

KAZIMIERZ PISZCZEK

**OBSZARY REZONANSOWE DRUGIEGO RODZAJU
PRZY OBCIĄŻENIU ŚLEDZĄCYM**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXXVIII**

TOM IX . ZESZYT 2 . ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	157
2. Sformułowanie zagadnienia	158
3. Podstawowe tezy teorii E. Mettlera	160
4. Granice obszarów rezonansowych drugiego rodzaju przy obciążeniu śledzącym	163
5. Przykład	165

1. Wstęp

W dotychczasowych pracach na temat stateczności dynamicznej elementów sprężystych analizowano przeważnie zagadnienia, w których obciążenia zewnętrzne (siły i momenty) zachowywały swoje kierunki działania w procesie drgań. Wiadomo, że w zagadnieniach stateczności dynamicznej mogą wystąpić obszary rezonansowe pierwszego i drugiego rodzaju. Jeśli np. układ drgający ma dwa stopnie swobody, przy czym częstości kątowne drgań własnych są Ω_1 i Ω_2 , a częstość kątowna obciążenia zewnętrznego, parametrycznie wymuszającego drgania jest θ , to rezonans parametryczny pierwszego rodzaju może wystąpić w otoczeniu $\theta = 2\Omega_i/k$ ($k = 1, 2, \dots; i = 1, 2$), zaś rezonans parametryczny drugiego rodzaju spodziewany jest w otoczeniu $\theta = |\Omega_1 \pm \Omega_2|/k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Dotychczas zajmowano się głównie sposobem wyznaczania obszarów rezonansowych pierwszego rodzaju i można powiedzieć, że w tej dziedzinie nie należy spodziewać się jakichś nowych, podstawowych opracowań. Jeśli chodzi o obszary rezonansowe drugiego rodzaju, to zagadnieniem tym zajmowało się dotychczas kilku autorów (por. literatura cytowana w [2]), przy czym E. METTLER podał efektywny, asymptotyczny sposób wyznaczenia obszarów rezonansowych, ale tylko dla otoczenia częstości kątownej siły wymuszającej $\theta = (\Omega_1 + \Omega_2)/k$. W rozważaniach swych ograniczył się do założenia, że obciążenie parametryczne zachowuje stały kierunek w procesie drgań. Okazuje się bowiem, że dla otoczenia $\theta = |\Omega_1 - \Omega_2|/k$ rezonans aparametryczny może mieć miejsce dla przypadku obciążenia śledzącego, tj. takiego obciążenia, które zmienia kierunek działania w procesie drgań (np. obraca się wraz z obrotem przekroju w miejscu przyłożenia tego obciążenia). Zagadnienia tego typu należą w zasadzie do zagadnień niekonserwatywnych.

Celem niniejszej publikacji jest podanie metody pozwalającej wyznaczyć obszary rezonansowe w przypadku rezonansu drugiego rodzaju przy obciążeniu śledzącym. Rozważania prowadzone niżej będą w zasadzie oparte na wynikach podstawowej pracy E. METTLERA, [1], w której autor nie mógł otrzymać wyników przy obciążeniu śledzącym, gdyż zakładał konserwatywność układu drgającego. Czytelnik zaznajomiony z bieżącą literaturą naukową na temat stateczności statycznej stwierdzi, że ostatnio ukazało się wiele prac na temat stateczności statycznej przy obciążeniu śledzącym. Przez analogię więc zagadnienia stateczności dynamicznej przy tego typu obciążeniach są również na czasie, a otrzymane wyniki mogą mieć również znaczenie praktyczne.

2. Sformułowanie zagadnienia

Wiele problemów stateczności dynamicznej w ujęciu liniowym, sprowadza się do analizy rozwiązań układu równań typu

$$(2.0) \quad \begin{cases} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \varepsilon\beta \cos \theta t \sum_{j=1}^2 c_{1j}x_j = 0, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \varepsilon\gamma \cos \theta t \sum_{j=1}^2 c_{2j}x_j = 0, \end{cases}$$

gdzie a_{ij} , b_{ij} i c_{ij} są wielkościami stałymi, zaś ε , β i γ przedstawiają pewne stałe parametry.

Niech

$$(2.1) \quad \Delta = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \neq 0.$$

Stosując transformację

$$(2.2) \quad \begin{cases} x_1 = \beta_{11}\bar{u}_1 + \beta_{12}\bar{u}_2, \\ x_2 = \beta_{21}\bar{u}_1 + \beta_{22}\bar{u}_2, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.3) \quad \begin{cases} \beta_{11} = -\frac{a_{22}}{\Delta}, & \beta_{12} = \frac{a_{12}}{\Delta}, \\ \beta_{21} = \frac{a_{21}}{\Delta}, & \beta_{22} = -\frac{a_{11}}{\Delta}, \end{cases}$$

układ równań (2.0) przyjmie postać

$$(2.4) \quad \begin{cases} \ddot{\bar{u}}_1 + d_{11}\bar{u}_1 + d_{12}\bar{u}_2 + \varepsilon\beta \cos \theta t \sum_{j=1}^2 \bar{e}_{1j}\bar{u}_j = 0, \\ \ddot{\bar{u}}_2 + d_{21}\bar{u}_1 + d_{22}\bar{u}_2 + \varepsilon\gamma \cos \theta t \sum_{j=1}^2 \bar{e}_{2j}\bar{u}_j = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.5) \quad \begin{cases} d_{11} = b_{11}\beta_{11} + b_{12}\beta_{21}, & d_{21} = b_{21}\beta_{11} + b_{22}\beta_{21}, \\ d_{12} = b_{11}\beta_{12} + b_{12}\beta_{22}, & d_{22} = b_{21}\beta_{12} + b_{22}\beta_{22}; \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} \bar{e}_{11} = c_{11}\beta_{11} + c_{12}\beta_{21}, & \bar{e}_{21} = c_{21}\beta_{11} + c_{22}\beta_{21}, \\ \bar{e}_{12} = c_{11}\beta_{12} + c_{12}\beta_{22}, & \bar{e}_{22} = c_{21}\beta_{12} + c_{22}\beta_{22}. \end{cases}$$

Układ równań (2.4) nie jest jeszcze wygodny do dyskusji i sprowadzimy go do postaci normalnej. Najpierw doprowadzimy do tego, by w układzie (2.4) w równaniu pierwszym przy \bar{u}_2 i w równaniu drugim przy \bar{u}_1 współczynniki były równe. Przyjmijmy w tym celu

$$(2.7) \quad \bar{u}_1 = u_1, \quad \bar{u}_2 = \alpha u_2,$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{d_{21}/d_{12}} \quad (d_{21}d_{12} > 0).$$

Układ równań (2.4) przyjmie więc postać

$$(2.8) \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 + d_{11}u_1 + du_2 + \beta\varepsilon \cos \theta t \sum_{j=1}^2 e_{1j}u_j = 0, \\ \ddot{u}_2 + du_1 + d_{22}u_2 + \varepsilon\gamma \cos \theta t \sum_{j=1}^2 e_{2j}u_j = 0. \end{cases}$$

gdzie

$$(2.9) \quad \begin{cases} d = \alpha d_{12}, \\ e_{11} = \bar{e}_{11}, & e_{21} = \frac{\bar{e}_{21}}{\alpha}, \\ e_{12} = \alpha \bar{e}_{12}, & e_{22} = \bar{e}_{22}. \end{cases}$$

Stosując w (2.8) transformację

$$(2.10) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2, \\ u_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2. \end{cases}$$

gdzie α_{ik} spełniają równania

$$(2.11) \quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1, \\ \alpha_{12}\alpha_{11} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{11}(d_{11}\alpha_{12} + d\alpha_{22}) + \alpha_{21}(d\alpha_{12} + d_{22}\alpha_{22}) = 0, \\ \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2 = 1, \end{cases}$$

otrzymamy układ równań

$$(2.12) \quad \begin{cases} \ddot{v}_1 + \Omega_1^2 v_1 + \varepsilon \cos \theta t \sum_{j=1}^2 F_{1j}v_j = 0, \\ \ddot{v}_2 + \Omega_2^2 v_2 + \varepsilon \cos \theta t \sum_{j=1}^2 F_{2j}v_j = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{cases} \Omega_1^2 = \alpha_{11}(d_{11}\alpha_{11} + d\alpha_{21}) + \alpha_{21}(d\alpha_{11} + d_{22}\alpha_{21}), \\ \Omega_2^2 = \alpha_{22}(d\alpha_{12} + d_{22}\alpha_{22}) + \alpha_{12}(d_{11}\alpha_{12} + d\alpha_{22}); \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} F_{11} = \alpha_{11}\beta(e_{11}\alpha_{11} + e_{12}\alpha_{21}) + \alpha_{21}\gamma(e_{21}\alpha_{11} + e_{22}\alpha_{21}), \\ F_{12} = \alpha_{11}\beta(e_{11}\alpha_{12} + e_{12}\alpha_{22}) + \alpha_{21}\gamma(e_{21}\alpha_{12} + e_{22}\alpha_{22}), \\ F_{21} = \alpha_{22}\gamma(e_{21}\alpha_{11} + e_{22}\alpha_{21}) + \alpha_{12}\beta(e_{11}\alpha_{11} + e_{12}\alpha_{21}), \\ F_{22} = \alpha_{22}\gamma(e_{21}\alpha_{12} + e_{22}\alpha_{22}) + \alpha_{12}\beta(e_{11}\alpha_{12} + e_{12}\alpha_{22}). \end{cases}$$

Tak więc transformacja

$$(2.15) \quad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2, \\ x_2 = \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.16) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \alpha_{11}\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_{21}a, & \gamma_{21} = \alpha_{11}\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_{21}a, \\ \gamma_{12} = \alpha_{12}\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_{22}a, & \gamma_{22} = \alpha_{12}\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_{22}a, \end{cases}$$

przeprowadza wyjściowy układ równań (2.0) w układ (2.12), przy czym stałe w związkach (2.16) podane są przez (2.3), (2.7) i (2.11).

Z układu równań (2.11) wynika, że współczynniki α_{ik} spełniają zależności

$$(2.17) \quad \alpha_{11} = \pm \alpha_{22}, \quad \alpha_{21} = \mp \alpha_{12}.$$

Na podstawie związków (2.17) (przyjmując znaki górne) możemy F_{12} i F_{21} przedstawić następująco:

$$(2.18) \quad \begin{cases} F_{12} = \alpha_{12}\alpha_{22}(\beta e_{11} - \gamma e_{22}) + \alpha_{22}^2 \beta e_{12} - \alpha_{12}^2 \gamma e_{21}, \\ F_{21} = \alpha_{12}\alpha_{22}(\beta e_{11} - \gamma e_{22}) + \alpha_{22}^2 \gamma e_{21} - \alpha_{12}^2 \beta e_{12}. \end{cases}$$

Odpowiednie wyrażenia możemy również napisać dla F_{11} i F_{22} , co pomijamy, gdyż w dalszych rozważaniach nie będą potrzebne. Jak okaże się później, przy wyznaczaniu obszarów rezonansowych istotne znaczenie przedstawia iloczyn $F_{12}F_{21}$. Jeśli mianowicie $F_{12} = F_{21}$, co ma np. miejsce, gdy $e_{21} = \gamma_1 e_{21}$ i $\gamma_1 \beta = \gamma$, to do wyznaczenia obszarów rezonansowych można stosować bez zmian metodę podaną w pracy E. METTLERA. Jednakże mogą mieć miejsce dwa przypadki ogólniejsze, a mianowicie gdy

$$(2.19) \quad F_{12}F_{21} > 0 \quad (F_{12} \neq F_{21})$$

oraz

$$(2.20) \quad F_{12}F_{21} < 0.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem (2.20), dla którego dostosujemy metodę E. METTLERA. Przypadek (2.19) może być rozważany wprost w oparciu o metodę E. METTLERA i nie wymaga specjalnych uzasadnień.

3. Podstawowe tezy teorii E. Mettlera

Układ równań (2.12) zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad \theta^2 \ddot{v}_f + \Omega_f^2 v_f + \varepsilon \cos \tau \sum_{m=1}^2 F_{fm} v_m = 0 \quad (f=1,2),$$

gdzie $\tau = \theta t$.

Podzielmy każde z równań układu (3.1) przez θ_0^2 i oznaczając

$$(3.2) \quad V = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad V_f = \frac{\Omega_f}{\theta_0}, \quad G_{fm} = \frac{F_{fm}}{\theta_0^2}$$

otrzymamy

$$(3.3) \quad V^2 \ddot{v}_f + V_f^2 v_f + \varepsilon \cos \tau \sum_{m=1}^2 G_{fm} v_m = 0 \quad (f=1,2).$$

Poszukujemy szczególnych rozwiązań V_{fr} układu (3.3) spełniających warunek

$$V_{fr}(\tau + 2\pi) = S_r V_{fr}(\tau) \quad (f = 1, 2),$$

gdzie S_r są pewnymi stałymi związanymi z wykładnikami charakterystycznymi $\varrho_r = ih_r$ ($i = \sqrt{-1}$) związkiem

$$S_r = e^{2\pi\varrho_r}.$$

Jak wiadomo, funkcje V_{fr} mają postać

$$(3.4) \quad V_{fr}(\tau) = e^{\varrho_r \tau} \varphi_{fr}(\tau)$$

(funkcje φ_{fr} o okresie 2π). Jeśli następnie przedstawimy

$$\varphi_{fr}(\tau) = \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} C_{fr\eta} e^{i\eta\tau},$$

to możemy zapisać

$$(3.5) \quad V_{fr}(\tau) = \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} C_{fr\eta} e^{i(\eta+h_r)\tau}.$$

Każdemu rozwiązaniu (3.4) odpowiada rozwiązanie postaci

$$V_{fr}^*(\tau) = e^{-\varrho_r \tau} \varphi_{fr}^*(\tau),$$

gdzie $\varphi_{fr}^*(\tau) = \varphi_{fr}(-\tau)$, przy czym również φ_{fr}^* mają okres 2π . Tak więc funkcje

$$(3.6) \quad V_{fr}^*(\tau) = \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} C_{fr\eta} e^{-i(\eta+h_r)\tau}$$

również przedstawiają szczególne rozwiązania układu (3.3).

Podane w (3.5) i (3.6) stałe współczynniki $C_{fr\eta}$ wyznaczmy stosując metodę małego parametru, którym będzie ε występujące w (3.3).

Niech

$$(3.7) \quad \begin{cases} C_{fr\eta} = C_{fr\eta}^{(0)} + C_{fr\eta}^{(1)}\varepsilon + C_{fr\eta}^{(2)}\varepsilon^2 + \dots, \\ V = 1 + \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \dots, \\ \bar{V} = \bar{V}_r + \varepsilon \bar{V}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{V}^{(2)} + \dots, \end{cases}$$

gdzie

$$V_r = \frac{\Omega_r}{\theta_0}, \quad \bar{V} = \frac{\theta}{\theta_0} h_r,$$

zaś $C_{fr\eta}^{(j)}$, $V^{(j)}$ i $\bar{V}^{(j)}$ pozostają do wyznaczenia. Wstawiając (3.5) do układu (3.3) po uporządkowaniu i przyrównaniu do zera wyrażeń przy $\exp [i(h_r + \eta)\tau]$, otrzymamy równania

$$(3.8) \quad [(\bar{V} + \eta V)^2 - V^2] C_{fr\eta} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^2 (C_{mr, \eta-1} + C_{mr, \eta+1}) G_{fm} = 0$$

$$(f = 1, 2, \quad \eta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Wstawiając następnie do tego układu szeregi (3.7) po przyrównaniu do zera współczynników przy tych samych potęgach ε otrzymamy

$$(3.9) \quad [(V_r + \eta)^2 - V_f^2] C_{fr\eta}^{(0)} = 0,$$

$$(3.10) \quad [(V_r + \eta)^2 - V_f^2] C_{fr\eta}^{(1)} = -2(V_r + \eta)(\bar{V}^{(1)} + \eta V^{(1)}) C_{fr\eta}^{(0)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 G_{fm}(C_{mr, \eta-1}^{(0)} + C_{mr, \eta+1}^{(0)}),$$

$$(3.11) \quad [(V_r + \eta)^2 - V_f^2] C_{fr\eta}^{(2)} = -2(V_r + \eta)(\bar{V}^{(1)} + \eta V^{(1)}) C_{fr\eta}^{(1)} - \\ - [2(V_r + \eta)(\bar{V}^{(2)} + \eta V^{(2)}) + (\bar{V}^{(1)} + V^{(1)})^2] C_{fr\eta}^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 G_{fm}(C_{mr, \eta-1}^{(1)} + C_{mr, \eta+1}^{(1)})$$

itd.; ogólnie

$$(3.12) \quad [(V_r + \eta)^2 - V_f^2] C_{fr\eta}^{(j)} = K_{fr\eta}^{(j)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$(3.13) \quad K_{fr\eta}^{(j)} = - \sum_{n=1}^j C_{fr\eta}^{(j-n)} \sum_{\xi=0}^n (\bar{V}^{(\xi)} + \eta V^{(\xi)}) (\bar{V}^{(n-\xi)} + \eta V^{(n-\xi)}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 G_{fm}(C_{mr, \eta-1}^{(j-1)} + C_{mr, \eta+1}^{(j-1)}) \quad (V^{(0)} = 1, V^{(0)} = \bar{V}_r, C_{mr, \eta-1}^{(-1)} = C_{mr, \eta+1}^{(-1)} = 0).$$

Z (3.9) widać, że związek ten będzie spełniony, gdy

$$(V_r + \eta)^2 - V_f^2 = 0 \quad \text{lub} \quad C_{fr\eta}^{(0)} = 0.$$

Drugą z tych możliwości należy odrzucić dla pewnych wskaźników, gdyż z (3.10), (3.11) i (3.13) wynika, że w przypadku jej spełnienia dla wszystkich wskaźników otrzymalibyśmy rozwiązanie tożsamościowo równe zeru. Równość $(V_r + \eta)^2 - V_f^2 = 0$ daje

$$V_r + \eta + V_f = 0 \quad \text{lub} \quad V_r + \eta - V_f = 0$$

skąd

$$V_r + V_f = -\eta \quad \text{lub} \quad V_r - V_f = -\eta \quad (V_r > V_f).$$

Jeśli przyjmujemy $f = k$ oraz $-\eta = p > 0$ (p całkowite), to obydwie równości dają

$$(3.14) \quad \frac{\Omega_r \pm \Omega_k}{\theta_0} = p \quad (r \neq k; p = 1, 2, \dots),$$

tj. punkty θ_0 na osi θ , w otoczeniu których znajdują się obszary rezonansowe rezonansu drugiego rodzaju. Jeśli $r = k$, to na osi θ otrzymujemy punkty, w otoczeniu których wystąpią obszary rezonansowe pierwszego rodzaju:

$$p = \frac{2\Omega_r}{\theta_0} \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Równanie (3.9) będzie również spełnione, jeśli przyjmiemy $f = r$ i $\eta = 0$. Tak więc $C_{f\eta}^{(0)} = 0$ z wyjątkiem $C_{rr0}^{(0)}$ i $C_{kr,-p}^{(0)}$, które są różne od zera i nieoznaczone. Ponieważ rozwiązanie szczególne jest określone z dokładnością do stałej, więc z tego powodu można przyjąć $C_{rr0}^{(0)} = 1$, zaś $C_{rr0}^{(j)} = 0$ dla $j > 0$. W rozwiązaniach (3.5) i (3.6) pozostają więc nieoznaczone współczynniki $C_{kr,-p}^{(j)}$, których wyrazy zgodnie z (3.7) oznaczmy

$$(3.15) \quad C_{kr,-p}^{(j)} = C^{(j)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Wobec znikania lewych stron równości (3.12) dla $f = r$ i $\eta = 0$ oraz $f = k$ i $\eta = -p$ mamy równania

$$(3.16) \quad K_{rr0}^{(j)} = 0, \quad K_{kr,-p}^{(j)} = 0.$$

Pierwsze z tych równań nazwiemy pierwszym równaniem podstawowym, a drugie — drugim równaniem podstawowym. Z równań tych obliczymy $V^{(j)}$ i $\bar{V}^{(j)}$ dla $j = 1, 2, \dots$ jako funkcje parametrów $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots$.

4. Granice obszarów rezonansowych drugiego rodzaju przy obciążeniu śledzącym

Zajmiemy się wyznaczeniem podstawowego obszaru rezonansowego, tzn. w (3.14) przyjmiemy $p = 1$. Ten obszar rezonansowy wyznaczmy w otoczeniu

$$(4.1) \quad \theta = \theta_0 = \Omega_2 - \Omega_1 \quad (\Omega_2 > \Omega_1)$$

i zgodnie z (3.14) przyjmiemy $r = 2$ oraz $k = 1$.

Pierwsze równanie podstawowe (3.16) przy oznaczeniach (3.13) i (3.15) daje związek

$$(4.2) \quad 2\bar{V}^{(1)}V_2 = \frac{G_{21}}{2} C^{(0)},$$

zaś drugie równanie przy tym samym oznaczeniu daje

$$(4.3) \quad 2(\bar{V}^{(1)} - V^{(1)})(V_2 - 1)C^{(0)} = G_{12}/2.$$

Wykorzystując zależność $V_2 - V_1 = 1$ z (4.2) i (4.3) mamy

$$(4.4) \quad \bar{V}^{(1)} = \frac{G_{21}}{4V_2} C^{(0)},$$

$$(4.5) \quad V^{(1)} = \frac{G_{21}}{4V_2} C^{(0)} - \frac{G_{12}}{4V_1 C^{(0)}}.$$

Niech $C^{(0)}$ będzie na ogół liczbą zespoloną, którą przedstawimy w postaci

$$(4.6) \quad C^{(0)} = R e^{i\varphi} \quad (R \text{ liczba rzeczywista}).$$

Po wstawieniu w (4.5) mamy

$$(4.7) \quad V^{(1)} = \frac{G_{21}}{4V_2} R e^{i\varphi} - \frac{G_{12}}{4V_1 R} e^{-i\varphi}.$$

Ale z (3.2) i (3.7) wynika, że $V^{(1)}$ powinno być liczbą rzeczywistą, tzn. powinna być spełniona równość $\text{Im}(V^{(1)}) = 0$. Związek ten daje

$$(4.8) \quad R^2 = -\frac{G_{12}V_2}{G_{21}V_1},$$

co przedstawia liczbę dodatnią, gdy $G_{12}G_{21} < 0$.

Z (4.6) mamy więc

$$C^{(0)} = \sqrt{\left| \frac{G_{12}}{G_{21}} \right| \frac{V_2}{V_1}} (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Podobnie jak w pracy [1] graniczne wartości $C^{(0)}$ (dla granic obszarów rezonansowych) są

$$(4.9) \quad C_G^{(0)} = \pm \sqrt{\left| \frac{G_{12}}{G_{21}} \right| \frac{V_2}{V_1}}.$$

Łatwo zauważyć, że te same wartości otrzymamy z (4.5) i warunku $\partial V^{(1)} / \partial C^{(0)} = 0$.

Następnie z równań podstawowych (3.16) dla $j = 2$ obliczymy $V^{(2)}$ i $\bar{V}^{(2)}$, które zawierać będą $C^{(0)}$ i $C^{(1)}$.

Z warunku

$$(4.10) \quad \frac{\partial V^{(2)}}{\partial C^{(0)}} = 0$$

obliczymy $C_G^{(1)}$, przy czym zamiast $C^{(0)}$ należy wstawić z (4.9) $C_G^{(0)}$.

Po wykonaniu rachunków mamy

$$(4.11) \quad C_G^{(1)} = -\frac{1}{8} G_{12} \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_1 V_2} \right).$$

Dla $j = 3$ z równań podstawowych (3.16) obliczymy $V^{(3)}$ i $\bar{V}^{(3)}$, a następnie z warunku

$$(4.12) \quad \frac{\partial V^{(3)}}{\partial C^{(0)}} = 0,$$

wstawiając zamiast $C^{(0)}$ i $C^{(1)}$ obliczone uprzednio $C_G^{(0)}$ i $C_G^{(1)}$, podane przez (4.9) i (4.11), otrzymamy graniczną wartość

$$(4.13) \quad C_G^{(2)} = \pm \left(\frac{V_2}{V_1} \left| \frac{G_{12}}{G_{21}} \right| \right)^{3/2} \frac{G_{21}^2}{128V_2^2} \left(\frac{3}{V_1^2} + \frac{2}{V_1 V_2} - \frac{1}{V_2^2} \right).$$

Granice podstawowe obszaru rezonansowego zgodnie z (3.7) wynoszą

$$(4.14) \quad V = 1 + \varepsilon V_G^{(1)} + \varepsilon^2 V_G^{(2)} + \dots,$$

gdzie $V_G^{(j)}$ dane jest przez (4.5) i (4.9). Wyrażenia dla $V_G^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots$) otrzymamy ze związków analogicznych, jeśli w miejsce $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$... wstawimy $C_G^{(0)}$,

$C_G^{(1)}, C_G^{(2)}, \dots$. Po wykonaniu rachunków (tutaj je pomijamy) i przyjęciu założenia, że np. $G_{21} < 0$ i $G_{12} > 0$ mamy

$$(4.15) \quad V_G^{(1)} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G_{12} G_{21}}{V_1 V_2}},$$

$$(4.16) \quad V_G^{(2)} = -\frac{G_{12} G_{21}}{32} \frac{1}{V_1^2 V_2^2}.$$

Z przytoczonych wyżej rozważań widać, że również w przypadku obciążenia śledzącego może być stosowana teoria podana przez E. METTLERA.

W niniejszej pracy pominięto wiele rozważań ogólnych przeprowadzonych szczególnie w pracy [1]. Wydaje się, że niniejsze uzupełnienie metody E. METTLERA łącznie z pracą [1] daje istotnie ogólną teorię stateczności drgań wymuszonych parametrycznie.

5. Przykład

W teorii zginania prętów cienkościennych o przekrojach mających jedną oś symetrii, [3], gdy obciążenie działa w płaszczyźnie symetrii, równania stateczności statycznej mają postać

$$(5.1) \quad \begin{cases} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d^2}{dz^2} (M\varphi) = 0, \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left[(2\beta_y M + GJ_d) \frac{d\varphi}{dz} \right] + q(e_y - a_y)\varphi + M \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

- $q(z)$ obciążenie zewnętrzne na jednostkę długości,
- $M(z)$ moment zginający od obciążenia zewnętrznego,
- e_y współrzędna (w płaszczyźnie przekroju belki punktu przyłożenia obciążenia zewnętrznego w odniesieniu do środka ciężkości pola przekroju,
- a_y współrzędna środka zginania w odniesieniu do środka ciężkości pola przekroju,
- $\frac{1}{2J_x} \int_F y(x^2 + y^2) dF - a_y = \beta_y$ geometryczna charakterystyka przekroju,
- G moduł Kirchhoffa,
- E moduł Younga,
- J_x, J_y momenty bezwładności pola przekroju względem osi x i y ,
- J_d geometryczny czynnik sztywności przy czystym skręcaniu,
- J_ω główny wycinkowy moment bezwładności.

Przy pominięciu wpływu sił bezwładności pochodzących od obrotów przekrojów belki około osi głównych oraz pominięciu deplanacji przekrojów, siły bezwładności działającej na jednostkę długości belki mają postać

$$(5.2) \quad \begin{cases} -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right), \\ -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^2 + a_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{cases}$$

Dodając w równaniach (5.1) siły bezwładności (5.2) i przyjmując obciążenie zewnętrzne w postaci zależnej od czasu

$$q(z, t) = q_0(z) + q_1(z) \cos \theta t$$

(przy założeniu charakteru śledzącego części zmiennej obciążenia zewnętrznego) mamy układ równań

$$(5.3) \quad \begin{cases} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M\varphi) + m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = q_x(z, t), \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left[(2\beta_y M + GJ_d) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] + q(e_y - a_y)\varphi + M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + m \left(e^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \mu(z, t), \end{cases}$$

gdzie

$$(5.4) \quad \begin{cases} q_x = -q_1 \varphi(z, t) \cos \theta t, \\ \mu = q_1 (e_y - a_y) \varphi(z, t) \cos \theta t. \end{cases}$$

Przyjmijmy belkę wolnopodpartą na końcach i obciążenie zewnętrzne w postaci siły skupionej

$$(5.5) \quad P = P_0 + P_1 \cos \theta t,$$

działające w środku długości belki w płaszczyźnie symetrii, przy czym niech część zmienna tej siły ma charakter śledzący.

Funkcje

$$(5.6) \quad \begin{cases} u(z, t) = l q_1(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \\ \varphi(z, t) = q_2(t) \sin \frac{\pi z}{l} \end{cases}$$

realizują warunki brzegowe wolnego podparcia, przy czym moment zginający przyjmiemy w postaci

$$(5.7) \quad \begin{cases} M(z, t) = \frac{P}{2} z, & 0 \leq z \leq l/2, \\ M(z, t) = \frac{P}{2} (l-z), & l/2 \leq z \leq l. \end{cases}$$

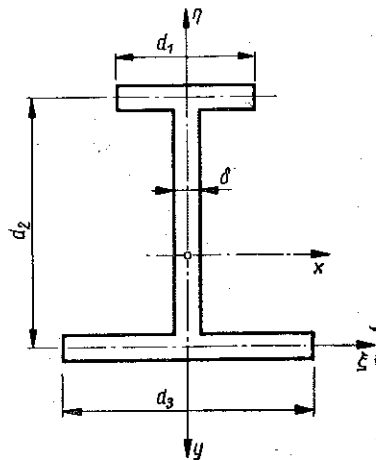
Po zastosowaniu metody Galerkina do układu równań (5.3), przy obciążeniu (5.5), funkcjach (5.6) i (5.7), otrzymamy do dyskusji układ równań zwyczajnych

$$(5.8) \quad \begin{cases} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} q_1 + b_{12} q_2 + \varepsilon \beta \cos \theta t \sum_{j=1}^2 c_{1j} q_j = 0, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{21} q_1 + b_{22} q_2 + \varepsilon \gamma \cos \theta t \sum_{j=1}^2 c_{2j} q_j = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(5.9) \quad \begin{cases} a_{11} = 1, & a_{12} = \frac{a_y l}{I}, & b_{11} = \frac{EJ_y \pi^4}{ml^4}, & b_{12} = -\frac{P_0}{2l^2 m} \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right), \\ \varepsilon = \frac{P_1}{P_0}, & \beta = -\frac{12 - \pi^2}{4 + \pi^2}, & c_{11} = 0, & c_{12} = -\frac{P_0(4 + \pi^2)}{8ml^2}, \\ a_{21} = \frac{a_y l}{e^2}, & a_{22} = 1, & b_{21} = -\frac{P_0}{2mQ^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right), \\ b_{22} = \frac{2}{mlQ^2} \left[EJ_\omega \frac{\pi^4}{2l^3} + P_0 \beta_\gamma \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right) + GJ_d \frac{\pi^2}{2l} + P_0(e_y - a_y) \right], \\ c_{21} = -\frac{P_0}{8mQ^2} (4 + \pi^2), & \gamma = 1, & c_{22} = \beta_\gamma P_0 \frac{\pi^2 - 4}{4mlQ^2}. \end{cases}$$

Układ równań (5.8) ma postać rozważoną w poprzednich punktach.



Rys. 1

Przyjmijmy następujące wymiary przekroju poprzecznego belki: $d_1 = 10$ [cm], $d_2 = 20$ [cm], $d_3 = 15$ [cm], $\delta = 2$ [cm] (rys. 1). Niech długość belki $l = 150$ [cm]. Przyjmijmy początek stałego układu odniesienia x, y w środku ciężkości pola przekroju, którego położenie w układzie ξ, η (rys. 1) jest określone współrzędnymi

(0; 8, 837 [cm]). Niech biegunem pomocniczym będzie punkt $B(b_x, b_y)$ o współrzędnych w układzie x, y : $b_x = 0$, $b_y = -11,16$ [cm]. Pozostałe charakterystyki obliczymy z następujących wzorów:

$$(5.10) \quad \begin{cases} J_y = J_{1y} + J_{2y} = \frac{d_1^2 \delta}{12} + \frac{d_2^2 \delta}{12}, \\ \alpha_y = \frac{J_{3y}}{J_{1y} + J_{3y}} d_2, \quad J_d = 1,3 \sum_i \frac{a_i^2 b_i}{3}, \\ J_\omega = \alpha_y^2 J_{1y} + (d_2 - \alpha_y)^2 J_{3y}, \quad \alpha_y = -\frac{\int \omega_p x dF}{J_y}, \end{cases}$$

Niech $E = 2,1 \cdot 10^6$ [kG/cm²], $G = 8 \cdot 10^5$ [kG/cm²]. Mamy

$$(5.11) \quad \begin{cases} J_y = 729,1 \text{ [cm}^4\text{]}, \quad EJ_y = 10^6 \cdot 1531,11 \text{ [kGcm}^2\text{]}, \quad m = 10^{-4} \cdot 6,88 \text{ [kGsek}^2\text{cm}^{-2}\text{]}, \\ EJ_\omega = 10^6 \cdot 107966,55 \text{ [kGcm}^4\text{]}, \quad e_y = -12,16 \text{ [cm]}, \quad J_x = 6239,43 \text{ [cm}^4\text{]}, \\ \varrho^2 = 81,03 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad J_d = 52,29 \text{ [cm}^4\text{]}, \quad GJ_d = 10^5 \cdot 418,37 \text{ [kGcm}^2\text{]}, \\ F = 86 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad \beta_y = -4,85 \text{ [cm]}, \quad a_y = 4,265 \text{ [cm]}, \quad \alpha_y = 15,428 \text{ [cm]}. \end{cases}$$

Obliczone obciążenie krytyczne przy sile skupionej wynosi: $P_k = 134,7 \cdot 10^3$ [kG]. Niech $P_0 = 10^5$ [kG]. Dla powyższych wartości wyrażenia (5.9) są odpowiednio równe:

$$(5.12) \quad \begin{cases} a_{12} = 0,028, \quad a_{21} = 7,895, \quad b_{11} = 0,43 \cdot 10^6 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ b_{12} = -1,12 \cdot 10^4 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \quad b_{21} = -310,8 \cdot 10^4 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ b_{22} = 10^4 \cdot 29,07 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \quad c_{12} = -10^4 \cdot 1,12 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ c_{21} = -10^4 \cdot 310,7 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \quad c_{22} = -10^4 \cdot 8,50 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ c_{11} = 0, \quad \beta = -0,1544. \end{cases}$$

Dla związków (2.3) mamy

$$(5.13) \quad \begin{cases} \beta_{11} = 1,2838, & \beta_{12} = -0,0359, \\ \beta_{21} = -10,1361, & \beta_{22} = 1,2838; \end{cases}$$

zaś współczynniki (2.5) i (2.6) są równe

$$(5.14) \quad \begin{cases} d_{11} = 10^4 \cdot 66,56 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & d_{21} = -10^4 \cdot 700,08 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ d_{12} = -10^4 \cdot 2,98 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & d_{22} = 10^4 \cdot 48,66 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ \bar{e}_{11} = 10^4 \cdot 11,34 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & \bar{e}_{21} = -10^4 \cdot 312,75 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ \bar{e}_{12} = -10^4 \cdot 1,44 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & \bar{e}_{22} = 10^4 \cdot 0,24 \text{ [sek}^{-2}\text{]} \end{cases}$$

oraz

$$a = 19,32.$$

Dla współczynników transformacji (2.10) mamy wartości

$$(5.15) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = 0,6499, & \alpha_{21} = 0,7604, \\ \alpha_{12} = -0,7604, & \alpha_{22} = 0,6499. \end{cases}$$

Обчислене Ω_1 і Ω_2 wynoszą

$$(5.16) \quad \Omega_1 = 3,32 \cdot 10^3 \text{ [sek}^{-1}\text{]}, \quad \Omega_2 = 10,2 \cdot 10^2 \text{ [sek}^{-1}\text{]},$$

zaś z (2.9) znajdziemy

$$(5.17) \quad \begin{cases} e_{11} = 10^4 \cdot 11,34 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & e_{21} = -10^4 \cdot 16,20 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ e_{12} = -10^4 \cdot 27,75 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, & e_{22} = 10^4 \cdot 0,24 \text{ [sek}^{-2}\text{]}. \end{cases}$$

Z poprzednich wyników i z (2.18) obliczamy

$$(5.18) \quad \begin{cases} F_{12} = 10^4 \cdot 12,1520 \text{ [sek}^{-2}\text{]}, \\ F_{21} = -10^4 \cdot 8,3289 \text{ [sek}^{-2}\text{]}. \end{cases}$$

Widać stąd, że jest spełniony warunek (2.20).

Z (4.1) otrzymamy $\theta_0 = 6,88 \cdot 10^2 \text{ [sek}^{-1}\text{]}$, zaś $\theta_0^2 = 10^4 \cdot 47,3344 \text{ [sek}^{-2}\text{]}$.

Ze związków (3.2) mamy

$$G_{12} = 0,2567, \quad G_{21} = -0,1759,$$

$$V_1 = 0,4825, \quad V_2 = 1,4825.$$

Z (4.15) i (4.16) obliczamy

$$V_G^{(1)} = \mp 0,125, \quad V_G^{(2)} = 0,00275.$$

A więc z (4.14) pierwszy obszar rezonansowy zawiera się w przybliżeniu w granicach

$$\theta = 6,88 \cdot 10^2 (1 \mp 0,125\epsilon + 0,00275\epsilon^2) \text{ [sek}^{-1}\text{]}.$$

Literatury cytowana w tekście

[1] E. METTLER, *Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper*, Ing. Archiv. 17 (1949).

[2] K. PISZCZEK, *Rezonans parametryczny drugiego rodzaju w układach nieliniowych*. Rozpr. Inżyn., 3, 8 (1960).

[3] В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1960.

Резюме

РЕЗОНАНСНЫЕ ОБЛАСТИ ВТОРОГО РОДА ПРИ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКЕ

Метод Е. МЕТТЛЕРА, эффективного асимптотического определения резонансных областей, обобщается на случай следящей нагрузки при параметрическом резонансе второго рода. Этот резонанс может выступить в соседстве угловой частоты вынуждающей силы $\theta = |\Omega_1 - \Omega_2|/k$. Демпфирования во внимание не принимается.

Summary

SECOND KIND RESONANCE REGION FOR A LOAD WHOSE DIRECTION FOLLOWS THE DEFORMATION OF THE BODY

E. METTLER's method constituting an effective asymptotic method for determining resonance regions is generalized to the case where the load direction is fixed to the body thus following its deformations. The parametric resonance of the second kind is considered. This resonance may take place in the neighbourhood of the angular frequency $\theta = |\Omega_1 - \Omega_2|/k$ of the excitation. The damping is disregarded.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1960 r.