

RYSZARD GRYBOŚ

WTÓRNE UDERZENIE PROSTE W OSCYLATOR HARMONICZNY

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCIV**

TOM IX • ZESZYT 2 • ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Analiza ruchu oscylatora	269
2. Dodatni i ujemny efekt uderzenia wtórnego	272
3. Efekt uderzenia wtórnego na płaszczyźnie fazowej	274
4. Znaczenie praktyczne dodatniego efektu uderzenia wtórnego	275
5. Wnioski	276.

1. Analiza ruchu oscylatora

Oscylator harmoniczny przedstawiony na rys. 1 składa się z ciężarka o masie M zawieszonoego na sprężynie o stałej c . Na skutek spuszczenia z wysokości H ciężarka o masie m oscylator zostaje pobudzony do drgań. Zbadajmy jego ruch. Wychylenia ciężarków m i M oznaczajmy odpowiednio przez x i y , zaś prędkości przez u i v , przy czym wartości dodatnie prędkości odpowiadają ruchowi w dół.

W momencie poprzedzającym bezpośrednio uderzenie ciężarek m posiada prędkość

$$(1.1) \quad u_1 = \sqrt{2gH},$$

zaś ciężarek M jest w spoczynku ($v_1 = 0$).

Następuje proste, środkowe uderzenie niedoskonałe sprężyste, w rezultacie którego ciężarki uzyskują prędkości, [1],

$$u_2 = u_1 \frac{\mu - k}{1 + \mu}, \quad v_2 = u_1 \frac{1 + k}{1 + \mu},$$

gdzie $\mu = m/M$. Współczynnik $k < 1$ cechuje stopień sprężystości uderzenia, przy czym zakłada się w pierwszym przybliżeniu, że jest on niezależny od prędkości uderzenia oraz postaci obu ciężarków, czyli ma charakter stałej materiałowej.

Jeżeli $\mu > k$, to po uderzeniu ciężarek uderzający porusza się nadal w dół ($u_2 > 0$), natomiast w przypadku $\mu < k$ następuje jego odskok ($u_2 < 0$) i po pewnym czasie powtórne uderzenie.

Ten ostatni przypadek, jako interesujący z praktycznego punktu widzenia, będzie wyłącznie przedmiotem dalszych naszych rozważań. Prędkości ciężarków można teraz napisać w postaci

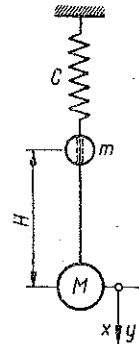
$$(1.2) \quad u_2 = -\alpha u_1,$$

$$(1.3) \quad v_2 = \beta u_1,$$

gdzie

$$(1.4) \quad \alpha \equiv \frac{k - \mu}{1 + \mu} \quad (\alpha > 0),$$

$$(1.5) \quad \beta \equiv \frac{1 + k}{1 + \mu}.$$



Rys. 1. Oscylator harmoniczny z ciężarkiem uderzającym

Na skutek pierwszego uderzenia ciężarek M rozpoczyna ruch harmoniczny z prędkością v_2 oraz częstością kątową $\omega = \sqrt{c/M}$. Jeżeli pominiemy istnienie oporów zarówno zewnętrznych jak i wewnętrznych (sprężyny)¹, to wychylenia ciężarka M określone są wzorem

$$(1.6) \quad y = A \sin \omega t,$$

przy czym amplituda A po pierwszym uderzeniu wynosi

$$(1.7) \quad A = \frac{v_2}{\omega}.$$

Tymczasem ciężarek uderzający odskakuje na wysokość

$$(1.8) \quad h = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{\alpha^2 u_1^2}{2g} = \alpha^2 H,$$

którą osiąga po czasie

$$(1.9) \quad t' = -\frac{u_2}{g} = \frac{\alpha u_1}{g},$$

licząc od momentu uderzenia.

Porównując wzór (1.8) ze wzorem $h = k^2 H$, znanym z teorii uderzenia kuli o płaską ścianę, widzimy, że w rozważanym przypadku współczynnik α przejmuje rolę współczynnika k .

Po osiągnięciu wysokości h ciężarek m zaczyna swobodny spadek (w próżni) według równania

$$(1.10) \quad x = \frac{g}{2}(t-t')^2 - h.$$

Czas $t = \tau$, po upływie którego nastąpi powtórne uderzenie, można wyznaczyć z warunku $x = y$, który po uwzględnieniu (1.6), (1.7) i (1.10) przyjmuje postać następującą:

$$(1.11) \quad \frac{g}{2}(\tau-t')^2 - h = \frac{v_2}{\omega} \sin \omega \tau.$$

W celu uniknięcia trudności związanych z poszukiwaniem pierwiastków równania przestępnego przekształćmy (1.11) za pomocą zależności (1.1), (1.3), (1.8) i (1.9); w rezultacie otrzymuje się wzór

$$(1.12) \quad \frac{\tau^2}{\left(\alpha + \beta \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau}\right)^2} = \frac{8H}{g},$$

¹ Uproszczenie to jest dopuszczalne, ponieważ przeprowadzona tutaj analiza ruchu dotyczy wyłącznie pierwszego lub co najwyżej dwóch pierwszych okresów drgań oscylatora, kiedy to tłumienie (dalekie od krytycznego) nie wpływa jeszcze w sposób istotny na wielkość wychylenia.

który umożliwi łatwiejsze określenie poszukiwanej wielkości τ . Mianowicie jeżeli $\omega\tau < \pi/4$, to popełniając błąd nie większy od 10% można przyjąć $\sin \omega\tau/\omega\tau = 1$, a wówczas

$$\tau \approx 2(\alpha + \beta) \sqrt{2H/g}.$$

Jeżeli $\omega\tau > \pi/4$, to wzór powyższy należy traktować jako pierwsze przybliżenie w metodzie kolejnych przybliżeń.

Prędkość u'_1 ciężarka m w momencie poprzedzającym bezpośrednio uderzenie wtórne znajdujemy ze wzoru (1.10),

$$(1.13) \quad u'_1 = [\dot{x}]_{t=\tau} = g(\tau - t').$$

Ciężarek M ma wtedy prędkość

$$(1.14) \quad v'_1 = [\dot{y}]_{t=\tau} = v_2 \cos \omega\tau,$$

która po uderzeniu wtórnym zmienia się gwałtownie do wartości

$$v'_2 = \frac{\mu(1+k)}{1+\mu} u'_1 + \frac{1-\mu k}{1+\mu} v'_1$$

lub

$$(1.15) \quad v'_2 = \mu\beta g(\tau - t') + (1 - \mu\beta)v_2 \cos \omega\tau.$$

Od tego momentu wychylenia ciężarka M opisane są nowym równaniem

$$(1.16) \quad y' = A'_1 \sin \omega t + A'_2 \cos \omega t \quad (t \geq \tau).$$

Stałe A'_1 i A'_2 wyznaczone z warunków początkowych

$$[y']_{t=\tau} = [y]_{t=\tau} = \frac{v_2}{\omega} \sin \omega\tau, \quad [\dot{y}']_{t=\tau} = v'_2$$

określone są następująco:

$$(1.17.1) \quad A'_1 = \frac{v_2}{\omega} (1 - \mu\beta \cos^2 \omega\tau) + \frac{\mu\beta g}{\omega} (\tau - t') \cos \omega\tau,$$

$$(1.17.2) \quad A'_2 = \frac{\mu\beta}{\omega} [v_2 \cos \omega\tau - g(\tau - t')] \sin \omega\tau.$$

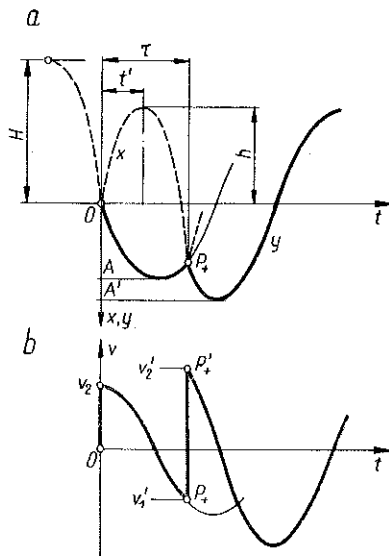
Jeżeli wzór (1.16) zapiszemy w postaci równoważnej

$$y' = A' \sin(\omega t + \varphi),$$

to

$$(1.18) \quad A' = \sqrt{A'^2_1 + A'^2_2}$$

jest amplitudą wychylenia ciężarka M po uderzeniu wtórnym. Wychylenia ciężarków oraz ich prędkości w rozważanym okresie przedstawiają krzywe na rys. 2.



Rys. 2. Wychylenie i prędkości ciężarków; linia ciągła — ciężarek M , linia przerywana — ciężarek m

2. Dodatni i ujemny efekt uderzenia wtórnego

W celu określenia, w jakim stosunku pozostają do siebie amplitudy wychyleń po pierwszym i po drugim uderzeniu, wprowadźmy do rozważań współczynnik

$$(2.1) \quad \kappa = \frac{A'}{A} - 1,$$

który można nazwać współczynnikiem uderzenia wtórnego. Wykorzystując wzory (1.7), (1.11), (1.17) i (1.18) znajdujemy po prostych przekształceniach

$$(2.2) \quad \kappa = [1 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + 2\bar{\beta} \sin^2 \gamma + \bar{\beta} \delta \sin \gamma + 2(1 - \bar{\beta}) \times \\ \times \sqrt{\bar{\beta} \delta \sin \gamma + \bar{\alpha}^2 \cos \gamma - \bar{\beta} (2 + \bar{\beta} \sin^2 \gamma)}]^{1/2} - 1,$$

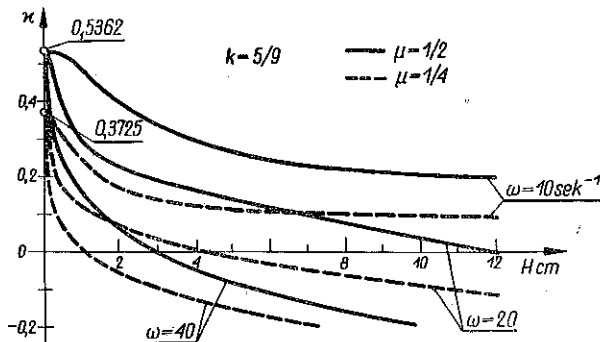
gdzie

$$(2.3) \quad \begin{cases} \bar{\alpha} \equiv \mu a = \mu \frac{k - \mu}{1 + \mu}, & \bar{\beta} \equiv \mu \beta = \mu \frac{1 + k}{1 + \mu}, \\ \gamma \equiv \omega \tau, & \delta \equiv \frac{\mu}{\omega} \sqrt{\frac{2g}{H}}. \end{cases}$$

Współczynnik κ zależy więc od czterech parametrów:

$$\kappa = \kappa(\mu, k, \omega, H).$$

Na rys. 3 przedstawiono wykres zależności $\kappa = \kappa(H)$ dla $\mu = 1/2$ (linie ciągłe) i $\mu = 1/4$ (linie przerywane) oraz dla kilku częstości ω . Wykres sporządzono dla współczynnika $k = 5/9$, co odpowiada uderzeniu kulki stalowej (spuszczanej z niewielkiej wysokości) o płytkę stalową.



Rys. 3. Wykres zależności $\kappa = \kappa(H)$ dla $k = 5/9$ oraz $\omega = 10, 20, 40 \text{ sec}^{-1}$; linia ciągła $\mu = 1/2$, linia przerywana $\mu = 1/4$

Interesujące jest, że współczynnik κ dla znacznego zakresu wartości H i ω przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, że wskutek odskoku ciężarka m i następującego potem uderzenia wtórnego amplituda wychYLENIA ciężarka M jest większa niż w przypadku uderzenia pojedynczego ($A' > A$).

W związku z tym mówić będziemy o tzw. dodatnim efekcie uderzenia wtórnego. Na marginesie zauważmy, że P. J. GALAKA wykonał ostatnio (por. *Praktyczna Mechanika*, t. VI/4, Kijów 1960) pomiary współczynnika uderzenia za pomocą stalowego walca uderzającego współosiowo w dno stalowego cylindra, osadzonego sprężysto. Wychylenia obu mas rejestrowane były na papierze światłoczułym. Dla wysokości spadku leżących w zakresie $0,138 \text{ cm} \leq H \leq 0,452 \text{ cm}$ autor jako wartość średnią podaje $k = 0,85$. Jest to liczba o 55% większa od przyjętej powyżej, a podawanej w literaturze (np. [1]) dla przypadku kuli uderzającej o płaską, nieruchomą ścianę. Należy zauważyć, że przy większej wartości tego współczynnika dodatni efekt uderzenia wtórnego wystąpi z jeszcze większą wyrazistością niż to wynika z krzywych na rys. 3.

W przeciwieństwie do dodatniego efekt ujemny ($\kappa < 0$) odpowiada przytłumieniu wychylenia amplitudalnego ($A' < A$).

Zjawiska tego nie należy jednak brać za łagodzenie skutków pierwszego uderzenia, albowiem wspomniane przytłumienie amplitudy następuje już po uprzednim (jednorazowym) osiągnięciu wychylenia amplitudalnego o wielkości A .

Wreszcie w przypadku granicznym ($\kappa = 0$) uderzenie wtórne nie powoduje zmiany amplitudy ($A' = A$); jest to tzw. efekt zerowy.

Współczynnik uderzenia wtórnego κ wzrasta monotonicznie w miarę jak H maleje. Tłumaczenie tego faktu jest oczywiste; im mniejsza jest wysokość spadku ciężarka m , tym szybciej nastąpi powtórne uderzenie i wówczas dodatkowy impuls energii zostaje udzielony ciężarkowi M jeszcze w pierwszej ćwiartce okresu, kiedy to prędkości obu ciężarków są dodatnie.

Zauważmy, że bezwymiarowy parametr δ (2.3) można wyrazić przez bezwymiarowy czas γ , po upływie którego następuje powtórne uderzenie. Korzystając w tym celu ze wzoru (1.12) znajdujemy

$$(2.4) \quad \delta = \frac{4}{\gamma} \left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right).$$

A zatem spośród czterech parametrów α , β , γ , i δ tylko trzy są niezależne. W związku z tym okazuje się celowe przedstawienie współczynnika κ jako funkcji parametru δ . Wówczas bowiem przy ustalonej wartości k otrzymuje się dla każdego stosunku mas μ jedną krzywą, zastępującą pęk krzywych (dla $\omega = \nu ar$) w układzie współrzędnych κ , H . Układ κ , δ daje zatem krzywe bardziej uniwersalne od krzywych w układzie κ , H .

Na rysunku 4 przedstawiono zależność $\kappa = \kappa(\delta)$ dla dwóch wartości $\mu = 1/2$ i $1/4$ oraz $k = 5/9$.

Jak widać z rysunku krzywe te przy $\delta \rightarrow \infty$ zbliżają się asymptotycznie do prostych $\kappa = \kappa_0$, określających maksymalną (dla danego μ) wartość współczynnika uderzenia wtórnego.

Ze wzoru (2.2) wynika, iż dla wyznaczenia tego maksimum należy znaleźć granicę wyrażenia $\delta \sin \gamma$, która dla $\delta \rightarrow \infty$ staje się symbolem nieoznaczonym $\infty \cdot 0$ (przy

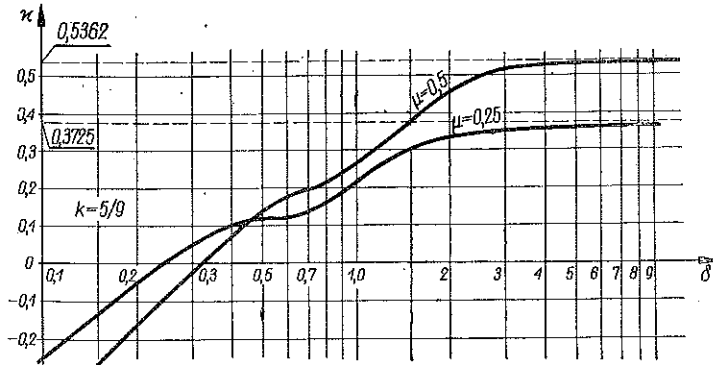
ustalonej wartości $\omega \neq 0$ warunkowi $\delta \rightarrow \infty$ odpowiada $H \rightarrow 0$, a wówczas także $\gamma = \omega\tau \rightarrow 0$.

Posiłkując się wzorem (2.4) znajdujemy łatwo

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta \sin \gamma = \lim_{\gamma \rightarrow 0} 4 \frac{\sin \gamma}{\gamma} \left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) = 4(\bar{\alpha} + \bar{\beta}).$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$(2.5) \quad \kappa_0 = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \kappa = [1 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + 4\bar{\beta}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + 2(1 - \bar{\beta})\sqrt{4\bar{\beta}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}}]^{\mu} - 1.$$



Rys. 4. Krzywa $\kappa = \kappa(\delta)$ dla $k = 5/9$, $\mu = 1/2$ i $1/4$

W układzie współrzędnych κ, H (rys. 3) wartości κ_0 odpowiada punkt na osi rzędnych ($H = 0$), będący punktem skupienia krzywych $\kappa = \kappa(H)$, odpowiadających różnym częstościom ω przy danym stosunku μ . Należy zauważyć, iż współczynnik κ przy $H = 0$ ma tylko znaczenie formalne, ponieważ w tym przypadku nie można w ogóle mówić o uderzeniu. Wartość κ_0 wyznaczona ze wzoru (2.5) potrzebna jest jedynie przy sporządzaniu wykresów $\kappa = \kappa(H)$ lub $\kappa = \kappa(\delta)$.

3. Efekt uderzenia wtórnego na płaszczyźnie fazowej

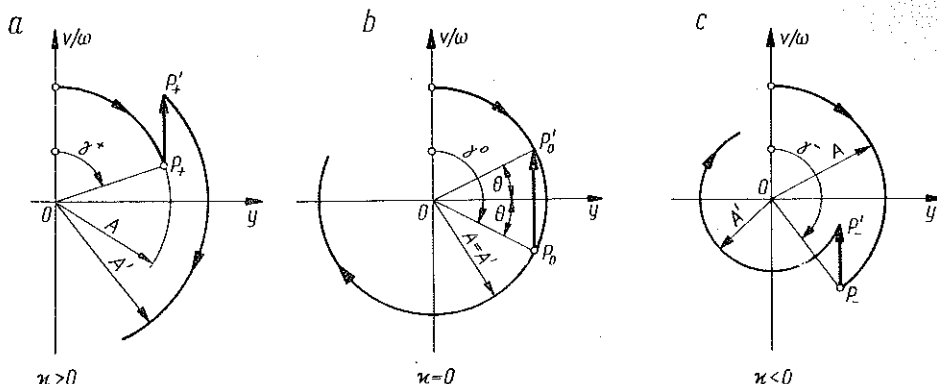
Efekt uderzenia wtórnego posiada prostą interpretację geometryczną, jeżeli ruch ciężarka uderzanego przedstawić na płaszczyźnie fazowej (rys. 5). Stan ruchu (tzn. wychylenie i prędkość) ciężarka w momencie poprzedzającym bezpośrednio uderzenie wtórne reprezentuje punkt P , zaś po uderzeniu — punkt P' . Z rysunku 5a widać, że gdy uderzenie to nastąpi, zanim jeszcze punkt P osiągnie pewne graniczne położenie P_0 , to zawsze promień $\overline{OP'_+} = A'$ będzie większy od promienia $\overline{OP_+} = A$. Przypadek kiedy $A' > A$ określiliśmy powyżej jako dodatni efekt uderzenia wtórnego. Dla efektu ujemnego mamy odpowiednio $\overline{OP'_-} < \overline{OP_-}$ (rys. 5c).

Kąt środkowy 2θ odpowiadający zmianie prędkości v przy efekcie zerowym (rys. 5b) można wyznaczyć z warunku

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \frac{v'_2 - v'_1}{\omega A} = \frac{1}{2} \frac{v'_2 - v'_1}{v_2},$$

który po wykorzystaniu wzorów (1.11), (1.14) i (1.15) przyjmuje postać

$$(3.1) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta \delta \sin \gamma + \bar{a}^2} - \bar{\beta} \cos \gamma \right).$$



Rys. 5. Ruch ciężarka M na płaszczyźnie fazowej w przypadku dodatniego, zerowego i ujemnego efektu uderzenia wtórnego

Efekt zerowy określony jest na płaszczyźnie fazowej kątem

$$(3.2) \quad \gamma_n^0 = (2n-1) \frac{\pi}{2} + (-1)^{n+1} \theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

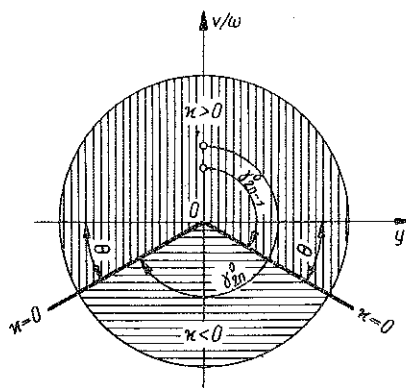
mierzonym od dodatniej półosi \dot{y}/ω w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

W związku z tym można ustalić przedziały wartości kąta γ_n (rys. 6): dla efektu dodatniego

$$(3.3) \quad \gamma_{2n}^0 < \gamma^+ < \gamma_{2n-1}^0$$

oraz dla efektu ujemnego

$$(3.4) \quad \gamma_{2n-1}^0 < \gamma^- < \gamma_{2n}^0.$$



Rys. 6. Zakresy dodatniego i ujemnego efektu uderzenia wtórnego na płaszczyźnie fazowej

4. Znaczenie praktyczne dodatniego efektu uderzenia wtórnego

Rozważania przeprowadzone na modelu oscylatora harmonicznego i wynikające stąd wnioski zachowują swą ważność także w odniesieniu do elementów sprężystych o charakterze kontinuum. Wówczas jednakże przez M należy rozumieć masę elementu uderzanego zredukowaną do miejsca, w którym następuje uderzenie.

W uproszczonej teorii obciążeń udarowych przyjmuje się, iż ciężar uderzający zostaje trwale związany z elementem uderzanym (uderzenie doskonale plastyczne), po czym dalszy ruch obie masy odbywają wspólnie. W wyniku tego założenia (jak

również wskutek nieuniknionego wpływu tłumienia wewnętrznego) moment niebezpieczny występuje po upływie $1/4$ okresu drgań własnych układu podlegającego uderzeniu.

Tymczasem w świetle uzyskanych powyżej wyników okazuje się, że tak obliczane maksymalne naprężenia udarowe mogą być oceniane z niedomiarem, jeżeli tylko parametry układu sprzyjają wystąpieniu dodatniego efektu uderzenia wtórnego.

O tym, jak wielki błąd może wówczas powstać przekonuje nas wykres na rys. 3; np. dla $\mu = 1/2$, $\omega = 10 \text{ sek}^{-1}$, $H = 2 \text{ cm}$ wzrost wartości maksymalnych naprężeń udarowych spowodowany uderzeniem wtórnym dochodzi do 40% ($\alpha \approx 0,4$). Należy wprawdzie zauważyć, że przy tak nieznacznych wysokościach spadku H naprężenia te są w ogóle niewielkie, co może w pewnym sensie pomniejszać niebezpieczeństwo wynikające z powodu uderzenia wtórnego. Tym niemniej dla układów o małej częstotliwości własnej efekt ten wywiera doniosły wpływ także i przy większych wysokościach H .

N.K. SNITKO podaje w swej książce [2] (str. 96, rys. 42) oscylogram ugięć przekroju środkowego belki swobodnie podpartej, poddanej obciążeniu udarowemu. Na oscylogramie tym widoczny jest wyraźnie dodatni efekt uderzenia wtórnego. Autor wspomnianej książki stwierdza wprawdzie, iż wychylenie po drugim uderzeniu

było w danym przypadku większe od wychylenia po uderzeniu pierwszym, jednakże nie analizuje zupełnie tego zjawiska od strony ilościowej.

Krzywe na rys. 3 sporządzono przy założeniu stałej wartości współczynnika k . Tymczasem pomiary wykazują, że współczynnik ten na ogół maleje ze wzrostem wysokości spadku H , [1]. Uwzględnienie tego faktu daje krzywą odchylną w kierunku większych wartości α , której orientacyjny przebieg przedstawia linia przerywana na rys. 7. Z tego powodu rzeczywisty przedział wartości H , przy których występuje efekt dodatni, jest większy niż to wynika z krzywych na rys. 3 ($H_1^0 > H^0$).

Rys. 7. Krzywa $\alpha = \alpha(H)$ w przypadku stałej i zmiennej wartości współczynnika uderzenia

Wyznaczenie krzywej $\alpha = \alpha(H)$ uwzględniającej tę poprawkę wymagałoby oczywiście znajomości funkcji $k = k(H)$, co — jak się zdaje — dotychczas nie zostało ustalone.

5. Wnioski

Analizując przebieg krzywych $\alpha = \alpha(H)$ należy stwierdzić, że dodatni efekt uderzenia wtórnego jest szczególnie niebezpieczny w odniesieniu do układów sprężystych o małej częstotliwości własnej oraz w przypadku małych wysokości spadku ciężarka uderzającego.

Jeżeli zatem przy wyznaczaniu naprężeń udarowych jakiegoś elementu stwierdzimy możliwość wystąpienia tego efektu (do czego służą zależności podane w p. 3), to zamiast stosowanego dotychczas współczynnika dynamicznego μ_d należałoby przyjmować w obliczeniach $\mu'_d = \mu_d(1+\kappa)$.

Natomiast w przypadku, kiedy mamy do czynienia z efektem ujemnym, należy zachować współczynnik μ_d bez zmiany, stosownie do uwagi podanej w p. 2, dotyczącej tego rodzaju efektu.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, *Курс теоретической механики*, т. II, Москва 1955.
[2] Н. К. Снитко, *Динамика сооружений*, Москва-Ленинград 1960.

Резюме

ВТОРИЧНЫЙ ПРЯМОЙ УДАР В ГАРМОНИЧЕСКОЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Дается анализ поведения гармонического осциллятора, в котором колебания возбуждаются с помощью гири, падающей с известной высоты. Вследствие удара (не абсолютно упругого) гиря отскакивает, а затем наступает вторичный удар.

Доказывается, что в некоторых случаях это может вызвать рост амплитуды отклонения осциллятора, по сравнению с аналогичным отклонением при одновременном ударе. Такой рост амплитуды, названный положительным эффектом вторичного удара, наблюдается на стальной балке подверженной ударной нагрузке с помощью падающей гири.

Рассматривается движение осциллятора на фазовой плоскости и даются зависимости, позволяющие определить род эффекта вторичного удара при известных параметрах системы, подвергающейся удару.

Summary

SECONDARY SIMPLE IMPACT ON A HARMONIC OSCILLATOR

The object of the present analysis is the behaviour of a harmonic oscillator of which the vibration is excited by a weight falling from a certain height. As a consequence of the impact (which is not perfectly elastic) the weight rebounds, this being followed by another impact.

It is shown that this secondary impact may cause in some cases an increase of the displacement of the oscillator in relation to the displacement produced by a single impact. Such an increase of the amplitude, called the «positive effect» of the secondary impact has been observed on a steel bar subjected to the action of a falling weight.

The motion of the oscillator is discussed in the phase plane, relations being given enabling the determination of the type of the effect of the secondary impact, for known parameters of the system.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1960 r.