

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

**POWIERZCHNIE GRANICZNE
W TEORII WYŁĘŻENIA**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCVIII**

TOM IX . ZESZYT 4 . ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Pojęcie powierzchni granicznej	611
2. Powierzchnie graniczne dla wyężenia materiału w punkcie	612
2.1. Dobór czynników wyężenia	612
2.2. Powierzchnie graniczne w przypadku naprężeń zmiennych w czasie	615
2.3. Powierzchnia graniczna odpowiadająca parabolicznej hipotezie Mohra	616
2.4. W sprawie trzeciego niezmiennika stanu naprężenia lub odkształcenia	618
3. Powierzchnie graniczne dla przekroju płyty lub powłoki	620
4. Powierzchnie graniczne dla przekroju pręta	624
5. Powierzchnie graniczne dla konstrukcji jako całości	625
5.1. Uwagi ogólne	625
5.2. Przykład belki statycznie niewyznaczalnej	626
5.3. Przykład rury grubościennej pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i temperatury	628
5.4. Inne czynniki wyężenia	631
6. Powierzchnie graniczne ze względu na stateczność konstrukcji	632
7. Uwagi końcowe	634

1. Pojęcie powierzchni granicznej

Pojęcie wyężenia materiału w punkcie jest dobrze znane. Zazwyczaj definiuje się je jako stopień zbliżenia stanu fizykalnego w określonym punkcie ciała do pewnego stanu niebezpiecznego (stanu granicznego lub granicy niebezpiecznej), oznaczonego ogólnie przez K , na przykład granicy sprężystości S , granicy plastyczności Q lub granicy wytrzymałości R , [51] i [52]. Niezależne parametry, decydujące o osiągnięciu stanu niebezpiecznego, nazywać będziemy czynnikami wyężenia. Odkładając te czynniki na osiach pewnego, na ogół kartezjańskiego układu współrzędnych, otrzymujemy n -wymiarową przestrzeń czynników wyężenia. W przestrzeni tej stanowi niebezpiecznemu odpowiadać będzie pewna powierzchnia (hiperpowierzchnia), która nosi nazwę powierzchni granicznej. W ujęciu geometrycznym wyężenie będzie więc stopniem zbliżenia punktu P , reprezentującego w przestrzeni czynników wyężenia stan fizykalny ciała, do powierzchni granicznej.

Nauka o wyężeniu materiału stanowi więc z jednej strony podstawę teorii plastyczności, z drugiej — teorii wytrzymałości (zniszczenia).

Lokalne pojęcie wyężenia materiału rzadko jednak może dawać ocenę pracy konstrukcji jako całości. Ocena taka może mieć miejsce bądź wtedy, gdy w jednorodnym ciele panuje jednorodny stan naprężenia, bądź wtedy, gdy ściśle określony, zawsze ten sam punkt ciała jest punktem najbardziej wyężonym (ten ostatni przypadek odnosi się zresztą tylko do analizy wyężenia względem granicy sprężystości lub do analizy wyężenia ciał kruchych, nie zdolnych do uplastycznienia). W przeciwnym razie należy zająć się analizą pracy pewnego przekroju danego elementu — belki, płyty lub powłoki (przekroju niebezpiecznego) — lub analizą pracy konstrukcji jako całości. Przekrój możemy uważać za obciążony np. uogólnionymi siłami wewnętrznymi (siłą podłużną, momentami zginającymi itp.), wtedy stan niebezpieczny odpowiada pewnej powierzchni granicznej w przestrzeni tych czynników. Analizując natomiast konstrukcję jako całość, co z punktu widzenia obliczeń wytrzymałościowych jest z reguły najważniejsze, musimy uwzględnić działanie wszystkich tych czynników, które posiadają istotnie niezależny wpływ na możliwość osiągnięcia przez konstrukcję stanu niebezpiecznego. Czynniki te są z reguły poszczególnymi obciążeniami konstrukcji, lecz, jak zobaczymy, mogą to być również wielkości zupełnie innego typu. Nie precyzując chwilowo jeszcze, jakie stany będziemy uważali za stany niebezpieczne przekroju lub konstrukcji, stwierdzimy, że stany te będą (pod pewnymi dość ogólnymi założeniami) odpowiadać pewnej

powierzchni granicznej w przestrzeni wspomnianych czynników. Przez analogię do pojęcia wyężenia materiału w punkcie możemy wprowadzić pojęcie wyężenia przekroju lub wyężenia konstrukcji jako całości. Pod pojęciami tymi będziemy mianowicie rozumieć stopień zbliżenia stanu fizykalnego rozpatrywanego przekroju lub konstrukcji do stanu niebezpiecznego. Niezależne czynniki decydujące o osiągnięciu tego stanu będziemy nazywać i w tym przypadku czynnikami wyężenia; podobnie wprowadzić można pojęcie n -wymiarowej przestrzeni czynników wyężenia.

Do problemu jednoznaczności powierzchni granicznych dla przekroju i konstrukcji odnoszą się bez większych zmian uwagi zamieszczone w pracy [51] w związku z analizą powierzchni granicznych dla wyężenia materiału w punkcie ciała.

Wprowadzeniu pojęcia wyężenia przekroju i wyężenia konstrukcji zostanie poświęcona odrębna praca. Celem obecnej, w pewnym sensie pracy przygotowawczej, jest natomiast analiza samych powierzchni granicznych w przestrzeni czynników wyężenia i sprecyzowanie związanych z tym pojęć. Praca posiadać będzie wyraźną myśl przewodnią jakkolwiek w jej skład wchodzi również szereg uwag o charakterze dygresji.

Stosowane tradycyjnie wzory «wytrzymałościowe» bez względu na to, czy opierają się na analizie nośności sprężystej, czy nośności granicznej elementu, wykorzystują zazwyczaj tylko jeden punkt lub pewną część powierzchni granicznej. Jednym z celów pracy będzie podanie przykładów kompletnych powierzchni granicznych, co umożliwi nie tylko określenie zakresu stosowalności poszczególnych wzorów przy znanym, ustalonym sposobie obciążenia, lecz również obliczanie wyężenia przy danym rozkładzie prawdopodobieństwa osiągnięcia poszczególnych punktów powierzchni, mianowicie gdy «drogę» w przestrzeni czynników wyężenia możemy określić tylko z pewnym prawdopodobieństwem.

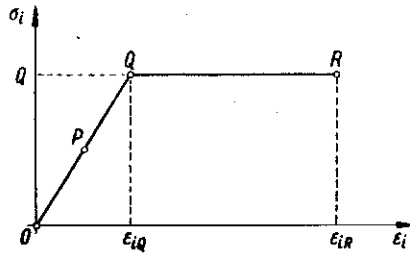
2. Powierzchnie graniczne dla wyężenia materiału w punkcie

2.1. Dobór czynników wyężenia. Powierzchnie graniczne dla wyężenia materiału w punkcie są najlepiej dotychczas zbadanymi powierzchniami granicznymi, lecz mimo to nawet w tym najprostszym przypadku istnieje szereg problemów niedostatecznie naświetlonych bądź z powodu braku odpowiednich danych doświadczalnych, bądź też z powodu niewłaściwego ich wykorzystania.

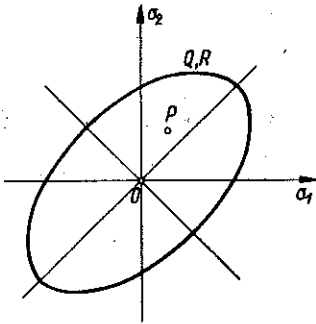
Za czynniki wyężenia uważa się w rozważanym przypadku z reguły składowe stanu naprężenia; jeżeli dane ciało jest izotropowe i jeżeli pomija się wpływ wszelkich innych możliwych czynników wyężenia, to ilość istotnie niezależnych czynników można zredukować do trzech, na przykład trzech naprężeń głównych lub pewnych innych trzech niezmienników stanu naprężenia. Przestrzeń, w której czynnikami wyężenia są trzy naprężenia główne, bywa nazywana przestrzenią Haigha-Westergaarda. Już tutaj nasuwa się wątpliwość, czy na poszczególnych osiach powinny być odcinane naprężenia główne, czy też jakieś inne niezmienniki. Nie formułując na razie stanowiska w tej sprawie zajmiemy się nieco szerszym zagadnieniem.

W. BURZYŃSKI, [1], [2], pisze, iż «wytężenie pewnego punktu ciała jest stanem fizycznym, związanym ściśle ze stanem naprężenia, względnie, co na jedno wychodzi, odkształcenia tego punktu». Sformułowanie takie posiada charakter bardzo nieogólny i może być słusznie jedynie w odniesieniu do powierzchni granicznej, dotyczącej granicy sprężystości. W innych przypadkach istnieją na ogół poważne różnice między powierzchniami granicznymi budowanymi w przestrzeni naprężeń Haigha-Westergaarda i w przestrzeni odkształceń.

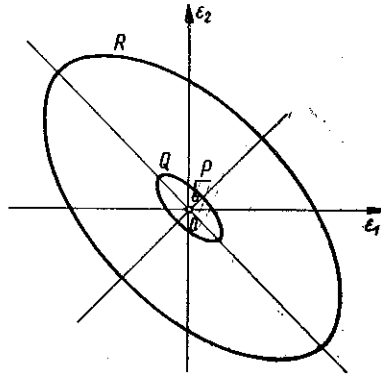
Dla przykładu weźmy pod uwagę płaską tarczę, wykonaną z nieściśliwego materiału idealnie sprężysto-plastycznego o ograniczonej platformie plastyczności (rys. 1). Załóżmy, że materiał tarczy zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym, podlega hipotezie Hubera-Misesa-Hencky'ego. Umówmy się nazywać punkt Q granicą plastyczności, punkt R granicą wytrzymałości tego ciała. Jeżeli tarcza



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

ta jest dwukierunkowo rozciągana tak, że panuje w niej jednorodny płaski stan naprężenia, to w płaszczyźnie naprężeń $\sigma_1\sigma_2$ powierzchnie graniczne (krzywe graniczne) dla granicy plastyczności i granicy wytrzymałości, odnoszące się do dowolnego punktu tarczy, oczywiście pokryją się (rys. 2). Zupełnie inna sytuacja wystąpi na płaszczyźnie odkształceń $\epsilon_1\epsilon_2$. Pisząc równania $\epsilon_i = \epsilon_{iQ}$ oraz $\epsilon_i = \epsilon_{iR}$ i rugując z nich ϵ_3 z warunku nieściśliwości otrzymamy na płaszczyźnie $\epsilon_1\epsilon_2$ dwie elipsy, na ogół silnie odbiegające od siebie (rys. 3). Przypuśćmy, że stan fizyczny

dowolnego punktu rozpatrywanej tarczy jest w pewnej chwili przedstawiony punktem P na płaszczyźnie naprężeń i na płaszczyźnie odkształceń, i że interesuje nas stopień zbliżenia tego stanu do granicy wytrzymałości R (wytężenie względem granicy wytrzymałości). Rozważając ten problem na płaszczyźnie naprężeń stwierdzimy, że nasz stan jest już bliski granicy wytrzymałości, podczas gdy na płaszczyźnie odkształceń sytuacja jest zupełnie odmienna. Ponieważ na ogół nie ma powodów, by z tych dwóch interpretacji jedną uprzywilejować, więc bez dodatkowych danych problem zbliżenia się do stanu niebezpiecznego pozostałby otwarty.

Analizując warunki pracy elementu znajdziemy jednak dodatkowe dane, które pozwolą rozstrzygnąć postawiony problem. Istotną rolę odgrywa tu mianowicie wyszukanie czynników istotnie niezależnych. Jeżeli czynnikami tymi są naprężenia, to wówczas należy rozpatrywać problem w płaszczyźnie naprężeń i wtedy punkt P można uważać za bliski granicy wytrzymałości; jeżeli natomiast odkształcenia, to odległość punktu P od granicy wytrzymałości jest jeszcze duża.

Pewną komplikację wprowadza tu fakt, iż w zastosowaniach praktycznych często czynniki niezależne są trudno uchwytnie. Jeżeli weźmiemy pod uwagę maszynę wytrzymałościową o napędzie mechanicznym, to zasadniczym czynnikiem niezależnym jest ilość obrotów śruby pociągowej, a więc odkształcenie. Natomiast już w przypadku maszyny wytrzymałościowej o napędzie hydraulicznym problem jest znacznie bardziej złożony. Przypuśćmy, że ciśnienie wytwarzane jest pompą tłokową o stałym skoku. Czynnikiem niezależnym jest tu ilość wykonanych skoków tłoka w trakcie próby wytrzymałościowej. Przy założeniach, że olej jest nieściśliwy, przewody nie zmieniają średnicy pod działaniem ciśnienia i pompa podaje tę samą ilość cieczy niezależnie od ciśnienia, przesuw ramy maszyny (a więc i odkształcenie) byłby proporcjonalny do ilości wykonanych skoków tłoka, a zatem można by go uważać za niezależny czynnik wytężenia. W rzeczywistości dość poważną rolę odgrywa ściśliwość cieczy zmniejszając przesuw, i czynnikiem wytężenia jest nie odkształcenie, lecz pewna dość złożona funkcja odkształcenia i naprężenia.

Prostym przypadkiem, w którym niezależny czynnik wytężenia stanowi naprężenie, jest obciążenie układu statycznie wyznaczalnego siłą, której wielkość nie zależy od odkształceń (obciążenie statycznie wyznaczalne, np. ciężar własny). Natomiast już w przypadku układu statycznie niewyznaczalnego występuje istotny wpływ odkształceń.

Dobór czynników wytężenia jako wielkości istotnie niezależnych posiada szczególne znaczenie przede wszystkim dla geometrycznej interpretacji wytężenia, związanej z odległością punktu P , reprezentującego dany stan fizyczny, od powierzchni granicznej, a następnie dla wprowadzenia matematycznej definicji wytężenia, [51]. Oczywiście, jeżeli powierzchnia ta określona jest równaniem

$$(2.1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

i jeżeli wprowadzimy inne wielkości, zależne od x_i , mianowicie

$$(2.2) \quad y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

to w przestrzeni zmiennych y_j powierzchni (2.1) odpowiada pewna powierzchnia

$$(2.3) \quad G(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Jeżeli transformacja (2.2) jest tylko przesunięciem lub sztywnym obrotem, to zastąpienie powierzchni F przez powierzchnię G jest nieistotne, transformację taką stosowano przy analizie wyteżenia materiału w pracy [51]. Upraszczając nieco zagadnienie można natomiast powiedzieć, że w ogólnym przypadku transformacja (2.2) zmienia równomierną podziałkę na osiach x_i na nierównomierną na osiach y_j , co wypacza znaczenie odległości punktu od powierzchni granicznej. Czasem następuje nawet pewna degeneracja niektórych zmiennych, jak np. w rozważanym przez nas poprzednio przykładzie, gdzie dwóm krzywym w płaszczyźnie $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ odpowiadała tylko jedna w płaszczyźnie $\sigma_1 \sigma_2$.

Z punktu widzenia analizy wyteżenia, na poszczególnych osiach przestrzeni czynników wyteżenia logicznie uzasadnione jest więc jedynie odcinanie czynników istotnie niezależnych. Dobór takich czynników nie zawsze jest łatwy; okaże się, że przy analizie wyteżenia konstrukcji jako całości dobór jest z reguły łatwiejszy. Odcinając jednak na poszczególnych osiach naprężenia główne w sposób w pewnym sensie tradycyjny, popełniamy z reguły błąd na korzyść pewności, bowiem punkt reprezentujący dany stan fizyczny leży bliżej powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń niż w przestrzeni odkształceń. Wyjątek stanowiłyby jedynie materiały o «sztywnej» charakterystyce (silniejszy od liniowego wzrost naprężeń ze wzrostem odkształceń), jednak materiały takie stosowane są raczej rzadko.

2.2. Powierzchnie graniczne w przypadku naprężeń zmiennych w czasie. Oprócz naprężeń (lub odkształceń) możemy się spotkać z wieloma innymi czynnikami wyteżenia materiału w punkcie. Należy tu przede wszystkim temperatura, dalej wilgotność (np. drewna), gradient naprężeń itd. Czynniki te omówiono dokładniej w pracy [51] i w tym miejscu nie będziemy do nich powracali.

Poświęcimy jednak chwilę uwagi bardzo często spotykanemu przypadkowi naprężeń zmiennych w czasie. Jeżeli nawet przyjmiemy, że czynnikami wyteżenia są wyłącznie naprężenia, to w rozważanym przypadku ilość tych czynników jest z reguły znacznie większa niż w przypadku naprężeń stałych w czasie. Pewną ogólną analizę stanu naprężenia zmiennego w czasie podaje J. KOŹEŚNIK, [17].

Ograniczymy się do naprężeń sinusoidalnie zmiennych; wtedy, w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia, gdy

$$(2.4) \quad \sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t + \varphi),$$

czynnikami wyteżenia są: naprężenie średnie σ_m i amplituda σ_a (jeżeli są to istotnie wielkości niezależne); wpływ częstości ω jest raczej niewielki, a wpływ fazy φ zupełnie pomijalny. Powierzchnia graniczna będzie więc krzywą w układzie $\sigma_m \sigma_a$; krzywe takie są powszechnie stosowane w teorii zmęczenia materiałów i noszą nazwę wykresów zmęzeniowych Haigha. Wypada tu wspomnieć, że interpretacja dość rozpowszechnionych wykresów zmęzeniowych Smitha jako krzywych gra-

nicznych byłaby raczej sztuczna. Jest to jeszcze jedna zaleta wykresów Haigha w stosunku do często krytykowanych tradycyjnych wykresów Smitha, [23].

W przypadku płaskiego zmiennego w czasie stanu naprężenia będziemy mieli z reguły cztery, w przypadku przestrzennego stanu naprężenia — sześć czynników wyteżenia. Ilość ta może być nawet większa, gdy poszczególne naprężenia główne zmieniają się z różną częstością ω lub różną fazą φ . Zwłaszcza faza φ wydaje się tu odgrywać istotną rolę, zmiana jej może w sposób zasadniczy wpływać na rodzaj pracy elementu. Przedstawienie powierzchni granicznej w tak dużej ilości wymiarów stwarza pewne trudności; w literaturze można spotkać z reguły niektóre przekroje tych powierzchni: np $\sigma_{1m} = \sigma_{2m} = 0$ lub $\sigma_m = \tau_m = 0$ (cykle symetryczne, S. W. SERENSEN i inni, [41,]) lub ogólniejsze, $\sigma_m = \text{const}$, $\tau_m = \text{const}$ (S. D. PONOMARIEW i inni, [35]).

Interesujące przykłady różnych «ścieżek» w przestrzeni czynników wyteżenia w przypadku zmiennego w czasie stanu naprężenia podają S. D. PONOMARIEW i inni, [35]. Zastosowany tam sposób obliczania współczynnika bezpieczeństwa odpowiada pewnemu szczególnemu przypadkowi zaproponowanego przez autora ogólnego sposobu obliczania wyteżenia materiału w oparciu o powierzchnię graniczną w wielowymiarowej przestrzeni czynników wyteżenia, [51] i [52].

2.3. Powierzchnia graniczna odpowiadająca parabolicznej hipotezie Mohra. Myśl posługiwania się przestrzenią naprężeń głównych można znaleźć już w pracach H. HERTZA (por. W. BURZYŃSKI [1]). Od czasu wprowadzenia jej przez B. T. HAIGHA i H. M. WESTERGAARDA do teorii wyteżenia sposób przedstawienia poszczególnych hipotez przynajmniej w tej przestrzeni szybko się rozpowszechnił. Jedynie chyba hipoteza Mohra i hipotezy pokrewne związane są z teorią obwiedni w układzie $\sigma\tau$. Znane są sposoby przechodzenia od jednej interpretacji do drugiej (W. BURZYŃSKI, [1], M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ, [4]) i często uważa się, że obie te interpretacje są równoważne. Okazuje się jednak, że przedstawienie hipotez wyteżenia tylko za pomocą obwiedni kryje w sobie pewne niebezpieczeństwo błędnego sformułowania równania samej hipotezy.

Hipotezę O. MOHRA, jakkolwiek bywa bardzo ostro krytykowana, [1] i [13], wciąż jeszcze można spotkać w różnych pracach, przynajmniej jako punkt wyjścia przy formułowaniu innych hipotez (M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ, [4], C. TORRE, [45]). Zwrócimy uwagę na fakt, iż powierzchnia graniczna przy przyjęciu obwiedni w płaszczyźnie $\sigma\tau$ w postaci paraboli drugiego stopnia, najczęściej stosowanej, posiada kształt bardziej skomplikowany niż się to zazwyczaj sądzi.

Założmy, że równaniem obwiedni jest

$$(2.5) \quad \tau = c_1 \sqrt{c_2 - \sigma};$$

równaniu temu odpowiada w układzie $\sigma_I \sigma_{III}$ parabola (por. np. W. BURZYŃSKI, [1], M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ, [4])

$$(2.6) \quad (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + 2c_1^2(\sigma_I + \sigma_{III}) = 4c_1^2 c_2 - c_1^4,$$

gdzie dla naprężeń głównych zastosowano wskaźniki rzymskie, aby zaznaczyć uszeregowanie $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$. Z warunków $\sigma_I = K_r$ dla $\sigma_{III} = 0$ (czyste rozciąganie) i $\sigma_I = 0$ dla $\sigma_{III} = -K_c$ (czyste ściskanie), otrzymuje się znane równanie

$$(2.7) \quad (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\kappa - 1)(\sigma_I + \sigma_{III})K_r - \kappa K_r^2 = 0,$$

gdzie K_r i K_c oznaczają w sposób ogólny granice niebezpieczne przy rozciąganiu i ścisaniu oraz

$$(2.8) \quad \kappa = \frac{K_c}{K_r}$$

(z reguły $\kappa \geq 1$). By przejść do układu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ należy rozpatrzyć wszelkie możliwe kombinacje uszeregowania naprężeń głównych; ostatecznie otrzymuje się powierzchnię, którą W. BURZYŃSKI, [1] nazwał piramidą paraboliczną. Przekroje tej powierzchni płaszczyznami $\sigma_m = \text{const}$ (stała wartość średniego naprężenia normalnego) są na ogół krzywoliniowymi sześciokątami, których kontur złożony jest z sześciu łuków paraboli.

Okazuje się jednak, że równanie (2.7) posiada charakter nieogólny. Po pierwsze, największej możliwej wartości σ_I , mianowicie

$$(2.9) \quad \sigma_{I_{max}} = c_2 = \frac{(1+\kappa)^2}{8(\kappa-1)} K_r,$$

odpowiada

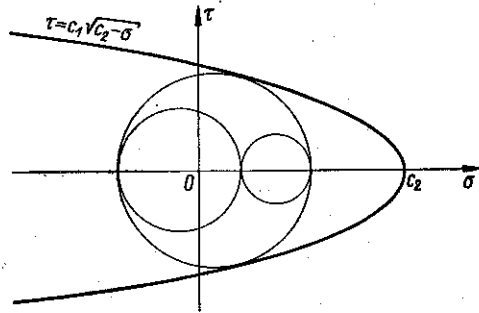
$$(2.10) \quad \sigma_{III} = \frac{(3\kappa-1)(3-\kappa)}{8(\kappa-1)} K_r;$$

większe wartości σ_{III} , a zatem stany zbliżone do wszechstronnego równomiernego rozciągania, możliwe są tylko przez styczność wielkiego koła Mohra do obwiedni w punkcie $\sigma_I = \sigma_{I_{max}}$ (A. LEON, [19]), co powoduje «nasadzenie» na wierzchołek wspomnianej piramidy parabolicznej pewnej części trójściennego ostrosłupa Galileusza. Druga, jeszcze ważniejsza zmiana zajść musi w ważnym technicznie przypadku $\kappa > 3$; wtedy wartość σ_{III} , określona wzorem (2.10), jest ujemna i przypadek jednoosiowego rozciągania może być odwzorowany jedynie kołem Mohra stycznym do paraboli w punkcie $\sigma_I = \sigma_{I_{max}}$. Istotnie, łatwo się przekonać, że wtedy równanie (2.7) nie spełnia wymaganych warunków odnośnie styczności odpowiednich kół do obwiedni. Należy wtedy przyjąć

$$(2.11) \quad \sigma_{I_{max}} = c_2 = K_r$$

i po wykorzystaniu warunku dla jednoosiowego ściskania równanie paraboli w układzie σ_I, σ_{III} przybiera postać

$$(2.12) \quad (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + 2(\sqrt{1+\kappa} - 1)^2(\sigma_I + \sigma_{III})K_r - (4\sqrt{1+\kappa} - 4 - \kappa)K_r^2 = 0.$$



Rys. 4

Ma ona zastosowanie dla

$$(2.13) \quad \sigma_{III} \leq -(1 + \kappa - 2\sqrt{1 + \kappa})K_r,$$

natomiast dla $-(1 + \kappa - 2\sqrt{1 + \kappa})K_r < \sigma_{III} < K_r$ mamy $\sigma_I = K_r$, co odpowiada styczności między wielkim kołem Mohra i paraboliczną obwiednią w punkcie $\sigma_I = K_r$. Tak więc powierzchnia graniczna zbudowana w oparciu o stosunkowo proste równanie obwiedni (2.5) posiada postać dość złożoną. Jednak właśnie analiza odpowiedniej powierzchni granicznej ułatwiła nam ustalenie zakresu stosowności równania (2.7) i wyprowadzenie równań, odpowiadających hipotezie Mohra w przypadku $\kappa > 3$.

2.4. W sprawie trzeciego niezmiennika stanu naprężenia lub odkształcenia. Wykorzystywanie niezmienników stanu naprężenia lub stanu odkształcenia w teorii wyteżenia datuje się już niemal od stu lat. Istotnie, z definicji wyteżenia wynika jego niezmienniczość z uwagi na przyjęcie układu współrzędnych, zatem może ono być tylko funkcją niezmienników. Własność ta uwidacznia się szczególnie w przypadku ciał izotropowych, bowiem wtedy wyteżenie jest funkcją niezmienników symetrycznych.

Jak wiadomo, spośród wszystkich niezmienników tensora drugiego rzędu tylko trzy mogą być niezależne. Klasyczne niezmienniki, które będziemy ogólnie oznaczać przez J_1 , J_2 i J_3 , nie są tu zbyt dogodne. Już M. LEVY, [20], posługuje się naprężeniem średnim σ_m oraz innymi niezmiennikami, które noszą obecnie nazwę niezmienników dewiatora (naprężenia lub odkształcenia), J_{2D} oraz J_{3D} . Mamy mianowicie, w przypadku stanu naprężenia i w odniesieniu do kierunków głównych,

$$(2.14) \quad J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

oraz

$$(2.15) \quad \begin{cases} \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \\ J_{2D} = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_m) \\ J_{3D} = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m). \end{cases}$$

Niezmiennik J_{2D} odgrywa zasadniczą rolę w teorii plastyczności stanowiąc podstawę energetycznych warunków plastyczności.

Wiele uwagi znaczeniu niezmienników w teorii wyteżenia poświęcił W. BURZYŃSKI, [1] i [2]. Zaproponowana przez niego hipoteza, która była później formułowana na nowo w tym samym brzmieniu przez wielu innych autorów (por. [51]), proponuje jako równanie stanu niebezpiecznego pewien związek pomiędzy σ_m i J_{2D} . Trzeci niezmiennik stanu naprężenia traktowany był raczej marginesowo. Okazuje się, że zarówno trzeci niezmiennik J_3 jak i J_{3D} są do analizy wyteżenia niedogodne. Tak np. warunek plastyczności Treski -Guesta, zapisany za pomocą niezmienników dewiatora stanu naprężenia, posiada dość złożoną postać

$$(2.16) \quad 4J_{2D}^3 + 27J_{3D}^2 + 36k^2J_{2D}^2 + 96k^4J_{2D} + 64k^6 = 0,$$

przy czym k oznacza granicę plastyczności przy ścinaniu. Równanie to można znaleźć już w pracy M. LEVY'EGO, [20], ale w tej formie nie było dotychczas wykorzystywane. Niezmiennikiem J_{3D} posługują się na przykład R. HILL, [11], oraz W. PRAGER i P. G. HODGE, [36], jednak w sposób ogólny bez podania jakichkolwiek zastosowań.

Wydaje się, że z uwagi na zastosowanie w teorii wyteżenia korzystne jest posługiwanie się pewnym innym trzecim niezmiennikiem stanu naprężenia lub stanu odkształcenia. Wprowadzenie takiego niezmiennika związane jest właśnie z interpretacją hipotez wyteżenia jako pewnych powierzchni w przestrzeni naprężeń lub odkształceń. Szczególnie korzystny jest tu mianowicie niezmiennik ω wprowadzony wzorami

$$(2.17) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_i \cos \omega, \\ \sigma_2 = \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right), \\ \sigma_3 = \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \end{cases}$$

lub podobnymi, różniącymi się w sposób nieistotny (w stosunku do kąta ω wprowadzonego w pracy [51] różnica wynosi $\pi/6$, przy czym zamieniono wskaźniki 2 i 3, co powoduje «zmianę skrętności układu»; wzory (2.17) są jednak wygodniejsze z uwagi na interpretację znaną z teorii równań algebraicznych trzeciego stopnia). Jeżeli $0 \leq \omega \leq \pi/3$, to wtedy $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; znajomość takiego uporządkowania jest bardzo ważna w przypadku niektórych hipotez wyteżeniowych. Wielkość σ_i jest tu intensywnością naprężeń, równą $\sigma_i = \sqrt{-3J_{2D}}$.

Niezmiennik ω posiada szereg interpretacji i wykazuje wiele korzyści w stosunku do J_3 lub J_{3D} . W. W. SOKOŁOWSKI, [43], wykorzystuje go przede wszystkim do sparametryzowania warunku plastyczności dla przestrzennego lub płaskiego stanu naprężenia, przy czym w niektórych przypadkach parametryzacja ta upraszcza efektywne rozwiązanie problemu; T. PEŁCZYŃSKI, [32], zwraca uwagę na związek tego niezmiennika z teorią rozwiązywania równań algebraicznych trzeciego stopnia, a stosowane w pracy [32] «gwiazdy naprężeń» nasuwają pewną analogię z elektrotechniką prądów trójfazowych; J. MURZEWSKI, [25], interpretuje go jako współrzędną w walcowym układzie odniesienia w przestrzeni naprężeń, co dla naszych celów jest szczególnie cenne (pozostałymi współrzędnymi są wtedy $\sigma_m \sqrt{3}$ i $\sqrt{2/3} \sigma_i$). W zakresie liniowo sprężystym dla ciała izotropowego zachodzi pomiędzy wprowadzonym za pomocą wzorów (2.17) niezmiennikiem stanu naprężenia a analogicznym niezmiennikiem stanu odkształcenia prosty związek $\omega_\sigma = \omega_\epsilon$; równość tę postuluje się często również dla zakresu niesprężystego. Szereg nowych hipotez wyteżeniowych posługuje się niezmiennikiem ω lub podobnym (np. J. MAJER, [21], M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ, [4], J. MURZEWSKI, [25], i inni).

Za najkorzystniejsze trzy niezmienniki stanu naprężenia można więc przyjąć σ_m , σ_i oraz ω . Znajomość tych niezmienników umożliwia bezpośrednio obliczenie naprężeń głównych, (2.17), czego nie można bezpośrednio uzyskać przy innym doborze niezmienników. Zastąpienie jednego układu niezmienników przez drugi nie sprawia zasadniczych trudności; odpowiednie wzory zestawione zostały w tabelicy 1.

Zwróćmy uwagę na wzór określający $\cos 3\omega$; wyrażając tę wielkość jako funkcję składowych stanu naprężenia otrzymujemy

$$(2.18) \quad \cos 3\omega = \frac{27(\sigma_x - \sigma_m)(\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) + 2\tau_{xy}^2\tau_{yz}^2\tau_{zx}^2 - (\sigma_x - \sigma_m)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_m)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma_m)\tau_{xy}^2}{2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{3/2}}$$

Wzór ten łącznie ze wzorami (2.17) pozwala obliczyć naprężenia główne jako funkcję składowych stanu naprężenia. Oczywiście, nie stanowi on nic nowego w stosunku do wzorów Cardana na pierwiastki równania trzeciego stopnia; jest tylko wykorzystaniem tych wzorów do przypadku analizy stanu naprężenia i uwydatnia znalezienie niezmiennika ω .

Dla przykładu podamy jeszcze postać ogólną warunku plastyczności w oparciu o hipotezę największych naprężeń stycznych, wyrażony za pomocą niezmienników σ_m , σ_i i ω . Korzystając ze wzorów podanych w tabelicy 1 napiszemy najpierw równanie (2.16) w postaci

$$(2.19) \quad \frac{4}{27}\sigma_i^6 \sin^2 3\omega - (Q^2 - \sigma_i^2)^2 Q^2 = 0,$$

gdzie oznaczono $Q = 2k$. Wyciągnięcie pierwiastka z równania (2.19) wymagałoby wprowadzenia znaku wartości bezwzględnej. Dogodniejszy wzór uzyskujemy przez podstawienie $\sin^2 3\omega = (1 - \cos 6\omega)/2$, wtedy ostatecznie

$$(2.20) \quad \cos 6\omega = 1 - \frac{27(Q^2 - \sigma_i^2)^2 Q^2}{2\sigma_i^6}.$$

Wzór ten zwraca uwagę na sześciokrotną symetrię rozpatrywanej powierzchni granicznej i jest znacznie bardziej przejrzysty od wzoru (2.16).

3. Powierzchnie graniczne dla przekroju płyty lub powłoki

Na drodze do analizy wyciężenia pewnego elementu czy pewnej konstrukcji jako całości zatrzymamy się na dwóch etapach pośrednich. Będą one obejmowały analizę stanów niebezpiecznych (granicznych) dla pewnego ustalonego przekroju elementu o ile ten można traktować (pod pewnymi względami) jako jednowymiarowy (pręt, belka) lub dwuwymiarowy (płyta, membrana, powłoka). W kolejności zajmiemy się najpierw przekrojem płyty lub powłoki, które łącznie będziemy nazywali dźwigarami powierzchniowymi, ponieważ jest on właściwie pewnym odcinkiem (prostopadłym do powierzchni środkowej), a dopiero później weźmiemy pod uwagę

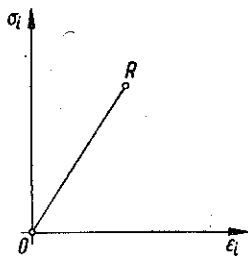
Tablica 1. Zestawienie zależności między różnymi niezmiennikami stanu naprężenia

	J_1, J_2, J_3	σ_m, J_{2D}, J_{3D}	$\sigma_m, \sigma_i, \omega$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
$J_1 =$	J_1	$3\sigma_m$	$3\sigma_m$	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
$J_2 =$	J_2	$J_{2D} + 3\sigma_m^2$	$3\sigma_m^2 - \frac{1}{3}\sigma_i^2$	$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$
$J_3 =$	J_3	$J_{3D} + \sigma_m J_{2D} + \sigma_m^3$	$\frac{2}{27}\sigma_i^2 \cos 3\omega - \frac{1}{3}\sigma_m \sigma_i^2 + \sigma_m^3$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
$\sigma_m =$	$\frac{1}{3}J_1$	σ_m	σ_m	$\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$
$J_{2D} =$	$J_2 - \frac{1}{3}J_1^2$	J_{2D}	$-\frac{1}{3}\sigma_i^2$	$-\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$
$J_{3D} =$	$J_3 - \frac{1}{3}J_1J_2 + \frac{2}{27}J_1^3$	J_{3D}	$\frac{2}{27}\sigma_i^2 \cos 3\omega$	$\frac{4}{9}\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \frac{1}{9}(\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1^2) +$ $+\frac{2}{27}(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3)$
$\sigma_m =$	$\frac{1}{3}J_1$	σ_m	σ_m	$\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$
$\sigma_i =$	$\sqrt{J_1^2 - 3J_2}$	$\sqrt{-3J_{2D}}$	σ_i	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$
$\cos 3\omega =$	$\frac{27J_3 - 9J_1J_2 + 2J_1^3}{2(J_1^2 - 3J_2)^{3/2}}$	$\frac{J_{3D}}{2\sqrt{-\left(\frac{J_{2D}}{3}\right)^3}}$	$\cos 3\omega$	$\frac{12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3(\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1^2) + 2(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)}$
$\sigma_1 =$	—	—	$\sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_i \cos \omega$	σ_1
$\sigma_2 =$	—	—	$\sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_i \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right)$	σ_2
$\sigma_3 =$	—	—	$\sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_i \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$	σ_3

przekrój pręta, posiadający dwa wymiary, co w pewnym stopniu komplikuje zagadnienie (zależność powierzchni granicznej od kształtu przekroju, która nie występuje w przypadku przekroju dźwigara powierzchniowego).

Najpierw rozszerzymy pojęcie stanu granicznego. Zazwyczaj pojęciem tym określa się stan, odpowiadający plastycznemu wyczerpaniu nośności przekroju lub całej konstrukcji, więc pod tę szeroką nazwę podciąga się pojęcie dość wąskie. Istotnie, analiza tego stanu jest chyba najważniejsza z punktu widzenia zastosowań. Dla naszych celów ogólnej analizy wyteżenia korzystna byłaby całkowita zmiana tej terminologii, aby pod szeroką nazwą podciągnąć odpowiednio szerokie pojęcie; chcąc jednak pozostać możliwie w zgodzie z nazwami tradycyjnymi rozszerzymy jedynie pojęcie stanu granicznego na każdy stan rozgraniczający dwie sąsiednie fazy pracy przekroju lub konstrukcji (granica między fazą sprężystą a uplastycznieniem jednostronnym, między uplastycznieniem jednostronnym a dwustronnym itp.), a jeżeli zajdzie konieczność specjalnego wyodrębnienia, to stan odpowiadający plastycznemu wyczerpaniu nośności przekroju lub konstrukcji nazwiemy stanem nośności granicznej.

Ilość stanów granicznych np. dla przekroju dźwigara powierzchniowego będzie więc na ogół znacznie większa niż odpowiednia ilość stanów granicznych (granic niebezpiecznych) dla wyteżenia materiału w punkcie. Jedynie w wyjątkowych przypadkach ilość ta będzie się pokrywać. Tak np. gdy materiał elementu posiada wykres rozciągania przedstawiony na rys. 5 (materiał taki będziemy nazywali materiałem liniowo sprężystym o ograniczonej wytrzymałości), to istnieje tylko jedna powierzchnia graniczna dla wyteżenia materiału w dowolnym punkcie, jedna powierzchnia



Rys. 5

graniczna dla dowolnego przekroju i jedna dla konstrukcji jako całości; budowanie tej powierzchni związane jest jedynie z poszukiwaniem kresów górnych pewnej funkcji jednej, dwóch lub trzech zmiennych przestrzennych (mianowicie naprężenia zastępczego). Jednak już dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego, nawet o ograniczonej «platformie plastyczności», sprawa przedstawia się z reguły zupełnie inaczej. W przestrzeni naprężeń istnieje tylko jedna powierzchnia graniczna dla wyteżenia materiału w punkcie (odnosząca się do granicy plastyczności, utożsamionej

tu z granicą sprężystości i — pod względem wielkości naprężeń — z granicą wytrzymałości), natomiast ilość powierzchni granicznych np. w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych dla przekroju dźwigara powierzchniowego może być bardzo duża. Będą to kolejno powierzchnie, odnoszące się do pojawienia się pierwszego punktu uplastycznionego (odpowiedni stan bywa czasem zwany nośnością sprężystą), do pojawienia się uplastycznienia po drugiej stronie przekroju (np. przy zginaniu z udziałem sił podłużnych), wewnątrz przekroju (wpływ sił poprzecznych), wreszcie do pełnego uplastycznienia, czyli wyczerpania nośności przekroju. Oczywiście ilość tych powierzchni może być różna zależnie od rodzaju obciążeń.

Każdy z wymienionych stanów może w pewnych przypadkach zasługiwać na mimo stanu niebezpiecznego, np. w przypadku płyty żelbetowej na ogół bardziej niebezpieczne będzie pojawienie się naprężeń rozciągających w betonie, niż uprzednie uplastycznienie po stronie ściskania.

Rzeczą pierwszorzędnej wagi jest, jak zwykle, ustalenie czynników wyężenia, a więc wielkości istotnie niezależnych. Dotychczas większość powierzchni granicznych, odnoszących się do przekroju dźwigara powierzchniowego, budowano dla uzyskania dogodnego narzędzia teorii plastyczności takich ustrojów. Budowano je w przestrzeni tak zwanych wewnętrznych sił uogólnionych, mianowicie dwóch momentów gnących (liczonych na jednostkę długości przekroju) o wektorach wzajemnie prostopadłych M_x i M_y , dwóch sił podłużnych wzajemnie prostopadłych N_x i N_y , dwóch sił stycznych T_{xy} i T_{yx} , dwóch sił poprzecznych T_x i T_y i dwóch momentów skręcających M_{xy} i M_{yx} . Ogólny przypadek odpowiadałby więc przestrzeni dziesięciowymiarowej. Przy pominięciu wpływu krzywizny powłoki (a więc oczywiście również dla płyty) mamy $T_{xy} = T_{yx}$ oraz $M_{xy} = M_{yx}$ i ilość wymiarów redukuje się do ośmiu; jeżeli wpływ sił poprzecznych można pominąć, to dochodzimy do przestrzeni sześciowymiarowej. W dalszym przypadku szczególnym symetrii obciążenia i samego elementu mamy $M_{xy} = T_{xy} = 0$ i ilość wymiarów redukuje się do czterech. Równania powierzchni granicznych dla pełnego uplastycznienia przekroju dźwigara powierzchniowego można znaleźć w pracach A. A. ILIUSZINA, [14], D. C. DRUCKERA [3], E. T. ONATA, [30], W. W. ROZDIESTWIENSKIEGO, [37], P. G. HODGE'A, [12], M. SZ. MIKIEŁADZEGO, [22], A. SAWCZUKA, [39], oraz A. SAWCZUKA i J. RYCHLEWSKIEGO, [40]. Przypadek powłok «technicznie ortotropowych» rozpatrywał Z. MRÓZ, [24]. Wpływ ściśliwości na stany graniczne przekroju płyty przy czystym zginaniu zbadano w pracy autora [50].

Budowanie powierzchni granicznych w przestrzeniach wewnętrznych sił uogólnionych przynosi pewne korzyści, na przykład zezwala na interpretację energetyczną. Na tej drodze H. ZIEGLER, [47], dowodzi, że powierzchnie te muszą być wypukłe, jeżeli powierzchnie graniczne odnoszące się do poszczególnych punktów przekroju są wypukłe. Jednak nie zawsze siły wewnętrzne są wielkościami niezależnymi, a więc czynnikami wyężenia; wielkościami niezależnymi mogą być np. uogólnione odkształcenia (krzywizny, wydłużenia itp.) lub jeden lub kilka parametrów, charakteryzujących rozkład temperatury. Należy pamiętać, że przy posługiwaniu się innymi czynnikami wyężenia (po za siłami wewnętrznymi), niektóre twierdzenia, np. o wypukłości powierzchni granicznej, mogą już się nie stosować.

W badaniach doświadczalnych staramy się właśnie, aby czynnikami wyężenia były nie siły uogólnione, lecz raczej odkształcenia. Weźmy pod uwagę powłokę walcową, poddaną jednoczesnemu działaniu siły osiowej, momentu skręcającego i ciśnienia wewnętrznego. Próba taka jest jednym z klasycznych doświadczeń mechaniki ciał niesprężystych. Jeżeli przyjmiemy, że wydłużenie i kąt skręcenia uzyskujemy dzięki napędowi mechanicznemu, to czynniki wyężenia są tu wprost uogólnionymi odkształceniami, podobnie jak w zrywance o napędzie mechanicznym.

W przypadku napędu hydraulicznego czynnik niezależny (ilość skoków tłoka pompy) jest związany pewną funkcją zarówno z odkształceniami, jak i naprężeniami, jednak wpływ odkształceń jest przeważający. Szczególną uwagę zwrócimy na działanie ciśnienia wewnętrznego. Jeżeli ciśnienie to wywołane jest cieczą nieściśliwą, to oczywiście niezależnym parametrem jest ilość cieczy wewnątrz powłoki, a więc odkształcenie. W przypadku cieczy ściśliwej pewną rolę odgrywają również naprężenia (siły podłużne), ponieważ wpływają one na objętość cieczy, jednak dominującą rolę odgrywają nadal odkształcenia. Zupełnie inaczej przedstawia się zagadnienie, gdy ciśnienie wywołane jest za pomocą gazu: ciśnienie gazu jest praktycznie niezależne od niewielkich zmian objętości, zatem, praktycznie biorąc, czynnikiem wyteżenia jest tu siła podłużna (błonowa), równoważąca to ciśnienie. Układu takiego staramy się nie stosować, ponieważ jego zniszczenie miałoby charakter eksplozji, niebezpieczny dla otoczenia; tak więc staramy się raczej, by czynnikami wyteżenia były uogólnione odkształcenia lub wielkości zbliżone do odkształceń. Przykład ten jeszcze raz wskazuje na znaczenie właściwego doboru czynników wyteżenia: ten sam stan fizyczny powłoki może być dość daleki lub całkiem bliski stanu niebezpiecznego w zależności od tego, czy ciśnienie wywierane jest przy pomocy cieczy czy gazu, a więc jaki czynnik (odkształcenie czy naprężenie) jest istotnie niezależny.

4. Powierzchnie graniczne dla przekroju pręta

Większość uwag, uczynionych przy analizie powierzchni granicznych dla przekroju dźwigara powierzchniowego, odnosi się również do tego przypadku. Także i tu będziemy się posługiwać rozszerzonym pojęciem stanu granicznego i badać powierzchnie dla poszczególnych stanów granicznych.

Analiza wyteżenia przekroju pręta jest przede wszystkim o tyle ważna, że w przypadku statecznie wyznaczalnego sposobu zamocowania nośność sprężysta lub nośność graniczna przekroju niebezpiecznego jest równa odpowiedniej nośności całego pręta. Jest to więc przypadek bliższy analizie wyteżenia konstrukcji jako całości niż rozpatrywany poprzednio przypadek przekroju dźwigara powierzchniowego.

Najczęściej buduje się powierzchnie graniczne dla przekroju pręta w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych, których mamy tutaj sześć: dwa momenty gnące M_y i M_z , moment skręcający $M_s = M_x$, dwie siły poprzeczne T_y i T_z i siłę podłużną $N = N_x$. Jakkolwiek ilość ta jest mniejsza niż w przypadku dźwigara powierzchniowego, co zmniejsza ilość wymiarów przestrzeni czynników wyteżenia, to jednak dodatkową trudność powoduje uzależnienie powierzchni granicznej od kształtu przekroju pręta. Z pojęciem tym zasadniczo nie spotykamy się przy analizie przekroju płyty lub powłoki, chociaż istnieje i tam jeden wyjątek: czasem dla uproszczenia rozważa się płytę lub powłokę warstwową («sandwiczową»), której przekrój redukuje się teoretycznie z odcinka do dwóch skrajnych punktów (lub, ogólniej, skończonej ilości punktów), co zamienia operacje całkowite na dodawanie.

Trudno byłoby zamieścić tu dokładniejszy przegląd znanych powierzchni granicznych dla przekroju pręta, budowanych w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych. Dla żadnego kształtu przekroju nie podano dotychczas równania powierzchni granicznej w ogólnej, sześciowymiarowej przestrzeni sił wewnętrznych nie tylko z uwagi na nośność graniczną przekroju, lecz nawet z uwagi na nośność sprężystą, co jest problemem znacznie prostszym. Jedną z przyczyn jest fakt, iż najprostszy kształt przekroju z uwagi na jedną z sił wewnętrznych nie jest jednocześnie najprostszym przy innych siłach (np. przekrój kołowy jest dogodny przy analizie skręcania, ale stwarza pewne trudności przy analizie ścinania; przeciwnie jest z przekrojem prostokątnym). Wspomnimy jednak o bardzo ogólnej analizie A. A. GWOZDIEWA, [10], który podał przybliżony (wariacyjny) sposób określania powierzchni granicznej dla rury cienkościennej przy działaniu wszystkich sześciu sił wewnętrznych.

Znane powierzchnie graniczne z uwagi na nośność graniczną budowane są z reguły w przestrzeni o mniejszej ilości wymiarów, a więc z wyłączeniem wpływu niektórych sił wewnętrznych. Często ilość wymiarów redukuje się do dwóch, a wtedy powierzchnia graniczna przechodzi w krzywą graniczną. Równanie takiej krzywej dla jednoczesnego zginania i rozciągania pręta o przekroju prostokątnym podał K. GIRKMANN, [7]. Stan graniczny jednocześnie rozciąganego i skręcanego pręta o przekroju kołowym badał A. NÁDÁR, [26], ale ostatecznie równanie krzywej granicznej podano dopiero później, [38]. Krzywą graniczną dla jednocześnie zginanego i skręcanego pręta o przekroju kołowym podaje praca S. PIECHNIKA i M. ŻYCKOWSKIEGO, [34]. Przestrzenne powierzchnie graniczne dla jednoczesnego działania momentu gnącego, siły podłużnej i poprzecznej w przypadku przekroju prostokątnego i dwuteowego podali K. KLÖPPEL i M. YAMADÁ, [15]. Pewne ogólne rozwiązania, odnoszące się do jednoczesnego zginania i rozciągania prętów o różnych kształtach przekroju podali: M. ŻYCKOWSKI, [53], (metodą uogólnionych szeregów potęgowych) i J. ORKISZ, [31], (doborem zastępczego przekroju wielopunktowego).

Podobnie jak i w poprzednio rozważanych przypadkach nie zawsze siły wewnętrzne są czynnikami wyężenia. Powierzchnie graniczne powinny być budowane również w przestrzeni innych czynników wyężenia; powierzchnie graniczne dla jednocześnie rozciąganego i skręcanego pręta o przekroju kołowym w przestrzeni uogólnionych odkształceń zbadane zostały w pracy [48].

5. Powierzchnie graniczne dla konstrukcji jako całości

5.1. Uwagi ogólne. Zbudowanie powierzchni granicznej dla konstrukcji jako całości wiąże się z podstawowym problemem wytrzymałości materiałów, mianowicie z ustaleniem lub doбором współczynników bezpieczeństwa konstrukcji. Zazwyczaj uważa się, że współczynniki te można określić bez znajomości samej powierzchni granicznej; podejście takie odpowiada założeniu bądź proporcjonalnego wzrostu wszystkich czynników wyężenia, bądź proporcjonalnego wzrostu niektórych przy ustaleniu innych (np. temperatury). Jeżeli założenie to nie jest

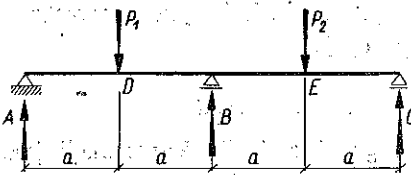
spełnione, to znajomość powierzchni granicznej lub przynajmniej pewnej jej części jest niezbędna.

Pewne uwagi dotyczące wyteżenia ciała jako całości można znaleźć w ostatnim rozdziale pracy W. BURZYŃSKIEGO, [1]. Autor wyraża przypuszczenie, iż pewną miarą wyteżenia całego ciała może być całkowita energia odkształcenia postaciowego tego ciała. Wydaje się jednak, iż przypuszczenie to nie zostało potwierdzone doświadczalnie: z jednej strony, w przypadku materiałów kruchych, wyteżenie całego ciała jest wyraźnie związane z wyteżeniem lokalnym i powierzchnia graniczna może tu być budowana w oparciu o kres górny (z uwagi na położenie punktu) stosownie obliczonego naprężenia zastępczego; z drugiej strony, w przypadku materiałów ciągliwych, oprócz powierzchni granicznej zbudowanej w analogiczny sposób często jeszcze poważniejsze znaczenie posiadać będzie powierzchnia zbudowana w oparciu o teorię plastyczności (powierzchnia nośności granicznej). Żadna z tych powierzchni nie ma na ogół nic wspólnego z energią odkształcenia postaciowego całego ciała.

W rozważanym obecnie przypadku ilość powierzchni granicznych może być jeszcze większa niż przy rozpatrywaniu analizy wyteżenia przekroju: dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego będą to powierzchnie odpowiadające początkowi uplastycznienia, pojawieniu się kolejnych dalszych obszarów uplastycznionych, pojawieniu się np. kolejnych przegubów plastycznych, wreszcie zniszczeniu. Może również wystąpić przypadek pojawienia się stref odciążenia. Ilość stref może być czasami zwiększona wskutek istnienia niejednorodności materiału: pewne rozważania na ten temat można znaleźć np. w pracy W. OLSZAKA i W. URBANOWSKIEGO, [29].

Czynnikami wyteżenia konstrukcji są często niezależnie działające siły zewnętrzne. Ilość tych sił może być bardzo duża, co odpowiadałoby dużej ilości wymiarów przestrzeni czynników wyteżenia, jednak w zastosowaniach praktycznych z reguły nie wszystkie działające siły są od siebie niezależne i w konsekwencji ilość wymiarów może ulec zmniejszeniu.

5.2. Przykład belki statycznie niewyznaczalnej. Jako prosty przykład weźmy pod uwagę belkę statycznie niewyznaczalną, przedstawioną na rys. 6. Przypuśćmy,



Rys. 6

że obie siły P_1 i P_2 są niezależne i mogą przyjmować wartości dodatnie lub ujemne, a belka wykonana jest z materiału idealnie sprężysto-plastycznego.

Dla określenia niebezpieczeństwa zniszczenia belki musimy wtedy znać całkowitą powierzchnię graniczną (krzywą graniczną) w płaszczyźnie $P_1 P_2$.

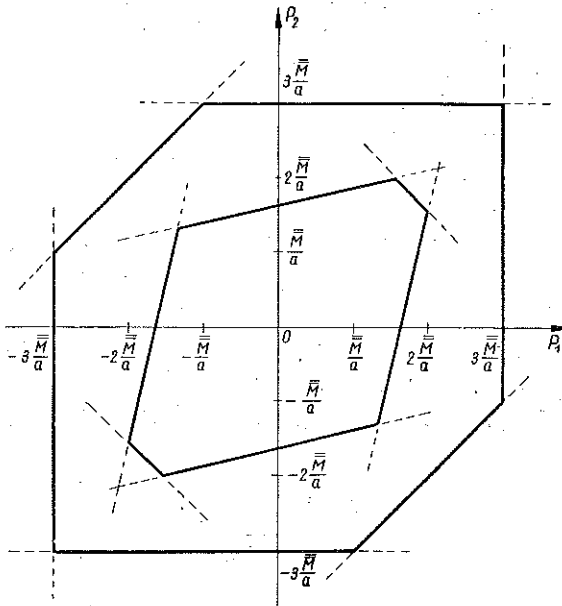
Zbudujemy dwie krzywe graniczne: ze względu na nośność sprężystą i ze względu na nośność graniczną. W zakresie sprężystym mamy

$$(5.1) \quad A = \frac{13}{32} P_1 - \frac{3}{32} P_2, \quad B = \frac{11}{16} (P_1 + P_2), \quad C = \frac{13}{32} P_2 - \frac{3}{32} P_1,$$

a momenty gnące w możliwych przekrojach niebezpiecznych wynoszą

$$(5.2) \quad M_D = \frac{a}{32}(13P_1 - 3P_2), \quad M_B = -\frac{3a}{16}(P_1 + P_2), \quad M_E = \frac{a}{32}(13P_2 - 3P_1).$$

Jeżeli oznaczymy moment odpowiadający początkowi uplastycznienia przez \bar{M} , mianowicie $\bar{M} = WQ$ (gdzie W jest wskaźnikiem zginania, czasem określanym dodatkowo przymiotnikiem «sprężystym»), to kreśląc sześć linii o równaniach $|M_D| = \bar{M}$, $|M_B| = \bar{M}$ i $|M_E| = \bar{M}$ i biorąc pod uwagę ich odcinki, leżące najbliżej początku układu P_1P_2 , otrzymujemy poszukiwaną krzywą graniczną. Krzywa ta jest sześciokątem (rys. 7).



Rys. 7

Przechodząc do zakresu plastycznego (nośność graniczna) musimy rozpatrzyć wszystkie możliwe schematy zniszczenia (będziemy tu korzystać z elementarnej teorii nośności granicznej belek). Zniszczenie samego tylko lewego przęsła odpowiada równaniu

$$(5.3) \quad P_1 = \pm 3 \frac{\bar{M}}{a},$$

(gdzie $\bar{M} = 2QS_{0,5}$ jest nośnością graniczną przekroju z uwagi na zginanie, $S_{0,5}$ momentem statycznym połowy przekroju względem osi środkowej). Podobnie zniszczenie samego tylko prawego przęsła odpowiada równaniu

$$(5.4) \quad P_2 = \pm 3 \frac{\bar{M}}{a}.$$

Wreszcie przypadek jednoczesnego utworzenia się przegubów pod oboma siłami (przy różnych zwrotach tych sił) odpowiada równaniu

$$(5.5) \quad P_1 - P_2 = \pm 4 \frac{\bar{M}}{a}.$$

Odpowiednią krzywą graniczną przedstawiono również na rys. 7; dla przykładu przyjęto $\bar{M} = 1,5 \bar{M}$, co odpowiada prostokątnemu przekrojowi belki.

Analiza krzywych granicznych, przedstawionych na rys. 7, pozwala wysnuć interesujące wnioski odnośnie pracy rozważanej belki. Okazuje się, że w przypadku $P_1 = -P_2$ lub $P_1 = 7P_2/9$ lub $P_1 = 9P_2/7$ różnice pomiędzy nośnością sprężystą i nośnością graniczną są najmniejsze; w przypadku $\bar{M} = \bar{M}$ (teoretyczny dwuteownik) maleją nawet do zera. Największe różnice odpowiadają natomiast przypadkom $P_1 = -3P_2$ oraz $P_1 = -P_2/3$.

Budowanie tego typu powierzchni granicznych nie stwarza na ogół poważniejszych trudności, chociaż w przypadku większej ilości niezależnie działających sił ilość koniecznych do zbadania przypadków szczególnie rośnie dość szybko.

5.3. Przykład rury grubościennej pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i temperatury. Siły zewnętrzne nie są oczywiście jedynymi czynnikami wyteżenia. Bardzo istotnym czynnikiem jest często temperatura. Dla przykładu rozważymy rurę grubościenną o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b pod działaniem ciśnienia wewnętrznego $p_w = p$ i nierównomiernego rozkładu temperatury. Przyjmijmy, że rura nie jest obciążona siłą osiową, a rozkład temperatury jest logarytmiczny

$$(5.6) \quad t(r) = \frac{t_w}{b} \ln \frac{b}{r},$$

co odpowiada ustalonemu przepływowi ciepła, oraz że różnice temperatury są tak nieznaczne, iż nie posiadają wpływu na wartość granicy plastyczności Q . Rozkład naprężeń w zakresie sprężystym jest wtedy dany wzorami, [5],

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{E a t}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[\ln \frac{b}{r} + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_\theta = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{E a t}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_z = \frac{E a t}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left(1 - 2 \ln \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right), \end{array} \right.$$

gdzie dla uproszczenia zapisu opuszczono wskaźnik przy oznaczeniu temperatury; α oznacza współczynnik rozszerzalności cieplnej. Będziemy poszukiwać powierzchni granicznej (krzywej granicznej) sprężystej, to znaczy odpowiadającej pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych. Przy założeniu, że materiał jest idealnie sprężysto-plastyczny i podlega hipotezie Hubera-Misesa-Hencky'ego, oznacza to osiągnięcie przez kres górny intensywności naprężeń σ_i wartości równej Q . Intensywność ta jest oczywiście funkcją promienia r : może ona osiągać swój kres górny na brzegu przedziału, a więc dla $r = a$ lub $r = b$, lub wewnątrz przedziału w miejscu odpowiadającym lokalnemu maksimum. Zbadamy jedynie brzegi przedziału oraz kilka punktów wewnętrznych bez dość żmudnego badania ekstremum; okazuje się zresztą, że w rozważanym przez nas przypadku ekstremum to nie będzie większe od wartości na brzegach przedziału.

Ograniczymy się do rury o stosunku promieni $a/b = 0,5$ i oznaczmy $r/b = \varrho$; wtedy

$$(5.8) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right) p - \frac{E\alpha t}{2(1-\nu)\ln 2} \left[-\ln \varrho + \frac{\ln 2}{3} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right) \right], \\ \sigma_\theta = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right) p + \frac{E\alpha t}{2(1-\nu)\ln 2} \left[1 + \ln \varrho - \frac{\ln 2}{3} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right) \right], \\ \sigma_z = \frac{E\alpha t}{2(1-\nu)\ln 2} \left(1 + 2 \ln \varrho - \frac{2}{3} \ln 2\right). \end{cases}$$

Wprowadzimy teraz bezwymiarowe czynniki wyężenia q i τ proporcjonalne do ciśnienia wewnętrznego p i temperatury $t = t_w$. Współczynniki dobierzemy tak, by $q = 1$ odpowiadało początkowi uplastycznienia wskutek samego tylko ciśnienia wewnętrznego, a $\tau = 1$ początkowi uplastycznienia wskutek działania samej różnicy temperatur. W obu przypadkach (oddzielnego działania q i τ) uplastycznienie rozpocznie się na wewnętrznym promieniu, zatem podstawiając $\varrho = 0,5$, $p = c_1 q$, $\tau = 0$ oraz $p = 0$, $t = c_2 \tau$ mamy

$$Q^2 = c_1^2 + \frac{25}{9} c_1^2 + \frac{5}{3} c_1^2,$$

$$Q^2 = \frac{E^2 \alpha^2 c_2^2}{4(1-\nu)^2 \ln^2 2} \left[\left(1 - \frac{8}{3} \ln 2\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{3} \ln 2\right)^2 - \left(1 - \frac{8}{3} \ln 2\right)^2 \right],$$

skąd ostatecznie

$$(5.9) \quad \begin{cases} c_1 = \frac{3}{7} Q, \\ c_2 = \frac{2(1-\nu)Q \ln 2}{E\alpha \left(1 - \frac{8}{3} \ln 2\right)} \end{cases}$$

oraz, gdy oznaczymy krótko

$$(5.10) \quad \begin{cases} \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right) = f_1 = f_1(\varrho), & \frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right) = f_3 = f_3(\varrho), \\ \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \ln 2} \left[\ln \varrho - \frac{\ln 2}{3} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right) \right] = f_2 = f_2(\varrho), \\ \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \ln 2} \left[1 + \ln \varrho - \frac{\ln 2}{3} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right) \right] = f_4 = f_4(\varrho), \end{cases}$$

to składowe stanu naprężenia przedstawimy wzorami

$$(5.11) \quad \sigma_r = (f_1 q + f_2 \tau) Q, \quad \sigma_\theta = (f_3 q + f_4 \tau) Q, \quad \sigma_z = (f_2 + f_4) \tau Q.$$

Podstawiając te wartości do wzoru określającego intensywność naprężeń otrzymujemy

$$(5.12) \quad \sigma_i^2 = [(f_1^2 + f_3^2 - f_1 f_3) q^2 + (f_2^2 + f_4^2 - f_2 f_4) \tau^2 + (f_1 f_2 + f_3 f_4 - 2 f_2 f_3 - 2 f_1 f_4) q \tau] Q^2.$$

Kresy górne (ze względu na ϱ) tej funkcji przyrównane do Q^2 wyznaczają poszukiwaną krzywą graniczną na płaszczyźnie $q\tau$. Funkcja σ_i^2 jest jednak dość złożoną funkcją zmiennej ϱ , natomiast przy ustalonym ϱ krzywa $\sigma_i = Q$ jest łatwą do zbadania elipsą w płaszczyźnie $q\tau$. Korzystniej jest w tym przypadku nakreślić kilka takich elips dla różnych ϱ ; obszar znajdujący się wewnątrz każdej z nich będzie obszarem bezpiecznym, a odcinki elips położone najbliżej początku układu (lub, ewentualnie, obwiednie) utworzą krzywą graniczną.

Pisząc równanie $\sigma_i^2 = Q^2$ w postaci

$$(5.13) \quad A_1 q^2 + A_2 \tau^2 + B q \tau = 1,$$

stwierdzamy, że elipsa jest obrócona w stosunku do osi układu o kąt

$$(5.14) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A_1 - A_2},$$

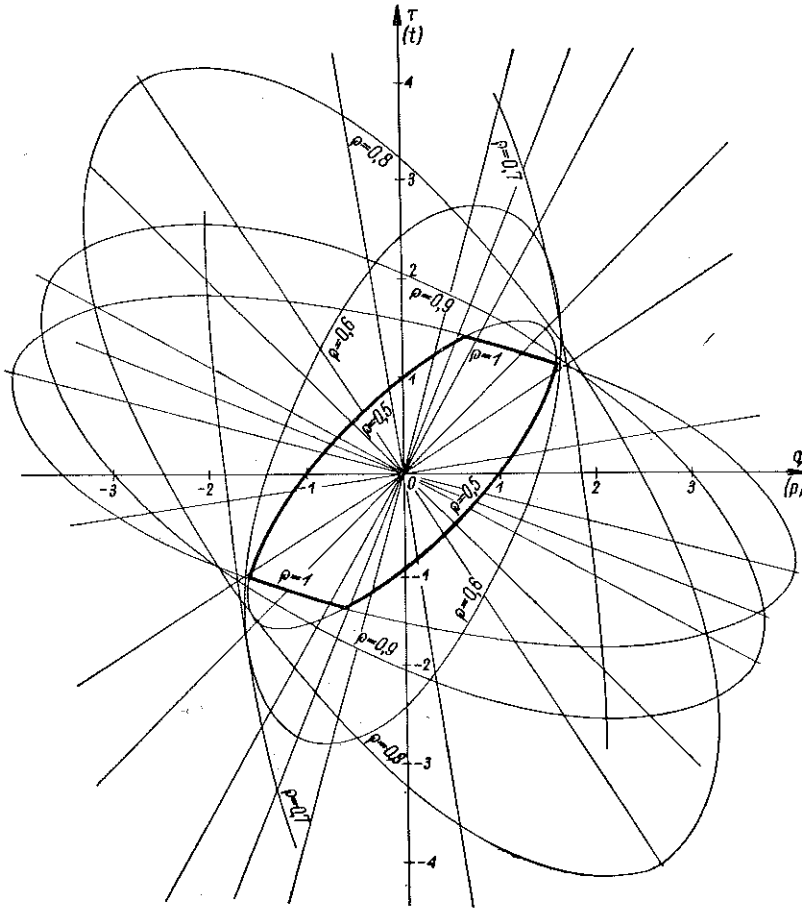
oraz, że jej półosie wynoszą

$$(5.15) \quad a, b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_1 + A_2 \pm \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + B^2}}}.$$

Elipsy takie dla $\varrho = 0,5, 0,6, \dots, 1,0$ przedstawiono na rys. 8. Krzywą graniczną jest zasadniczo elipsa dla $\varrho = 0,5$ (promień wewnętrzny), «ścięta» elipsą dla $\varrho = 1$; przy pewnym związku między temperaturą i ciśnieniem punkt zewnętrzny rury staje się punktem niebezpiecznym. Obwiednia w tym przypadku nie występuje.

Dopiero tak zbudowana powierzchnia graniczna daje nam pełny obraz pracy rury przy jednoczesnym działaniu ciśnienia wewnętrznego i różnicy temperatur.

Warto zwrócić uwagę na punkt, odpowiadający największemu ciśnieniu wewnętrznemu q . Korzyści zastosowania odpowiedniej temperatury były badane w pracy P.M. OGIBAŁOWA, [28], gdzie podwyższenie dopuszczalnego ciśnienia nazwano termofretażem. Przy przyjęciu hipotezy największych naprężeń stycznych stwierdził on możliwość optymalnego wykorzystania materiału rury, co oznacza przecięcie się wszystkich elips w tym samym punkcie. W naszym przypadku (hipotezy



Rys. 8

energetycznej) takie przecięcie się nie występuje, ale odległość poszczególnych elips od punktu przecięcia się elipsy $\rho = 0,5$ z elipsą $\rho = 1$ nie jest wielka. Interesująca jest również możliwość podwyższenia dopuszczalnej temperatury wewnętrznej wskutek zastosowania odpowiedniego ciśnienia; «przyrost wytrzymałości» jest tu wprawdzie mniejszy, ale również rzędu kilkudziesięciu procent.

5.4. Inne czynniki wyteżenia. Oprócz wymienionych już czynników wyteżenia istnieć może jeszcze wiele czynników często o zupełnie innym charakterze. Wymie-

nimy tu dla przykładu mimośród działania siły równoległej do osi pręta (w przypadku prętów smukłych wpływ tego czynnika może być bardzo duży) lub wilgotność elementu wykonanego z drewna. W przypadku obciążeń zmiennych w czasie będą grały rolę wartości średnie, amplituda, ewentualnie częstość i faza poszczególnych, np. niezależnie działających obciążeń. Niektóre czynniki posiadają istotny wpływ tylko przy niektórych typach obciążeń: tak na przykład niewielka krzywizna pierwotna pręta jest prawie bez znaczenia przy obciążeniu prostopadłym do jego osi, a może mieć poważne znaczenie przy obciążeniu osiowym.

Ze znanych powierzchni granicznych dla elementu jako całości wymienimy podaną przez W.W. SOKOŁOWSKIEGO, [43], krzywą graniczną (ściślej biorąc, część krzywej granicznej) dla rury grubościennej pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego i siły osiowej z uwagi na nośność graniczną tej rury oraz parametryczne równania podobnej powierzchni granicznej (w istocie również tylko części tej powierzchni) przy ogólnym kołowo-symetrycznym obciążeniu rury grubościennej w pięciowymiarowej przestrzeni czynników wyężenia, [49]. Kompletną krzywą graniczną dla tarczy pierścieniowej, obciążonej ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym, można znaleźć w pracy W. KRZYSIA i M. ŻYCKOWSKIEGO, [18].

6. Powierzchnie graniczne ze względu na stateczność konstrukcji

Osobno wyodrębnimy powierzchnie graniczne ze względu na utratę stateczności konstrukcji. Utratę stateczności utożsamia się często ze zniszczeniem konstrukcji, więc właściwie powierzchnie graniczne ze względu na utratę stateczności nie są niczym nowym w stosunku do dotychczas analizowanych powierzchni, jednak warto poświęcić im osobną uwagę w związku z tym, że sposób ich określania jest nieco odmienny.

Niezależnymi czynnikami powodującymi utratę stateczności są z reguły siły zewnętrzne w sensie uogólnionym (momenty, obciążenia ciągłe itp.), choć mogą istnieć również inne czynniki, np. temperatura. Jeżeli utratę stateczności wywołuje tylko jeden rodzaj obciążenia, to oczywiście powierzchnia graniczna redukuje się do punktu i nie jest dla nas interesująca; poświęćmy więc uwagę utracie stateczności w przypadku jednoczesnego działania kilku typów obciążeń.

Istnieje wiele prac poświęconych obliczaniu stateczności prętów obciążonych kilkoma siłami. Wyniki ich zebrane są jednak w postaci nie podającej bezpośrednio powierzchni lub krzywej granicznej: najczęściej podaje się np. wartości $(P_1 + P_2)_k$ jako funkcji P_1/P_2 (rozwiązania odpowiedniego równania przestępnego). Podejście takie wydaje się z góry narzucać pewien stosunek P_1/P_2 , który jednak w praktyce nie zawsze jest ustalony. Znajomość wartości krytycznych typu $(P_1 + P_2)_k$ pozwala jednakże na zbudowanie bez specjalnych trudności odpowiedniej krzywej lub powierzchni granicznej lub choćby jej części. Dla przykładu podano na rys. 9 jedną ćwiartkę krzywej granicznej dla pręta jednostronnie utwierdzonego obciążonego siłą osiową P_1 na swobodnym końcu i siłą osiową P_2 w połowie długości; odpowiednie wartości $(P_1 + P_2)_k$ jako funkcji P_1/P_2 zaczerpnięto z monografii S. D. PO-

NOMARIEWA i innych, [35]. Zebrane w odpowiedniej tablicy tej pracy wartości sił krytycznych nie zezwalają na naszkicowanie krzywej granicznej w pozostałych ćwiartkach płaszczyzny $P_1 P_2$.

Przedstawiona na rys. 9 część krzywej granicznej nieznacznie odbiega od odcinka linii prostej, łączącej odpowiednie punkty na osiach układu, jednak położona jest nieco powyżej tej prostej. Fakt ten związany jest z oszacowaniem i jednocześnie wzorem przybliżonym DUNKERLY'EGO, [33], określającym płat powierzchni granicznej pomiędzy osiami układu, na których odcięto wartości poszczególnych sił krytycznych działających z osobna, P_{ik} , za pomocą następującego wzoru przybliżonego:

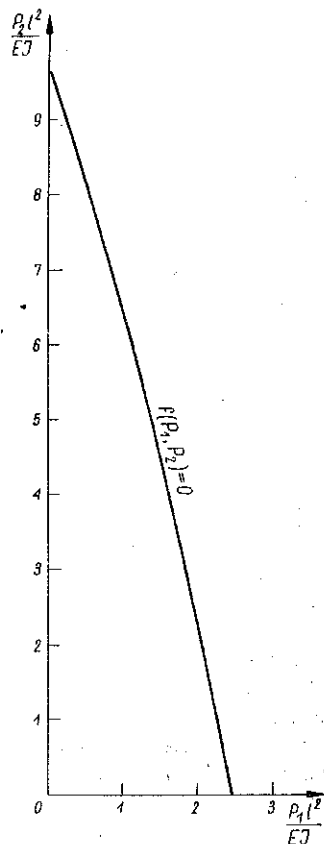
$$(6.1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{ik}} = 1.$$

Wzór ten daje błędy przez niedomiar (na korzyść bezpieczeństwa): ścisłe wartości krytyczne P_i odpowiadające założonym stosunkom tych sił są niemniejsze od spełniających równanie (6.1). Równanie DUNKERLY'EGO określa pewną hyperpłaszczyznę w przestrzeni obciążeń krytycznych, posiada więc postać stosunkowo bardzo prostą: jego dokładność nie zawsze jest jednak zadawalająca.

Znane są niektóre ścisłe równania powierzchni granicznych odpowiadających utracie stateczności pod obciążeniami złożonymi. Pierwszy prawdopodobnie przypadek złożony rozwiązał A. GREENHILL, [9]; wyprowadzone przez niego równanie krzywej granicznej dla jednoczesnego ściskania i skręcania dwuprzegubowego wału o przekroju kołowym jest równaniem paraboli. Podobny problem dla prętów o innych kształtach przekroju i innych rodzajach zamocowania końców badali R. GRAMMEL, [8], E. L.

NIKOLAI i wielu innych badaczy. Warto również wspomnieć pracę I. E. SZASZKOWA, [44], który poprawił i uzupełnił rozwiązanie GRAMMELA, podając krzywe graniczne dla różnych stosunków głównych momentów bezwładności przekroju pręta. Powierzchnię graniczną dla jednoczesnego zginania ukośnego, ściskania i skręcania pręta zbadał bardzo szczegółowo J. NALESZKIEWICZ, [27]; rozważany problem odpowiada czterowymiarowej przestrzeni czynników wyężenia, więc praca [27] podaje tylko kilka trójwymiarowych przekrojów odpowiedniej powierzchni.

Szczególnie ważne są przypadki obciążeń złożonych i powierzchni granicznych w teorii stateczności płyt i powłok. Wiele takich powierzchni granicznych a najczęść-



Rys. 9

ciej krzywych granicznych podają monografie, np. [16] i [46]. W niektórych bardziej złożonych przypadkach zaleca się stosować przybliżony wzór DUNKERLY'EGO (6.1).

Wypada zaznaczyć, że powierzchnia graniczna zbudowana jedynie w odniesieniu do stateczności elementu musi z reguły być uzupełniona przez pewne inne warunki wytrzymałościowe, na przykład przy poddaniu pręta jednoczesnemu działaniu siły osiowej i momentu skręcającego warunek wytrzymałościowy daje ograniczenie powierzchni po stronie rozciągania.

7. Uwagi końcowe

Celem pracy było zwrócenie uwagi na ogólność pojęcia powierzchni granicznej, podkreślenie znaczenia konstrukcji powierzchni granicznych i doboru właściwych, istotnie niezależnych czynników wyteżenia. Znajomość powierzchni granicznej zezwala na najlepszą orientację co do charakteru pracy konstrukcji i najwłaściwszą ocenę współczynnika bezpieczeństwa, uzależnioną od przewidywanej «drogi» w przestrzeni czynników wyteżenia. Samo pojęcie wyteżenia konstrukcji może być wprowadzone wzorem analogicznym do zaproponowanego w pracy [51] dla wyteżenia materiału w punkcie. Do wprowadzenia takiego wzoru niezbędna jest właśnie znajomość odpowiedniej powierzchni granicznej. Analiza wyteżenia przekroju i konstrukcji będzie przedmiotem oddzielnej pracy.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. BURZYŃSKI, *Studium nad hipotezami wyteżenia*, Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1928.
- [2] W. BURZYŃSKI, *Teoretyczne podstawy hipotez wyteżenia*, Czasop. Techn., Lwów 1929.
- [3] D. C. DRUCKER, *Limit Analysis of Cylindrical Shells under Axially Symmetric Loading*, Proc. 1-st Midw. Conf. Solid. Mech., Urbana 1953, publ. 1954, 158-163.
- [4] М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, *Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию*, Инж. Сборник, 19 (1954), 13-36.
- [5] М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ и другие, *Курс сопротивления материалов*, т. 2, Гостехиздат, Москва 1956.
- [6] A. M. FREUDENTHAL, *The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures*, Wiley, New York 1950.
- [7] K. GIRKMANN, *Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal plastischen Stahles*, Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien (Abt. IIa), 140 (1931), 679.
- [8] R. GRAMMEL, *Das kritische Drillungsmoment von Wellen*, ZAMM 3 (1923), 262.
- [9] A. G. GREENHILL, *On the Strength of Shafting when Exposed both to Torsion and to End Thrust*, Proc. Instn. Mech. Eng., 1883, 182.
- [10] А. А. ГВОЗДЕВ, *Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
- [11] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
- [12] P. G. HODGE, Jr., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
- [13] M. T. HUBER, *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, IW SIMP, Warszawa 1948.
- [14] А. А. ИЛЮШИН, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва 1948.
- [15] K. KLÖPPEL, M. YAMADA, *Fließpolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normalkraft und Querkraft*, der Stahlbau 11, 27 (1958), 284-290.
- [16] C. F. KOLLBRUNNER, M. MEISTER, *Ausbeulen*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

- [17] J. KOŽEŠNIK, *A Contribution to the Theory of State of Stress Variable with Time*, Acta Technica 5 (1960), 389-405.
- [18] W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność — wybór zagadnień i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
- [19] A. LEON, *Ing.-Archiv*, 4 (1933), 421.
- [20] М. ЛЕВЫ, *К вопросу об общих уравнениях внутренних движений возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости*, Теория пластичности, Сборник Статей, ИЛ, Москва 1948, 20-23.
- [21] J. MAJER, *Beitrag zu den dreiachsigen Spannungs-Dehnungs Beziehungen Fester Stoffe*, Öster. Ing.-Archiv, 2, 4 (1950), 140-153.
- [22] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Анализ веса и прочности жестко-пластических ортотропных оболочек*, 1, 11 [1959], 17-31.
- [23] W. MOSZYŃSKI, *Wytrzymałość zmęczeniowa części maszynowych*, PWT, Warszawa 1953.
- [24] Z. MRÓZ, *The Load-Carrying Capacity of Orthotropic Shells*, Arch. Mech. Stos., 1, 12 (1960), 85-107.
- [25] J. MURZEWSKI, *Probabilistic Theory of Plastic and Brittle Behaviour of Quasi-Homogeneous Materials*, Bull. Acad. Polon., Sci. Techn., 7 (1959), 641-650.
- [26] A. NÁDÁI, *Plasticity*, McGraw-Hill, New York-London 1931.
- [27] J. NALESKIEWICZ, *Kwantyzacja zjawisk niestateczności sprężystej*, Arch. Mech. Stos., 1 i 3, 6 (1954), 3-32 i 261-290.
- [28] П. М. ОГИБАЛОВ, *Деформация трубы под действием внутреннего давления при переменной температуре*, Инж. Сборник 20 (1954), 55-58.
- [29] W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. Mech. Stos., 3, 7 (1955), 315-336.
- [30] E. T. ONAT, *Plastic Collapse of Cylindrical Shells under Axially Symmetrical Loading*, Q. appl. Math., 13 (1955), 63-72.
- [31] J. ORKISZ, *Krzywe graniczne dla belek zginanych o wielopunktowych przekrojach zastępczych* Czasop. Techn., (w druku).
- [32] T. PEŁCZYŃSKI, *Wpływ stanu napięcia na przejście materiału w stan plastyczny*, Przegl. Mech., 10 (1951), 175-179 i 204-208.
- [33] A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
- [34] S. PIĘCHNIK i M. ŻYCZKOWSKI, *On the Plastic Interaction-Curve for Bending and Torsion of a Circular Bar*, Arch. Mech. Stos., 5, 13 (1961), 669-692.
- [35] С. Д. ПОНОМАРЕВ и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, Машгиз, Москва 1956 (т. 1), 1958 (т. 2) и 1959 (т. 3).
- [36] W. PRAGER, P. G. HODGE Jr., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York 1951.
- [37] В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, *К вопросу о предельных состояниях сечений тонких оболочек*, Исслед. по вопросам строит. мех. и теории пласт., Гостехиздат, Москва 1956.
- [38] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Стройвоенмориздат, Москва 1949.
- [39] A. SAWCZUK, *Linear Theory of Plasticity of Anisotropic Bodies and Its Applications to Problems of Limit Analysis*, Arch. Mech. Stos., 5, 11 (1959), 541-557.
- [40] A. SAWCZUK i J. RYCHLEWSKI, *On Yield Surfaces for Plastic Shells*, Arch. Mech. Stos., 1, 12 (1960) 29-53.
- [41] С. В. СЕРВЕНСЕН и другие, *Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность*, Машгиз, Москва 1954.
- [42] Z. SOBOTKA, *Theorie Plasticity*, t. 1/2, ČSAV, Praha 1954 i 1955.
- [43] В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950.
- [44] И. Е. ШАШКОВ, *Об устойчивости сжатого и скрученного призматического стержня с произвольной формой поперечного сечения*, Инж. Сборник, 7 (1950), 101-122.

[45] C. TORRE, *Grenzbedingungen für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle*, Öster. Ing-Archiv 2, 4, (1950), 174-189.

[46] А. С. ВОБМИР, *Губкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.

[47] H. ZIEGLER, *Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung, eines starrplastischen Körpers und seinen Fließgesetz*, Z. angew. Math. Physik, 5, 11 (1960), 413-425.

[48] M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955), 285-322.

[49] M. ŻYCZKOWSKI, *The Limit Load of a Thick-Walled Tube in a General Circularly Symmetrical Case*, Arch. Mech. Stos., 2, 8 (1956), 155-178.

[50] M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ ściśliwości materiału na rozkład naprężeń w płytach częściowo uplastycznionych*, Arch. Bud. Masz., 1, 5 (1958), 53-87.

[51] M. ŻYCZKOWSKI, *Wytyżeni emateriału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inżyn., 4, 8 (1960), 725-761.

[52] M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie wytyżenia materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inżyn., 2, 10 (1962).

[53] M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe graniczne dla jednoczesnego zginania i rozciągania belek o różnych kształtach przekroju* (w przyg. do druku).

Р е з ю м е

ГРАНИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ТЕОРИИ «НАТУГИ» (ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОЧНОСТИ)

В работе приводится анализ граничных поверхностей, соответствующих «натурге» материала в точке, «натурге» сечения и «натурге» конструкции в целом (понятие «натурги» введено в [51]). Такие поверхности строятся в n -размерном пространстве факторов «натурги»; в качестве факторов натурги определяется каждая независимая величина, влияющая существенно на достижение опасного (предельного) состояния в точке, в сечении или в конструкции.

Специальное внимание обращается на подбор факторов «натурги», сравнивая, например, опасность разрушения замкнутой цилиндрической оболочки, наполненной жидкостью или газом под некоторым определенным давлением.

В первом случае опасность меньше, так как факторами «натурги» являются здесь деформации, в другом случае опасность больше, ибо факторами суть здесь напряжения, а данное состояние, как правило, является более далеким от предельного в пространстве деформации, чем в пространстве напряжений (рис. 1, 2 и 3).

Систематизируются и обсуждаются известные граничные поверхности для «натурги» сечения и «натурги» конструкции. Для примера строятся граничные поверхности для статически неопределенной балки (рис. 6), основываясь на теории упругой несущей способности и теории предельной несущей способности (рис. 7). Проводится также анализ упругой граничной поверхности для толстостенной трубы под влиянием внутреннего давления и температуры (рис. 8). В заключение рассматривается конструкция граничной поверхности в виду возможности потери устойчивости элементом; пример такой поверхности, соответствующий нагрузке стержня двумя силами, дается на рис. 9.

S u m m a r y

LIMIT SURFACES IN THE THEORY OF «EXERTION» (FLOW AND FRACTURE)

This paper is devoted to the analysis of limit surfaces for the exertion of the material at a point, the exertion of a cross-section and that of the structure as a whole (the idea of «exertion» was introduced in [51]). Such surfaces are constructed in the n -dimensional space of exertion factors. The exertion factors are defined to be any independent quantity influencing in an

essential manner the attainment of the dangerous (limit) state at a point, in a cross-section or in a structure.

Particular attention has been devoted to the problem of appropriate selection of the exertion factors. Thus, for instance, the danger of destruction of a closed cylindrical shell filled up with liquid or gas under pressure is considered. In the first case the danger is less because the exertion factors are strains, in the second case they are stresses and it is greater because a given state is as a rule more distant from the dangerous state in the space of strains than in that of stresses (Figs. 1, 2 and 3).

The known limit surfaces for exertion of cross-section and structure are systematized and discussed. As an example the limit surface is constructed for a statically indeterminate beam (Fig. 6) on the basis of the theory of elastic and ultimate load carrying capacity (Fig. 7). The elastic load carrying capacity is also analysed for a thick-walled tube subject to internal pressure and temperature (Fig. 8). In the final section the construction of the limit surface is discussed from the viewpoint of the stability loss of an element. An example of such a surface or a bar loaded with two forces is illustrated by Fig 9.

**KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ**

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1961 r.