

ROMAN SOLECKI

**DRGANIA PRĘTÓW PROSTYCH I PŁYT
OBŁOŻONYCH MASAMI SKUPIONYMI**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCII**

TOM IX • ZESZYT 3 • ROK 1961

SPIS TREŚCI

Wstęp	497
1. Niektóre związki pomocnicze	497
2. Drgania prętów prostych	499
3. Drgania płyt	501
4. Wnioski	510

Wstęp

Zagadnienie drgań swobodnych i wymuszonych układów obłożonych masami posiada duże znaczenie praktyczne w szczególności, gdy mamy do czynienia z konstrukcjami przemysłowymi; w tym przypadku masy ciężarów skupionych (maszyny wraz z fundamentami) są rzędu masy własnej układu.

Pierwsza część pracy dotyczy drgań prętów prostych. Temat ten jest na ogół dobrze znany i szczegółowo opracowany. Liczne rozwiązania przytaczane są również w podręcznikach (por. np. [1]). Jeśli mimo to do niego powracamy, to tylko z tego względu, aby pokazać nowe zastosowanie metody transformacji właściwej (por. [2]) i aby ułatwić przejście do drugiej części pracy, w której omawiamy drgania płyt obłożonych masami skupionymi. Te zagadnienia były dotąd rozwiązane w sposób fragmentaryczny; A. P. FILIPPOW, [3], i S. GERSZGORIN, [4], uzyskali rozwiązania dla płyt prostokątnych o dwóch równoległych krawędziach swobodnie podpartych przy dowolnych warunkach brzegowych na pozostałych krawędziach. Z późniejszych prac z tego zakresu, [5] i [6], jedynie praca [5] jest bardziej ogólna, dotyczy bowiem płyty o dowolnym kształcie pod warunkiem, że znane są funkcje właściwe dla rozpatrywanego problemu. Za pomocą innej metody R. E. ROBERSON rozwiązał zagadnienie drgań płyty kołowej z masą skupioną w środku, [7] i [8]. Inne rozwiązania nie są autorowi znane. W drugiej części pracy rozwiązujemy również problem drgań płyty o dowolnym kształcie, dowolnym rozkładzie mas i o dowolnych warunkach brzegowych, spoczywającej na niejednorodnym podłożu Winklera. Jest to uogólnienie rozwiązania uzyskanego przez Z. MAZURKIEWICZA, [9].

I. Niektóre związki pomocnicze

Niech

$$(1.1) \quad f_{\Phi}(m) = T_{\Phi}\{f(P)\} = \int_{\Omega} r(P)f(P)\Phi(m; P) dP$$

będzie transformatą właściwą dla pewnego 1, 2 lub 3-wymiarowego problemu brzegowego, przy czym funkcje właściwe są ortogonalne z wagą $r(P)$. Transformację odwrotną określamy wówczas za pomocą związku

$$(1.2) \quad T_{\Phi}^{-1}\{f_{\Phi}(m)\} = f(P) = \sum_m \frac{f_{\Phi}(m)}{\|\Phi\|} \Phi(m; P),$$

gdzie

$$\|\Phi\| = \int_{\Omega} r(P) \Phi^2(m; P) dP.$$

W powyższych wzorach m zastępuje jeden, dwa lub trzy wskaźniki.

Obliczymy $T_{\Phi}\{a(P)f(P)\}$. Z definicji (1.1) mamy:

$$(1.3.1) \quad T_{\Phi}\{a(P)f(P)\} = \int_{\Omega} r(P)f(P)a(P)\Phi(m; P) dP = \\ = \int_{\Omega} r(P)f(P) \sum_n \frac{b_{\Phi}(m, n)}{\|\Phi\|} \Phi(n; P) dP = \sum_n \frac{b_{\Phi}(m, n)}{\|\Phi\|} f_{\Phi}(n),$$

gdzie n podobnie jak m zastępuje jeden, dwa lub trzy wskaźniki, zaś $b_{\Phi}(m, n)$ jest transformatą funkcji $a(P)\Phi(m; P)$:

$$(1.3.2) \quad b_{\Phi}(m, n) = \int_{\Omega} r(P)[a(P)\Phi(m; P)]\Phi(n; P) dP.$$

Niech w szczególności będzie $a(P) \equiv \delta(P-P')$, gdzie δ jest funkcją Diraca, zaś P' ustalonym punktem rozpatrywanego obszaru. Ze wzorów (1.3.1) i (1.3.2) znajdujemy

$$(1.3.3) \quad T_{\Phi}\{f(P)\delta(P-P')\} = \Phi(m; P')r(P') \sum_n \frac{f_{\Phi}(n)}{\|\Phi\|} \Phi(n; P')$$

albo bezpośrednio

$$(1.3.4) \quad T_{\Phi}\{f(P)\delta(P-P')\} = \Phi(m; P')f(P')r(P').$$

Rozwiązanie nieskończonego «multiplikatywnego» układu liniowych równań algebraicznych

$$(1.4) \quad A(m)w_m - B(m) \sum_{n=1}^{\infty} B(n)w_n = F(m)$$

można przedstawić w postaci zamkniętej (por. [10], s. 359)

$$(1.5) \quad w_m = \frac{F(m)}{A(m)} + \frac{\frac{B(m)}{A(m)} \sum_{s=1}^{\infty} F(s) \frac{B(s)}{A(s)}}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B^2(j)}{A(j)}}$$

Istnienie rozwiązania (1.5) jest uwarunkowane zbieżnością występujących w nim szeregów nieskończonych. Rozwiązanie «quasi-multiplikatywnego» układu

$$(1.6) \quad A(m)w_m - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^2 B_r(m)B_r(n)w_n = F(m) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

można przedstawić w postaci

$$(1.7) \quad w_k = \frac{A_k}{\Delta},$$

gdzie

$$(1.8) \quad \Delta = \prod_{i=1}^{\infty} A(i) \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_1^2(j) + B_2^2(j)}{A(j)} + \frac{1}{2} \sum_{p_1=1}^{\infty} \sum_{p_2=1}^{\infty} \frac{\left| \begin{matrix} B_1(p_1), B_1(p_2) \\ B_2(p_1), B_2(p_2) \end{matrix} \right|^2}{A(p_1)A(p_2)} \right\},$$

$$(1.9) \quad \Delta_k = \frac{F(k)}{A(k)} \Delta + \prod_{i=1}^{\infty} A(i) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F(s)}{A(s)A(k)} \left\{ [B_1(s)B_1(k) + B_2(s)B_2(k)] - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left| \begin{matrix} B_1(k), B_1(p) \\ B_2(k), B_2(p) \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} B_1(s), B_1(p) \\ B_2(s), B_2(p) \end{matrix} \right|}{A(p)} \right\}.$$

W ogólniejszym przypadku, gdy

$$(1.10) \quad A(m)w_m - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^k B_r(m)B_r(n)w_n = F_m(m) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

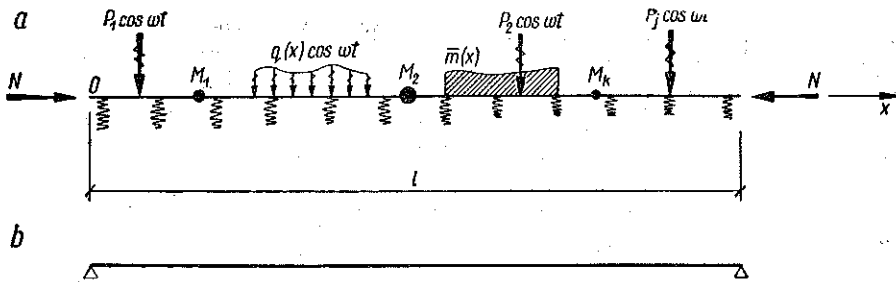
można również wyznaczyć rozwiązanie zamknięte. Wreszcie dwuwskaźnikowe układy typu

$$(1.11) \quad A(m, n)w_{mn} - B(m, n) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B(p, q)w_{pq} = F(m, n) \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

rozwiązujemy w analogiczny sposób otrzymując i tym razem rozwiązania zamknięte.

2. Drgania prętów prostych

Rozważmy belkę o dowolnych warunkach brzegowych przedstawioną na rys. 1a. Załóżmy, że działają na nią oprócz harmonicznych sił wymuszających $q(x) \cos \omega t$ oraz $P_p \cos \omega t$ również statyczne ściskające siły podłużne $N = \text{const}$. Niech belka będzie obłożona ponadto k masami skupionymi M_r oraz masą ciągłą $\bar{m} = \bar{m}(x)$ i



Rys. 1

niech spoczywa na jednorodnym podłożu sprężystym Winklera. Jako schemat podstawowy przyjmiemy belkę na końcach swobodnie podpartą (rys. 1b). Równanie amplitud rozpatrywanej belki

$$(2.1) \quad EJy^{IV} + Ny'' - \omega^2 y \left[\frac{A\gamma}{g} + \bar{m} + \sum_{r=1}^k M_r \delta(x - \xi_r) - \frac{\beta^4}{\omega^2} \right] = q + \sum_{p=1}^j P_p \delta(x - \xi_p)$$

należy więc poddać sinusowej transformacji Fouriera będącej w rozpatrywanym przypadku transformacją właściwą. Po wykonaniu znanych działań i uwzględnieniu (1.3) otrzymujemy układ równań

$$(2.2) \quad \Delta_m y_s(m) - \frac{21^3 \omega^2}{EJ} \sum_n \left[b(m, n) + \sum_{r=1}^k M_r \sin \frac{m\pi \xi_r}{l} \sin \frac{n\pi \xi_r}{l} y_s(n) \right] = F(m, p),$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$(2.3.1) \quad \Delta_m = (m\pi)^4 - \gamma^2 (m\pi)^2 - \alpha^4 + c,$$

$$(2.3.2) \quad b(m, n) = \int_0^l \bar{m}(x) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$(2.3.3) \quad F(m, p) = \frac{q_s(m) l^4}{EJ} + \sum_{p=1}^j P_p \sin \frac{m\pi \xi_p}{l} \frac{l^4}{EJ} - m\pi l \{ [y''(0) - (-1)^m y''(l)] l^2 + [\gamma^2 - (m\pi)^2] [y(0) - (-1)^m y(l)] \},$$

$$(2.3.4) \quad \gamma^2 = \frac{Nl^2}{EJ}, \quad \alpha^4 = \frac{A\gamma}{gEJ} \omega^2 l^4, \quad c = \frac{\beta^4 l^4}{EJ}.$$

Jeśli $\bar{m}(x) \equiv \text{const}$, to z układu (2.2) w oparciu o wzory (1.7) i (1.10) wyznaczmy transformatę $y_s(m)$ w postaci skończonej, a następnie z zależności

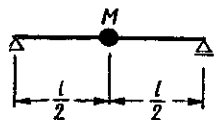
$$y(x) = \frac{2}{l} \sum_m y_s(m) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

obliczymy amplitudę linii ugięcia (nieznane wielkości brzegowe określimy na podstawie warunków brzegowych schematu rzeczywistego). Jeśli $\bar{m}(x) \neq \text{const}$, to nie

udaje się bezpośrednio wyznaczyć rozwiązania [odpowiedniego nieskończonego układu równań w postaci zamkniętej. Jednakże w konkretnych przypadkach zmienności masy taka możliwość niewątpliwie istnieje: wynika to z faktu istnienia zamkniętego rozwiązania równania (2.1), które można użyć przez całkowanie. Zbadajmy dla przykładu drgania swobodne belki przedstawionej na rys. 2. W rozpatrywanym przypadku układ równań (2.2) przyjmuje postać

$$(2.3.5) \quad \frac{(m\pi)^4 - \alpha^4}{2\beta\alpha^4} y_s(m) - (-1)^{(m-1)/2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} y_s(n) = 0 \quad (m = 1, 3, \dots),$$

gdzie $\beta = Mg/Al$.



Rys. 2

Układ (2.3.5) jest typu (1.4.1), gdzie

$$A(m) = \frac{(m\pi)^4 - \alpha^4}{2\beta\alpha^4}, \quad B(m) = (-1)^{(m-1)/2}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik główny układu [por. (1.9)] znajdujemy równanie częstości

$$\prod_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(i\pi)^4 - \alpha^4}{2\beta\alpha^4} \left\{ 1 - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2\beta\alpha^4}{(m\pi)^4 - \alpha^4} \right\} = 0.$$

Ponieważ powyższy iloczyn nieskończony może być równy zeru tylko w przypadku rozpatrywania układu podstawowego, więc ostatecznie po zsumowaniu szeregu i po przekształceniach równanie częstości przyjmuje postać następującą:

$$(2.3.6) \quad 4 \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha - \beta \alpha (\sin \alpha \operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha \operatorname{sh} \alpha) = 0.$$

Otrzymane równanie jest identyczne z podanym w pracy [1], (s. 56).

3. Drgania płyt

Zbadamy teraz drgania płyty poddanej działaniu harmonicznego obciążenia wymuszającego o amplitudzie $q(P)$ lub \bar{P}_p oraz statycznych sił ściskających równomiernie rozłożonych wzdłuż jej konturu Γ , obłożonej masami skupionymi M oraz masą ciągłą $\bar{m}(P)$ i spoczywającej na niejednorodnym podłożu Winklera o podatności $k(P)$ (por. [9] s. 129).

Niech płyta będzie izotropowa, a w niektórych przypadkach ortotropowa. Równanie amplitud drgań rozważanej płyty ma postać

$$(3.1) \quad Lw(P) - \omega^2 \left[\bar{m}(P) - \frac{k(P)}{\omega^2} + \sum_{r=1}^i M_r \delta(P - P'_r) \right] w(P) = q(P) + \sum_{p=1}^i \bar{P}_p \delta(P - P''_p),$$

gdzie L jest stosownym operatorem różniczkowym czwartego rzędu, który np. w przypadku współrzędnych kartezjańskich prostokątnych i przy założeniu ortotropii ma postać

$$(3.2) \quad L \equiv D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \bar{n}_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{n}_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{g} \omega^2,$$

zaś P, P'_r, P''_p oznaczają odpowiednio współrzędne punktu zmiennego oraz współrzędne dowolnych punktów ustalonych (w których zaczepione są masy lub siły). Jako schemat podstawowy (uwagi dotyczące schematów podstawowych podane są w zakończeniu) obieramy płytę izotropową, np. swobodnie podpartą na obwodzie. Wówczas funkcje właściwe $\Phi_{mn}(P)$ przyjęte za jądro transformacji spełniają — o ile są znane — równanie

$$(3.3) \quad L_1 w(P) = 0$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$(3.4) \quad w(S) = 0, \quad \bar{M}_n(S) = 0,$$

gdzie S jest punktem na konturze Γ , \bar{M}_n amplitudą momentu zginającego o wektorze stycznym do konturu. Operator L_1 ma postać

$$(3.5) \quad L_1 \equiv D \nabla^2 \nabla^2 - \frac{\gamma h}{g} \omega^2.$$

Poddając równanie (3.1) transformacji właściwej znajdujemy zgodnie ze wzorami (1.1) i (1.3) następujący nieskończony układ liniowych niejednorodnych równań algebraicznych:

$$(3.6) \quad D(m, n) w_\phi(m, n) - \sum_u \sum_v \frac{1}{\|\Phi\|} \left[\omega^2 b_\phi(m, n, u, v) - c_\phi(m, n, u, v) + \omega^2 \sum_{r=1}^i M_r \Phi(m, n; P'_r) \Phi(u, v; P'_r) \right] w_\phi(u, v) = \\ = q_\phi(m, n) + \sum_{p=1}^i \bar{P}_p \Phi(m, n; P'_p) + F_{mn}[w(S); \bar{M}_n(S)] \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$(3.7.1) \quad b_\phi(m, n, u, v) = \iint_{\Omega} r(P) \bar{m}(P) \Phi(m, n; P) \Phi(u, v; P) dP,$$

$$(3.7.2) \quad c_\phi(m, n, u, v) = \iint_{\Omega} r(P) k(P) \Phi(m, n; P) \Phi(u, v; P) dP,$$

$$(3.7.3) \quad q_\phi(m, n) = \iint_{\Omega} r(P) q(P) \Phi(m, n; P) dP,$$

$$(3.7.4) \quad D(m, n) = T_\phi\{L\} \quad [\text{przy założeniu (3.4)}].$$

We wzorach powyższych $F_{mn}[w(S); \bar{M}_n(S)]$ jest funkcją wskaźników m, n zawierającą całki typu

$$(3.8) \quad \begin{cases} \int_{\Gamma} w(S) \nabla^2 \Phi_{\bar{n}}(m, n; S) d\Gamma, \\ \int_{\Gamma} \bar{M}_n(S) \Phi_{\bar{n}}(m, n; S) d\Gamma, \end{cases}$$

gdzie \bar{n} oznacza kierunek normalny do Γ , zaś $\Phi_{\bar{n}} = \partial \Phi / \partial \bar{n}$. Wielkości $w(S)$ i $\bar{M}_n(S)$ są w schemacie rzeczywistym na ogół nieznanne. Jeśli warunki brzegowe schematu rzeczywistego i podstawowego są identyczne albo gdy $w(S)$ oraz $\bar{M}_n(S)$ są dane (wymuszenie kinematyczne), to z układu (3.6) wyznaczamy $w_\phi(m, n)$ i po podstawieniu do wzoru typu (1.2) znajdujemy rozwinięcie amplitudy powierzchni odkształconej, badanej płyty w szeregu według funkcji właściwych schematu podstawowego. Jeśli ponadto $q_\phi(m, n) = 0$, to przyrównując do zera wyznacznik główny układu (3.6) otrzymujemy równanie częstości. Sposób postępowania zilustrujemy dwoma przykładami. Zagadnienie drgań swobodnie podpartej ortotropowej płyty prostokątnej o zmiennej masie, spoczywającej na podłożu sprężystym

Winklera o zmiennej podatliwości zostało sformułowane i rozwiązane przez Z. MAZURKIEWICZA w pracy [9]. Rozwiążemy je ponownie w oparciu o wprowadzone zależności. Mamy

$$(3.9) \quad \begin{cases} \gamma = 0, & \bar{m}(P) = \bar{m}(x, y), & r(P) \equiv 1, & \Phi(m, n; P) = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \|\Phi\| = \frac{ab}{4}, & D(m, n) = D_1 \alpha_m^4 + 2H \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_2 \beta_n^4 - (\bar{n}_1 \alpha_m^2 + \bar{n}_2 \beta_n^2), \end{cases}$$

gdzie

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}.$$

Z (3.6) otrzymujemy układ równań

$$(3.10) \quad w_\Phi(m, n) - \frac{4w^2}{D(m, n)ab} \sum_u \sum_v b(m, n, u, v) w_\Phi(u, v) + \frac{4}{D(m, n)ab} \sum_u \sum_v c(m, n, u, v) w_\Phi(u, v) = q_\Phi(m, n) \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

identyczny z układem (13) wyprowadzonym w pracy [9].

Zbadamy teraz drgania izotropowej płyty trójkątnej na obwodzie swobodnie podpartej. Mamy tu (por. [11], s. 300)

$$(3.11) \quad \begin{cases} D(m, n) = D(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 - \bar{n}(\alpha_m^2 + \alpha_n^2), \\ \Phi(m, n; P) = \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y - (-1)^{m+n} \sin \alpha_n x \sin \alpha_m y, \\ \|\Phi\| = a^2/4. \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots; \quad m > n).$$

Po podstawieniu do (3.6) znajdujemy

$$(3.12) \quad w_\Phi(m, n) - \frac{4\omega^2}{D(m, n)a^2} \sum_{u=2}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} b_\Phi(m, n, u, v) w_\Phi(u, v) + \frac{4}{D(m, n)a^2} \sum_{u=2}^{\infty} \sum_{\substack{v=1 \\ u > v}}^{\infty} c_\Phi(m, n, u, v) w_\Phi(u, v) = q_\Phi(m, n) \quad (m, n = 1, 2, \dots; \quad m > n),$$

gdzie np.

$$b_\Phi(m, n, u, v) = \int_{\Delta} \bar{m}(x, y) [\sin \alpha_m x \sin \alpha_n y - (-1)^{m+n} \sin \alpha_n x \sin \alpha_m y] \times \\ \times [\sin \alpha_u x \sin \alpha_v y - (-1)^{u+v} \sin \alpha_v x \sin \alpha_u y] dx dy.$$

Zważywszy, że (por. [10], s. 301)

$$\begin{aligned} D(n, m) &= D(m, n), & w_\Phi(n, m) &= -(-1)^{m+n} w_\Phi(m, n), \\ b_\Phi(n, m, v, u) &= (-1)^{m+n+u+v} b_\Phi(m, n, u, v), \\ c_\Phi(n, m, v, u) &= (-1)^{m+n+u+v} c_\Phi(m, n, u, v), \\ q_\Phi(n, m) &= -(-1)^{m+n} q_\Phi(m, n), \end{aligned}$$

otrzymujemy po wykonaniu przekształceń opisanych szczegółowo w [11] układ równań o budowie (3.12) z tym zastrzeżeniem, że sumowanie przebiega po $u, v = 1, 2, \dots$, zaś zastrzeżenie $m > n$ zostaje usunięte.

Założymy w dalszym ciągu jednorodność podłoża [$k(P) \equiv k = \text{const}$] oraz rozkładu mas (oprócz niejednorodności «punktowych»). Rozważać zatem będziemy równanie uproszczone

$$(3.13) \quad \bar{L}w(P) - \omega^2 \sum_{r=1}^i M_r \delta(P - P'_r) w(P) = q(P) + \sum_{p=1}^j \bar{P}_p \delta(P - P'_p),$$

gdzie

$$(3.14) \quad \bar{L} = L + k.$$

Rozwiązanie równania (3.13) można przeprowadzić w sposób omówiony w p. 2. Wynikający stąd podwójnie nieskończony «multiplikatywny» układ równań algebraicznych posiada łatwe do uzyskania rozwiązanie zamknięte. Zastosujemy jednakże tym razem inny prostszy sposób. Poddamy (3.13) transformacji T_Φ i skorzystamy ze związku (1.3.4), otrzymując

$$(3.15) \quad \bar{D}(m, n) w_\Phi(m, n) - \omega^2 \sum_{r=1}^i M_r \Phi(m, n; P'_r) w(P'_r) = \\ = q_\Phi(m, n) + \sum_{p=1}^j \bar{P}_p \Phi(m, n; P'_p) + F_{mn}[w(S); \bar{M}_n(S)],$$

gdzie

$$(3.16) \quad \bar{D}(m, n) = T_\Phi \{\bar{L}\} \quad [\text{z uwzględnieniem (3.4)}].$$

Ze wzoru (1.2) znajdujemy

$$(3.17.1) \quad w(P) = \sum_m \sum_n \frac{1}{\|\Phi\| \bar{D}(m, n)} \left\{ \omega^2 \sum_{r=1}^i M_r \Phi(m, n; P'_r) w(P'_r) + \right. \\ \left. + q_\Phi(m, n) + \sum_{p=1}^j \bar{P}_p \Phi(m, n; P'_p) + F_{mn}[w(S); \bar{M}_n(S)] \right\} \Phi(m, n; P),$$

a zatem

$$w(P'_s) = \sum_m \sum_n \frac{1}{\|\Phi\| \bar{D}(m, n)} \left\{ \omega^2 \sum_{r=1}^i M_r \Phi(m, n; P'_r) w(P'_r) + q_\Phi(m, n) + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^j \bar{P}_p \Phi(m, n; P'_p) + F_{mn}[w(S); \bar{M}_n(S)] \right\} \Phi(m, n; P'_s) \quad (s = 1, 2, \dots, i),$$

czyli

$$(3.17.2) \quad w(P'_s) - \omega^2 \sum_{r=1}^i M_r B(r, s) w(P'_r) = C(s) \quad (s = 1, 2, \dots, i),$$

gdzie

$$(3.18.1) \quad B(r, s) = \sum_u \sum_v \frac{\Phi(u, v; P'_r) \Phi(u, v; P'_s)}{\|\Phi\| \bar{D}(u, v)},$$

$$(3.18.2) \quad C(s) = \sum_u \sum_v \frac{\Phi(u, v; P'_s)}{\|\Phi\| \bar{D}(u, v)} \left\{ q_\omega(u, v) + \sum_{p=1}^i P_p \Phi(u, v; P'_p) + \right. \\ \left. + F_{uv}[w(S); \bar{M}_n(S)] \right\} \quad (s = 1, 2, \dots, i).$$

Rozwiązanie skończonego układu równań algebraicznych (3.17.2) przedstawiamy w postaci

$$(3.19) \quad w(P'_r) = \frac{\Delta_r}{\Delta},$$

gdzie

$$(3.20.1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 - \omega^2 M_1 B(1, 1), & \dots, & 1 - \omega^2 M_1 B(1, i) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 - \omega^2 M_i B(1, i), & \dots, & 1 - \omega^2 M_i B(i, i) \end{vmatrix}$$

lub (por. [12], s. 32)

$$(3.20.2) \quad \Delta = 1 - \frac{\omega^2}{1!} \sum_{p_1=1}^i M_{p_1} B(p_1, p_1) + \\ + \frac{\omega^4}{2!} \sum_{p_1, p_2=1}^i \begin{vmatrix} M_{p_1} B(p_1, p_1), & \dots, & M_{p_1} B(p_1, p_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{p_2} B(p_1, p_2), & \dots, & M_{p_2} B(p_2, p_2) \end{vmatrix} + \\ + \dots + (-1)^i \frac{\omega^{2i}}{i!} \sum_{p_1, \dots, p_i=1}^i \begin{vmatrix} M_{p_1} B(p_1, p_1), & \dots, & M_{p_1} B(p_1, p_i) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{p_i} B(p_1, p_i), & \dots, & M_{p_i} B(p_i, p_i) \end{vmatrix}.$$

Natomiast (por. [13], s. 37)

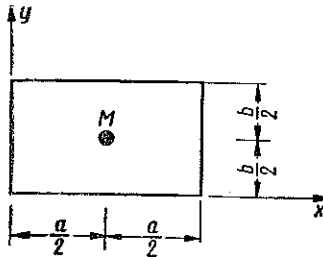
$$(3.21) \quad \Delta_r = \sum_{s=1}^i A_{sr} C(s),$$

gdzie A_{sr} jest dopełnieniem algebraicznym elementu o wskaźnikach sr wyznacznika Δ . Szereg po prawej stronie równości jest wyznacznikiem otrzymanym z Δ przez zastąpienie elementów r -tej kolumny wyrazami wolnymi $C(s)$. Podstawmy (3.19) do (3.17.1). Otrzymamy rozwinięcie poszukiwanej powierzchni ugięcia w szereg według funkcji właściwych układu podstawowego, zależne od nieznanych w ogół-

nym przypadku współczynników rozwinięcia wielkości brzegowych (3.4) w odpowiednie szeregi:

$$(3.22) \quad w(P) = \sum_m \sum_n \frac{1}{\|\Phi\| \bar{D}(m, n)} \left\{ \frac{\omega^2}{\Delta} \sum_{r=1}^i M_r \Delta_r \Phi(m, n; P_r') + q_\phi(m, n) + \sum_{p=1}^j \bar{P}_p \Phi(m, n; P_p'') + F_{mn}[w(S); \bar{M}_n(S)] \right\} \Phi(m, n; P).$$

Jeśli wielkości brzegowe są dane, to (3.22) stanowi rozwiązanie problemu. W szczególności jeśli warunki brzegowe schematu rzeczywistego i podstawowego są identyczne, wówczas częstości drgań własnych otrzymujemy z warunku $\Delta = 0$ podobnie jak w pracy [5], w której uwzględniono ponadto wpływ bezwładności obrotowej. Niniejsza praca zawiera w tym przypadku jedynie nieistotne uogólnienie w porównaniu z [5] (uwzględnienie sprężystości podłoża i wpływu statycznych ciał podłużnych \bar{n} oraz ortotropii przy badaniu płyty prostokątnej). Jeśli warunki brzegowe obu schematów różnią się od siebie, to problem sprowadza się do rozwiązania nieskończonego układu liniowych



Rys. 3

równań algebraicznych. Zbadajmy dla przykładu drgania własne ortotropowej płyty prostokątnej (rys. 3) z masą M skupioną w środku. W tym przypadku mamy (por. [14]):

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(m, n; P) &= \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \|\Phi\| = \frac{ab}{4}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \\ \bar{D}(m, n) &= D_x \alpha_m^4 + 2D_{xy} \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_y \beta_n^4 + k - \frac{\gamma h}{g} \omega^2 + \bar{n}_1 \alpha_m^2 + \bar{n}_2 \beta_n^2, \\ \Delta &= 1 - \omega^2 MB(1, 1) = 1 - \omega^2 M \frac{4}{ab} \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\bar{D}(u, v)}, \\ \Delta_r &= C(1) = \frac{4}{ab} \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(u-1)/2} (-1)^{(v-1)/2}}{\bar{D}(u, v)} F_{uv}, \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$F_{uv} = \frac{\alpha_u b}{2} (A_v + C_v) + \frac{\beta_v a}{2} (B_u + D_u) + \Delta_x \frac{b}{2} (E_v + G_v) + \Delta_y \frac{a}{2} (F_u + K_u) - 2D_{xy} \alpha_u \beta_v [w(0,0) + w(0, b) + (a, 0) + w(a, b)].$$

Symbole A_v, C_v, \dots oznaczają współczynniki rozwinięcia odpowiednich wielkości brzegowych w szeregi Fouriera według sinusów (por. [14,] wzory (2.2), (2.3)), zaś

$$(3.24) \quad \begin{cases} \Delta_x = D_x \alpha_m^3 + \bar{n}_1 \alpha_m + 2D_{xy} \alpha_m \beta_n^3, \\ \Delta_y = D_y \beta_n^3 + \bar{n}_2 \beta_n + 2D_{xy} \alpha_m^3 \beta_n. \end{cases}$$

Po podstawieniu do (3.22) mamy

(3.25)

$$w(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D(m, n)\Delta} \left\{ \frac{4}{ab} \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(u+v-2)/2}}{D(u, v)} F_{uv} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} + F_{mn}\Delta \right\} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Niech płyta będzie np. utwierdzona wzdłuż krawędzi $x = 0$ i swobodnie podparta na pozostałych krawędziach. W tym przypadku wszystkie współczynniki oprócz A_n są równe zeru i równanie (3.25) przyjmuje postać

$$(3.26) \quad w(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D(m, n)\Delta} \left\{ \frac{2M\omega^2}{a} \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \times \right. \\ \left. \times \frac{(-1)^{(u+v-2)/2}}{D(u, v)} (-1)^{(m+n-2)/2} \alpha_u A_v + \Delta \frac{b}{2} \alpha_m A_n \right\} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Z warunku $w_x(0, y) = 0$ wynika następujący nieskończony układ liniowych równań algebraicznych:

$$(3.27) \quad A_n F_1(n) + F_2(n) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} F_2(v) A_v = 0 \quad (n = 1, 3, \dots),$$

gdzie

$$(3.28) \quad F_1(n) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{D(m, n)}, \quad F_2(n) = \frac{2\omega\sqrt{M}}{\sqrt{ab}\Delta} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n-2)/2} \alpha_m}{D(m, n)}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny układu (3.27) znajdujemy zgodnie z (1.5) równanie częstości w postaci zamkniętej:

$$(3.29) \quad 1 - \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{F_2^2(j)}{F_1(j)} = 0.$$

Warto zauważyć, że podobne zadanie (prostokątna płyta izotropowa utwierdzona wzdłuż dwóch równoległych krawędzi, a na pozostałych swobodnie podparta) było już rozwiązane przez A. P. FILIPOWA, [3], (por. również [15], s. 355), jednakże równanie częstości zostało przedstawione w postaci nieskończonego wyznacznika. Ogólnie można stwierdzić, że w przypadku warunków brzegowych typu M. LÉVY równanie częstości da się zawsze przedstawić w postaci zamkniętej, co wynika również ze znajomości funkcji właściwych dla płyt podpartych we wspomniany sposób.

Zajmiemy się w dalszym ciągu obliczeniem częstości symetrycznych drgań swobodnych izotropowej płyty kwadratowej utwierdzonej wzdłuż obwodu z masą M skupioną w środku przy założeniu

$$k = 0, \quad \bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.$$

Z symetrii wynikają związki

$$C_n = A_n, \quad B_m = D_m = A_m$$

i równanie (3.22) przyjmuje postać

$$(3.30) \quad w(x, y) = \frac{4}{a^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D(m, n)\Delta} \left[M\omega^2 (-1)^{(m+n-2)/2} \frac{4}{a} \times \right. \\ \left. \times \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(u+v-2)/2}}{D(u, v)} (\alpha_u A_v + \alpha_v A_u) + \Delta a (\alpha_m A_n + \alpha_n A_m) \right] \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y,$$

gdzie

$$D(m, n) = D(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 - \frac{\gamma h}{g} \omega^2.$$

Z warunku $w_x(0, y) = 0$ otrzymujemy układ równań

$$aA_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{D(m, n)} + a\alpha_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D(m, n)} A_m + \\ + \frac{4}{\Delta a} M\omega^2 \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} A_v \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(u+v-2)/2} \alpha_u}{D(u, v)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n-2)/2} \alpha_m}{D(m, n)} + \\ + \frac{4}{\Delta a} M\omega^2 \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} A_u \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(u+v-2)/2} \alpha_v}{D(u, v)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n-2)/2} \alpha_m}{D(m, n)} = 0 \\ (n = 1, 3, \dots),$$

czyli

$$(3.31) \quad aA_n(Q_n - Q'_n) + 2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{m\pi^2}{\Delta_{mn}} + \frac{8(-1)^{(m+n-2)/2} \beta \lambda^4}{1 - 2\beta \lambda^4 \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} (V_u - V'_u)} N_m N_n \right\} A_m = 0 \\ (n = 1, 3, \dots),$$

gdzie

$$(3.32) \quad \begin{cases} \Delta_{mn} = [(m\pi)^2 + (n\pi)^2] - \lambda^4 = (m\pi)^4 + 2(m\pi)^2 (n\pi)^2 - \lambda^4, \\ \lambda^4 = \frac{\gamma h a^4}{g D} \omega^2, \quad \beta = \frac{Mg}{\gamma h a^2}; \end{cases}$$

zaś (por. [16], [17])

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_n &= \sum_m \frac{(m\pi)^2}{\Delta_{mn}} = \frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{r_n}{\text{th } r_n} - \frac{s_n}{\text{th } s_n} \right), \\ Q'_n &= \sum_m \frac{(-1)^m (m\pi)^2}{\Delta_{mn}} = \frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{r_n}{\text{sh } r_n} - \frac{s_n}{\text{sh } s_n} \right), \\ V_n &= \sum_m \frac{1}{\Delta_{mn}} = \frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{1}{s_n \text{ th } s_n} - \frac{1}{r_n \text{ th } r_n} \right) - \frac{1}{2[(n\pi)^4 - \lambda^4]}, \\ V'_n &= \sum_m \frac{(-1)^m}{\Delta_{mn}} = \frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{1}{s_n \text{ sh } s_n} - \frac{1}{r_n \text{ sh } r_n} \right) - \frac{1}{2[(n\pi)^4 - \lambda^4]}, \\ N_n &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2} m\pi}{\Delta_{mn}} = \frac{1}{8\lambda^2} \left(\frac{1}{\text{ch } \frac{s_n}{2}} - \frac{1}{\text{ch } \frac{r_n}{2}} \right), \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$(3.34) \quad r_n = \sqrt{(n\pi)^2 + \lambda^2}, \quad s_n = \sqrt{(n\pi)^2 - \lambda^2}.$$

W pierwszym przybliżeniu równanie częstości, które otrzymujemy przyrównując do zera współczynnik przy A_1 , przyjmuje po przekształceniach postać następującą:

$$(3.35) \quad \beta = -2 \frac{A(\bar{\lambda})}{B(\bar{\lambda})},$$

gdzie

$$(3.36.1) \quad A(\bar{\lambda}) = (4 - \bar{\lambda}^4) \left[\pi \bar{r}_1 \cos \frac{\pi \bar{s}_1}{2} \text{sh } \frac{\pi \bar{r}_1}{2} + \right. \\ \left. + \pi \bar{s}_1 \text{ch } \frac{\pi \bar{r}_1}{2} \sin \frac{\pi \bar{s}_1}{2} \right] + 8\bar{\lambda}^2 \text{ch } \frac{\pi \bar{r}_1}{2} \cos \frac{\pi \bar{s}_1}{2},$$

$$(3.36.2) \quad B(\bar{\lambda}) = \pi^2 \bar{\lambda}^2 \left[\frac{2(4 - \bar{\lambda}^4)!}{\cos \frac{\pi \bar{s}_1}{2} \text{ch } \frac{\pi \bar{r}_1}{2}} \left(\text{ch } \frac{\pi \bar{r}_1}{2} - \cos \frac{\pi \bar{s}_1}{2} \right)^2 - A(\bar{\lambda}) C(\bar{\lambda}) \right],$$

przy czym

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{aligned} C(\bar{\lambda}) &= \sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi \bar{s}_u}{2}}{\pi \bar{s}_u \cos \frac{\pi \bar{s}_u}{2}} - \frac{\text{sh } \frac{\pi \bar{r}_u}{2}}{\pi \bar{r}_u \text{ch } \frac{\pi \bar{r}_u}{2}} \right), \\ \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\pi}, \quad \bar{r}_n = \sqrt{n^2 + \bar{\lambda}^2}, \quad \bar{s}_n = \sqrt{\bar{\lambda}^2 - n^2}. \end{aligned} \right.$$

Przyjmując $\beta = 2$ znajdujemy

$$(3.38) \quad \bar{\lambda}_1 = 0,99, \quad \omega_1 = \frac{0,99\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}},$$

gdzie tymczasem częstość podstawowa drgań własnych (por. [18])

$$(3.39) \quad \omega_{01} = \frac{3,646\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

Stosunek obu częstości wynosi

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} \approx 0,27.$$

Dla płyty na obwodzie swobodnie podpartej mamy odpowiednio

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} \approx \frac{0,62}{2} = 0,31.$$

4. Wnioski

Podana w pracy zależność (1.3.1) pozwala na znaczne rozszerzenie zastosowań transformacji właściwej. Będzie ona zapewne użyteczna przy badaniu drgań ustalonych niejednorodnych anizotropowych ciał sprężystych. Ponieważ przejście do rozwiązania problemów niestalonych nie nastęrcza (co najmniej formalnie) trudności, można więc przypuszczać, że większość praktycznie ważnych liniowych dynamicznych problemów brzegowych teorii sprężystości może być rozwiązana za pomocą wspomnianej metody. Warunkiem koniecznym jest jednakże istnienie dla danego problemu takiego schematu podstawowego, dla którego znany jest układ funkcji właściwych. Należy zwrócić uwagę na następujące fakty: w powszechnym użyciu są od dawna schematy podstawowe, różniące się od schematu rzeczywistego jedynie warunkami brzegowymi. Od 1910 r. dzięki pracom S. P. TIMOSZENKI oraz I. G. BUBNOWA staje się widoczne, że także równania różniczkowe opisujące badane zjawisko w schemacie rzeczywistym i w schemacie podstawowym¹ mogą się od siebie różnić, pozostając jednakże w obu przypadkach równaniami o stałych współczynnikach. Prace W. NOWACKIEGO wskazują na to, że nawet gdy równanie różniczkowe ma współczynniki zmienne, to i w tym przypadku możemy jako schemat podstawowy przyjąć układ pozwalający na opisanie badanego zjawiska za pomocą równania różniczkowego o stałych współczynnikach. Świadectwem tego faktu są również późniejsze prace Z. MAZURKIEWICZA. Należy się więc zastanowić nad tym, jakie cechy wspólne powinny posiadać obydwa schematy. Łatwo stwierdzić, że oprócz cech podstawowych, jakimi są identyczność zjawisk zachodzących w obu schematach oraz liniowość obu problemów brzegowych,

¹ Autorzy ci nie operują we wspomnianych pracach pojęciem schematu podstawowego, co jest jednakże jedynie kwestią interpretacji.

jedyną konieczną cechą wspólną jest identyczność kształtu. Oczywiście w przypadku układów prętowych postulat ten dotyczy jedynie osi pręta (problem jednowymiarowy). Podobnie w przybliżonej teorii płyt mamy na myśli identyczność konturu obu schematów (można przypuszczać, że jeśli odkształcimy płaszczyznę konturu płyty wraz z układem współrzędnych, to również i w tym przypadku płyta o konturze nieodkształconym będzie mogła stanowić schemat podstawowy dla płyty o konturze odkształconym).

Literatura cytowana w tekście

- [1] И.В. АНАНЕВ, *Справочник по расчету собственных колебаний*, ОГИЗ, Москва 1946.
- [2] R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty trójkątnej 30°-60°-90° za pomocą transformacji właściwej*, Arch. Inżyn. Ładow., 1960.
- [3] А.П. ФИЛИППОВ, *Колебания прямоугольной пластинки нагруженной сосредоточенной нагрузкой*, Изв. АН СССР, 4, 1933.
- [4] С. ГВРЦГОРИН, *Колебания пластинок нагруженных сосредоточенными массами*, Прикл. Мат. Мех., 1, 1933.
- [5] W. F. STOKEY, C. F. ZOROWSKI, *Normal Vibrations of a Uniform Plate Carrying Any Number of Finite Masses*, Trans. ASME J. Appl. Mech. 2, 1959.
- [6] И.В. КИСЛЕВА, *Колебания прямоугольных пластинок свободно опертых вдоль края*, Труды Моск. Авт. Дор. Ин-та, 21, 1957, 129.
- [7] R. E. ROBERSON, *Transversal Vibrations of a Free Circular Plate Carrying Concentrated Mass* J. Appl. Mech., 3, 1951.
- [8] R. E. ROBERSON, *Vibrations of a Clamped Circular Plate Carrying Concentrated Mass* J. Appl. Mech., 4, 1951.
- [9] Z. MAZURKIEWICZ, *Bending Vibration and Buckling of a Rectangular Plate Resting on a Non-Homogeneous Foundation*, Bull. Acad. Pol. Sci. Série Sci. Tech., 3, 1960.
- [10] S. KALISKI, *The Dynamical Problem of the Rectangular Parallelepiped*, Arch. Mech. Stos., 3, 10 (1958).
- [11] R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty o kształcie trójkąta prostokątnego*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
- [12] И.В. СМИРНОВ, *Курс высшей математики*, т. IV, вып. 2, ГИТТЛ, Москва 1951
- [13] В.И. СМИРНОВ, *Курс высшей математики*, т. III, часть 2, вып. 5, ГИТЛ, Москва 1953.
- [14] P. WILDE, *The General Solution for a Rectangular Orthotropic Plate Expressed by Double Trigonometric Series*, Arch. Mech. Stos., 5, 10 (1958).
- [15] P. M. OGIBALOW, *Изгиб, устойчивость и колебания пластинок*, Изд. Моск. Унив., 1958.
- [16] Z. KĄCZKOWSKI, *Ortotropowe płyty prostokątne o brzegach swobodnych*, Arch. Mech. Stos., 4, 7, (1955).
- [17] Z. KĄCZKOWSKI, *Orthotropic Rectangular Plates with Arbitrary Boundary Conditions*, Arch. Méch. Stos., 2, 8 (1956).

Резюме

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК, ОБЛОЖЕННЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Основываясь на выведенной в работе формуле (1.3.1), определяющей собственную трансформацию произведения двух функций, дается общее решение, касающиеся стационарных колебаний устойчивости, статики прямых стержней и пластинок, обложенных

сосредоточенными массами и сплошной массой. Кроме нескольких алгебраических примеров приводится также численный пример, касающийся основной частоты свободных колебаний квадратной, изотропной пластинки, заземленной по контуру и несущей в середине сосредоточенную массу.

S u m m a r y

VIBRATION OF STRAIGHT BARS AND PLATES WITH CONCENTRATED MASSES

On the basis of the Eq. (1.3.1) of the present paper, determining the proper transform of a product of two functions, general solution is given for steady-state vibration, stability and equilibrium of straight bars and plates with concentrated masses and a continuous mass. In addition to several algebraic equations, a numerical example is quoted concerning the determination of the fundamental frequency of free vibration of a square isotropic plate clamped along the entire contour and having a concentrated mass in the middle.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lutego 1961 r.
