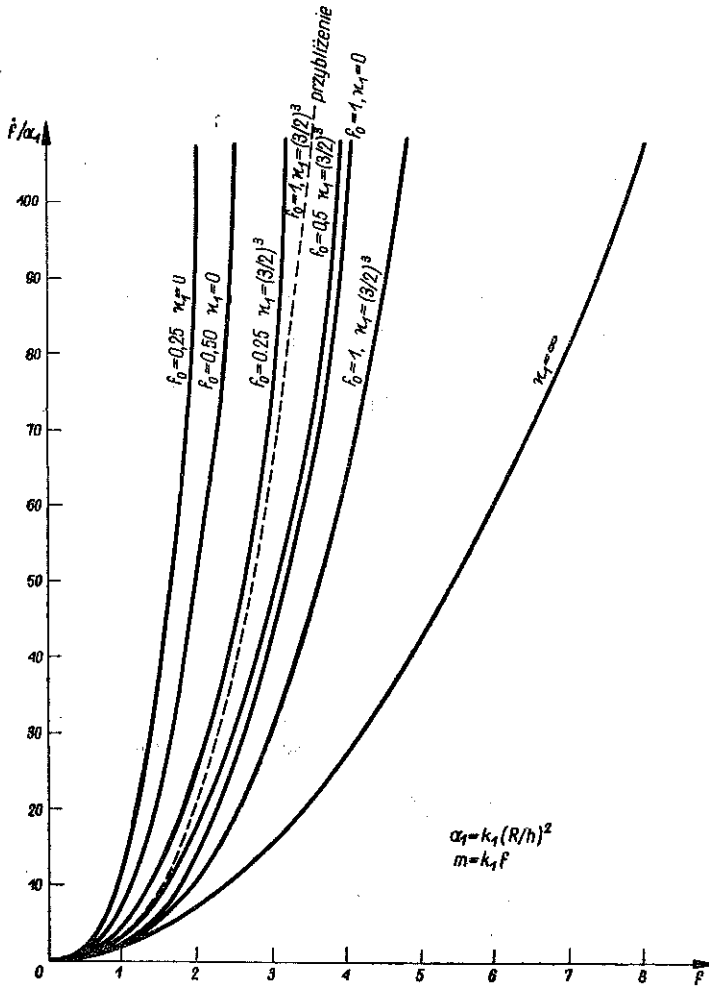
przy czym czas krytyczny zależy od ugięcia początkowego.

Jak widać z rys. 3, rodzina krzywych przedstawiających rozwiązania równania (15.10) w zależności od parametru κ_1 zawarta jest pomiędzy dwiema granicznymi krzywymi, danymi formułami (15.13) i (15.25). Pierwsza z krzywych odpowiada rozwiązaniu dla płyty czysto sprężystej, druga rozwiązaniu dla płyty pełzającej.

Przybliżone rozwiązanie ogólnego równania (15.10) ze względu na związek ugięcie-czas otrzymamy rozwijając funkcję wykładniczą w szereg potęgowy i za-

trzymując wyraz kwadratowy rozwinięcia. Postępując w ten sposób, sprowadzamy (15.10) do postaci

$$(15.27) \quad p = \frac{f}{4af_0^2} (Af^2 + Bf + C),$$



Rys. 4

gdzie oznaczono

$$(15.28) \quad \begin{cases} A = 2f_0^2(1-f_0) + (f_0-f_{01})(f_0-f_{02})(f_0+2ab), \\ B = f_0[2f_0^3 + (f_0-4ab)(f_0-f_{01})(f_0-f_{02})], \\ C = 2abf_0^2(f_0-f_{01})(f_0-f_{02}), \end{cases}$$

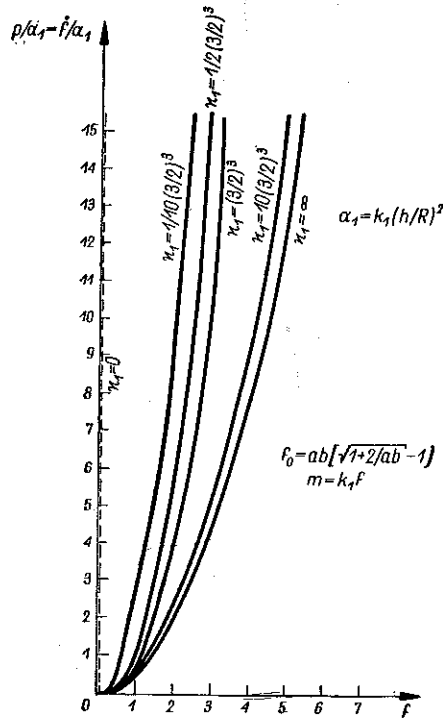
przy czym f_{01} i f_{02} są pierwiastkami równania (15.15).

Łatwo sprawdzić, że wyróżnik

$$(15.29) \quad \Delta = B^2 - 4AC,$$

jest dodatni dla każdego f_0 . Zatem rozwiązanie równania (15.27) ma postać

$$(15.30) \quad \frac{1}{2C} \ln \frac{f^2(Af_0^2 + Bf_0 + C)}{f_0^2(Af^2 + Bf + C)} + \\ + \frac{B}{2C\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \frac{(B + 2Af + \sqrt{B^2 - 4AC})(B + 2Af_0 - \sqrt{B^2 - 4AC})}{(B + 2Af_0 - \sqrt{B^2 - 4AC})(B + 2Af_0 + \sqrt{B^2 - 4AC})} = \frac{1}{4af_0^4} (t - t_0).$$



Rys. 5

Obliczając granicę rozwiązania (15.30) gdy $f \rightarrow \infty$, otrzymujemy czas krytyczny

$$(15.31) \quad t_{cr} = t_0 + \frac{2a}{C} \ln \frac{Af_0^2 + Bf_0 + C}{Af_0^2} + \frac{2Ba}{C\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \frac{B + 2Af_0 - \sqrt{B^2 - 4AC}}{B + 2Af_0 + \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

W szczególnym przypadku $f_0 = f_{01}$, rozwiązanie ma postać

$$(15.32) \quad \frac{f - f_{01}}{f} + \frac{1 - f_{01}}{f_{01}^2} \ln \frac{f_{01}[(1 - f_{01})f + f_{01}^2]}{f} = \frac{1}{2a} (t - t_0).$$

a czas krytyczny jest równy

$$(15.33) \quad t_{cr} = t_0 + 2a \left[1 + \frac{1-f_{01}}{f_{01}^2} \ln f_{01}(1-f_{01}) \right].$$

Dla przykładu weźmy $ab = 1$; wtedy $f_{01} = 0,732$, a czas krytyczny zredukowany (rys. 3) wynosi

$$(15.34) \quad \Delta t_{cr} = \frac{t_{cr} - t_0}{a} = 1,175.$$

16. Rozważmy z kolei trzeci szczególnie przypadek związany z nieliniowością fizykalną materiału płyty. Załóżmy mianowicie, że prędkość odkształcenia na brzegu płyty jest proporcjonalna do odwrotności aktualnie wywołanego ugięcia. Tak więc

$$(16.1) \quad m = \frac{k_2}{f},$$

gdzie k_2 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Zamiast równania (12.21) mamy równanie

$$(16.2) \quad \ddot{f} - \frac{1-2abf}{f} \dot{f}^2 - b\dot{f} = 0,$$

gdzie

$$(16.3) \quad a = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^3 \frac{1}{k_2}, \quad b = 2G\Phi.$$

Linearyzacja równania (16.2) daje

$$(16.4) \quad p' - \frac{1-2abf}{f} p = b.$$

Całkując (16.4) otrzymujemy (rys. 6)

$$(16.5) \quad p = f e^{-2abf} \left\{ \frac{p_0}{f_0} e^{2abf_0} + b [Ei(2abf) - Ei(2abf_0)] \right\},$$

gdzie $p_0 = f_0/2a$ oraz

$$(16.6) \quad Ei(x) = \int \frac{e^x}{x} dx,$$

jest całkową funkcją wykładniczą.

Najpierw rozważymy przypadek płyty czysto sprężystej. Przy $b = 0$ równanie (16.2) daje

$$(16.7) \quad p' - \frac{1}{f} p = 0,$$

skąd (rys. 6)

$$(16.8) \quad p = p_0 \frac{f}{f_0}$$

oraz

$$(16.9) \quad f = f_0 e^{\frac{1}{2a}(t-t_0)}$$

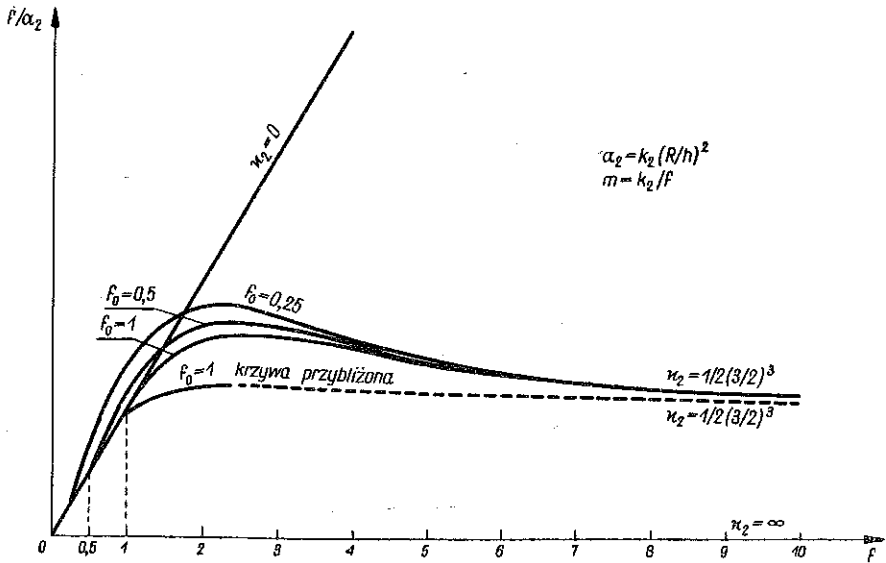
Jak widać z rozwiązania (16.9) ugięcie wzrasta wolno z czasem osiągając nieskończoną wielkość przy $t = \infty$ (rys. 3).

Zauważmy dalej, że granicą rozwiązania (16.5) gdy $b \rightarrow \infty$ jest

$$(16.10) \quad p = 0,$$

skąd

$$(16.11) \quad f = \text{const} = f_0.$$



Rys. 6

W ten sposób zostały określone dla rozważanego przypadku dwie krzywe graniczne. Jeżeli oznaczymy

$$(16.12) \quad \kappa_2 = \frac{2G\Phi}{k_2} \left(\frac{h}{R} \right)^2,$$

to pierwsza krzywa odpowiada wartości $\kappa_2 = 0$, druga $\kappa_2 = \infty$. Ta ostatnia redukuje się do prostej równoległej do osi czasu.

Przybliżone rozwiązanie ogólnego równania (16.5) otrzymamy rozwijając funkcje wykładnicze w szeregi potęgowe (do wyrazów kwadratowych włącznie). Postępując w ten sposób z (16.5) znajdziemy

$$(16.13) \quad \frac{f(f+\beta)}{f^2 + \alpha f - \beta f_0} df = b dt,$$

gdzie

$$(16.14) \quad a = \frac{A}{b}\beta, \quad \beta = \frac{1}{2ab}, \quad A = \frac{1}{2a}(1+2abf_0)+b(1-2ab)f_0.$$

Ponieważ wyróżnik

$$(16.15) \quad \Delta = a^2 + 4\beta f_0 > 0,$$

to rozwiązanie (16.13) ma postać

$$(16.16) \quad (f-f_0) + \frac{1}{2}(\beta-a) \ln \frac{f^2 + af - \beta f_0}{f_0(a - \beta + f_0)} + \\ + \frac{1}{2}[a^2 + \beta(2f_0 - a)] \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{(2f+a-\sqrt{\Delta})(2f_0+a+\sqrt{\Delta})}{(2f+a+\sqrt{\Delta})(2f_0+a-\sqrt{\Delta})} = b(t-t_0).$$

W szczególnym przypadku $ab = 1/2$, $\kappa_2 = 1/2(3/2)^3$, mamy

$$(16.17) \quad a = 1 + f_0, \quad \beta = 1, \quad \Delta = f_0^2 + 6f_0 + 1.$$

Jeżeli założymy dalej $f_0 = 1$, wtedy (16.16) można napisać w postaci

$$(16.18) \quad 2(f-1) + \ln \frac{2}{f^2 + 2f - 1} + \sqrt{2} \ln \frac{(2 + \sqrt{2})(f+1-\sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(f+1+\sqrt{2})} = \frac{1}{a}(t-t_0).$$

Ostatnie rozwiązanie przedstawione jest na rys. 3.

17. Przejdziemy obecnie do wyznaczenia naprężeń w przypadkach rozważonych w p. 12, 15 i 16. Na początku należy podkreślić, że stan płyty w chwili $t = t_0$ uważamy za neutralny, to znaczy że nie ma naprężeń początkowych.

W dalszym ciągu ze względu na równość naprężeń głównych oznaczmy

$$(17.1) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma.$$

Przy wyznaczaniu naprężeń będziemy korzystali ze wzorów (5.3) dla naprężeń w płaszczyźnie środkowej płyty, które interesują nas w pierwszym rzędzie.

Z wymienionych formuł otrzymujemy dla $m = \text{const}$

$$(17.2) \quad \sigma = -\frac{6G}{\kappa} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^3 \kappa \frac{t-t_0}{a_0}}\right].$$

Jak widać z (17.2) niezależnie od wartości κ naprężenie dąży do pewnej granicy przy t zmierzającym do nieskończoności. Tak więc w granicy mamy

$$(17.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = -\frac{6G}{\kappa} \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Dla granicznego przypadku $\kappa = 0$, tzn. dla płyty czysto sprężystej, mamy

$$(17.4) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \sigma = -6G \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{t-t_0}{a_0},$$

a stąd naprężenie w chwili krytycznej [por. wzór (12.9)] jest równe

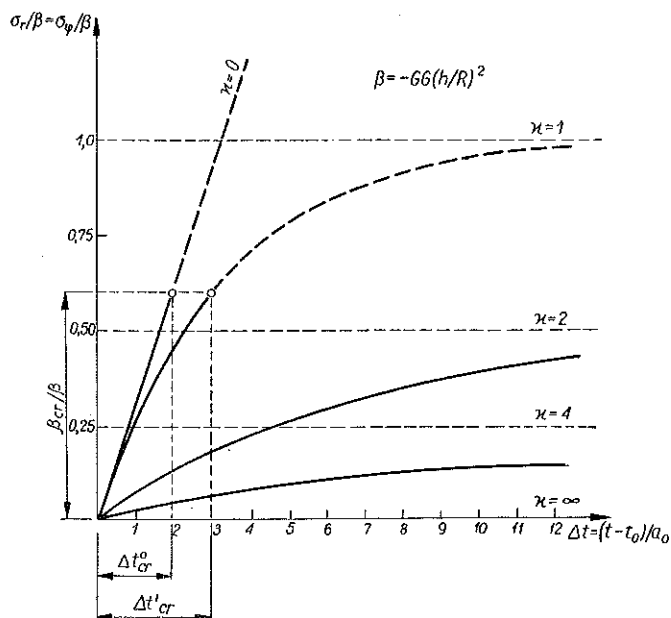
$$(17.5) \quad \sigma^{cr} = -12G \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Wzór powyższy określa przybliżoną wielkość naprężenia krytycznego Eulera.

Jako przykład weźmiemy materiał o module $G = 7 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$ dla płyty o grubości $h = 2 \text{ cm}$ i promieniu $R = 100 \text{ cm}$. Otrzymamy tutaj

$$(17.6) \quad \sigma^{cr} = -993 \text{ kG/cm}^2.$$

Wyznamy z kolei wielkość naprężenia krytycznego dla płyty lepkosprężystej, biorąc pod uwagę materiał, dla którego $\kappa = 1$. Wielkość ta zawarta jest w przedziale określonym wzorem (12. 122), a więc istnieje dla niej czas krytyczny.



Rys. 7

Teoretyczną asymptotę krzywej naprężenia (rys. 7) otrzymamy, obliczając granicę z wyrażenia (17.2) przy $t \rightarrow \infty$. Mamy zatem

$$(17.7) \quad \sigma_{\infty} = -6G \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Podstawiając do wzoru (17.2) $\kappa = 1$ oraz czas krytyczny według wzoru (12.1.1), przekonamy się, że również w tym przypadku naprężenie krytyczne nie ulega zmianie. Tak więc na skutek istnienia fazy lepkiej w materiale płyty czas krytyczny przedłuża się, przy czym wielkość naprężenia krytycznego obliczamy według wzoru (17.5) (rys.7).

Dla płyty czystolepkiej, tzn. dla $\kappa = \infty$, zachodzi w każdej chwili całkowita dyssypacja doprowadzonej energii. Przyjęta na brzegu płyty stała prędkość odkształcenia wywołuje niezależne od czasu naprężenie o wielkości

$$(17.7.1) \quad \sigma = -3m/\Phi,$$

które wynika bezpośrednio ze wzoru (17.2).

Należy zwrócić uwagę, że w rozpatrywanym wyżej przypadku liniowego materiału lepkosprężystego i $m = \text{const}$ naprężenie nie zależy od początkowego ugięcia płyty.

W p. 14 zastrzeżliśmy się, że w badaniach pomijamy efekty dynamiczne. Uproszczenie to dla przyjętych schematów obciążenia jest uzasadnione nie tylko z praktycznego punktu widzenia. Przy założeniu stałych naprężeń na brzegu płyty natrafimy z punktu widzenia teorii na pewien paradoks. Przyłożenie naprężeń powoduje bowiem początkową prędkość odkształcenia, co z kolei powinno być związane z nieskończenie wielkimi przyspieszeniami i siłami bezwładności. W rozważanym schemacie przyjęta została prędkość odkształcenia brzegu płyty, a naprężenia wzrastają od zera do określonej wielkości w teoretycznie nieskończenie długim okresie czasu (o ile uprzednio nie następuje wyboczenie). O ile zatem przy założeniu warunków brzegowych w naprężeniach siły bezwładności mogą odgrywać pewną rolę w początkowym okresie, to w naszym schemacie przypadek ten nie ma miejsca.

Dla prędkości odkształcenia na brzegu $m = k_1 f$ formuły naprężeń dają

$$(17.8) \quad \sigma = -6Gk_1 e^{-2G\Phi(t-t_0)} \int_{t_0}^t f e^{2G\Phi(t-t_0)} dt.$$

Najpierw rozpatrzmy naprężenia w płycie sprężystej. Wprowadzając do (17.8) ugięcie jako funkcję czasu z (15.13), otrzymujemy

$$(17.9) \quad \sigma = -12Gk_1 a f_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t-t_0}{a}} \right).$$

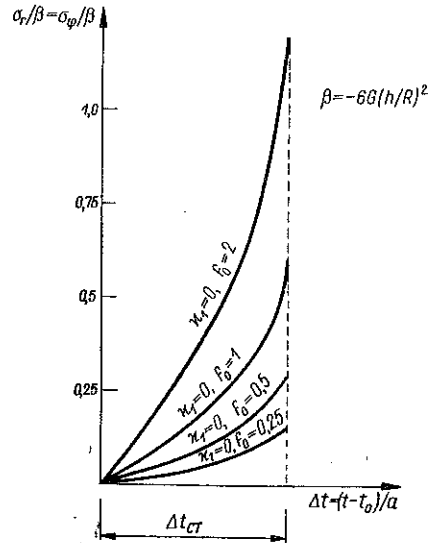
Podstawiając do (17.9) czas krytyczny (15.14) dostajemy naprężenie w chwili krytycznej

$$(17.10) \quad \sigma^{cr} = -12 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{h}{R} \right)^2 G f_0.$$

Jak widać ze wzoru (17.10) naprężenie w chwili krytycznej jest proporcjonalne do ugięcia w chwili początkowej (rys. 8). Fakt ten jest konsekwencją proporcjonalności prędkości odkształcenia na brzegu do aktualnego ugięcia.

W przypadku płyty lepkosprężystej obliczymy naprężenia posługując się ścisłym rozwiązaniem (15.17). Całkowanie dostarcza naprężenie jako funkcję ugięcia

$$(17.11) \quad \sigma = -12Gk_1 a \frac{f}{f+2ab} \left(1 - e^{-2ab \frac{f-f_0}{f f_0}} \right).$$



Rys. 8

Stąd otrzymujemy naprężenie w chwili krytycznej, biorąc granicę naprężenia przy $f \rightarrow \infty$. W ten sposób mamy (por. rys. 10)

$$(17.12) \quad \sigma^{cr} = -12Gk_1 a(1 - e^{-2ab \frac{1}{f_0}}).$$

Ponieważ rozwiązanie (15.17) zachodzi dla

$$(17.13) \quad f_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \kappa_1 \left[\sqrt{1 + 2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{\kappa_1}} - 1 \right],$$

przeto otrzymujemy z (17.12) ostatecznie (por. rys. 10)

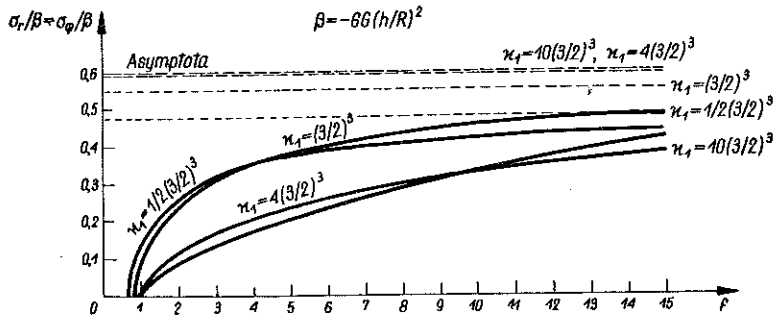
$$(17.14) \quad \sigma^{cr} = -12 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 G \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{2}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{\kappa_1}} - 1} \right] \right\}.$$

Zauważamy, że z (17.13) wynika

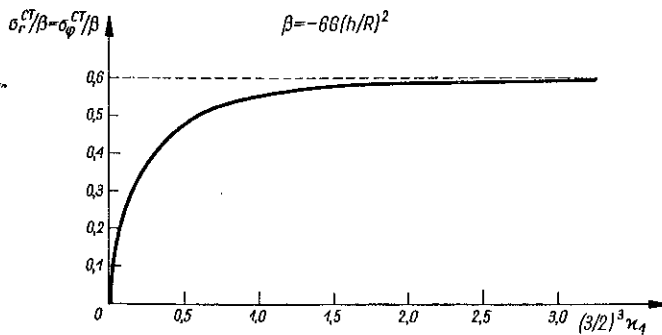
$$(17.15) \quad \lim_{\kappa_1 \rightarrow \infty} f_0 = 1,$$

czyli dla $\kappa_1 = \infty$ mamy

$$(17.16) \quad \sigma^{cr} = -12 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 G.$$



Rys. 9



Rys. 10

Z drugiej strony dla $\kappa_1 \rightarrow 0$ ugięcie początkowe z formuły (17.13) zmierza do zera. Wynika stąd wniosek, że jeżeli płyta sprężysta jest w chwili $t = t_0$ płaska, to przy prędkości odkształcenia według prawa $m = k_1 f$ nie zaobserwujemy oczywiście żadnego efektu.

Dla prędkości odkształcenia na brzegu $m = k_2/f$, wzory (5.3) dają

$$(17.17) \quad \sigma = -6Gk_2 e^{-b(t-t_0)} \int \frac{1}{f} e^{b(t-t_0)} dt.$$

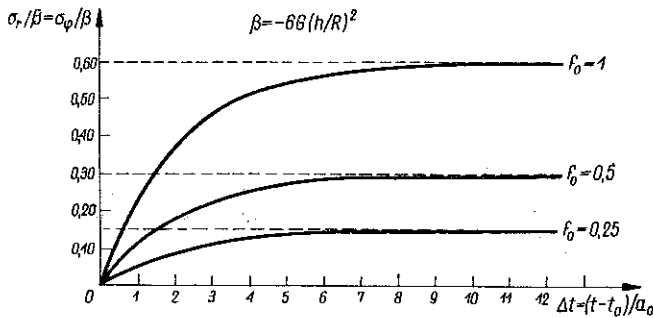
Jak poprzednio rozważymy najpierw naprężenia w płycie sprężystej. Wprowadzając do (17.17) f jako funkcję czasu z rozwiązania (16.9) otrzymamy po wykonaniu całkowania

$$(17.18) \quad \sigma = -12 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{G}{f_0} [1 - e^{-\frac{1}{2a}(t-t_0)}],$$

a stąd dla $t \rightarrow \infty$ naprężenie dąży do

$$(17.19) \quad \sigma_\infty = -12 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{G}{f_0}.$$

Wykres naprężeń pokazany jest na rys. 11.



Rys. 11

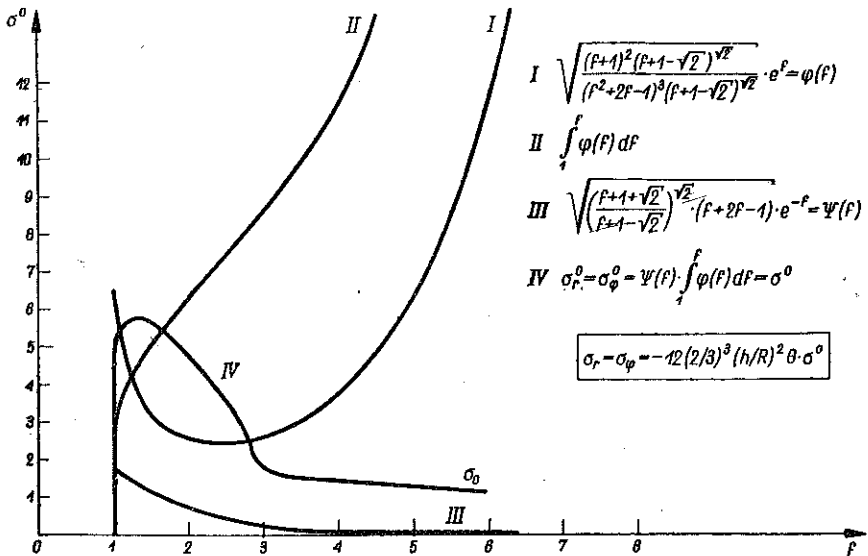
W tym celu, aby uzyskać obraz funkcji naprężenia dla płyty lepkosprężystej, rozważymy przybliżone rozwiązanie (16.18). Formuła naprężeń (5.3) daje w tym przypadku

$$(17.20) \quad \sigma = -12 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 G e^{-f} \sqrt{\frac{(f+1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}{(f+1-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}} (f+2f-1) \times \\ \times \int_1^f \sqrt{\frac{(f+1)^2 (f+1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}{(f^2+2f-1)^2 (f+1-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}} e^f df,$$

co nie wyraża się jednak przez funkcje elementarne.

Całkę występującą w (17.20) obliczamy graficznie. Wyniki zostały przedstawione na rys. 12. Jak widać z rys. 3 i 12, ugięcie dąży wolno do nieskończoności, a odpowiednie naprężenie, wzrastając początkowo, spada następnie gwałtownie i wreszcie zmierza wolno do zera. Relaksacja naprężeń zachodzi zatem w rozważonym przypadku w nieskończonym okresie czasu.

18. Przejdziemy obecnie do zagadnienia stateczności przy pełzaniu dla płyt kołowych w zakresie dużych ugięć. W tym celu założymy odpowiednią postać prędkości odkształceń.



Rys. 12

Dla geometrycznej nieliniowości słuszne są związki (3.1). Przyjmując postać funkcji ugięcia (12.5) przedstawiamy prędkości odkształceń w postaci

$$(18.1) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -m + 16 \frac{\ddot{f}f}{R^2} h^2 e^2 (1 - e^2)^2, \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = -m. \end{cases}$$

Ponieważ obraliśmy prędkości odkształceń, warunek nierozdzielności (3.2) jest spełniony automatycznie.

Podstawiając (18.1) i funkcję ugięcia (12.5) do równania (8.2), a następnie stosując metodę Galerkińa, dochodzimy do następującego nieliniowego równania różniczkowego dla parametru f :

$$(18.2) \quad \ddot{f}f + \left(\frac{2}{3}\right) \frac{32}{7} \frac{1}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2 f^3 f - 2f^2 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{8}{7} \frac{2G\Phi}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(f^2 + \frac{7}{12}\right) \right] - \dot{f}f \left(2G\Phi + \frac{\dot{m}}{m} \right) = 0.$$

Jako dalsze przybliżenie wyprowadzimy równanie jak powyżej, zakładając tym razem, że funkcja przemieszczenia zależy od ugięcia.

Funkcję prędkości przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej płyty przyjmujemy w postaci

$$(18.3) \quad \dot{u} = -\dot{g}\varrho + 2\dot{f}f \frac{h^2}{R} \varphi(\varrho).$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe problemu. Oznaczono tutaj przez \dot{g} daną prędkość odkształcenia na brzegu płyty oraz przez φ nieznaną funkcję zmiennej promieniowej, którą znajdziemy z warunku równowagi naprężeń w płaszczyźnie środkowej płyty.

Ponieważ ciekłość nie zależy od zmiennej promieniowej, korzystamy w dalszym ciągu z równania (8.2). Przy danej funkcji ugięcia (12.5) otrzymujemy z (3.1) prędkości odkształceń w postaci

$$(18.4) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -m + k \frac{d\varphi}{d\varrho} + 8k(1-\varrho^2)^2 \varrho^2, \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = -m + k \frac{\varphi}{\varrho}, \end{cases}$$

gdzie oznaczono

$$(18.5) \quad m = \frac{\dot{g}}{R}, \quad k = 2\dot{f}f \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Podstawiając powyższe wielkości w równanie równowagi w płaszczyźnie środkowej płyty (8.1) dostajemy równanie różniczkowe, które spełniać musi nieznaną funkcja φ :

$$(18.6) \quad \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} - \frac{\varphi}{\varrho^2} = -4(5 - 18\varrho^2 + 13\varrho^4)\varrho.$$

Przy warunku brzegowym $\varphi(1) = 0$ otrzymujemy rozwiązanie

$$(18.7) \quad \varphi = \frac{1}{12} (7 - 30\varrho^2 + 36\varrho^4 - 13\varrho^6) \varrho.$$

Wtedy prędkości odkształceń (18.4) przybierają postać

$$(18.8) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -m + \frac{1}{6} \dot{f}f \left(\frac{h}{R}\right)^2 (7 + 6\varrho^2 - 12\varrho^4 + 5\varrho^6), \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = -m + \frac{1}{6} \dot{f}f \left(\frac{h}{R}\right)^2 (7 - 30\varrho^2 + 36\varrho^4 - 13\varrho^6). \end{cases}$$

Podstawiając powyższe wielkości do równania (8.2), a następnie stosując metodę Galerkiną, otrzymujemy następujące nieliniowe równanie różniczkowe dla parametru f :

$$(18.9) \quad \ddot{f} + \frac{317}{105} \frac{1}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \dot{f}^3 f - 2 \left[1 - \frac{317}{315} \frac{1}{2} \frac{2G\Phi}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(f^2 + \frac{560}{951}\right) \right] \dot{f}^2 - \left(2G\Phi + \frac{\dot{m}}{m} \right) \dot{f} = 0.$$

Natychmiast widać, że równania (18.2) i (18.9), jakkolwiek otrzymane na innej drodze, są identyczne nie tylko formalnie. Wartości współczynników występujących w obu równaniach różnią się między sobą o wielkości rzędu ułamka procentu, a więc różnice mogą być pominięte.

Aby uzyskać rozwiązanie równania (18.2) lub (18.9), wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$(18.10) \quad \begin{cases} a = \left(\frac{2}{3}\right) \frac{2^5}{7} \frac{1}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \\ b = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{2^3}{7} \frac{2G\Phi}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2 = \frac{2G\Phi}{6} a, \\ c = \frac{7}{12}, \quad d = 2G\Phi. \end{cases}$$

Przy założeniu, że prędkość odkształcenia na brzegu płyty m jest stała, dostajemy przy oznaczeniach (18.10)

$$(18.11) \quad \ddot{f} + af^3 \dot{f} - 2[1 - b(f^2 + c)] \dot{f}^2 - d\dot{f} = 0.$$

Redukujemy rząd równania (18.11) podstawiając

$$(18.12) \quad p = \dot{f}, \quad p'p = \frac{dp}{df} p = \dot{f}.$$

Mamy wtedy równanie

$$(18.13) \quad p' + ap^2 - \frac{2}{f} [1 - b(f^2 + c)] p - d = 0,$$

które jest uogólnionym równaniem Riccatiego o formie kanonicznej

$$(18.14) \quad z' + z^2 = \frac{1}{f^2} \{ b^2 f^4 + b f^2 (2bc - 1) + [bc(bc - 3) + 2] \}.$$

Podobnie jak w p. 12 zastosujemy z kolei metodę Galerkiną bezpośrednio do różniczkowo-całkowego równania (6.1) przy uwzględnieniu neutralnego stanu płyty w chwili $t = t_0$. Stosując warunek całkowy Galerkiną do wyrażenia otrzyma-

nego przy podstawieniu danych funkcji ugięcia i prędkości odkształceń, dochodzimy do następującego równania różniczkowo-całkowego dla parametru f :

$$(18.15) \quad \frac{2}{3} \int_{t_0}^t \dot{f} e^{2Gf} dt + f \int_{t_0}^t \left[\frac{8}{7} \dot{f} f - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 m \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right] e^{2Gf} dt = 0.$$

Łatwo się przekonać, że przy dwukrotnym zróżniczkowaniu i eliminacji występującej całki otrzymamy równanie różniczkowe identyczne z (18.2).

19. Rozpocznijmy badanie wybożenia od przybliżonych rozwiązań równania (18.13). Pomijając p' oraz p^2 w porównaniu z pozostałymi wyrazami dostajemy równanie liniowe

$$(19.1) \quad p = \frac{d}{2[bf^2 + (bc-1)]} f.$$

Z (19.1) wynika, że pochodna ugięcia p jest nieskończona dla

$$(19.2) \quad f = \sqrt{\frac{1-bc}{b}},$$

przy założeniu, że $1-bc > 0$.

Ostatni warunek daje nierówność

$$(19.3) \quad \kappa = \frac{2G\Phi}{m} \left(\frac{h}{R} \right)^2 < \left(\frac{3}{2} \right)^3.$$

Ponieważ dla każdej wartości

$$(19.4) \quad f < \sqrt{\frac{1-bc}{b}}$$

pierwsza pochodna ugięcia jest ujemna, rozważany przypadek nie daje czasu krytycznego. Wynika stąd, że równanie (19.1) jest słuszne tylko dla

$$(19.5) \quad \kappa \geq \left(\frac{3}{2} \right)^3.$$

Rozwiązanie przy powyższym warunku ma postać

$$(19.6) \quad f^2 - f_0^2 + \frac{bc-1}{b} \ln \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 = \frac{d}{b} (t-t_0),$$

a w szczególnym przypadku równości (19.5)

$$(19.7) \quad f = \sqrt{f_0^2 + \frac{d}{b} (t-t_0)}.$$

Krzywe ugięcie-czas dla rozmaitych wartości κ i f_0 pokazane są na rys. 13. Zauważamy, że dla $\kappa \rightarrow \infty$ rozwiązanie (19.6) daje

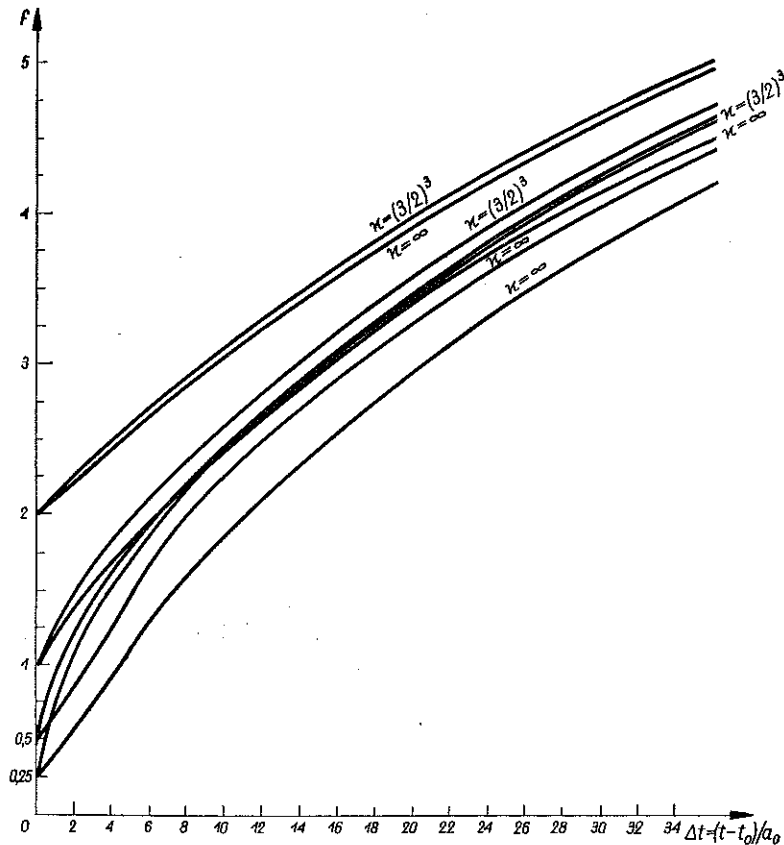
$$(19.8) \quad \frac{12}{7} (f^2 - f_0^2) + \ln \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 = \frac{t-t_0}{a_0},$$

gdzie

$$(19.9) \quad a_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{m}.$$

Tak więc pierwsze przybliżenie dostarcza rozwiązań dla współczynnika κ zawartego w przedziale

$$(19.10) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \leq \kappa \leq \infty.$$



Rys. 13

W drugim przybliżeniu pomijamy tylko p' . Wtedy z równania (18.3) otrzymamy

$$(19.11) \quad ap^2 - \frac{2}{f} [1 - b(f^2 + c)] p - d = 0.$$

Ponieważ wyróżnik

$$(19.12) \quad \Delta = \frac{4}{f^2} [1 - b(f^2 + c)]^2 + 4ad > 0,$$

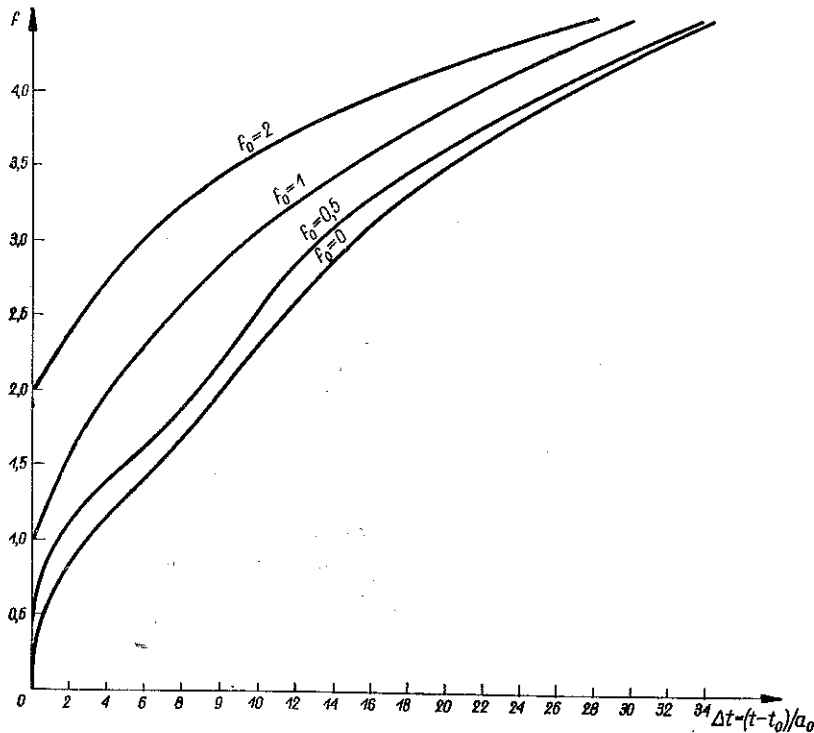
rozwiązanie (19.11) ma postać (rys. 18)

$$(19.13) \quad p = \frac{1}{af} \{ [1-b(f^2+c)] + \sqrt{[1-b(f^2+c)]^2 + adf^2} \}.$$

Pierwiastek ujemny jako nie spełniający warunków zadania pomijamy.

Całkując równanie (19.13) otrzymujemy relację ugięcie-czas w postaci (rys. 14)

$$(19.14) \quad [A-2(1-bc)] \frac{x-x_0}{(x-A)(x_0-A)} + \ln \frac{x_0-A}{x-A} + \frac{2(1-bc)}{A} \ln \frac{x_0(x-A)}{x(x_0-A)} = \\ = \frac{4b}{a} (t-t_0),$$



Rys. 14

gdzie oznaczono

$$(19.15) \quad A = \frac{ad}{2b}, \quad x = 1-b(f^2+c) + \sqrt{[1-b(f^2+c)]^2 + adf^2}, \quad x_0 = x(f_0).$$

Jako szczególny przypadek rozważymy przykład płyty czysto sprężystej. Ponieważ w tym przypadku $b = d = 0$, to znaczy $\kappa = 0$, równanie (19.11) upraszcza się do postaci

$$(19.16) \quad p = \frac{2}{af}.$$

Całkując (19.16), znajdziemy

$$(19.17) \quad f = \sqrt{f_0^2 + \frac{4}{a}(t-t_0)}.$$

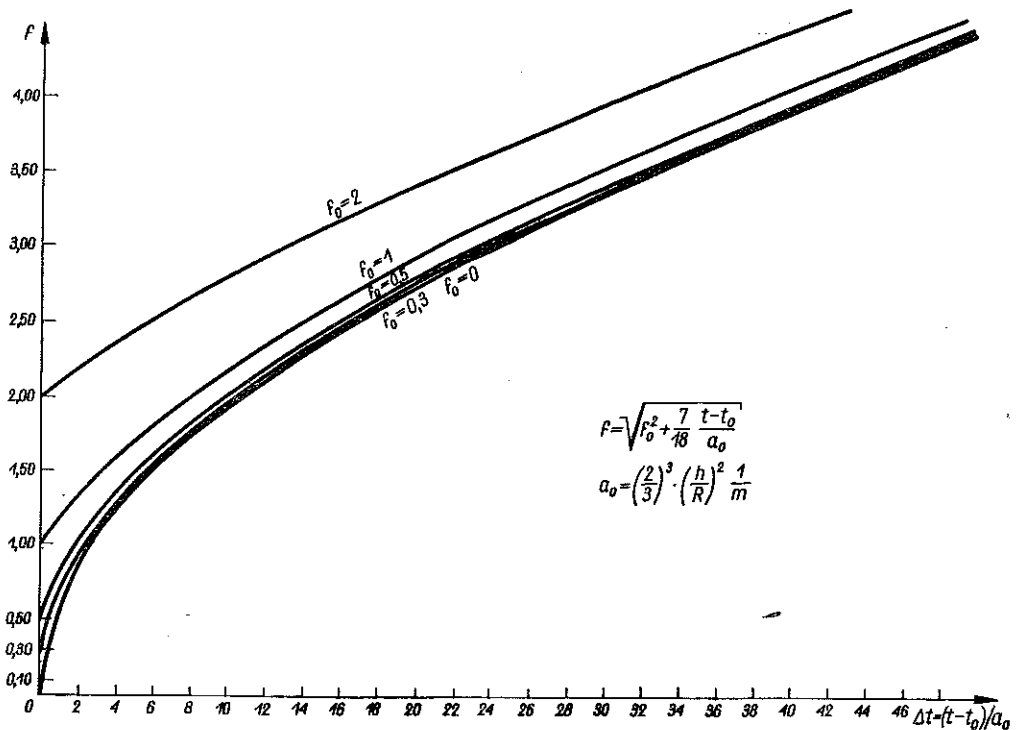
Krzywa powyższa przedstawiona jest na rys. 15.

W drugim szczególnym przypadku $bc = 1$, to znaczy $\kappa = (3/2)^3$, mamy z (19.11)

$$(19.18) \quad ap^3 + 2bfp - d = 0$$

oraz rozwiązanie

$$(19.19) \quad p = \frac{b}{a} \left[\sqrt{f^2 + \frac{ad}{b^2}} - f \right].$$



Rys. 15

Całkując (19.19) otrzymujemy związek ugięcie-czas w postaci

$$(19.20) \quad \frac{3}{2} \left[\frac{7}{2} \frac{z_0^2 - z^2}{z^2 z_0^2} + \ln \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] = \frac{t-t_0}{a_0},$$

gdzie a_0 określone jest za pomocą wzoru (19.9), zaś

$$(19.21) \quad z = -f + \sqrt{f^2 + \frac{ad}{b^2}}, \quad z_0 = z(f_0).$$

Krzywa (19.20) wykreślona została na rys. 15 dla rozmaitych warunków początkowych.

Jako trzecie z kolei przybliżenie rozpatrzmy ogólną postać równania (18.13), do której zastosujemy metodę małego parametru. Jako mały parametr przyjmujemy wielkość κ .

Wyrażając współczynniki (18.10) przez κ , mamy z (18.13)

$$(19.22) \quad \begin{cases} b = b_0 \kappa, & b_0 = \frac{12}{7} \left(\frac{2}{3} \right)^3, \\ d = d_0 \kappa, & d_0 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{1}{a_0}. \end{cases}$$

Przy powyższych oznaczeniach dostajemy z (18.13) następujące równanie:

$$(19.23) \quad p' + ap^2 - \frac{2}{f} [1 - \kappa b_0 (f^2 + c)] p - \kappa d_0 = 0.$$

Funkcję p rozwijamy w szereg potęgowy parametru κ :

$$(19.24) \quad p = q_0 + \kappa q_1 + \kappa^2 q_2 + \dots + \kappa^n q_n + \dots,$$

gdzie $q_k = q_k(f)$. Podstawiając rozwinięcie (19.24) do równania (19.23) oraz porównując współczynniki przy jednakowych potęgach κ , otrzymujemy w rezultacie rozwiązanie w postaci

$$(19.25) \quad p = p_e + \sum_{\nu=1}^{\infty} \kappa^{\nu} q_{\nu},$$

gdzie p_e jest identyczne z rozwiązaniem dla płyty czysto sprężystej, wynikającym z równania (18.13) dla $b = d = 0$:

$$(19.26) \quad p_e' + ap_e^2 - \frac{2}{f} p_e = 0.$$

Całkując (19.26) mamy

$$(19.27) \quad p_e = \frac{3}{a} \frac{f^2}{f^3 + C},$$

gdzie

$$(19.28) \quad C = \frac{3 - ap_0 f_0}{ap_0} f_0^2, \quad p_0 = f_0 = \frac{6}{7} \frac{m}{f_0} \left(\frac{R}{h} \right)^2.$$

Całkując (19.27) powtórnie otrzymujemy relację ugięcie-czas w postaci

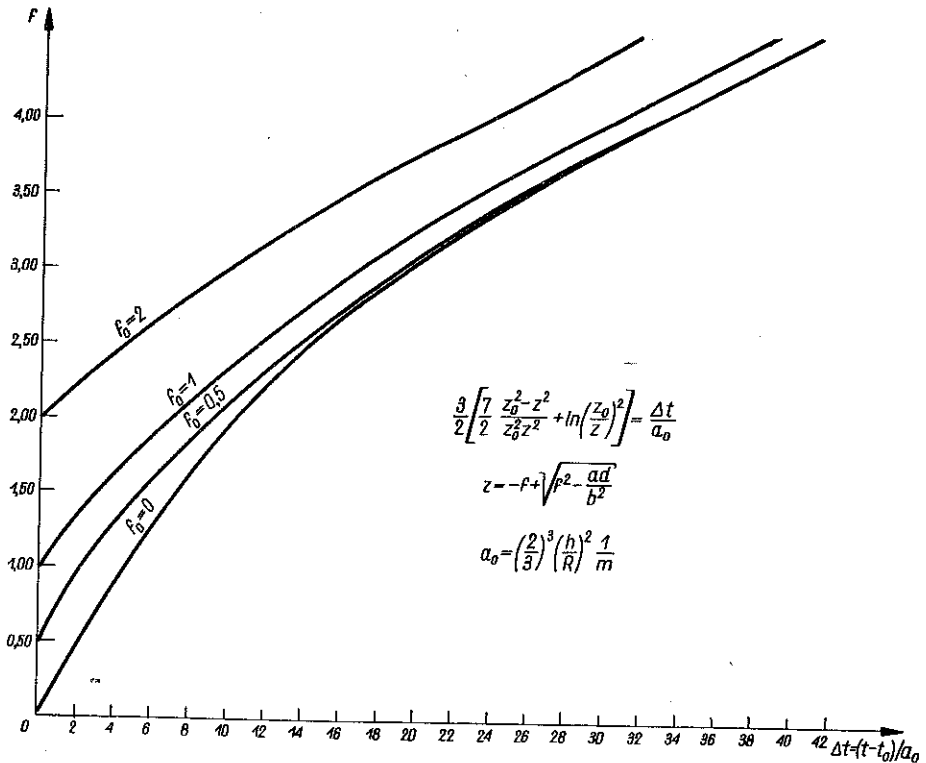
$$(19.29) \quad \frac{12}{7} (f^3 - f_0^3) + \frac{171}{112} f_0 \frac{f - f_0}{f} = \frac{t - t_0}{a_0}.$$

Krzywa powyższa podana jest na rys. 17.

Zadawaliśmy się rozwiązaniem równania (19.23) z przybliżeniem do liniowego wyrazu włącznie w rozwinięciu (19.24). Przybliżenie to daje

$$(19.30) \quad p = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{a_0(f^3 + C)} \left\{ \frac{63}{64} f^2 - \frac{\varkappa}{f^3 + C} \left[\frac{c}{3} f^2 (f^3 - f_0^3) - \frac{C}{2} f^2 (f^2 - f_0^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - C \frac{C - cf_0}{f_0} f (f - f_0) \right] \right\},$$

gdzie C określone jest za pomocą wzoru (19.28).



Rys. 16

Rozwiązanie (19.30) jest słuszne dla

$$(19.31) \quad 0 \leq \varkappa < 1,$$

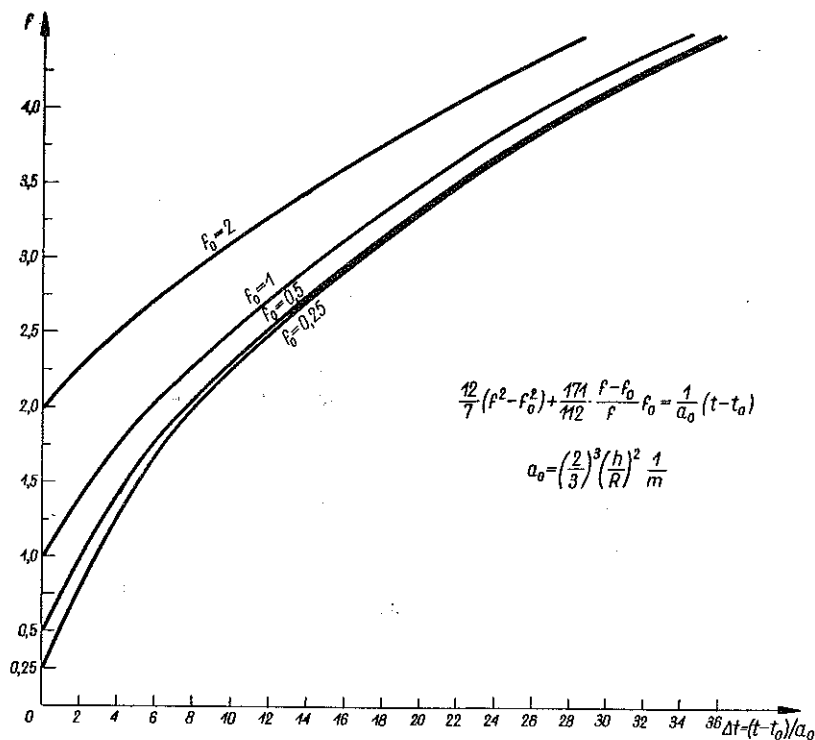
co wynika z warunku zbieżności szeregu (19.24).

Całkując równanie (19.30) dochodzimy do związku ugięcie-czas w postaci

$$(19.32) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 a_4 \left\{ \frac{1}{2} (f^2 - f_0^2) - a_1 (f - f_0) + A_1 \ln \frac{f}{f_0} + \frac{A_2}{2} \ln \frac{f^2 + B_1 f + B_2}{f_0^2 + B_1 f_0 + B_2} + \right. \\ \left. + \frac{A_4}{2} \ln \frac{f^2 + B_3 f + B_4}{f_0^2 + B_3 f_0 + B_4} + 2 \frac{A_3 - A_2 \frac{B_1}{2}}{\sqrt{D_1}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2f + B_1}{2\sqrt{D_1}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2f_0 + B_1}{2\sqrt{D_1}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2A_5 - A_4 B_3}{2\sqrt{D_2}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2f + B_3}{2\sqrt{D_2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2f_0 + B_3}{2\sqrt{D_2}} \right] \right\} = \frac{t - t_0}{a_0},$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(19.33) \quad D_1 = 4B_2 - B_1^2, \quad D_2 = 4B_4 - B_3^2.$$



Rys. 17

Tutaj B_1, \dots, B_4 są współczynnikami rozłożenia wielomianu

$$(19.34) \quad f^4 + a_1 f^3 + a_2 f + a_3 = (f^2 + B_1 f + B_2)(f^2 + B_3 f + B_4),$$

posiadającego wszystkie pierwiastki zespolone.

Dla danych B_1, \dots, B_4 znajduje się współczynniki A_1, \dots, A_5 z następującego układu:

$$(19.35) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{C^2}{a_3}, & A_1 + A_2 + A_4 = a_1^2, \\ a_1 A_1 + B_3 A_2 + A_3 + B_1 A_4 + A_5 = 2C - a_2, \\ B_4 A_2 + B_3 A_3 + B_2 A_4 + B_1 A_5 = a_1 a_2 - a_3, \\ a_2 A_1 + B_4 A_3 + B_2 A_5 = -a_1 a_3, \end{cases}$$

gdzie

$$(19.36) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{19}{256} a_4 \kappa, & a_2 = \frac{1197}{8192} f_0 \left[1 + \frac{62048}{82411} \kappa \left(f_0^2 - \frac{1}{2} \frac{66633}{62048} \right) \right] a_4, \\ a_3 = \frac{3173}{49152} a_4 \kappa, & a_4 = \frac{36}{7 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^4 - \kappa \right]}. \end{cases}$$

W tym celu, aby otrzymać rozwiązanie równania (18.13) dla

$$(19.37) \quad 1 < \kappa \leq \infty$$

przy zastosowaniu metody małego parametru, wprowadzamy jako mały parametr odwrotność κ

$$(19.38) \quad \beta = \frac{1}{\kappa}.$$

Wyrażając współczynniki równania (18.13) przez parametru β mamy

$$(19.39) \quad b = \frac{b_0}{\beta}, \quad d = \frac{d_0}{\beta},$$

a wtedy równanie to przybiera postać

$$(19.40) \quad \beta p' + \beta a p^2 - 2[\beta - b_0(f^2 + c)] \frac{p}{f} - d_0 = 0.$$

Funkcję p przedstawiamy w postaci szeregu potęgowego

$$(19.41) \quad p = k_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \beta^v k_v.$$

Podstawiając szereg (19.41) do równania (19.40) oraz porównując współczynniki przy jednakowych potęgach β otrzymujemy przybliżenie zerowe w postaci

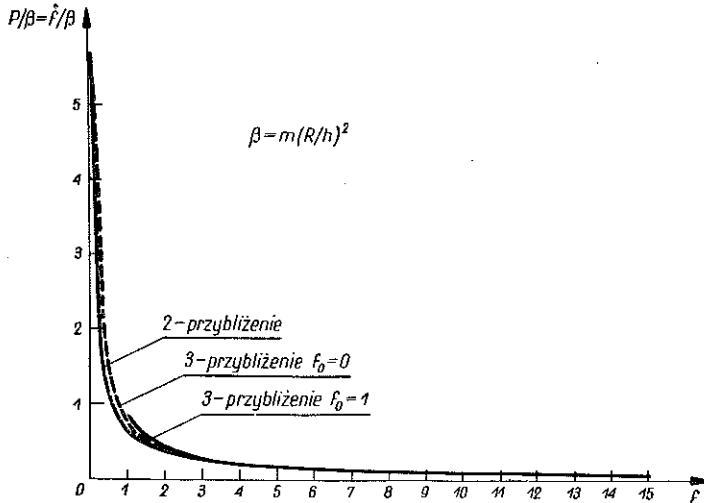
$$(19.42) \quad k_0 = \frac{f d_0}{2 b_0 (f^2 + c)},$$

identycznej z (19.1) dla $\kappa = \infty$. Tak więc rozwiązanie równania (19.42) przedstawione jest formułą (19.8).

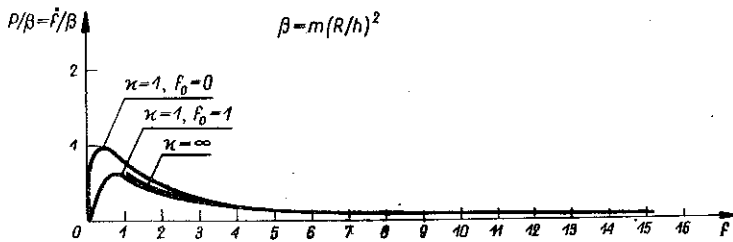
Przybliżenie liniowe ma postać

$$(19.43) \quad k_1 = \frac{c}{a_0} \frac{e^{-b_0 f^2}}{f^{2b_0 c} (f^2 + c)^3} \int_{f_0}^f f^{2b_0 c} (f^2 + c)^2 e^{b_0 f^2} df.$$

Ponieważ $2b_0 c$ jest ułamkiem, całka powyższa nie da się wyrazić przez funkcje elementarne. Rozwijając funkcję wykładniczą pod znakiem całki w (19.43) w szereg



Rys. 18



Rys. 19

potęgowej przy uwzględnieniu wyrazu kwadratowego włącznie oraz wykonując całkowanie, przedstawiamy rozwiązanie w postaci liniowej

$$(19.44) \quad p = k_0 + \kappa k_1$$

lub szczegółowo (rys. 19)

$$(19.45) \quad p = \frac{c}{2a_0(f^2+c)} \left\{ f + \frac{1}{\kappa} \frac{2ce^{-b_0 f^2}}{f^{2b_0 c} (f^2+c)^2} \left[\frac{c^2}{1+2b_0 c} (f^{1+2b_0 c} - f_0^{1+2b_0 c}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b_0(1+b_0 c)}{3+2b_0 c} (f^{3+2b_0 c} - f_0^{3+2b_0 c}) + \frac{2+b_0 c(4+b_0 c)}{2(5+2b_0 c)} (f^{5+2b_0 c} - f_0^{5+2b_0 c}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b_0(1+b_0 c)}{7+2b_0 c} (f^{7+2b_0 c} - f_0^{7+2b_0 c}) + \frac{b_0^2}{2(9+2b_0 c)} (f^{9+2b_0 c} - f_0^{9+2b_0 c}) \right] \right\}.$$

Jak widać z (19.45) dla $\kappa \rightarrow \infty$ drugi wyraz w głównym nawiasie dąży do 0. Wyraz ten dąży również do zera dla dowolnego $1 < \kappa \leq \infty$ przy ugięciu f zmierzającym do nieskończoności.

Tak więc rozwiązanie (rys. 19 i rys. 21)

$$(19.46) \quad p = \frac{cf}{2a_0(f^2+c)}$$

przedstawia krzywą graniczną dla rodziny krzywych określonych równaniem (19.45).

Istnieje możliwość otrzymania rozwiązania równania (18.13) dla całego przedziału $0 \leq \kappa \leq \infty$ przy zastosowaniu metody małego parametru. W tym przypadku należy przyjąć jako mały parametr stosunek $(h/R)^2$.

20. Z badania wybożenia w zakresie dużych ugięć w p. 19 wynika, że płyta odkształca się w czasie w ten sposób, iż pierwsza pochodna jej ugięcia zmierza do zera przy t zmierzającym do nieskończoności. Dlatego też teoretycznie nie ma czasu krytycznego nawet w przypadku płyty czysto sprężystej.

Łatwo sprawdzić, że czasu krytycznego nie będzie również w przypadku, gdy prędkość odkształcenia na brzegu płyty jest proporcjonalna do aktualnie wywołanego ugięcia, to znaczy gdy

$$(20.1) \quad m = k_1 f.$$

W tym przypadku z równania (18.2) przy oznaczeniach (18.10) otrzymujemy

$$(20.2) \quad \ddot{f}f^2 + af^3 f^2 - [3 - 2b(f^2+c)]\dot{f}^2 f - d\dot{f}f^2 = 0$$

lub redukując rząd równania

$$(20.3) \quad p' + ap^2 - \frac{1}{f} [3 - 2b(f^2+c)]p - d = 0.$$

Wystarczy rozważyć jedynie przypadek płyty czysto sprężystej. Ponieważ $b = d = 0$, to mamy z (20.3)

$$(20.4) \quad p' + ap^2 - \frac{3}{f}p = 0,$$

skąd

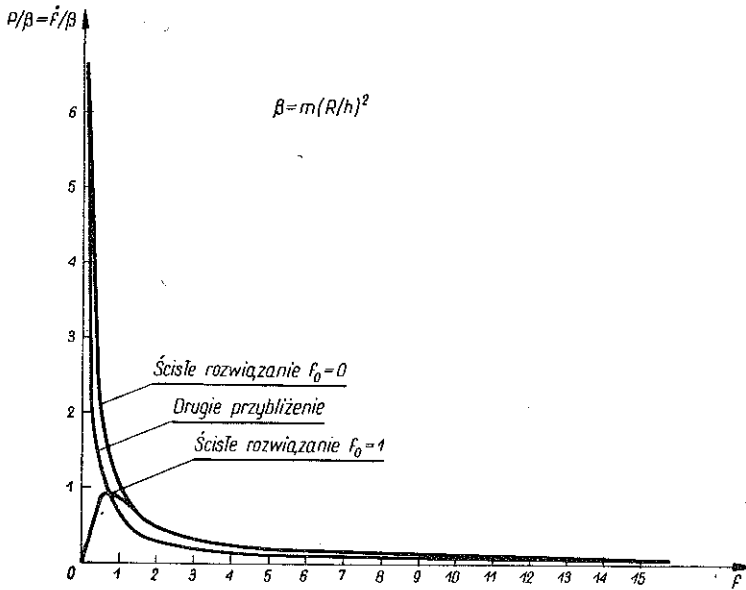
$$(20.5) \quad p = \frac{4}{a} \frac{f^3}{f^2+C},$$

gdzie

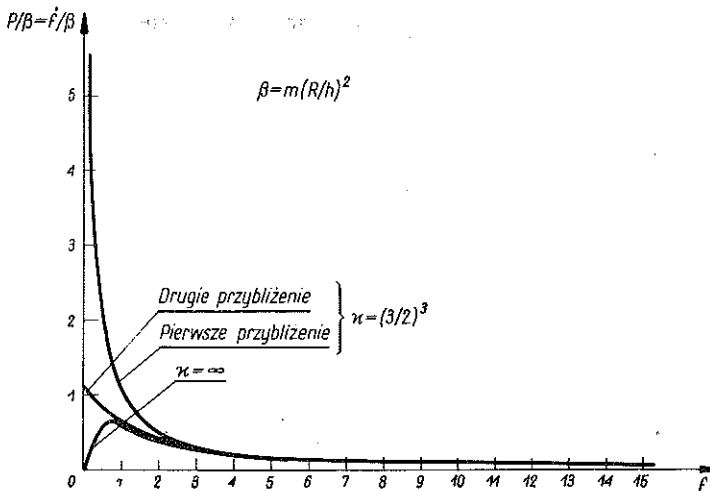
$$(20.6) \quad C = f_0^3 \frac{4 - ap_0 f_0}{ap_0}.$$

Widać natychmiast, że pochodna ugięcia w (20.5) zmierza do zera gdy $f \rightarrow \infty$.
Całkując (20.5) otrzymujemy relację ugięcie-czas

$$(20.7) \quad (f^2 - f_0^2) + C \frac{f^2 - f_0^2}{f^2 f_0^2} = \frac{8}{a} (t - t_0).$$



Rys. 20



Rys. 21

Jak wynika z rozwiązania (20.7) dla $t \rightarrow \infty$ ugięcie wzrasta nieograniczenie. Zatem pochodna ugięcia dąży do zera w nieskończonym okresie czasu.

Należy podkreślić fakt wprawdzie oczywisty, ale charakterystyczny dla zachowania się płyty w zakresie dużych ugięć. Mianowicie, w przeciwieństwie do przypadku małych ugięć wszystkie rozwiązania dla ugięć dużych są słuszne również dla $f_0 = 0$, to znaczy dla płaskiej postaci płyty w chwili początkowej obserwacji, o ile uwzględnimy odkształcenia sprężyste. Wniosek ten nie obejmuje przypadku (19.8) otrzymanego dla $\kappa = \infty$.

21. Rozważmy teraz problem wyboczenia płyty w zakresie dużych ugięć, gdy odkształcenia sprężyste mogą być pominięte w porównaniu z odkształceniami pełzania.

Najpierw zbadamy przypadek geometrycznej liniowości.

Równania fizyczne dla pełzania mają postać (9.1), zaś funkcja prędkości przemieszczenia jest

$$(21.1) \quad \dot{u} = -\dot{g}\varphi(\varrho),$$

gdzie \dot{g} jest prędkością odkształcenia na brzegu płyty. Stąd prędkości odkształceń są odpowiednio równe

$$(21.2) \quad \dot{\varepsilon}_r = -m \frac{d\varphi}{d\varrho}, \quad \varepsilon_\varphi = -m \frac{\varphi}{\varrho}.$$

Przyjmując, że ciekłość jest zależna od stanu naprężenia, obliczymy z (7.2)

$$(21.3) \quad \Omega = m^2 \left[\left(\frac{d\varphi}{d\varrho} \right)^2 + \frac{\varphi}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} + \left(\frac{\varphi}{\varrho} \right)^2 \right]$$

oraz pochodną Ω' . Zależność dla ciekłości ma postać ogólną (7.4); dlatego bierzemy pod uwagę układ równań dla płyty pełzającej (9.9) i (9.10).

Podstawiając prędkości odkształceń oraz (21.3) do równania równowagi w płaszczyźnie środkowej (9.9), otrzymujemy następujące równanie różniczkowe dla funkcji φ :

$$(21.4) \quad \left[4 \left(\frac{d\varphi}{d\varrho} \right)^2 + 4 \frac{\varphi}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} + (3n+1) \left(\frac{\varphi}{\varrho} \right)^2 \right] \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} (n+1) \left(\frac{d\varphi}{d\varrho} \right)^3 - \\ - 3(n-1) \frac{\varphi}{\varrho^2} \left(\frac{d\varphi}{d\varrho} \right)^2 + 3(n-1) \frac{\varphi^2}{\varrho^3} \frac{d\varphi}{d\varrho} - 2(n+1) \frac{\varphi^3}{\varrho^4} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $n = 3$ równanie powyższe posiada rozwiązanie

$$(21.5) \quad \varphi = \frac{D}{\varrho^2} + C\varrho,$$

przy czym $D = 0$ dla płyty pełnej. Warunek brzegowy $\varphi(1) = 1$ daje stałą $C = 1$, tak że rozwiązanie jest liniowe,

$$(21.6) \quad \varphi = \varrho.$$

W wyniku otrzymujemy z (21.3)

$$(21.6.1) \quad \Omega = \text{const}(\varrho) = 3m^2.$$

Przyjmując funkcję ugięcia w postaci (12.5) oraz korzystając z równania (9.10) dostajemy po zastosowaniu metody Galerkina równanie różniczkowe dla parametru f ,

$$(21.7) \quad \dot{f} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{R}{h} \right)^2 mf = 0.$$

Rozwiązanie (21.7) ma postać

$$(21.8) \quad f = f_0 e^{\frac{1}{2a_0} \int m dt}$$

lub

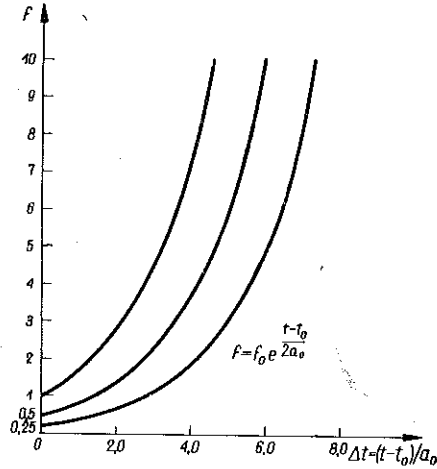
$$(21.9) \quad f = f_0 e^{\frac{t-t_0}{2a_0}}$$

jeśli m jest stałe (rys. 22a).

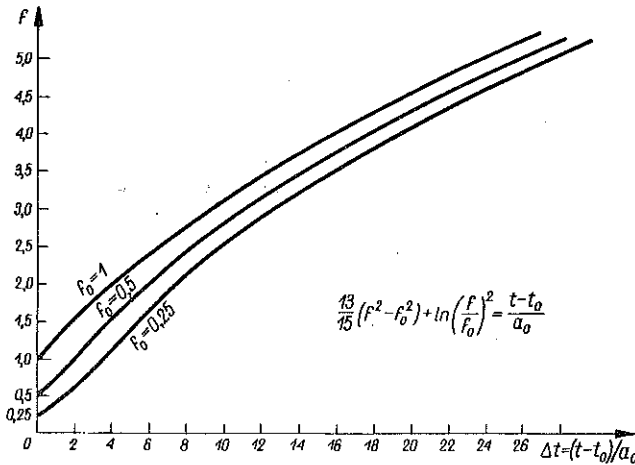
Ostatnie rozwiązanie jest identyczne z (12.41) dla $\kappa = \infty$.

Przejdziemy obecnie do dużych ugięć. Funkcję prędkości przemieszczenia przyjmujemy w postaci

$$(21.10) \quad \dot{u} = -\dot{g}\varrho + \frac{2\dot{f}f}{R} \varphi(\varrho).$$



Rys. 22a



Rys. 22b

Zatem prędkości odkształceń są równe

$$(21.11) \quad \dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{R} \frac{d\dot{u}}{d\varrho} + \frac{d\dot{w}}{d\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} = -m + k \frac{d\varphi}{d\varrho} + 8k\varrho^2(1-\varrho^2)^2,$$

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\dot{u}}{\varrho} = -m + k \frac{\varphi}{\varrho}.$$

gdzie

$$(21.12) \quad m = \frac{\dot{g}}{R}, \quad k = 2f\dot{f}\left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Zakładając fizykalną liniowość korzystamy z równania równowagi w płaszczyźnie środkowej płyty (9.7). Równanie to wyznacza następujący warunek dla poszukiwanej funkcji φ :

$$(21.13) \quad \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} - \frac{\varphi}{\varrho^2} = -4\varrho(5-18\varrho^2+13\varrho^4).$$

Przy warunkach brzegowych

$$(21.14) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

rozwiązanie (21.13) ma postać

$$(21.15) \quad \varphi = \frac{1}{12}(7-30\varrho^2+36\varrho^4-13\varrho^6)\varrho.$$

Stąd otrzymujemy prędkości odkształceń

$$(21.16) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -m + \frac{k}{12}(7-90\varrho^2+180\varrho^4-78\varrho^6) + 8k(1-2\varrho^2+\varrho^4)\varrho^2, \\ \dot{\varepsilon}_p = -m + \frac{k}{12}(7-30\varrho^2+36\varrho^4-13\varrho^6). \end{cases}$$

Podstawiając powyższe wielkości oraz funkcję ugięcia w równanie równowagi (9.8), dalej stosując do tak otrzymanego warunku metodę Galerkina, dochodzimy do równania różniczkowego dla parametru f :

$$(21.17) \quad \dot{f} \left[1 + \frac{13}{15} \left(\frac{3}{2} \right)^3 f^2 \right] - \frac{1}{2a_0} f = 0.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja (rys. 22b)

$$(21.18) \quad \frac{13}{15}(f^2-f_0^2) + \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = \frac{t-t_0}{a_0}.$$

22. Dalszym krokiem naprzód w badaniu wybożenia płyty pełzającej będzie uwzględnienie oprócz geometrycznej, fizykalnej nieliniowości. Zakładamy zatem, że ciekłość jest funkcją intensywności naprężeń według relacji (2.8). Ponieważ w tym przypadku równanie równowagi w płaszczyźnie środkowej jest bardzo skomplikowane, gdy staramy się spełnić je przy ogólnym założeniu prędkości przemieszczenia, przeto ograniczymy się do uproszczonych założeń. Przyjmijmy mianowicie funkcję prędkości przemieszczenia w postaci spełniającej warunki brzegowe, a warunek równowagi spełniony będzie w przybliżeniu.

Założmy prędkość przemieszczenia w postaci

$$(22.1) \quad \dot{u} = -Rm\varrho + Rk\varrho(1-\varrho^2),$$

wtedy prędkości odkształceń są

$$(22.2) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -m+k(1-11\varrho^2+16\varrho^4-8\varrho^6), \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = -m+k(1-\varrho^2). \end{cases}$$

Ponieważ intensywność naprężeń zależna jest od ϱ , rozwiązanie problemu zależy będzie od wykładnika funkcji ciekłości n .

Wartość Ω według wzoru (7.2) wynosi

$$(22.3) \quad \Omega = 3m^2+6mk(1-6\varrho^2+8\varrho^4-4\varrho^6)+k^2(3-36\varrho^2+181\varrho^4-392\varrho^6+440\varrho^8-256\varrho^{10}+64\varrho^{12}).$$

Obliczamy pochodną Ω i wprowadzamy ją wraz z (22.2) i (22.3) oraz funkcją ugięcia (12.5) do równania równowagi (9.10). Stosując do tak otrzymanego warunku metodę Galerkinia dochodzimy do następującego równania różniczkowego dla parametru f :

$$(22.4) \quad (a_1f^2+a_2)f^3f^2+(b_1f^2+b_2)af^2f+(c_1f^2+c_2)\alpha^2\dot{f}+d_1\alpha^3f=0,$$

gdzie

$$(22.5) \quad \begin{cases} a_1 = 7488, & a_2 = \frac{212}{63} - \frac{1207}{420} \frac{n-1}{n}, \\ b_1 = \frac{4379}{35}, & b_2 = -\frac{61}{20} \frac{n-1}{n}, \\ c_1 = -\frac{195}{70}, & c_2 = 2, \\ d_1 = -\left(\frac{3}{2}\right)^3, & \alpha = m\left(\frac{R}{h}\right)^2. \end{cases}$$

Podstawiając

$$(22.5.1) \quad p = \dot{f},$$

dostajemy zamiast (22.4) równanie

$$(22.6) \quad ap^3+bp^2+cp+d=0,$$

w którym

$$(22.7) \quad \begin{cases} a = f^2(a_1f^2+a_2), & b = af(b_1f^2+b_2), \\ c = \alpha^2(c_1f^2+c_2), & d = \alpha^3d_1f. \end{cases}$$

Wprowadzając nową zmienną

$$(22.8) \quad x = p + \frac{b}{3a},$$

mamy zamiast (22.6) równanie

$$(22.9) \quad x^3 + 3Px + 2Q = 0,$$

gdzie

$$(22.10) \quad P = \frac{1}{9a^2}(3ac - b^2), \quad Q = \frac{1}{54a^3}(2b^3 - 9abc + 27a^2d).$$

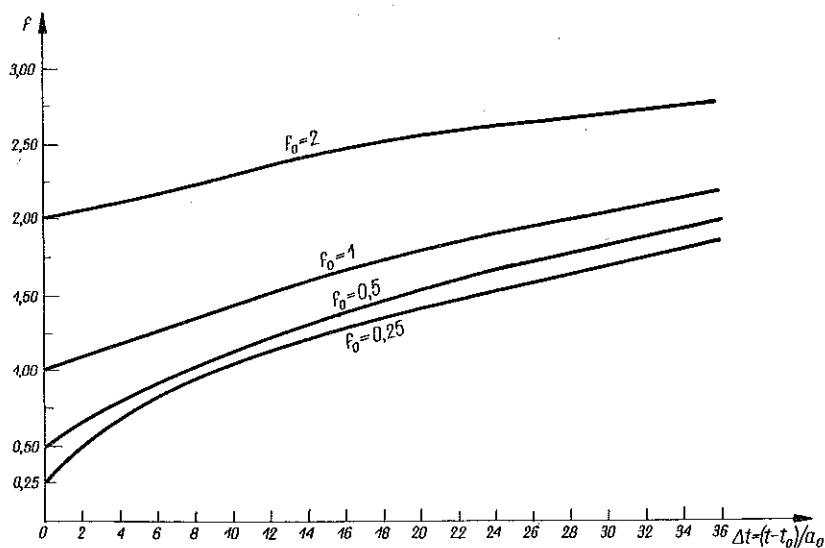
Wartość wyróżnika

$$(22.11) \quad \delta = P^3 + Q^2,$$

decyduje o rozwiązaniu równania (22.9).

W dalszym ciągu zakładamy $n = 3$. Wtedy

$$(22.12) \quad \delta = 1575 \cdot 10^5 a^6 \frac{f^8 + 7,32 \cdot 10^{-3} f^6 - 9,1 \cdot 10^{-5} f^4 + 1,42 \cdot 10^{-5} f^2 + 2,41 \cdot 10^{-9}}{f^6(7488f^2 + 1,46)^4}.$$



Rys. 23

Łatwo stwierdzić, że wyróżnik (22.12) jest dodatni dla każdej wartości f . Wynika stąd, że równanie (22.9) ma jeden pierwiastek rzeczywisty określony wzorem

$$(22.13) \quad x = \sqrt[3]{-Q + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-Q - \sqrt{\delta}},$$

w którym

$$(22.14) \quad Q = -94 \cdot 10^6 a^3 \frac{f^6 + 3,78 \cdot 10^{-3} f^4 - 3,35 \cdot 10^{-5} f^2 - 5,92 \cdot 10^{-9}}{f^3(7488f^2 + 1,46)^3},$$

praktycznie biorąc, jest ujemne dla każdej wartości f (podwójny pierwiastek licznika zawarty jest w przedziale $10^{-2} < |f| < 10^{-1}$).

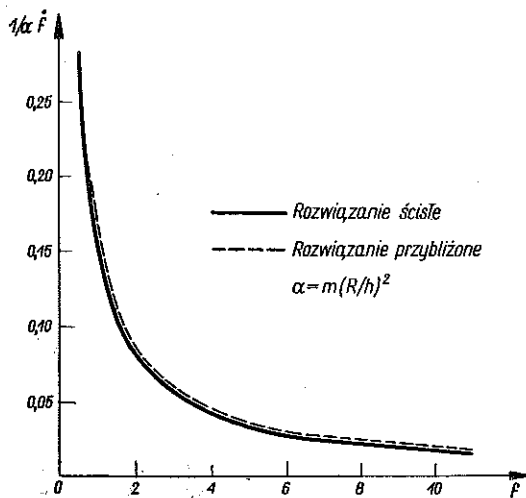
Z podstawienia (22.8) mamy (por. rys. 24)

$$(22.15) \quad p = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-Q + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-Q - \sqrt{\delta}},$$

gdzie p jest dodatnie dla każdej wartości f .

Związek ugięcie-czas może być znaleziony przez całkowanie rozwiązania (22.15). Tak więc

$$(22.16) \quad \int_{f_0}^f \frac{df}{\sqrt[3]{-Q + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-Q - \sqrt{\delta}} - \frac{b}{3a}} = t - t_0.$$



Rys. 24

Podamy jeszcze dla celów porównawczych przybliżone rozwiązanie równania (22.6) przy pominięciu p^3 w stosunku do pozostałych wyrazów. Mamy wtedy do rozwiązania równanie

$$(22.17) \quad bp^2 + cp + d = 0.$$

Wyróżnik powyższego równania

$$(22.18) \quad \Delta = a^2[(c_1 f^2 + c_2)^2 - 4d_1(b_1 f^2 + b_2) f^2] > 0,$$

a dodatni pierwiastek ma postać (por. rys. 24)

$$(22.19) \quad p = \frac{a}{2f(b_1 f^2 + b_2)} \left[-(c_1 f^2 + c_2) + \sqrt{(c_1 f^2 + c_2)^2 - 4d_1(b_1 f^2 + b_2) f^2} \right].$$

Całkując (22.19) otrzymujemy relację ugięcie-czas w postaci ogólnej dla dowolnego n (w zasadzie nieparzystego)

$$(22.20) \quad \frac{c_1}{4} (f^2 - f_0^2) + \frac{c_2}{2} \ln \frac{f}{f_0} + \frac{1}{4} (\sqrt{K} - \sqrt{K_0}) - \\ - \frac{1}{4} c_2 \ln \frac{f}{f_0} \frac{c_2^2 \sqrt{K} + (c_1 c_2 - 2d_1 b_2) f^2 + c_2^2}{c_2^2 \sqrt{K_0} + (c_1 c_2 - 2d_1 b_2) f_0^2 + c_2^2} + \\ + \frac{1}{4} \frac{c_1 c_2 - 2d_1 b_1}{\sqrt{c_1^2 - 4d_1 b_1}} \ln \frac{\sqrt{(c_1^2 - 4d_1 b_1) K} + (c_1^2 - 4d_1 b_1) f^2 + (c_1 c_2 - 2d_1 b_1)}{\sqrt{(c_1^2 - 4d_1 b_1) K_0} + (c_1^2 - 4d_1 b_1) f_0^2 + (c_1 c_2 - 2d_1 b_1)} = \frac{t - t_0}{a_0},$$

gdzie

$$(22.21) \quad a_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{m} \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

$$K = (c_1^2 - 4d_1 b_1) f^4 + 2(c_1 c_2 - 2d_1 b_1) f^2 + c_2^2, \quad K_0 = K(f_0).$$

Na rysunku 23 przedstawiono zredukowane krzywe ugięcie-czas obliczone na podstawie rozwiązania (22.20) dla $n = 3$ i rozmaitych warunków początkowych.

Na rysunku 24 wykreślono dwie krzywe podając zależność prędkość ugięcia-ugięcie. Linia ciągła przedstawia rozwiązanie ściśle równania (22.6), zaś linia przerywana rozwiązanie równania (22.17). Jak widać, zastosowane przybliżenie daje dobrą zgodność z rozwiązaniem ściśłym.

23. Dotychczas w naszych badaniach stateczności poczyniliśmy upraszczające założenie odnośnie zmienności intensywności naprężeń po grubości płyty. Mianowicie przyjmowaliśmy σ_i jako funkcję jedynie zmiennej promieniowej i czasu. W ten sposób materiał płyty posiada szczególne własności fizyczne, które mogą być uważane za przybliżenie rzeczywistego zachowania się w danych warunkach.

Jeżeli intensywność naprężeń zmienia się wzdłuż grubości płyty, musimy uwzględnić jej zależność od zmiennej z . Ponieważ w tym przypadku obliczenia natrafiają na nadzwyczajne trudności, ograniczymy się do najprostszych możliwie rozważań.

Ogólna postać prędkości odkształceń wynosi

$$(23.1) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_r = -\frac{h}{R^2} \frac{d^2 \dot{w}}{d\varrho^2} z + \frac{1}{R} \frac{d\dot{u}}{d\varrho} + \frac{1}{R^2} \frac{d\dot{w}}{d\varrho} \frac{d\dot{w}}{d\varrho}, \\ \dot{\epsilon}_\varphi = -\frac{h}{R^2} \frac{1}{\varrho} \frac{d\dot{w}}{d\varrho} z + \frac{1}{R} \frac{\dot{u}}{\varrho}, \end{cases}$$

gdzie

$$(23.2) \quad z = 2 \frac{\xi}{h}$$

jest bezwymiarową zmienną pionową.

Gdy rozważać tylko małe ugięcia, znika trzeci wyraz w pierwszym wyrażeniu (23.1). Ograniczymy się do tego przypadku.

Przyjmując funkcję prędkości przemieszczenia (12.3) oraz funkcję ugięcia (12.6), mamy z (7.2)

$$(23.3) \quad \Omega = k_0^2(13\varrho^4 - 12\varrho^2 + 3)z^2 + 6k_0m(2\varrho^2 - 1)z + 3m^2,$$

gdzie

$$(23.4) \quad k_0 = 4\dot{f}\left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

W dalszym ciągu ograniczamy się do rozważania samego pełzania. Wyprowadzając równanie równowagi obliczamy momenty zginające

$$(23.5) \quad \begin{cases} M_r = \frac{h^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{\Phi} (2\dot{e}_r + e_\varphi) z dz, \\ M_\varphi = \frac{h^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{\Phi} (\dot{e}_r + 2\dot{e}_\varphi) z dz. \end{cases}$$

Podstawiając do wyrażen na momenty (23.5) ciekłość

$$(23.6) \quad [\Phi]_{n=3} = \frac{3}{2} AB^2 \sqrt[3]{\Omega},$$

otrzymujemy

$$(23.7) \quad \begin{cases} M_r = KF \int_{-1}^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt[3]{Cz^2 + Dz + E}} = KF[J_0]_{-1}^{+1}, \\ M_\varphi = KG \int_{-1}^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt[3]{Cz^2 + Dz + E}} = KG[J_0]_{-1}^{+1}, \end{cases}$$

gdzie

$$(23.8) \quad \begin{cases} C = k_0^2(13\varrho^4 - 12\varrho^2 + 3), & D = 6k_0m(2\varrho^2 - 1), \\ E = 3m^2, & F = k_0(3 - 7\varrho^2), & G = k_0(3 - 5\varrho^2), & K = \frac{h^2}{6AB^2}. \end{cases}$$

Wzory redukcyjne dają dla nieoznaczonej całki

$$(23.9) \quad J_0 = \frac{3}{2} \frac{(2CE - D^2)z - DE}{C(4CE - D^2)} \sqrt[3]{Cz^2 + Dz + E} + \frac{5D^2 - 6CE}{C(4CE - D^2)} J_1,$$

gdzie

$$(23.10) \quad J_1 = \int \sqrt[3]{Cz^2 + Dz + E} dz.$$

Dalsza redukcja całki (23.10) daje

$$(23.11) \quad J_1 = \frac{3}{2} \frac{2Cz + D}{14C} \sqrt[3]{Cz^2 + Dz + E} + \frac{4CE - D^2}{7C} J_2,$$

gdzie

$$(23.12) \quad J_2 = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{Cz^2 + Dz + E}}.$$

Przyjmując

$$(23.13) \quad y^3 = Cz^2 + Dz + E,$$

przekształcamy J_2 do postaci

$$(23.14) \quad J_2 = \frac{3}{2} \int \frac{2ydy}{\sqrt{4Cy^3 + D^2 - 4CE}},$$

tj. do postaci całki eliptycznej. Jednakże obliczenie wartości całki napotyka na duże trudności ze względu na funkcyjne współczynniki i dlatego też wyniki nie nadają się do przedstawienia na tym miejscu.

Wyrażenia dla momentów (23.7) uproszczą się znacznie, jeśli założymy, że prędkość odkształcenia na brzegu płyty jest bardzo mała, a sama płyta dostatecznie cienka. Przedstawiając momenty w postaci

$$(23.15) \quad M_r = \frac{6}{7} K \frac{F}{\sqrt[3]{C}}, \quad M_\varphi = \frac{6}{7} K \frac{G}{\sqrt[3]{C}},$$

pominęliśmy pod pierwiastkiem w (23.7) wyrazy poza Cz^2 . Łatwo sprawdzić, że pominięte wyrazy są małe, ponieważ w każdym przypadku zachodzi nierówność

$$(23.16) \quad f \gg m.$$

Ustawiając równanie równowagi momentów dostajemy

$$(23.17) \quad (3F'C - FC')\varrho + 3C(F - G) = -\frac{7}{6} \frac{h}{K} \sigma_r \frac{dw}{d\varrho} \varrho.$$

Ponieważ

$$(23.18) \quad \sigma_r = -\frac{2}{3AB^2} \sqrt[3]{9m},$$

zaś funkcja ugięcia ma postać (12.5), to dostajemy po zastosowaniu metody Galerkinia równanie różniczkowe dla parametru f :

$$(23.19) \quad f - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{7}{122} \sqrt[3]{9m} \left(\frac{R}{h}\right)^2} \sqrt[3]{f} = 0.$$

Równanie powyższe ma rozwiązanie

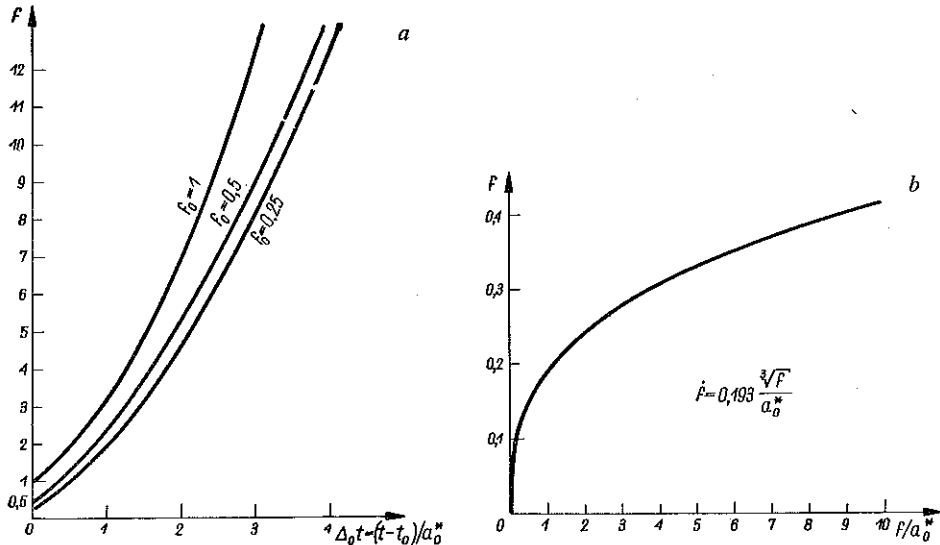
$$(23.20) \quad f = \sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{f_0^2} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{122} \sqrt[3]{9m} \left(\frac{R}{h}\right)^2} (t - t_0)\right]^3}.$$

Kilka krzywych ugięcie-czas dla rozmaitych warunków początkowych pokazano na rys. 25a. Na rysunku 25b podana jest zależność prędkości ugięcia-ugięcie.

Z rysunku 25a widać znaczny wzrost ugięcia w krótkim stosunkowo okresie jako wynik wpływu zmienności intensywności naprężeń wzdłuż grubości płyty. Im większe jest ugięcie początkowe, tym szybszy wzrost ugięcia¹.

24. Rozważmy zagadnienie wyboczenia przy deformacji sprężystej i pełzaniu wychodząc z najbardziej ogólnego równania (7.7), np. dla $n = 3$.

Zauważamy, że równanie (7.7) jest wynikiem przekształcenia równania (6.13). Dzielimy to ostatnie przez $2G\Phi$ oraz obliczając granicę przy $2G\Phi$ rosnącym nieogra-



Rys. 25

niczenie dochodzimy do równania (9.6), wyprowadzonego dla płyty pełzającej. Wnioskujemy stąd, że jeśli GAB^2 w równaniu (11.3) jest bardzo duże, to wyraz zawierający

$$\frac{\sqrt[3]{\Omega^2}}{GAB^2},$$

może być pominięty. W ten sposób równanie (11.6) dla samego pełzania wynika z ogólnego równania (7.7). Ponieważ (11.6) zastosowano w p. 22 dla przypadku nieliniowości geometrycznej i fizycznej, uzyskane rozwiązanie może być uważane za pierwsze przybliżenie rozwiązania problemu postawionego powyżej.

¹ Bliższą analizę wpływu zmian intensywności naprężeń wzdłuż grubości płyty przeprowadzimy w innej pracy dla płyt typu «sandwich». Analizę taką podał dla pręta o przekroju dwuteowym M. ŻYCZKOWSKI, [19].

25. Z przedstawionej w poprzednich punktach analizy wynika szereg wniosków, które obecnie podsumujemy.

W p. 12 zastosowaliśmy warunek całkowy Galerkina do równania różniczkowo-całkowego (6.1), które nazwać możemy «oryginalnym» i oddzielnie do równania różniczkowego (8.2), otrzymanego z pierwszego drogą dwukrotnego różniczkowania i eliminacji całki. W wyniku otrzymaliśmy w pierwszym przypadku równanie liniowe na parametr f ze zmiennymi współczynnikami, w drugim zaś równanie nieliniowe o współczynnikach stałych. Rozwiązanie pierwszego z równań jest równocześnie rozwiązaniem drugiego. Stosując podobne postępowanie w przypadku dużych ugięć w p. 18 otrzymaliśmy w obu operacjach identyczne równania. Wynika stąd, że kolejność zastosowania metody Galerkina nie miała wpływu na rozwiązania postawionych zagadnień.

W naszych rozważaniach zakładaliśmy, że proces deformacji wywołany jest jednostajnym ściskaniem płyty w jej płaszczyźnie środkowej. Zgodnie z tym, założyliśmy pewną prędkość odkształcenia na brzegu płyty. Problem polegał na określeniu zachowania się płyty w czasie, ściśle mówiąc, jej punktu środkowego pod wpływem tak danego obciążenia.

Dalej założyliśmy neutralny stan płyty początkowej $t = t_0$, odpowiadającej przyłożeniu obciążenia. W czasie procesu odkształcenia powstaje zmienny stan naprężenia, odpowiednio do założonej na brzegu prędkości. Jeśli uwzględniamy samo tylko pełzanie, a ciekłość i prędkość odkształcenia na brzegu jest stała w czasie, to naprężenia są również stałe.

Stan ugięcia początkowy związany jest, w myśl założeń, z geometrycznym ukształtowaniem płyty nieobciążonej. Ponieważ równania wyprowadzone w p. 7 i 9 są słuszne dla dowolnych warunków początkowych, nic nie stoi na przeszkodzie, aby można było stan początkowy naprężenia uwzględnić. Naprężenia w danej chwili obliczamy wtedy z formuł ogólnych (5.3), w których σ_0 oznaczają naprężenia istniejące w chwili $t = t_0$.

Jeżeli płyta przed obciążeniem jest płaska a w chwili $t = t_0$ pod obciążeniem, to niezależnie od wielkości sił, w świetle teorii małych ugięć, pozostanie nadal płaska. Jeżeli dla płyty w zakresie dużych ugięć zaobserwujemy, w chwili początkowej (pod obciążeniem) zmianę formy, świadczy to, że znajduje się ona w stanie poza krytycznym. Obserwujemy wtedy z upływem czasu ugięcia, jakie zachodzą już po doraźnym wyboczeniu płyty. Nie odnosi się to jednak do płyty, która nie wykazuje odkształceń sprężystych.

W naszych rozważaniach o wyboczeniu zakładamy neutralny stan płyty w chwili początkowej. Można jednak również przyjąć, że w chwili początkowej $t = t_0$ płyta została obciążona w płaszczyźnie środkowej naprężeniami, a następnie odkształca się z pewną prędkością. Jeżeli chodzi o warunki początkowe, to te dwa przypadki nie są sobie równoważne. W pierwszym bowiem przypadku założona na brzegu prędkość odkształcenia nie powoduje w chwili $t = t_0$ naprężeń, w drugim natomiast przypadku mamy pewien stan naprężenia w chwili początkowej.

Wielkość prędkości odkształcenia na brzegu ma w przypadku danych warunków brzegowych w naprężeniach znaczenie fizyczne, ponieważ decyduje o zachowaniu się płyty w czasie. Jeżeli rozważymy płytę poddaną działaniu naprężeń w czasie, zgodnie z krzywymi naprężeń wynikającymi z rozwiązań podanych w p. 17, która odkształca się, dla przykładu, z prędkością stałą na brzegu, to stwierdzamy pewną fizyczną charakterystykę materiału płyty. Fizyczne znaczenie m wychodzi na jaw szczególnie, gdy uwzględniamy tylko odkształcenia pełzania. Ponieważ w tym przypadku materiał płyty uważamy za sprężyste sztywne, proces jej odkształcenia charakteryzuje jedynie wielkość m .

W geometrycznym i fizycznym liniowym przypadku oraz dla stałej prędkości m naprężenia w płycie zmienne są w czasie według krzywych wykładniczych (rys. 7). Po pewnym okresie czasu zależnym od wielkości κ naprężenia te różnią się mało od określonych stałych wartości. Ten okres jest krótszy dla mniejszych κ , z drugiej zaś strony naprężenia osiągają duże wielkości. Dla κ zmierzającego do 0 krzywa naprężeń dąży do linii prostej. Ta ostatnia przedstawia wykres naprężeń w płycie sprężystej. Zmieniając punkt czasowy obserwacji w ten sposób, by naprężenia były prawie stałe, obserwujemy praktycznie biorąc pełzanie w warunkach stałych naprężeń. Takie podejście będzie bardziej uzasadnione dla małych κ , gdy okres czasu potrzebny na ustalenie się naprężenia jest krótki.

Dla prędkości m proporcjonalnej do wywołanego ugięcia naprężenia są zmienne wykładniczo z ugięciem (rys. 9) i zbliżają się do stałej wartości, równej naprężeniu w chwili krytycznej dla $f \rightarrow \infty$. Naprężenie konieczne do wywołania utraty stateczności przy pełzaniu jest większe dla większych wartości κ (rys. 10). Graniczna wartość odpowiada $\kappa = \infty$. Dla płyty czysto sprężystej naprężenie w chwili krytycznej jest proporcjonalne do ugięcia początkowego (rys. 8).

Dla prędkości m proporcjonalnej do odwrotności ugięcia, naprężenia wzrastając początkowo, spadają następnie gwałtownie i wreszcie dążą wolno do zera przy $f \rightarrow \infty$ (rys. 12). Dla płyty czysto sprężystej, naprężenia ustalają się po krótkim okresie czasu (rys. 11), krótszym dla mniejszych ugięć początkowych. Przy założeniu, że naprężenia mało różnią się od stałych, ten rodzaj procesu odkształcenia płyty pełzającej może być uważany za umocnienie przy pełzaniu pod działaniem stałych naprężeń.

Zachowanie się płyty w czasie i w warunkach ustalonych na początku tego punktu zależy od obciążenia. «smukłości» płyty, ugięcia początkowego i własności fizycznych. Wszystkie wymienione parametry, prócz ugięcia początkowego, wyrażone są wielkością współczynnika κ . Zgodnie z tym z fizycznego punktu widzenia otrzymujemy dwa graniczne przypadki: $\kappa = 0$ dla płyty czysto sprężystej oraz $\kappa = \infty$ dla płyty pełzającej. Wszystkie pośrednie własności fizyczne wyrażone są przez κ zawarte pomiędzy zerem a nieskończonością.

Należy podkreślić, że dla geometrycznej liniowości nie otrzymujemy rozwiązań dla $f_0 = 0$. W przypadku dużych ugięć rozwiązania są poprawne również wtedy, gdy początkowa postać płyty jest płaska, o ile uwzględniamy odkształcenia sprężyste. Wniosek ten nie obejmuje przypadku, gdy $\kappa = \infty$.

Jest rzeczą charakterystyczną, że prędkość ugięcia dla małych ugięć wzrasta w sposób ciągły do nieskończoności dla $f \rightarrow \infty$ (por. np. rys. 1 i rys. 22a). Dla dużych ugięć prędkość ugięcia wykazuje początkowo tendencję wzrostu, a następnie szybko maleje do zera dla $f \rightarrow \infty$, (por. np. rys. 19). Tendencja wzrostu jest wyraźniejsza dla mniejszych ugięć początkowych. Jest oczywiste, że rozważając duże ugięcia powinniśmy w początkowej fazie otrzymać przebieg krzywej ugięcia jak dla małych ugięć. Na wykresach zaznacza się to punktem przegięcia krzywych (por. rys. 22b), wyraźnym jedynie dla małych ugięć początkowych.

Głównym celem badania wyboczenia przy pełzaniu jest określenie czasu istnienia konstrukcji jako funkcji wspomnianych powyżej parametrów. Ze względu na to, że z konieczności operujemy w naszym badaniu modelami ciał teoretycznych, nie zamierzamy określać czasu istnienia z technicznego punktu widzenia. Naszym celem jest znalezienie teoretycznego czasu krytycznego, to znaczy punktu czasowego, w którym prędkość odkształcenia wzrasta nieograniczenie.

Z naszej analizy widać, że teoretyczny czas krytyczny występuje w przypadku małych ugięć, gdy prędkość odkształcenia na brzegu płyty jest funkcją rosnącą dla $0 \leq \kappa \leq \infty$, oraz przy m stałym dla $0 < \kappa < 1/2 \cdot (3/2)^3$. Wniosek ten jest ogólnie słuszny dla materiału lepko-sprężystego. Dla płyty sprężystej czas krytyczny występuje również dla stałej prędkości m .

Jeżeli chodzi o duże ugięcia, czas krytyczny, zgodny z naszą definicją, nie występuje nawet wtedy, gdy prędkość odkształcenia na brzegu jest funkcją rosnącą.

Jest również rzeczą charakterystyczną, chociaż oczywistą, że w chwili krytycznej nie otrzymujemy skończonej wielkości ugięcia. Dla $t = t_{cr}$ ugięcie rośnie nieograniczenie. Tak więc w żadnym przypadku prędkość odkształcenia nie zmienia znaku. Łatwo jest zatem upewnić się, czy czas krytyczny istnieje, biorąc granicę prędkości ugięcia przy $f \rightarrow \infty$. Jeżeli czas krytyczny istnieje, to w granicy otrzymujemy nieskończoną prędkość ugięcia. Z rozwiązań podanych dla dużych ugięć widać, że prędkość ugięcia maleje do zera przy $f \rightarrow \infty$.

Niektóre wyniki uzyskane w zakresie czasu krytycznego stoją pozornie w sprzeczności z ogólną opinią (por. np. [7], [16] i in.), że teoretyczny czas krytyczny w przypadku materiału lepko-sprężystego nie istnieje (lub jest nieskończony). W naszej analizie stwierdziliśmy dla takiego właśnie materiału istnienie czasu krytycznego w przedziale $0 < \kappa < 1/2 \cdot (3/2)^3$ dla $m = \text{const}$. Sprzeczność tę wyjaśnić można na podstawie przyjętego przez nas schematu obciążenia płyty, które ma charakter wymuszony.

Porównując wyniki otrzymane przy rozważaniu małych i dużych ugięć należy wziąć pod uwagę wielkość współczynnika «smukłości» płyty $(h/R)^2$ występującego w parametrze określonym jako czas zredukowany $\Delta t = (t - t_0)/a$. Dla dużych ugięć wielkość tego współczynnika jest znacznie mniejsza niż dla odkształceń małych. Wynika stąd, że jednostki zredukowanego czasu są w obu przypadkach różne, a krzywe ugięć nie są bezpośrednio porównywalne.

Jeżeli dysponujemy krzywymi ugięcie-czas dla ściśle określonych własności materiałów rzeczywistych, z których wykonana jest płyta, to możemy określić punkt

czasowy, w jakim płyta przestaje spełniać swoją rolę jako element konstrukcyjny. Zachodzi to wskutek zniszczenia spękania lub niedopuszczalnych odkształceń. Możemy wtedy określić czas krytyczny w szerszym pojęciu, przewidując okres istnienia konstrukcji z praktycznego punktu widzenia¹.

Zmienność intensywności naprężeń wzdłuż grubości płyty, uwzględniona jedynie dla małych ugięć, wydaje się mieć duży wpływ na ich przyrost, jak to widać z porównania krzywych na rys. 1 i rys. 25a dla $\kappa = \infty$ i przy założeniu, że $a_0 = a^*$. Dalsza analiza w tym kierunku jest konieczna.

Wyniki teoretyczne i numeryczne uzyskane w przedstawionej pracy powinny być rozważone krytycznie. Teoretyczne modele i zastosowane przybliżenia mogą stanowić jedynie podstawę dla oceny zjawisk związanych z zagadnieniem stateczności przy pełzaniu płyt kołowych z materiałów rzeczywistych.

¹ Sposób wyznaczania obciążeń krytycznych, zastosowany w pracy, odpowiada w zupełności jednej z metod określania obciążeń krytycznych w klasycznej teorii stateczności płyt. Metoda ta polega na założeniu, że płyta posiada pewne początkowe wygięcie. Wtedy wielkości obciążeń w płaszczyźnie środkowej, przy których ugięcia rosną nieograniczenie, są obciążeniami krytycznymi (por. S. Timoszenko, [14]). Wielkości te dla ciała lekko-sprężystego przy $m = \text{const}$ nie ulegają zmianie w przedziale

$$0 < \kappa < 1/2(3/2)^3$$

zmienia się tylko czas krytyczny (por. rys. 7).

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. D. DEVEIKIS, *Investigation of the Compressive Strength and Creep of 7075-T6 Aluminum-Alloy Plates at Elevated Temperatures*, NACA Techn. Not., 4111, Nov. 1957.
- [2] I. FINNIE, W. R. HELLER, *Creep of Engineering Materials*, New York 1959.
- [3] I. FINNIE, *Stress Analysis in the Presence of Creep*, Appl. Mech. Rev., 10, 13 (1960), 705-712.
- [4] G. GERARD, *Buckling Efficiencies of Plate Materials at Elevated Temperatures*, J. Aero. Sci., 22 (1955), 194-196.
- [5] N. J. HOFF, *Buckling and Stability*, J. Roy. Aero. Soc., 58 (1954), 3-52.
- [6] N. J. HOFF, *Buckling at High Temperature*, J. Roy. Aero. Soc., 61 (1957), 756-774.
- [7] N. J. HOFF, *A Survey of the Theories of Creep Buckling*, Proc. Third US Nat. Congr. Appl. Mech., Brown Univ., 1958, Pergamon Press 1958.
- [8] J. A. H. HULT, *Creep Buckling*, Instn. Hallfasthetslära Kungl. Tekniska Högskolan, Publ. Nr 111, Stockholm 1955.
- [9] T. H. LIN, *Creep Deflections of Viscoelastic Plate under Uniform Edge Compression*, J. Aero. Sci., 23 (1956), 883-886.
- [10] E. E. MATHAUSER, W. D. DEVEIKIS, *Investigation of the Compressive Strength and Creep Lifetime of 2024-T3 Aluminum-Alloy Plates at Elevated Temperatures*, NACA Techn. Not., 3552, Jan. 1956.
- [11] T. H. H. PIAN, R. I. JOHNSON, *On Creep Buckling of Columns and Plates*, Aero. and Struct. Res. Lab. of Mass. Inst. Techn., Tech. Rep., 25-24, 1957.
- [12] Ю. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести*. Прикл. Мат. Мех., 21, 1957.
- [13] J. L. SANDERS, H. G. MCCOMB JR., F. R. SCHLECHTE, *A Variational Theorem for Creep with Application to Plates and Columns*, NACA Techn. Not. 4003, May 1957.
- [14] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.

- [15] А. ВОЛМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.
- [16] В. FRAEIJNS de VEUBEKE, *Creep Buckling, High Temperature Effects in Aircraft Structure*, AGAR Dograph Nr 28, 1958.
- [17] W. ZUK, *Creep Buckling of Plates at Elevated Temperatures*, J. Aero. Sci., 23, 1956.
- [18] М. ŻYCZKOWSKI, *Some Problems of Creep Buckling of Homogeneous and Non-Homogeneous Bars*, Proc. Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press 1959, 353-363.
- [19] М. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically Non-Linear Creep Buckling of Bars*, Arch. Mech. Stos., 3, 12 (1960), 379-411.
- [20] М. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ ciężaru własnego na pełzające wyboczenie prętów*, Rozpr. Inżyn., 3, 8 (1960), 511-528.
- [21] М. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd i klasyfikacja prac nad wyboczeniem pełzającym*, Czasop. Techn., 1, 65 (1960), 1-7.
- [22] W. SIEGFRIED, *Failure from Creep as Influenced by State of Stress*, J. Appl. Mechanics, 65, 1943.
- [23] А. М. FREUDENTHAL, *Some Time Effects in Structural Analysis*, Sixth Int. Congr. of Appl. Mech., Париж 1946.
- [24] А. Д. ROSS, *The Effects of Creep on Instability and Indeterminacy Investigated by Plastic Models*, Struct. Eng., 8, 1947.
- [25] J. MARIN, *Creep Deflections in Columns*, J. Appl., Phys., 18, 1947.
- [26] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*, Москва-Ленинград 1949.
- [27] J. MADEJSKI, *Wyboczenie pręta przyrmatycznego jako zagadnienie dynamicznej teorii plastyczności*, Rozp. Inżyn., 4, 1956.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУЧИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ КРУГОВЫХ ПЛАСТИНОК ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Исследование выпучивания в условиях ползучести состоит в проведении общего анализа поведения пластинки, изготовленной из ползучего материала, подвергающейся сжатию в ее серединой поверхности. Процесс деформации начальной формы пластинки, характеризующейся большим увеличением прогиба при малом росте перемещения, называется выпучиванием в условиях ползучести. Это явление может приводить к бесконечному увеличению прогиба, а временная точка, в которой это происходит, называется критическим временем.

Вопрос выпучивания в условиях ползучести выдвинулся только лишь в последние 20 лет. Первым анализом по этому вопросу является работа СИГФРИДА. Несколько лет позже появляются работы в области специфического вопроса выпучивания в условиях ползучести А. М. ФРЕУДЕНТАЛЯ, А. Д. РОССА, И. МАРИНА и А. Р. РЖАНИЦЫНА. В последние годы появляется ряд теоретических и экспериментальных публикаций касающихся главным образом стержней, что свидетельствует о большой заинтересованности исследователей этим вопросом. Образ достижений в этой области дают обзоры И. А. ГУЛЬТА, Р. И. ГОФФА, И. ФИНИИ и В. Р. ГЕЛЛЕРА. В настоящее время, в связи с быстрым развитием современной техники, основанной на работе конструкционных материалов в условиях больших нагрузок и высоких температур, вопрос выпучивания в условиях ползучести выдвинулся на первый план.

Среди работ, посвященных выпучиванию пластинок в условиях ползучести следует отметить работы Г. ЖЕРАРА, Т. Х. ЛИНА, Е. Е. МАТХАУЗЕРА и В. Д. ДВВВИКИСА, И. Н. РАБОТНОВА, С. А. ШЕСТЕРИКОВА, Т. Х. Х. ПАЙНА, и Р. И. ДЖОНСОНА, В. ЖУКА,

а также И. Л. САНДЕРСА, Х. С. Г. МАККОМБА и Ф. Р. ШЛЕХТЕ. Все приведенные выше авторы занимались пластинками с точки зрения геометрической линейности, только некоторые учитывали физическую нелинейность и упругие деформации. Как это известно автору настоящей работы, вопросы вышучивания пластинок в условиях ползучести в геометрически нелинейном представлении до сих пор в литературе не рассматривались. Кажется, что такой подход, с точки зрения практических применений теории, является очень важным.

В настоящей работе этот вопрос по сравнению с существующими до сих пор работами, касающимися стержней и пластинок — поставлен иначе. Краевые условия даются в форме перемещений, а точнее говоря принимаются в качестве скорости деформации края пластинки. Такой подход, по мнению автора, хорошо соответствует действительным условиям работы конструкции и облегчает физическую интерпретацию результатов. Этот подход является также выгодным с точки зрения экспериментальных исследований.

В первой части работы дается формулировка вопроса и предположения для круговых пластинок с защемленными краями, имеющими возможность передвижения.

Физический закон для несжимаемого упруго-ползучего материала принимается в виде

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{\dot{\sigma}_{ik}^*}{2G} + \Phi \sigma_{ik}^*,$$

где $\dot{\epsilon}_{ik}$ — составляющая скорости деформации, σ_{ik}^* — составляющая дивергента напряжений, G — модуль деформации сдвига и $\Phi = \Phi(\sigma_i)$ — текучесть, являющаяся в общем функцией интенсивности напряжений σ_i .

Геометрическими зависимостями для скорости деформации в срединной плоскости суть

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr}, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{u}}{r}.$$

Выводятся общие уравнения для круговых пластинок, справедливые для деформированного упругого состояния и ползучести. Система трех уравнений, уравнения равновесия напряжений в срединной плоскости, уравнения равновесия моментов и условия совместности деформации, вместе с краевыми условиями определяют функцию прогиба и полные скорости деформации или скорости деформации ползучести (если пренебречь упругой деформацией).

Анализ ограничивается определением роста прогиба во времени.

Условие: скорость прогиба равна бесконечности дает теоретическое время потери устойчивости в условиях ползучести.

Исследования проводились принимая непосредственно форму функции прогиба w и форму функции перемещения u в срединной плоскости пластинки как функции времени. Приведенные выше предположения позволяют автоматически удовлетворить условию совместности. Чтобы удовлетворить уравнению равновесия применяется интегральное условие Галеркина. Таким способом определяется прогиб в срединной плоскости пластинки как функцию времени из обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Сперва обсуждается случай геометрической и физической линейности, когда пластинка подвергается сжатию с постоянной скоростью на краю. Рассматриваются некоторые случаи, в которых эта скорость пропорциональна вызванному прогибу или его обратности и определяются соответствующие напряжения. Затем учитывается геометрическая нелинейность скорости деформации и определяются зависимости прогиб — время. Решение уравнений получается методом возмущений. Отбрасывая упругие деформации, находится решение для случая физической и геометрической нелинейности. Влияние изменчивости интенсивности напряжений по толщине пластинки исследуется приближенным способом.

Поведение пластинки во времени зависит главным образом от механических свойств материала, нагрузки, гибкости и начального прогиба. Влияние всех этих параметров выражается, за исключением последнего, с помощью коэффициента κ . Согласно тому, для чисто упругой пластинки $\kappa = 0$, а для чисто ползучей пластинки $\kappa = \infty$ (если рассматривать физические свойства).

Констатируется, что теоретическое критическое время существует в области малых прогибов пластинки, если скорость деформации на краю является возрастающей функцией прогиба (для $0 \leq \kappa \leq \infty$). Для скорости деформации, постоянной во времени, теоретическое критическое время появляется для узкого интервала $0 \leq \kappa < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3$. Для чисто упругой пластинки критическое время определяется как время, в котором сжатие достигает критической величины.

Согласно нашей дефиниции нет критического времени при рассмотрении больших деформаций на краю даже тогда, когда скорость деформации на краю является возрастающей функцией прогиба.

Делаются общие заключения, что критическое время возрастает с ростом влияния ползучести. Некоторые из выше приведенных заключений противоречат, на вид, общему мнению, что однако можно объяснить принятой в работе схемой нагрузки.

Для малых прогибов пластинки не получается решений справедливых для начального плоского состояния. В случае больших деформаций эти решения справедливы также для такого состояния, если только учесть упругие деформации. И так, последнее заключение несправедливо для $\kappa = \infty$.

Исследование изменчивости интенсивности напряжений по толщине пластинки является в общем случае трудным. Упрощенный анализ в случае малых прогибов и только для самой ползучести указывает, кажется, на значительное влияние этой переменности на прогибы. Необходимы дальнейшие исследования в этом направлении.

Теоретические результаты следует обсудить критически, а принятые в работе теоретические модели являются единственно базой для определения явлений, связанных с проблемой вынуживания в условиях ползучести круговых пластинок.

Summary

INVESTIGATION OF CREEP BUCKLING OF PLATES IN THE RANGE OF SMALL AND LARGE DEFLECTIONS

By investigation of creep buckling we mean a general analysis of the behavior in time of a plate made from a creeping of its material which undergoes a compression in its middle plane. The process of deformation of the initial shape of the plate characterized by a large increase in deflection for a small increase in displacement is called creep buckling. This may lead to an infinite increase in deflection, and loss of stability of the plate occurs. The corresponding time point is called critical time.

The problem of creep buckling has attracted interest only in recent years. In 1943, W. SIEGFRIED pointed out the possibility of creep buckling. A few years later there appeared references to a specific problem of creep buckling of columns advanced by A. M. FREUDENTHAL, A. D. ROSS, J. MARIN and A. R. RSHANICYN.

In a short period of time, a large number of papers have been published, and different methods for analysis of creep buckling, mainly of columns, have been presented. Recently, J. A. H. HULT, N. J. HOFF, I. FINNIE and W. R. HELLER have published methodical reviews of the problem. At present, the topic of creep buckling has become of interest in connection with the rapid development of modern technique as concerning engineering materials subjected to high loads and high temperatures.

There is little published information on creep buckling of plates. As far as the present author knows, there is no published paper on creep buckling of plates in the range of large deflections. This problem seems to be very important from the point of view of practical application of the theory.

In the present paper, the problem of creep buckling has been established quite differently from the approach in other papers dealing with columns and plates. Instead of a prescribed load, we assume as given the displacement conditions or strictly speaking, the deformation rates on the boundary. Thus, the deformation of the plate has a forced character and stresses are variable in time. Such an approach is in agreement with real conditions for plates in steady-state creep, and facilitates the physical interpretation of the results obtained. It should be emphasized that the quantities assumed as essential are usually measured experimentally.

In the first general part of the present paper, the problem and assumptions are stated for circular plates with freely clamped edges.

The physical law for an elastic and creeping incompressible material is assumed to be

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{\dot{\sigma}_{ik}^*}{2G} + \Phi \sigma_{ik}^*$$

where $\dot{\epsilon}_{ik}$ is strain rate component, σ_{ik}^* — stress deviator component, G — shear modulus and $\Phi = \Phi(\sigma_i)$ — fluidity, being generally a function of stress intensity σ_i .

The geometrical relations for deformation rates in the middle plane of the plate are in general:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dw} \frac{dw}{dr}, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{u}}{r}.$$

The assumptions made, the general equations for circular plates are derived, valid for both elastic and creep deformation state. The system of three equations — equation of equilibrium of stresses in the middle plane of the plate, equation of equilibrium of moments, and the conditions of compatibility, together with boundary conditions, determine deflection and total strain rates or creep strain rates (if elastic deformations are disregarded).

The analysis is restricted to prediction of deflection increase in time. The condition: deflection rate equal to infinity gives the theoretically critical time point of creep buckling.

In investigation, the following manner of procedure is applied: The shape of deflection function w and the form of displacement function u in the middle plane of the plate are assumed directly as functions of time. The above assumptions make it possible to satisfy the condition of compatibility. To satisfy the equations of equilibrium, the Galerkin's integral condition is applied. Thus, the deflection at the center of the plate as function of time is found from ordinary non-linear differential equations.

In the second part of the present paper, a geometrically and physically linear case is discussed when the plate undergoes compression with constant velocity on the boundary. Some particular cases of velocity proportional to deflection produced, and reciprocal of deflection, are considered and corresponding stresses found. As the second approach, the geometrical nonlinearity of deformation rates is assumed and deflection-time relations evaluated. The solutions of non-linear differential equations are obtained by using the perturbation method. When elastic deformations are disregarded, the solutions for both linear and non-linear cases are found. The influence of variability of stress intensity through the thickness of the plate is considered and discussed.

The behavior of the plate in time depends essentially on mechanical properties of the material, load, slenderness ratio and out-of-straight parameter. The influence of all these parameters, except the one out-of-straight, is expressed through the value of the coefficient κ . Therefore $\kappa = 0$, for purely elastic plate and $\kappa = \infty$ for purely creeping plate (as regards physical properties).

It is found that theoretical critical time exists for small deflections of the plate if the deformation rate on the boundary is an increasing function of deflection (for $0 \leq \kappa \leq \infty$). For the deformation rate constant in time, the theoretical critical time appears only in the small interval $0 \leq \kappa < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

The critical time for a purely elastic plate is defined as the point of time at which the compression in the middle plane of the plate attains its critical value. There is no critical time, according to our definition, when large deflections are considered, even if the deformation rate on the boundary is an increasing function of deflection. In general, we conclude that critical time increases with increasing influence of creep. Some of the above conclusions are apparently in contradiction with general opinion. That can be explained, however, by the assumed scheme of loading of the plate.

For small deflections of the plate, we do not obtain solutions valid for an initially flat form of the plate. In the case of large deflections, the solutions are valid also for an initially flat form of the plate, if only elastic deformations are taken into account. Thus, the last-mentioned conclusion does not hold for $\nu = \infty$.

The investigation of variability of stress intensity through the thickness of the plate is very difficult in the general case. The simplified analysis made in the case of small deflections, and for creep only, seems to show that a great influence on deflection increase is exerted when this variability occurs. Further investigation is necessary.

The above theoretical and numerical results should be regarded critically, and the theoretical models of the present paper may constitute a basis for an evaluation of phenomena connected with the problem of creep buckling of circular plates.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1961 r.