

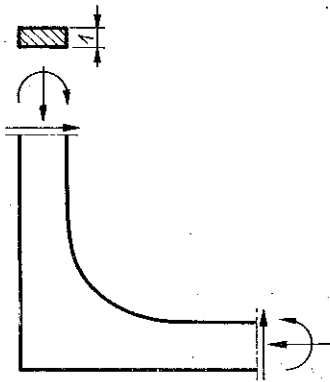
KAZIMIERZ WYSIATYCKI

NAPRĘŻENIA W NAROŻU RAMY O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

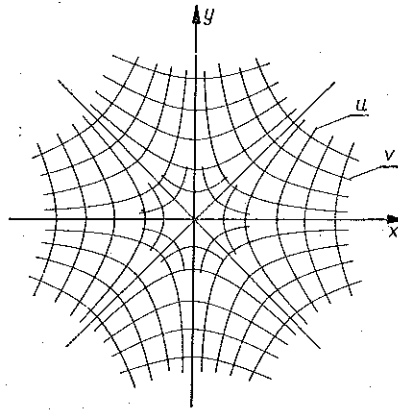
ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXIII

TOM IX • ZESZYT 2 • ROK 1961

Przy projektowaniu konstrukcji ramowych większych rozpiętości potrzebna jest znajomość rozkładu naprężeń w narożach ramy. Ze względu na skomplikowany kształt naroża wyznaczenie naprężeń metodami statyki elementarnej prowadzi do znacznych błędów i dlatego konstruktorzy w wątpliwych przypadkach uciekają się do badań eksperymentalnych. Poniżej podamy metodę obliczenia naprężeń w narożu sprężystej ramy o przekroju prostokątnym i kształcie przedstawionym na rys. 1.



Rys. 1



Rys. 2

1. Biorąc pod uwagę funkcję analityczną

$$(1.1) \quad w = z^2, \quad u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy$$

i oddzielając część rzeczywistą od części urojonej otrzymamy dwie rodziny hiperbol

$$(1.2) \quad v = 2xy, \quad u = x^2 - y^2,$$

które tworzą ortogonalne współrzędne przedstawione na rys. 2. Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych  $v/v_0 = \alpha$ ,  $u/v_0 = \beta$  możemy wyznaczyć współrzędne prostokątne  $x$ ,  $y$  jako funkcje współrzędnych krzywoliniowych  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{v_0}{2} \sqrt{\beta + c}}, \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{v_0}{2} \sqrt{-\beta + c}},$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{v_0}{2} \sqrt{\beta - c}}, \quad y_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{v_0}{2} \sqrt{-\beta - c}},$$

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Indeksy 1, 2, 3, 4 oznaczają poszczególne ćwiartki płaszczyzny  $xOy$ , a dla interesującej nas pierwszej ćwiartki otrzymamy wyrażenia

$$(1.3) \quad x = \sqrt{\frac{v_0}{2}} \sqrt{c+\beta}, \quad y = \sqrt{\frac{v_0}{2}} \sqrt{c-\beta}.$$

Funkcja naprężeń (funkcja Airy'ego) dla płaskiego sprężystego stanu napięcia spełnia znane równanie różniczkowe

$$(1.4) \quad \Delta \Delta F = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(1.5) \quad h_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad h_v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

$$\Delta^x = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

możemy operator Laplace'a przedstawić w postaci (por. np. [1], [2])

$$(1.6) \quad \Delta = \frac{\Delta^x}{h_u h_v v_0^2}.$$

Ponieważ współrzędne spełniają warunki Cauchy'ego dla funkcji analitycznych, otrzymamy wyrażenie

$$h_u^2 = h_v^2 = h^2 = \frac{1}{4v_0 c}$$

i równanie biharmoniczne (1.4) przyjmie postać następującą:

$$\Delta \Delta F = 16v_0^{-2} c \Delta^x (c \Delta^x F) = 0.$$

Po rozwinięciu otrzymamy ostatecznie równanie różniczkowe następującej postaci:

$$(1.7) \quad \Delta \Delta F = 16v_0^{-2} \left[ c^2 \Delta^x + \left( 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 1 \right) \right] \Delta^x F = 0.$$

Znając funkcję naprężeń  $F$  łatwo obliczymy naprężenia; korzystać będziemy przy tym ze znanych wzorów na naprężenia we współrzędnych krzywoliniowych:

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_u = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u}, \\ \sigma_v = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}, \\ \tau_{uv} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u}. \end{array} \right.$$

2. Sprężyste pasmo tarczowe przedstawione na rys. 3 jest zginane momentem zginającym  $M$ , przyłożonym w dużym oddaleniu od początku układu. Warunki brzegowe równania różniczkowego (1.4) i (1.7) są następujące:

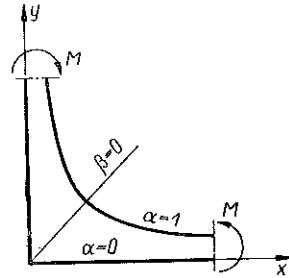
$$(2.1) \quad \begin{aligned} \text{dla } \alpha = 0 \quad F &= \frac{\partial F}{\partial n} = 0; \\ \text{dla } \alpha = 1 \quad F &= M, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \end{aligned}$$

Przyjmijmy funkcję naprężeń w następującej postaci:

$$(2.2) \quad F = F_0 + F_1 = M(3\alpha^2 - 2\alpha^3) + D(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) e^{-k\beta^2}.$$

Rozpatrzmy bliżej poszczególne wyrazy obranej funkcji (2.2). Wyraz  $F_0$  spełnia warunki brzegowe (2.1), gdyż spełnione są następujące zależności:

$$\begin{aligned} [F_0]_{\alpha=0} &= 0, \quad [F_0]_{\alpha=1} = M, \\ \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=1} &= \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=1} = \frac{\partial F_0}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}$$



Rys. 3

Przy oddalaniu się od początku układu w kierunku wzrastania rzędnych osi  $x$  (lub  $y$ ) współrzędne  $\alpha$  stają się proporcjonalne do współrzędnych  $y$  (lub  $x$ ) i wyraz  $F_0$  przyjmuje odpowiednio postać

$$(2.3) \quad \begin{cases} F_0 = M \left[ 3 \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 \right], \\ F_0 = M \left[ 3 \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{x_0} \right)^3 \right], \end{cases}$$

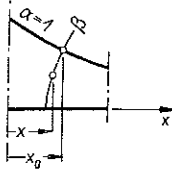
a naprężenia  $\sigma_u$  przechodzą odpowiednio w naprężenia

$$(2.4) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = \frac{6M}{y_0^2} \left( 1 - 2 \frac{y}{y_0} \right), \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = \frac{6M}{x_0^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{x_0} \right). \end{cases}$$

Można to łatwo wykazać, jeżeli funkcję  $F_0$  wyrazimy we współrzędnych prostokątnych wzorami (1.2):

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} F_0 &= M \left[ 3 \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{v}{v_0} \right)^3 \right] = M \left[ 3 \left( \frac{xy}{x_0 y_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{xy}{x_0 y_0} \right)^3 \right], \\ \begin{cases} \sigma_x = \frac{6M}{y_0^2} \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 2 \frac{x^3 y}{x_0^3 y_0} \right), \\ \sigma_y = \frac{6M}{x_0^2} \left( \frac{y^2}{y_0^2} - 2 \frac{y^3 x}{y_0^3 x_0} \right). \end{cases} \end{aligned}$$

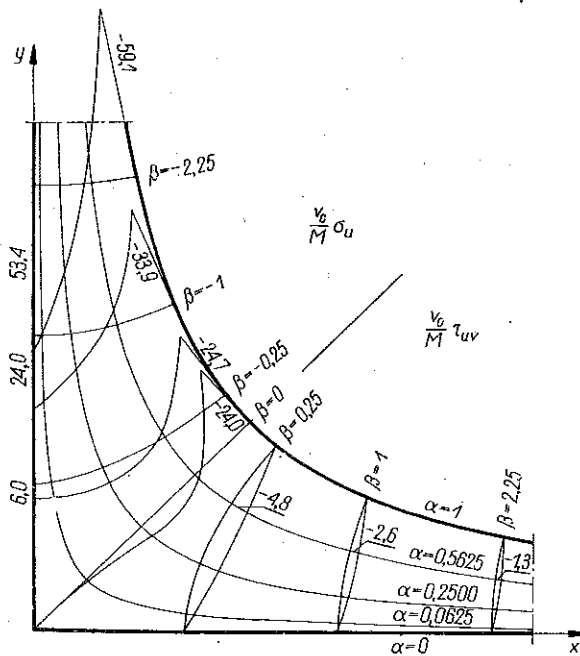
Dla określonej hiperboli w pewnym oddaleniu od początku układu (rys. 4) stosunek  $x/x_0$  (lub  $y/y_0$ ) dąży do jedności i wyrażenia (2.4.1) przyjmują postać (2.4). Jak można łatwo zauważyć, są to naprężenia w sprężystym pasmie o krawędziach równoległych i wysokości  $x_0$  (lub  $y_0$ ) – zginanym momentem zginającym  $M$ . Funkcja  $F_0$  spełnia więc warunki brzegowe (2.1) oraz może być uważana za rozwiązanie równania (1.7) w pewnym oddaleniu od początku układu współrzędnych. Stosując wzory (1.8) możemy obliczyć naprężenia, które przedstawia wyraz pierwszy obranej funkcji (2.2). Wykresy naprężeń pokazano na rys. 5.



Rys. 4

Drugi wyraz wyrażenia (2.2) przedstawia funkcję, która dąży do zera przy  $\beta \rightarrow \pm \infty$ , a dla  $\alpha = 0$  oraz  $\alpha = 1$  przyjmuje następujące wartości:

$$[F_1]_{\alpha=0} = [F_1]_{\alpha=1} = \left[ \frac{\partial F_1}{\partial n} \right]_{\alpha=0} = \left[ \frac{\partial F_1}{\partial n} \right]_{\alpha=1} = 0.$$



Rys. 5

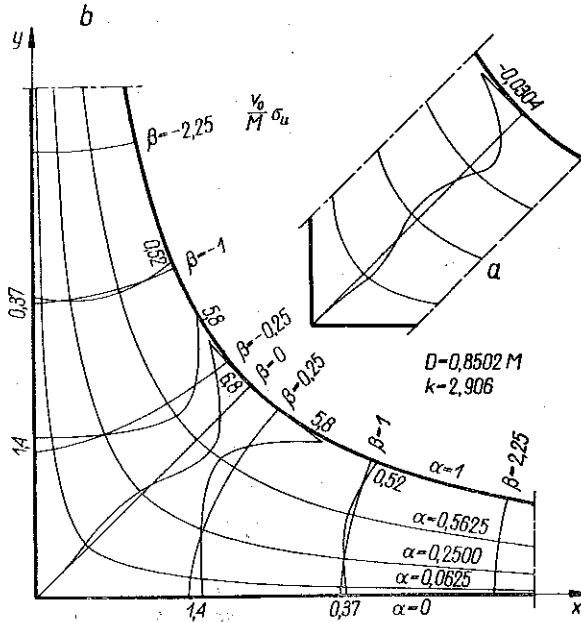
Można więc przyjąć, że funkcja ta uzupełnia wyraz pierwszy wyrażenia (2.2) w okolicy początku układu współrzędnych, a nieznane parametry  $D$  oraz  $k$  należy dobrać tak, aby równanie (1.7) było spełnione możliwie najdokładniej. Drugi wyraz wyrażenia (2.2) określa w tarczy zrównoważone naprężenia (rys. 6b).

Parametry przyjętej funkcji naprężeń można wyznaczyć jedną z metod wariacyjnych [3]. Poniżej zastosujemy metodę najmniejszego odchylenia kwadratowego.

Warunek wyznaczenia parametrów tą metodą przedstawia następująca całka:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \delta^2 = \int_A (\Delta \Delta F)^2 dA = \int_A \{ \Delta \Delta [M(3\alpha^2 - 2\alpha^3) + D(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) e^{-k\beta^2}] \} dA = \min. \\ \frac{\partial \delta^2}{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial \delta^2}{\partial k} = 0. \end{cases}$$

Warunki (2.5) stanowią układ dwóch równań algebraicznych nieliniowych ponieważ parametr  $k$  występuje w wykładniku potęgi. Współczynniki tych równań są



Rys. 6

całkami po obszarze tarczy  $A$ . Pierwszy wyraz funkcji (2.2) nie spełnia równania biharmonicznego jedynie w okolicy początku układu współrzędnych, co wynika ze wzorów (2.3) i (2.4). Dlatego też aby uprościć wyznaczanie nieznanymi parametrów  $D$  oraz  $k$  zażądamy, by warunek (2.5) był spełniony tylko wzdłuż prostej  $\beta = 0$ , gdyż tam właśnie mamy maksymalne odchylenie  $\delta^2$ . Pozwoli to nam na znaczne uproszczenie obliczeń.

Rozwinięcie lewej strony równania (1.7) prowadzi do następującej postaci równania różniczkowego:

$$(2.6) \quad \Delta \Delta F = c^2 \left( \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \beta^4} \right) + 2\alpha \frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} + 2\alpha \frac{\partial^3 F}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \\ + 2\beta \frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + 2\beta \frac{\partial^3 F}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = 0.$$



Po zróżniczkowaniu wyrażenia (2.11) względem obu parametrów otrzymamy następujący układ równań:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \int_0^1 [Ma(r+ks+k^2t)+D(r+ks+k^2t)^2] \frac{da}{\sqrt{a}} = 0, \\ \int_0^1 [Ma(s+2kt)+D(r+ks+k^2t)(s+2kt)] \frac{da}{\sqrt{a}} = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego równania (2.12) otrzymamy parametr  $D$ :

$$(2.13) \quad D = - \frac{\int_0^1 Ma(r+ks+k^2t) \frac{da}{\sqrt{a}}}{\int_0^1 (r+ks+k^2t)^2 \frac{da}{\sqrt{a}}}.$$

Po wprowadzeniu (2.13) do drugiego równania (2.12) i zastosowaniu następujących oznaczeń [por. (2.9)]:

$$(2.14) \quad \begin{cases} \bar{a}^2 = \int_0^1 aa \frac{da}{\sqrt{a}} = 36 \int_0^1 (1-6a)^2 \frac{da}{\sqrt{a}}, \\ \bar{ar} = \int_0^1 ar \frac{da}{\sqrt{a}} = 12 \int_0^1 (1-6a)(1-18a+42a^2) \frac{da}{\sqrt{a}} \text{ itd} \end{cases}$$

otrzymamy równanie

$$(2.15) \quad k^4(\bar{as}\bar{t}^2 - \bar{at}\bar{st}) + k^3(2\bar{ar}\bar{t}^2 + \bar{as}\bar{st} - \bar{at}\bar{s}^2 - 2\bar{at}\bar{rt}) + k^2(3\bar{ar}\bar{st} - 3\bar{at}\bar{rs}) + \\ + k(\bar{ar}\bar{s}^2 + 2\bar{ar}\bar{rt} - \bar{as}\bar{rs} - 2\bar{at}\bar{r}^2) + (\bar{ar}\bar{rs} - \bar{as}\bar{r}^2) = 0.$$

Jest to równanie algebraiczne czwartego stopnia względem niewiadomej  $k$ ; współczynniki równania przedstawiają sumy iloczynów całek (2.14). Całki te przedstawiają następujące wartości z dokładnością do piątego znaku dziesiętnego:

$$(2.16) \quad \begin{cases} \bar{ar} = -52,000, & \bar{r}^2 = 404,80, & \bar{s}^2 = 3,5664, \\ \bar{as} = 1,3714, & \bar{rs} = -19,357, & \bar{st} = 0,10150, \\ \bar{at} = -0,38800, & \bar{rt} = 1,9399, & \bar{t}^2 = 0,028200. \end{cases}$$

Po wprowadzeniu (2.16) do (2.15) otrzymamy poszukiwane równanie algebraiczne:

$$(2.15.1) \quad 0,07800k^4 + 0,09510k^3 - 38,37k^2 - 46,58k + 451,4 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są następujące liczby rzeczywiste:

$$k_1 = 2,906, \quad k_2 = 21,9, \quad k_3 = -4,15, \quad k_4 = -21,9.$$



Ponieważ funkcja  $F_1$  jest funkcją malejącą przy  $\beta \rightarrow \pm \infty$ , rozwiązaniem właściwym nie mogą być pierwiastki ujemne. W celu określenia właściwego pierwiastka dodatniego obliczymy odchylenie kwadratowe wzdłuż prostej  $\beta = 0$  i wybierzemy ten pierwiastek, który daje wartość mniejszą.

Według wzoru (2.5) mamy

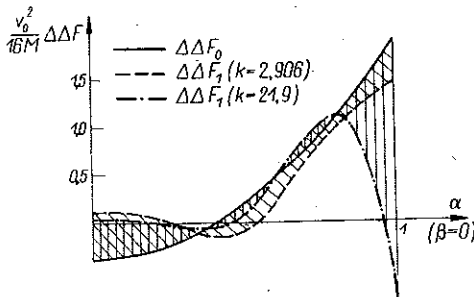
$$(2.17) \quad \delta^2 = \int_0^1 [Ma + D(r + ks + k^2t)]^2 \frac{da}{\sqrt{\alpha}}$$

Stosując wzory (2.13) i (2.16) otrzymamy następujące wartości:

$$k_1 = 2,906, \quad D_1 = 0,8502 M, \quad \delta^2 = 41,60;$$

$$k_2 = 21,9, \quad D_2 = 0,1062 M, \quad \delta^2 = 169,5.$$

Ponieważ  $k_1 = 2,906$  daje mniejsze odchylenie  $\delta^2$  — tę właśnie wartość należy przyjąć jako pierwiastek właściwy. Fizyczna interpretacja wyboru jednego z czterech pierwiastków jest prosta: funkcja



Rys. 7

(2.17) posiada cztery ekstrema, z których najmniejsze jest przy  $k = 2,906$ ,  $D = 0,8502 M$ . Jeżeli obliczymy rzędne  $\Delta \Delta F$  wzdłuż prostej  $\beta = 0$  dla obu dodatnich pierwiastków, to otrzymamy wykres przedstawiony na rys. 7. Powierzchnie zakreskowane skośnie i pionowo przedstawiają odchylenia od zera w przypadku stosowania obu pierwiastków.

3. Po wyznaczeniu parametrów funkcję naprężeń przedstawia następujące wyrażenie:

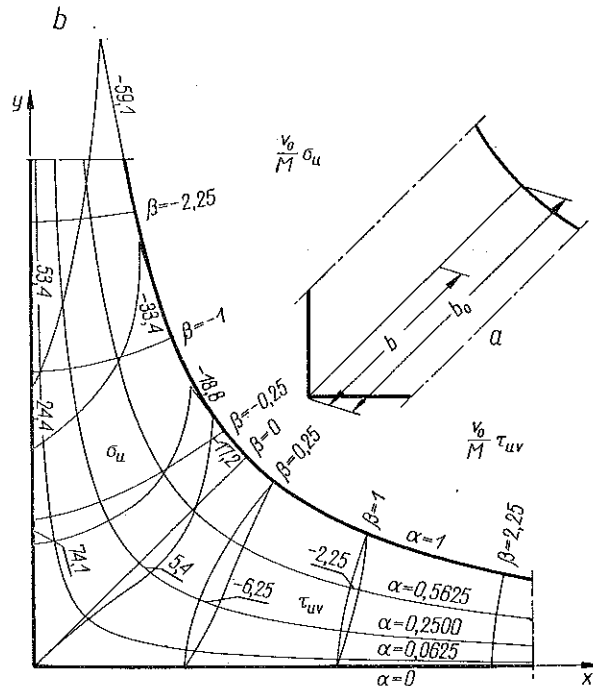
$$(3.1) \quad F = F_0 + F_1 = M[(3\alpha^2 - 2\alpha^3) + 0,8502(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4)e^{-2,906\beta^2}].$$

Korzystając z wzorów ogólnych (1.8) możemy wyznaczyć naprężenia w tarczy. Po obliczeniu wartości pomocniczych

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{1}{4} \frac{\beta}{\sqrt{v_0^3} \sqrt{c^5}}, \quad \frac{\partial \frac{1}{h}}{\partial u} = \frac{\beta}{\sqrt{v_0} \sqrt{c^3}}, \\ \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha}{\sqrt{v_0^3} \sqrt{c^5}}, \quad \frac{\partial \frac{1}{h}}{\partial v} = \frac{\alpha}{\sqrt{v_0} \sqrt{c^3}}. \end{array} \right.$$

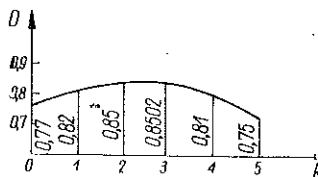


4. Przyjęta uprzednio funkcja (2.2) przedstawia rozwiązanie przybliżone. Analityczne ujęcie błędu popełnionego przy stosowaniu założonej funkcji jest zagadnieniem trudnym i dlatego zadowolimy się tutaj analizą uproszczoną.



Rys. 8

Zauważmy, że znajomość stanu napięcia w samym narożniku jest najbardziej potrzebna, gdyż w pewnej odległości od narożnika naprężenia są bardzo zbliżone do naprężeń występujących w belkach o zmiennej wysokości (por. np. [4]). W rozwiązaniu (2.2) parametr  $k$  nie wpływa bezpośrednio na naprężenia wzdłuż prostej  $\beta = 0$  ( $[e^{-k\beta^2}]_{\beta=0} = 1$ ) i jego wpływ na naprężenia w samym narożniku uwiadcza się tylko poprzez parametr  $D$ , który z kolei przedstawia wzór (2.13):



Rys. 9

$$(4.1) \quad D = -M \frac{\bar{a}\bar{r} + k\bar{a}\bar{s} + k^2\bar{a}\bar{t}}{\bar{r}^2 + 2k\bar{r}\bar{s} + k^2(\bar{s}^2 + 2\bar{r}\bar{t}) + 2k^3\bar{s}\bar{t} + k^4\bar{t}^2}$$

Jeżeli wprowadzimy wartości liczbowe (2.16), otrzymamy dla naszego rozwiązania następujący wzór:

$$(4.2) \quad D = 6M \frac{52,00 - 1,371k + 0,3879k^2}{404,8 - 38,71k + 7,446k^2 + 0,2030k^3 + 0,02820k^4}$$

Podstawiając różne wartości  $k$  otrzymamy wykres przedstawiony na rys. 9. Jest rzeczą widoczną, że bardzo duże zmiany parametru  $k$  w granicach od zera do pięciu

wywołują minimalne zmiany parametru  $D$  w granicach od 0,75 do 0,85. Możemy stąd wyciągnąć wniosek, że naprężenia w samym narożu zależą tylko w minimalnym stopniu od funkcji tłumiącej drugiego wyrazu wyrażenia (2.2). Zjawisko to posiada prostą interpretację fizyczną: składnik  $e^{-k\beta^2}$  wyrażenia (2.2) wpływa (nie zmieniając wypadkowej) na kształt rozkładu naprężeń dopiero poza początkiem układu współrzędnych (por. rys. 6), a w myśl zasady de Saint-Venanta sposób zaczepienia momentu w pewnym oddaleniu od rozpatrywanego obszaru nie ma wpływu na rozkład naprężeń w tym obszarze. A więc również i składnik  $e^{-k\beta^2}$  nie wpływa w istotny sposób na naprężenia w samym narożu tarczy. Wyłania się przez to możliwość znacznego uproszczenia obliczeń przez założenie parametru  $k$  bez istotnej (z praktycznego punktu widzenia) zmiany wartości naprężeń wzdłuż prostej  $\beta = 0$ . Jeżeli w punkcie  $(1, \beta)$  (rys. 8) obliczyliśmy uprzednio naprężenia  $\sigma_u = -17,2$ , to przy założeniu kolejno  $k = 0, 1, 2, 2,906, 4, 5$  otrzymamy odpowiednio  $\sigma_u = -17,7, -17,4; -17,2; -17,5; -18,0$ . Np. dla  $k = 0$  tok obliczeń jest następujący:

$$(4.3) \quad F = F_0 + F_1 = M(3\alpha^2 - 2\alpha^3) + D(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4);$$

$$(4.4) \quad \Delta \Delta F = \alpha^2 \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} + 2\alpha \frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = \\ = 6M(1 - 6\alpha) + 2D(1 - 18\alpha + 42\alpha^2) = Ma + Dr.$$

Korzystając z warunku na minimum odchylenia kwadratowego wzdłuż prostej  $\beta = 0$  otrzymamy jedno równanie analogiczne do równania (2.13) lub (4.1), z którego wyznaczymy parametr  $D$ :

$$D = -M \frac{\bar{a}r}{r^2} = 6 \frac{52,00}{404,8} M = 0,77 M.$$

Ścisłejsze rozwiązanie zagadnienia przedstawionego w p.2 możemy uzyskać, jeżeli przyjmiemy funkcję naprężeń w postaci następującego szeregu:

$$(4.5) \quad F = F_0 + \sum_{i=0}^{\infty} F_i = M(3\alpha^2 - 2\alpha^3) + \sum_{i=0}^{\infty} D_i(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^i e^{-k_i \beta^2} \\ (i = 0, 1, \dots n \dots).$$

Jeżeli ograniczymy się do dwóch wyrazów otrzymamy wyrażenie (2.2). W dalszym ciągu uwzględnimy również trzeci wyraz szeregu (4.5) i przyjmiemy następującą postać funkcji naprężeń:

$$(4.6) \quad F = F_0 + F_1 + F_2 = M(3\alpha^2 - 2\alpha^3) + D_0(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4)e^{-k_0 \beta^2} + \\ + D_1(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) e^{-k_1 \beta^2}.$$

Jak wynika z wyżej przeprowadzonej analizy parametry  $k_i$  wpływają w minimalnym stopniu na wartość parametrów  $D_i$  i dlatego w celu znacznego uproszczenia obliczeń

jako parametry  $k_0$  i  $k_1$  przyjmujemy uprzednio obliczoną wartość  $k = k_0 = k_1 = 2,906$ . Postępując identycznie jak w punkcie 2 wyznaczmy wartości  $D_0$  i  $D_1$ :

$$(4.7) \quad F_2 = D_1(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) e^{-k\beta^3} = -\frac{D_1}{2} (\alpha^2 - 4\alpha^3 + 5\alpha^4 - 2\alpha^5) e^{-k\beta^3};$$

$$(4.8) \quad [\Delta F_2]_{\beta=0} = D_1[(1 - 36\alpha + 210\alpha^2 - 260\alpha^3) - k(9\alpha^2 - 76\alpha^3 + 165\alpha^4 - 102\alpha^5) + k^2(6\alpha^4 - 24\alpha^5 + 30\alpha^6 - 12\alpha^7)] = D_1(r_1 + ks_1 + k^2t_1),$$

$$\delta^2 = \frac{1}{2\sqrt{v_0}} \int_0^1 [Ma + D_0(r + ks + k^2t) + D_1(r_1 + ks_1 + k^2t_1)]^2 \frac{da}{\sqrt{a}};$$

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta^2}{\partial D_0} = \int_0^1 [Ma(r + ks + k^2t) + D_0(r + ks + k^2t)^2 + \\ \qquad \qquad \qquad + D_1(r + ks + k^2t)(r_1 + ks_1 + k^2t_1)] \frac{da}{\sqrt{a}} = 0, \\ \frac{\partial \delta^2}{\partial D_1} = \int_0^1 [Ma(r_1 + ks_1 + k^2t_1) + D_0(r + ks + k^2t)(r_1 + ks_1 + k^2t_1) + \\ \qquad \qquad \qquad + D_1(r_1 + ks_1 + k^2t_1)^2] \frac{da}{\sqrt{a}} = 0. \end{array} \right.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymamy obok (2.16) jeszcze następujące wartości

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \overline{r_1 s_1} = -31,400, & \overline{s_1 t_1} = 0,05758, & \overline{t_1^2} = 0,0030300, \\ \overline{r_1 t_1} = 1,6973, & \overline{s_1^2} = 2,5814, & \overline{t_1 r} = -0,90510, \\ \overline{r_1^2} = 2709,1, & \overline{s_1 r} = 4,9082, & \overline{t_1 s} = -0,011700, \\ \overline{r_1 r} = -982,96, & \overline{s_1 s} = -2,4504, & \overline{t_1 t} = -0,0077640, \\ \overline{r_1 s} = 74,848, & \overline{s_1 t} = -0,089780, & \overline{ar_1} = 113,56, \\ \overline{r_1 t} = -2,4298, & & \overline{as_1} = -0,13108, \\ & & \overline{at_1} = 0,12810. \end{array} \right.$$

Wprowadzając  $k = 2,906$  oraz wartości (2.16) i (4.10) do (4.9) otrzymamy równania, z których wyznaczmy  $D_0$  oraz  $D_1$ :

$$M - 1,1766 D_0 + 1,3049 D_1 = 0,$$

$$M - 1,1715 D_0 + 1,8817 D_1 = 0;$$

$$D_0 = 0,8415M, \quad D_1 = -0,00760M.$$

Wartość  $D_0$  jest prawie identyczna z wartością otrzymaną w punkcie 2. Wyraz trzeci wyrażenia (4.6) przedstawia następujące naprężenia wzdłuż prostej  $\beta = 0$ :

$$\sigma_u = 0,00760M(-6\alpha + 60\alpha^2 - 140\alpha^3 + 90\alpha^4).$$

Naprężenia te są bardzo małe (rys. 6a) w stosunku do naprężeń, które określają dwa pierwsze wyrazy i dlatego słuszne było przyjęcie tylko dwóch wyrazów rozwiązania przedstawionego w p. 2.

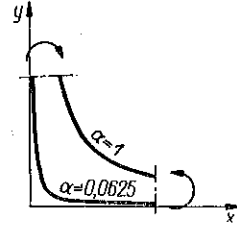
5. W podobny sposób można rozwiązać zginanie tarczy o zaokrąglonym narożu (rys. 10). Przyjmiemy wyraz pierwszy funkcji naprężeń w postaci następującego wielomianu:

$$F_0 = M(C_1 + C_2\alpha + C_3\alpha^2 + C_4\alpha^3).$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe problemu:

$$\text{dla } \alpha_1 = 0,0625 \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0;$$

$$\text{dla } \alpha_2 = 1 \quad F = M, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0,$$



Rys. 10

możemy wyznaczyć stałe  $C_i$ :

$$(5.1) \quad F_0 = M(0,01392 - 0,4551\alpha + 3,8684\alpha^2 - 2,4273\alpha^3)$$

$$(5.2) \quad \Delta\Delta F_0 = 16M(7,7369 - 43,6907\alpha) = 16Ma.$$

Wyraz drugi przyjmiemy w postaci następującej funkcji:

$$F_1 = D(C_1 + C_2\alpha + C_3\alpha^2 + C_4\alpha^3 + C_5\alpha^4)e^{-k\beta^2}.$$

Stale  $C_i$  wyznaczmy z warunków:

$$\text{dla } \alpha = 0,0625 \quad F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial n} = 0;$$

$$\alpha = 1 \quad F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial n} = 0;$$

$$\alpha = \frac{1+0,0625}{2} \quad \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = 0.$$

Po wykonaniu obliczeń znajdziemy

$$(5.3) \quad F_1 = D(0,003906 - 0,13281\alpha + 1,2539\alpha^2 - 2,1250\alpha^3 + \alpha^4)e^{-k\beta^2},$$

$$\begin{aligned} [\Delta\Delta F_1]_{\beta=0} &= 16D[(2,5078 - 38,250\alpha + 84,00\alpha^2) - \\ &\quad - k(0,007812 - 0,79687\alpha + 22,570\alpha^2 - 80,750\alpha^3 + 66\alpha^4) + \\ &\quad + k^2(0,04687\alpha^2 - 1,5937\alpha^3 + 15,046\alpha^4 - 25,500\alpha^5 + 12\alpha^6)] = \\ &= 16D(r + ks + k^2t). \end{aligned}$$

Postępując identycznie jak w p. 2 otrzymamy równanie algebraiczne analogiczne do (2.15.1), z którego wyznaczymy parametr  $k$ :

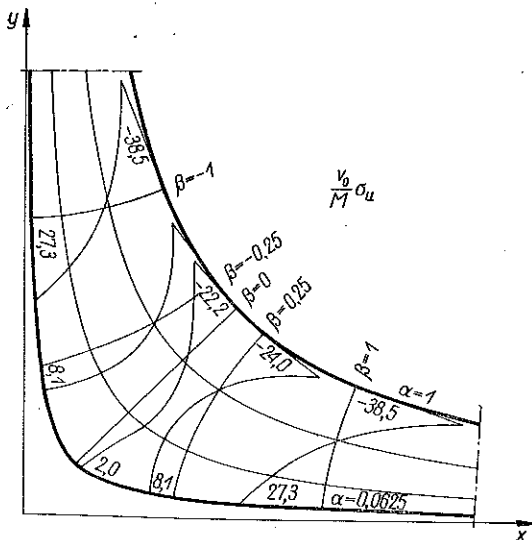
$$506,0 - 49,58k - 20,09k^2 + 0,160k^3 + 0,062k^4 = 0,$$

$$k = 4,066, \quad D = 0,729 M.$$

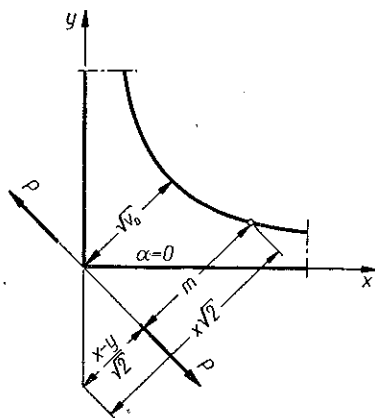
Znając oba parametry obliczymy naprężenia:

$$\sigma_u = \frac{M}{\nu_0 c} \left\{ -0,9102\alpha + 46,4213\alpha^2 - 72,8178\alpha^3 + \right. \\ \left. + \beta^2(30,9475 - 58,2543\alpha) + 0,729[(-0,2656\alpha + 12,5390\alpha^2 - \right. \\ \left. - 63,750\alpha^3 + 56\alpha^4) + \beta^2(10,095 - 53,1598\alpha + 68,3934\alpha^2 - \right. \\ \left. - 34,5610\alpha^3 + 16,2640\alpha^4)] e^{-4,066\beta^2} \right\}.$$

Wykres naprężeń przedstawiony jest na rys. 11.



Rys. 11



Rys. 12

6. Tarcza przedstawiona na rys. 12 jest rozciągana siłą przyłożoną w nieskończoności. Dla tego przypadku warunki brzegowe można określić następująco:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \text{dla } \alpha = 0 & F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0; \\ \alpha = 1 & F = Pm, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{P}{\sqrt{2}} = \text{const.} \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę wzory (1.3) oraz rys. 12 otrzymamy następujące zależności:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} c_1 &= [c]_{\alpha=1} = \sqrt{1 + \beta^2}, \\ m &= x\sqrt{2} - \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\nu_0}(\sqrt{c_1 + \beta} + \sqrt{c_1 - \beta}), \\ [F]_{\alpha=1} &= Pm = \frac{P\sqrt{\nu_0}}{2}(\sqrt{c_1 + \beta} + \sqrt{c_1 - \beta}). \end{aligned}$$

Wyznaczmy pochodne funkcji naprężeń na konturze:

$$(6.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} \right), \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{(\beta/c)+1}{\sqrt{v_0}\sqrt{c+\beta}}, & \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{(\beta/c)-1}{\sqrt{v_0}\sqrt{c-\beta}}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{(\alpha/c)}{\sqrt{v_0}\sqrt{c+\beta}}, & \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\alpha/c}{\sqrt{v_0}\sqrt{c-\beta}}. \end{cases}$$

Uwzględniając wyrażenia (6.4) i warunki brzegowe (6.1) możemy z równań (6.3) wyznaczyć pochodne w kierunkach  $u$  i  $v$ :

$$(6.5) \quad \begin{cases} \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{\alpha=1} = \frac{P}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}), \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial v} \right]_{\alpha=1} = \frac{P}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}). \end{cases}$$

W ten sposób warunki brzegowe wyrażone wzorem (6.1) można zapisać również w postaci (6.2) oraz (6.5).

Założymy funkcję naprężeń o budowie analogicznej do (2.2) przyjętej przy zgięciu:

$$(6.6) \quad F = F_0 + D(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4)e^{-k\beta^2}.$$

Wyraz  $F_0$  powinien spełniać warunki brzegowe (6.1). Przyjmiemy zatem następującą postać tego wyrazu:

$$(6.7) \quad F_0 = f_1(\beta) + f_2(\beta)\alpha + f_3(\beta)\alpha^2 + f_4(\beta)\alpha^3.$$

Z warunku (6.1) oraz (6.2) i (6.5) otrzymamy następujące zależności:

$$(6.8) \quad \begin{cases} f_1(\beta) = f_2(\beta) = 0, \\ [F_0]_{\alpha=1} = f_3(\beta) + f_4(\beta) = \frac{P\sqrt{v_0}}{2} (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}), \\ \left[ \frac{\partial F_0}{\partial v} \right]_{\alpha=1} = 2f_3(\beta) + 3f_4(\beta) = \frac{P}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}), \\ \left[ \frac{\partial F_0}{\partial u} \right]_{\alpha=1} = \frac{\partial}{\partial u} (f_3(\beta) + f_4(\beta)) = \frac{P}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}). \end{cases}$$



Warunki brzegowe przedstawione wierszami pierwszym i trzecim wzorów (6.8) są sobie równoważne, wobec tego z dwóch pierwszych równań wyznaczmy poszukiwane funkcje:

$$f_3(\beta) = P\sqrt{v_0} \left[ \frac{3}{2}(\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) - \frac{1}{4c_1}(\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) \right],$$

$$f_4(\beta) = -P\sqrt{v_0} \left[ (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) - \frac{1}{4c_1}(\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) \right].$$

Stąd mamy

$$(6.9) \quad F = F_0 + F_1 = \frac{P\sqrt{v_0}}{2} \left[ (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) \left( 3 - \frac{1}{2c_1} \right) \alpha^2 - \right. \\ \left. - (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}) \left( 2 + \frac{1}{2c_1} \right) \alpha^3 \right] + D(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) e^{-k\beta^2}.$$

Parametry  $D$  oraz  $k$  wyznaczmy analogicznie jak to uczyniliśmy przy zginaniu. Różniczkując funkcję (6.9) według wzoru (1.7) otrzymamy następujące wzory dla  $\beta = 0$ :

$$(6.10) \quad \Delta\Delta F = \Delta\Delta F_0 + \Delta\Delta F_1 = \frac{P}{2v_0\sqrt{v_0}} (160 - 864\alpha + 324\alpha^2 - \\ - 700\alpha^3 - 195\alpha^4 + 165\alpha^5) + \frac{16D}{v_0^2} [2(1 - 18\alpha + 42\alpha^2) - \\ - 2k\alpha^2(9 - 38\alpha + 33\alpha^2) + 12k^2\alpha^4(1 - 2\alpha + \alpha^2)].$$

Po przyjęciu (2.14) oraz po wprowadzeniu oznaczeń

$$a = 160 + 864\alpha + 324\alpha^2 - 700\alpha^3 - 195\alpha^4 + 165\alpha^5$$

oraz na  $r$ ,  $s$  i  $t$  według (2.9) słuszne będą również wzory (2.11), (2.12), (2.13) oraz (2.15). Otrzymamy więc równanie, z którego możemy wyznaczyć  $k$ :

$$\bar{ar} = -10123, \quad \bar{as} = 363,72, \quad \bar{at} = -64,512 \\ 0,16806k^4 - 0,53628k^3 - 6829,4k^2 - 16107k + 48718 = 0.$$

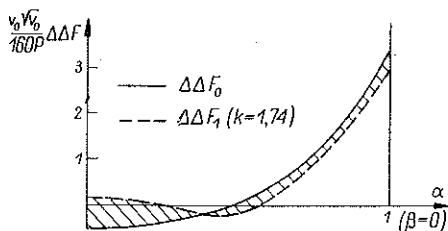
Pierwiastkami tego równania są liczby

$$k_{1,2,3,4} = 1,74; 22,7; -4,35; -16,9.$$

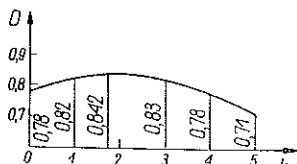
Praktycznie ważnym jest pierwiastek  $k = 1,74$  oraz obliczony za pomocą wzoru (2.13) parametr  $D = 0,842P\sqrt{v_0}$ . Wykres odchylenia funkcji (6.10) dla prostej  $\beta = 0$  przedstawia rys. 13. Zależność  $D$  od parametru  $k$  można wyrazić wzorem analogicznym do (4.2):

$$D = 6P\sqrt{v_0} \frac{52,718 + 1,8943k - 0,3360k^2}{404,8 - 38,71k + 7,446k^2 + 0,2030k^3 + 0,0282k^4}.$$

Jak było do przewidzenia, także w tym przypadku naprężenia  $[\sigma_u]_{\beta=0}$  są bardzo mało zależne od parametru  $k$  (rys. 14).



Rys. 13



Rys. 14

Przez zróżniczkowanie funkcji naprężeń otrzymamy wzory na naprężenia. Po wprowadzeniu oznaczeń

(6.11)

$$\begin{cases} A = 3(\sqrt{c_1 + \beta} + \sqrt{c_1 - \beta}) - \frac{1}{2c_1}(\sqrt{c_1 + \beta} + \sqrt{c_1 - \beta}), \\ B = -2(\sqrt{c_1 + \beta} + \sqrt{c_1 - \beta}) + \frac{1}{2c_1}(\sqrt{c_1 + \beta} + \sqrt{c_1 - \beta}), \\ C = \frac{3}{2c_1}(\sqrt{c_1 + \beta} - \sqrt{c_1 - \beta}) - \frac{1}{4c_1^2} \left[ \sqrt{c_1 + \beta} \left( 1 - 2\frac{\beta}{c_1} \right) - \sqrt{c_1 - \beta} \left( 1 + 2\frac{\beta}{c_1} \right) \right], \\ D = -\frac{1}{c_1}(\sqrt{c_1 + \beta} - \sqrt{c_1 - \beta}) + \frac{1}{4c_1^2} \left[ \sqrt{c_1 + \beta} \left( 1 - 2\frac{\beta}{c_1} \right) - \sqrt{c_1 - \beta} \left( 1 + 2\frac{\beta}{c_1} \right) \right] \end{cases}$$

naprężenia można wyrazić w następującej postaci:

$$\sigma_u = \frac{P}{c\sqrt{v_0}} \{ (2Aa^2 + 3Ba^3) + 2c^2(2A + 6Ba) - \beta(Ca^2 + Da^3) + \\ + 4 \cdot 0,842 [(3a^2 - 15a^3 + 14a^4) + \beta^2(2 - 12a + 12a^2) + \\ + 1,74\beta^2(a^2 - 2a^3 + a^4)] e^{-1,74\beta^2} \},$$

$$\sigma_v = \frac{P}{c\sqrt{v_0}} \left\{ \beta + 2c^2 \frac{\partial}{\partial \beta} (Ca^2 + Da^3) - a^2(2A + 3Ba) - \right. \\ \left. - 4 \cdot 0,842 [a^2(1 - 3a + 2a^2) + 1,74a^2\beta^2(1 - 2a + a^2) - \right. \\ \left. - 2 \cdot 1,74c^2a^2(1 - 2a + a^2)(2 \cdot 1,74\beta^2 - 1)] e^{-1,74\beta^2} \right\},$$

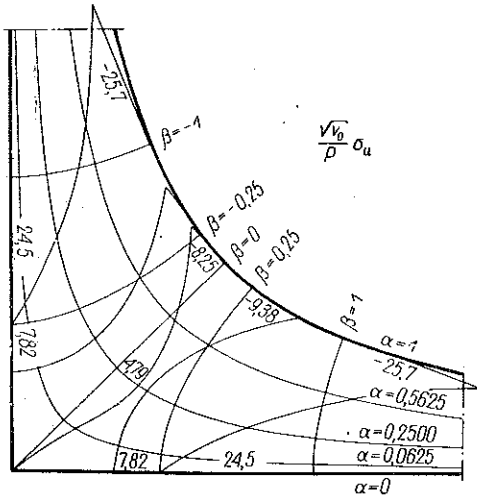
$$\tau_{uv} = -\frac{P}{c\sqrt{v_0}} \{ \beta(2Aa + 3Ba^2) + c^2(2Ca + 3Da^2) + \\ + (Ca^2 + Da^3) - 4 \cdot 0,842a\beta [(1 - 3a + 2a^2)(4 \cdot 1,74a^2 - 1) + \\ + 1,74a^2(1 - 2a + a^2) + 4 \cdot 1,74\beta^2(1 - 3a + 2a^2)] e^{-1,74\beta^2} \}.$$

Dla prostej  $\beta = 0$  otrzymamy następujące wzory:

$$\sigma_u = \frac{P}{\sqrt{v_0}} a [15(3-2a) + 4 \cdot 0,842(3-15a+14a^2)],$$

$$\sigma_v = -\frac{P}{\sqrt{v_0}} a \left\{ a \left( 10-9a - \frac{9}{2} a^2 + \frac{7}{2} a^3 \right) + 4 \cdot 0,842 [(1-3a+2a^2) + 2 \cdot 1,74a(1-2a+a^2)] \right\},$$

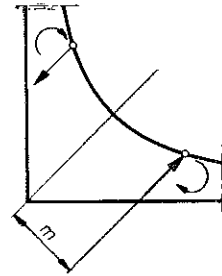
$$\tau_{uv} = 0.$$



Rys. 15

Wykres  $\sigma_u$  przedstawiony jest na rys. 15.

7. Tarcza przedstawiona na rys. 16 jest ścinana dwoma siłami  $T$ . Siły te wraz z momentami przyłożone



Rys. 16

są w nieskończoności, a wzdłuż prostej  $\beta = 0$  występują tylko naprężenia ścinające. Dla tego przypadku warunki brzegowe określimy w następujący sposób:

$$(7.1) \quad \begin{cases} \text{dla } v = 0 & F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0; \\ v = v_0 & F = Tm, \quad -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{T}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę wzory (1.3) otrzymamy wartość funkcji naprężeń na konturze:

$$(7.2) \quad \begin{cases} m = \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{v_0}}{2} (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}), \\ [F]_{\alpha=1} = Tm = \frac{T\sqrt{v_0}}{2} (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}). \end{cases}$$

Korzystając ze wzorów (6.3) i (6.4) otrzymamy pochodne wzdłuż krzywej  $\alpha = 1$ :

$$(7.3) \quad \begin{cases} \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{\alpha=1} = -\frac{T}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}), \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial v} \right]_{\alpha=1} = -\frac{T}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}). \end{cases}$$

Pierwszy wyraz funkcji naprężeń przyjmiemy w postaci funkcji (6.7). Z warunków

$$F_0 = f_3(\beta) + f_4(\beta) = \frac{T\sqrt{v_0}}{2} (\sqrt{c_1 + \beta} - \sqrt{c_1 - \beta}),$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial v} = 2f_3(\beta) + 3f_4(\beta) = -\frac{T}{4c_1\sqrt{v_0}} (\sqrt{c_1 + \beta} - \sqrt{c_1 - \beta})$$

wyznamy funkcję  $f_3(\beta)$  i  $f_4(\beta)$ :

(7.4)

$$F_0 = \frac{T\sqrt{v_0}}{2} \left\{ (\sqrt{c_1 + \beta} - \sqrt{c_1 - \beta}) \left( 3 + \frac{1}{2c_1} \right) \alpha^2 - (\sqrt{c_1 + \beta} - \sqrt{c_1 - \beta}) \left( 2 - \frac{1}{2c_1} \right) \alpha^3 \right\}.$$

Drugi wyraz funkcji naprężeń przyjmiemy w postaci następującej:

(7.5)

$$F_1 = D\beta(\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4)e^{-k\beta}.$$

Wartości  $F_1$  oraz  $\partial F_1/\partial n$  na krawędziach tarczy są równe zero, funkcja ta maleje ze wzrostem  $|\beta|$ , lecz — w odróżnieniu od wprowadzonych w p. 2 i 6 — jest antysymetryczna względem prostej  $\beta = 0$ . Przyjęta funkcja naprężeń  $F = F_0 + F_1$  spełnia warunki brzegowe (7.1) oraz — co można łatwo sprawdzić — spełnia równanie różniczkowe problemu (1.7) wzdłuż prostej  $\beta = 0$ . W celu wyznaczenia parametrów  $k$  i  $D$  za pomocą warunków (2.5) nie można się ograniczyć do całkowania wzdłuż prostej  $\beta = 0$ . Najbardziej celowe byłoby całkowanie po obszarze całej tarczy, jednak ze względu na trudności rachunkowe ograniczymy się do całkowania wzdłuż krzywej  $\beta = \pm 1$ . W ten sposób funkcja naprężeń spełniać będzie warunki brzegowe wzdłuż obu krawędzi; równanie różniczkowe będzie spełnione ściśle w pewnej odległości od początku układu i wzdłuż prostej  $\beta = 0$ . Natomiast wzdłuż krzywej  $\beta = \pm 1$  nasza funkcja naprężeń dobrana zostanie na zasadzie minimum odchylenia kwadratowego.

Postępując podobnie jak w p. 2 i 6 obliczymy  $\Delta\Delta F$ :

$$(7.6) \quad [\Delta\Delta F]_{\beta=1} = \frac{8T}{v_0\sqrt{v_0}} (11,421 - 48,484\alpha - 8,1742\alpha^2 + 14,563\alpha^3 + 0,1095\alpha^4 +$$

$$+ 0,1039\alpha^6) + \frac{32D}{v_0^2} [(15 - 30\alpha + 54\alpha^2) -$$

$$- k(16 - 96\alpha + 129\alpha^2 - 126\alpha^3 + 105\alpha^4) +$$

$$+ k^2(8 - 48\alpha + 120\alpha^2 - 184\alpha^3 + 150\alpha^4 - 60\alpha^5 + 30\alpha^6) -$$

$$- k^3(48\alpha^2 - 96\alpha^3 + 88\alpha^4 - 80\alpha^5 + 40\alpha^6) +$$

$$+ k^4(8\alpha^2 - 16\alpha^3 + 16\alpha^4 - 16\alpha^5 + 8\alpha^6)] e^{-k}.$$

Jeżeli poszczególne wielomiany wyrażenia (7.6) oznaczymy literami  $a$ ,  $r_0$ , ...,  $r_4$ , to (7.6) można zapisać krócej:

$$(7.7) \quad [\Delta\Delta F]_{\beta=1} = \frac{8T}{v_0\sqrt{v_0}} a + \frac{32D}{v_0^2} (r_0 + kr_1 + k^2r_2 + k^3r_3 + k^4r_4) e^{-k}.$$

Odchylenie wzdłuż krzywej  $\beta = 1$  można przedstawić w następującej postaci:

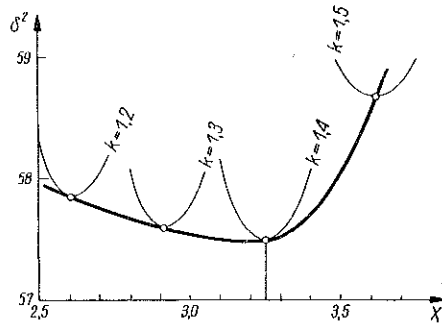
$$(7.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 &= \int_0^1 \left[ \frac{8T}{v_0 \sqrt{v_0}} a + \frac{32D}{v_0^2} (r_0 + kr_1 + k^2 r_2 + k^3 r_3 + k^4 r_4) e^{-k} \right]^2 ds = \min, \\ [ds]_{\beta=1} &= \frac{\sqrt{v_0}}{2\sqrt{1+\alpha^2}} da \approx \frac{\sqrt{v_0}}{2} (1 - 0,234\alpha^2 + 0,074\alpha^4) da. \end{aligned} \right.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$X = \frac{32D/v_0^2}{8T/v_0 \sqrt{v_0}} = \frac{4}{\sqrt{v_0}} \frac{D}{T}$$

i rozwinięciu wyrażenia w nawiasie otrzymamy wzór

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 &= \left( \frac{8T}{v_0 \sqrt{v_0}} \right)^2 \left\{ \bar{a}^2 + 2X e^{-k} (\bar{a}r_0 + k\bar{a}r_1 + k^2\bar{a}r_2 + k^3\bar{a}r_3 + k^4\bar{a}r_4) + \right. \\ &\quad + X^2 e^{-2k} [\bar{r}_0^2 + 2k\bar{r}_0\bar{r}_1 + k^2(2\bar{r}_0\bar{r}_1 + \bar{r}_1^2) + 2k^3(\bar{r}_0\bar{r}_3 + \bar{r}_1\bar{r}_2) + \\ &\quad + k^4(2\bar{r}_0\bar{r}_4 + 2\bar{r}_1\bar{r}_3 + \bar{r}_2^2) + 2k^5(\bar{r}_1\bar{r}_4 + \bar{r}_2\bar{r}_3) + \\ &\quad \left. + k^6(2\bar{r}_2\bar{r}_4 + \bar{r}_3^2) + 2k^7\bar{r}_3\bar{r}_4 + k^8\bar{r}_4^2 \right\} = \min, \\ \bar{a}^2 &= \int_0^1 a^2 ds, \quad \bar{a}r_2 = \int_0^1 ar_2 ds \text{ itd.} \end{aligned} \right.$$



Rys. 17

Po wykonaniu całkowania wyrażenie (7.9) przyjmie następującą postać:

$$(7.10) \quad \delta^2 = \left( \frac{8T}{v_0 \sqrt{v_0}} \right)^2 [265,12 + 2 e^{-k} X (-259,16 + 1,6812k - 26,613k^2 + \\ + 24,335k^3 - 4,2599k^4) + e^{-2k} X^2 (347,32 - 88,163k + \\ + 187,45k^2 - 125,84k^3 + 9,7504k^4 + 3,5936k^5 + \\ + 4,6216k^6 - 1,6176k^7 + 0,1384k^8)] = \min.$$

Ze względu na to, że w wyrażeniu (7.10) parametr  $k$  występuje w wykładniku potęgowym, najwygodniej określić minimum metodą graficzną (rys. 17). Tym spo-

sobem określamy  $k = 1,4$ ;  $X = 3,25$  oraz  $D = 0,81 T\sqrt{\nu_0}$ . Naprężenia  $\tau_{uv}$  określają następujące wzory:

$$(7.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{uv} &= -\frac{T}{\sqrt{\nu_0}} \frac{\alpha}{c} \left\{ \alpha\beta(2A-3B\alpha) + 2c^2(2D-3D\alpha) + \alpha^2(D-E\alpha) + \right. \\ &\quad + 2 \cdot 0,81 [2\beta^2(1-3\alpha+2\alpha^2) + 4c^2(1-3\alpha+2\alpha^2)(1-2,8\beta^2) + \\ &\quad \left. + \alpha^2(1-2\alpha+\alpha^2)(1-2,8\beta^2)] e^{-1,4\beta^2} \right\}, \\ [\tau_{uv}]_{\beta=0} &= -\frac{2T}{\sqrt{\nu_0}} \alpha^2 [(5D-7E\alpha) + 0,81(5-14\alpha+9\alpha^2)], \end{aligned} \right.$$

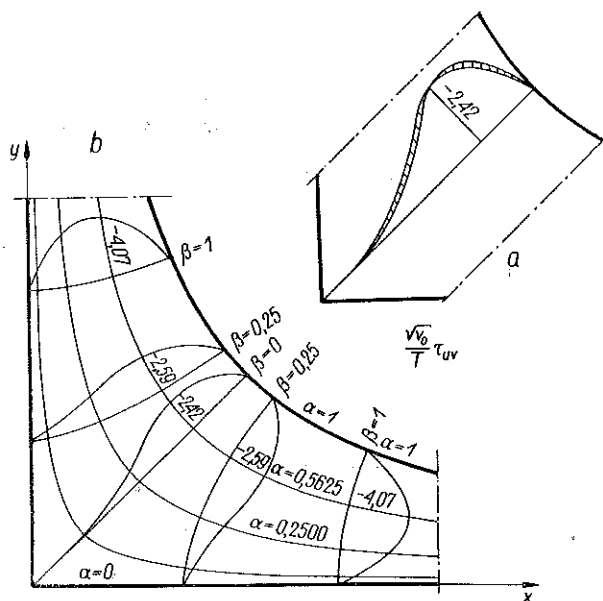
gdzie

$$A = (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}) \left( 3 - \frac{1}{2c_1} \right),$$

$$B = (\sqrt{c_1+\beta} - \sqrt{c_1-\beta}) \left( 2 - \frac{1}{2c_1} \right),$$

$$D = \frac{1}{c_1} \left\{ \frac{3}{2} (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) + \frac{1}{2c_1} \left[ \sqrt{c_1+\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta}{c_1} \right) + \sqrt{c_1-\beta} \left( \frac{1}{2} + \frac{\beta}{c_1} \right) \right] \right\},$$

$$E = \frac{1}{c_1} \left\{ (\sqrt{c_1+\beta} + \sqrt{c_1-\beta}) + \frac{1}{2c_1} \left[ \sqrt{c_1+\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta}{c_1} \right) + \sqrt{c_1-\beta} \left( \frac{1}{2} + \frac{\beta}{c_1} \right) \right] \right\}.$$



Rys. 18

Wykres naprężeń przedstawiony jest na rys. 18. Na rys. (18a) przedstawiono wpływ drugiego wyrazu (7.5) funkcji naprężeń (powierzchnia zakreskowana). Jak można się było spodziewać, wpływ ten jest niewielki, gdyż wyraz pierwszy (7.4) spełnia równanie różniczkowe wzdłuż prostej  $\beta = 0$  i w technicznych obliczeniach można przestać tylko na jednym wyrazie (7.4) funkcji naprężeń.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1954.
- [2] H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Berlin 1958.
- [3] Л. В. КАНТОРОВИЧ, В. Н. КРЫЛОВ, *Приближенные методы вычислительного анализа*, Москва 1950.
- [4] K. WYSIATYŃSKI, *Rozwiązanie pewnego typu tarczy nieograniczonej*, Rozpr. Inżyn., 4, 6 (1957).

#### Резюме

#### НАПРЯЖЕНИЯ В УГЛУ РАМЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе дается способ определения напряжений в упругой пластинке в форме угла рамы (Рис. 1).

Функция напряжений (функция Эри) дается в форме полинома (2.2) при помощи новых криволинейных координат. Параметры функции напряжений определяются с помощью вариационного исчисления из условия минимума квадратичного отклонения (2.5) что приводит к решению алгебраического уравнения четвертой степени (2.15).

Определяются напряжения в углу, находящимся под действием момента, растягивающей силы и сдвига.

#### Summary

#### THE STRESSES IN A CORNER OF A FRAME OF A RECTANGULAR CROSS-SECTION

A method is presented for the computation of the stresses in an elastic plate in the form of a corner (Fig. 1). The Airy stress function is represented by means of a polynomial, (2.2), in terms of new, curvilinear coordinates. The parameters of the stress function are found by means of the variational calculus from the condition of minimum square deviation (2.5), which leads to an equation of the fourth order, (2.15). The stresses are calculated for a corner loaded by a moment, a tension force and a shear force.

POLITECHNIKA CDANŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1960 r.