

ROMAN SOLECKI

**IZOTROPOWA PŁASKA POWŁOKA WALCOWA
O DOWOLNYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXXIV**

TOM IX · ZESZYT 1 · ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	65
2. Transformacja właściwa	66
3. Rozwiązanie ogólne	70
4. Sumy szeregów występujących w pracy	85
5. Wnioski	86

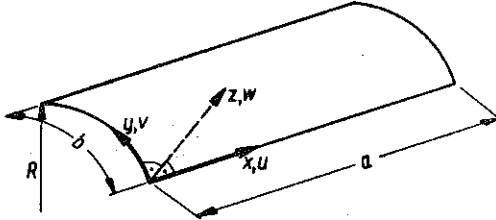
1. Wstęp

Rozważać będziemy płaską izotropową powłokę walcową o przekroju kołowym (rys. 1). Powłoka ta jest dwukierunkowo wstępnie sprężona. Naprężenia wstępne, równomiernie rozłożone wzdłuż linii $x = \text{const}$, oznaczymy symbolem σ_x^0 , zaś naprężenia wstępne, równomiernie rozłożone wzdłuż linii $y = \text{const}$, symbolem σ_y^0 . Zakładając, że grubość σ powłoki jest stała, wprowadzimy w dalszym ciągu oznaczenia

$$q_1 = \sigma_x^0 \delta, \quad q_2 = \sigma_y^0 \delta.$$

Niech na powłokę działa ponadto radialne obciążenie harmoniczne $p(x, y) \cos \omega t$. W dalszej analizie oprzemy się na następujących założeniach upraszczających:

1. Równowaga powłoki opisana jest uproszczonymi równaniami różniczkowymi tzw. technicznej teorii powłok płaskich [por. [1], s. 316, wzór (4.5); s. 472, wzór (18.3)].



Rys. 1

2. Wobec założenia, że powłoka jest płaska, uzasadnione jest ponadto pominięcie wyrazów wyrażających wpływ składowych stycznych tzw. obciążenia spowodowanego i sił bezwładności (por. [2], s. 584). Uproszczenie to jest zresztą z zasady stosowane i przez innych autorów (por. [1], [3] i [4]) jako wynikające bezpośrednio z założenia (1).

3. Pominiemy wpływ dynamicznych sił podłużnych na odkształcenia (por. [2], s. 573 i dalsze). Dzięki temu można uważać, że drgania powłoki są harmoniczne (w przypadku wymuszenia harmonicznego). Zauważmy, że uproszczenie to jest stosowane z reguły również w teorii drgań ram i łuków. Jedynie w przypadku, gdy amplituda podłużnej siły dynamicznej jest znaczna w porównaniu z siłą krytyczną, może ono doprowadzić do godnych uwagi błędów (por. np. [5], s. 259).

W związku z powyższymi uwagami przyjmiemy za punkt wyjścia następujący układ równań różniczkowych, opisujących amplitudy drgań:

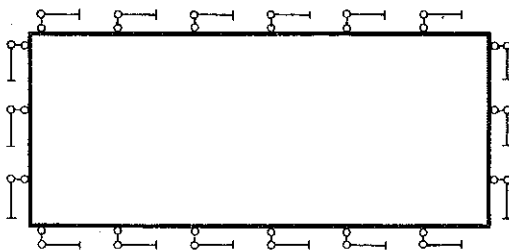
$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \frac{\nu E \delta}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E \delta}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial v}{\partial y} + D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{E \delta}{1-\nu^2} \frac{w}{R^2} + q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + q_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu \omega^2 w = p(x, y). \end{array} \right.$$

Celem naszym będzie rozwiązanie układu (1.1) w przypadku dowolnych warunków brzegowych.

Zauważmy, że jedynie niektóre szczególne przypadki podparcia umożliwiają uzyskanie rozwiązań ścisłych w postaci zamkniętej (por. np. [1], s. 351 i dalsze). Jeśli żadna z par równoległych krawędzi powłoki nie jest przegubowo-przesuwnie podparta, wówczas na ogół poszukuje się rozwiązań za pomocą metod ortogonalizacyjnych, wariacyjnych (por. [1], [4]) lub za pomocą metody różnic skończonych. Jedynym, jak się zdaje, wyjątkiem są prace W. NOWACKIEGO (por. np. [3], [6]). W pracy [3] np. uzyskuje W. NOWACKI rozwiązanie ścisłe powłoki wzdłuż obwodu przesuwnie utwierdzonej. Przedstawione jest ono w postaci nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych.

2. Transformacja właściwa

Aby rozwiązać problem brzegowy sformułowany w p. 1, zastosujemy metodę transformacji właściwej (por. [7]).



Rys. 2

Przyjmijmy jako schemat podstawowy (por. [3]) powłokę na obwodzie przegubowo-przesuwnie podpartą (rys. 2). Funkcje

$$(2.1) \quad U = \cos \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad V = \sin \alpha_n x \cos \beta_m y, \quad W = \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

spełniają zarówno układ równań (1.1) jak i warunki brzegowe schematu podstawowego, stanowiąc one będą zatem jądra odpowiednich transformacji całkowych.

Transformacje te określimy za pomocą związków.

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1\{f(x, y)\} &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \, dx \, dy = f_1(m, n), \\ T_2\{f(x, y)\} &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y \, dx \, dy = f_2(m, n), \\ T_3\{f(x, y)\} &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \, dx \, dy = f_3(m, n). \end{aligned} \right.$$

We wzorach powyższych przyjęto

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Transformacje odwrotne wyrażone są za pomocą wzorów

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1^{-1}\{f_1(m, n)\} &= f(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n f_1(m, n) \cos \alpha_n x \sin \beta_m y + \\ &+ \frac{2}{ab} \sum_m f_1(m, 0) \sin \beta_m y, \\ T_2^{-1}\{f_2(m, n)\} &= f(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n f_2(m, n) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y + \\ &+ \frac{2}{ab} \sum_n f_2(0, n) \sin \alpha_n x, \\ T_3^{-1}\{f_3(m, n)\} &= f(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n f_3(m, n) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \end{aligned} \right.$$

Układ równań (1.1) można zastąpić, jak wiadomo, układem dwóch równań zawierających nieznaną funkcję przemieszczeń w oraz nieznaną funkcję naprężeń φ lub też jednym równaniem o jednej niezwanej funkcji skalarnej Φ (por. [1], s. 317). W obu przypadkach można przedstawić rozwiązania układu podstawowego za pomocą nader prostych wzorów.

Można by zatem sądzić, że posługiwanie się np. tylko jednym równaniem przy założeniu, że funkcja Φ spełnia warunki brzegowe schematu podstawowego, powinno znacznie uprościć dalsze rozważania. Wniosek taki nie jest jednak słuszny. Korzyści uzyskane nie rekompensują bowiem znacznie zwiększonego nakładu pracy i konieczności wykonywania skomplikowanych przekształceń niezbędnych dla wyrażenia wartości brzegowej poszukiwanej funkcji i jej pochodnych za pomocą wartości brzegowych przemieszczeń, momentów, sił podłużnych itp.

Powracając do poprzednio określonej transformacji obliczmy transformaty pochodnych. Mamy

$$(2.4) \left\{ \begin{aligned} T_1\{u_{xx}\} &= -\alpha_n^2 u_1(m, n) + \frac{1-\nu^2}{E\delta} \int_0^b [(-1)^n N_x(a, y) - N_x(0, y)] \sin \beta_m y dy - \\ &\quad - \frac{\nu}{R} \int_0^b [(-1)^n w(a, y) - w(0, y)] \sin \beta_m y dy + \\ &\quad + \nu \beta_m \int_0^b [(-1)^n v(a, y) - v(0, y)] \cos \beta_m y dy, \\ T_1\{u_{yy}\} &= -\beta_m^2 u_1(m, n) - \beta_m \int_0^a [(-1)^m u(x, b) - u(x, 0)] \cos \alpha_n x dx, \\ T_1\{v_{xy}\} &= -\alpha_n \beta_m v_2(m, n) - \beta_m \int_0^b [(-1)^n v(a, y) - v(0, y)] \cos \beta_m y dy, \\ T_1\{w_x\} &= \alpha_n w_3(m, n) + \int_0^b [(-1)^n w(a, y) - w(0, y)] \sin \beta_m y dy; \end{aligned} \right.$$

$$(2.5) \left\{ \begin{aligned} T_2\{u_{xy}\} &= -\alpha_n \beta_m u_1(m, n) - \alpha_n \int_0^a [(-1)^m u(x, b) - u(x, 0)] \cos \alpha_n x dx, \\ T_2\{v_{yy}\} &= -\beta_m^2 v_2(m, n) + \frac{1-\nu^2}{E\delta} \int_0^a [(-1)^m N_y(x, b) - N_y(x, 0)] \sin \alpha_n x dx - \\ &\quad - \frac{1}{R} \int_0^a [(-1)^m w(x, b) - w(x, 0)] \sin \alpha_n x dx + \\ &\quad + \nu \alpha_n \int_0^a [(-1)^m u(x, b) - u(x, 0)] \cos \alpha_n x dx, \\ T_2\{v_{xx}\} &= -\alpha_n^2 v_2(m, n) - \alpha_n \int_0^b [(-1)^n v(a, y) - v(0, y)] \cos \beta_m y dy, \\ T_2\{w_y\} &= \beta_m w_3(m, n) + \int_0^a [(-1)^m w(x, b) - w(x, 0)] \sin \alpha_n x dx; \\ T_3\{u_x\} &= -\alpha_n u_1(m, n), \\ T_3\{v_y\} &= -\beta_m v_2(m, n), \\ T_3\{w_{xx}\} &= -\alpha_n^2 w_3(m, n) + \alpha_n \int_0^b [w(0, y) - (-1)^n w(a, y)] \sin \beta_m y dy, \end{aligned} \right.$$

$$(2.6) \left\{ \begin{aligned} T_3\{w_{yy}\} &= -\beta_m^2 w_3(m, n) + \beta_m \int_0^a [w(x, 0) - (-1)^m w(x, b)] \sin \alpha_n x dx, \\ T_3\{\nabla^2 \nabla^2 w\} &= (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 w_3(m, n) - \alpha_n [\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2] \int_0^b [w(0, y) - \\ &\quad - (-1)^n w(a, y)] \sin \beta_m y dy - \beta_m [\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2] \int_0^a [w(x, 0) - \\ &\quad - (-1)^m w(x, b)] \sin \alpha_n x dx - \frac{\alpha_n}{D} \int_0^b [M_x(0, y) - (-1)^n M_x(a, y)] \sin \beta_m y dy - \\ &\quad - \frac{\beta_m}{D} \int_0^a [M_y(x, 0) - (-1)^m M_y(x, b)] \sin \alpha_n x dx + 2(1-\nu)\alpha_n \beta_m [w(0, 0) - \\ &\quad - (-1)^m w(0, b) - (-1)^n w(a, 0) + (-1)^{n+m} w(a, b)] \\ &\quad \text{oraz (por. [8], s. 750, wzory (3.7)-(3.11)).} \end{aligned} \right.$$

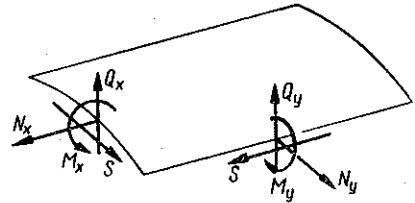
Wyprowadzając związki (2.4) i (2.5) skorzystaliśmy z zależności (por. [1], s. 318, wzór (4.10))

$$(2.7) \quad N_x = \frac{E \delta}{1-\nu^2} \left(u_x + \nu v_y + \frac{\nu}{R} w \right), \quad N_y = \frac{E \delta}{1-\nu^2} \left(\nu u_x + v_y + \frac{1}{R} w \right).$$

Natomiast wzór (2.6) uzyskaliśmy biorąc pod uwagę, że

$$(2.8) \quad M_x = -D(w_{xx} + \nu w_{yy}), \quad M_y = -D(w_{yy} + \nu w_{xx}).$$

Przyjęte za dodatnie zwroty sił wewnętrznych i momentów przedstawiono na rys. 3. Pierwsze z równań (1.1) poddajemy transformacji T_1 , drugie — transformacji T_2 , trzecie zaś transformacji T_3 . Otrzymamy wówczas w oparciu o wzory (2.4), (2.5) i (2.6) następujący układ równań algebraicznych względem transformacji funkcji $u_1(m, n)$, $v_2(m, n)$ i $w_3(m, n)$:



Rys. 3

(2.9)

$$\left\{ \begin{aligned} & - \left(\alpha_n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_m^2 \right) u_1(m, n) - \frac{1+\nu}{2} \alpha_n \beta_m v_2(m, n) + \frac{\nu}{R} \alpha_n w_3(m, n) + \\ & + \frac{1-\nu^2}{E \delta} \int_0^b [(-1)^n N_x(a, y) - N_x(0, y)] \sin \beta_m y dy + \\ & + \frac{\nu-1}{2} \beta_m \int_0^b [(-1)^n v(a, y) - v(0, y)] \cos \beta_m y dy + \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu-1}{2} \beta_m \int_0^a [(-1)^m u(x, b) - u(x, 0)] \cos \alpha_n x \, dx = 0, \\
& - \frac{1+\nu}{2} \alpha_n \beta_m u_1(m, n) - \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2 + \beta_m^2 \right) v_2(m, n) + \frac{1}{R} \beta_m w_3(m, n) + \\
& + \frac{1-\nu^2}{E \delta} \int_0^a [(-1)^m N_y(x, b) - N_y(x, 0)] \sin \alpha_n x \, dx + \\
& + \frac{\nu-1}{2} \alpha_n \int_0^b [(-1)^n v(a, y) - v(0, y)] \cos \beta_m y \, dy + \\
& + \frac{\nu-1}{2} \alpha_n \int_0^a [(-1)^m u(x, b) - u(x, 0)] \cos \alpha_n x \, dx = 0, \\
& - \frac{\nu E \delta}{1-\nu^2} \frac{\alpha_n}{R} u_1(m, n) - \frac{E \delta}{1-\nu^2} \frac{\beta_m}{R} v_2(m, n) + \left\{ D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{1}{R^2} \frac{E \delta}{1-\nu^2} - \right. \\
& \left. - q_1 \alpha_n^2 - q_2 \beta_m^2 - \mu \omega^2 \right\} w_3(m, n) - \alpha_n \{ D[\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2] - q_1 \} \times \\
& \times \int_0^b [w(0, y) - (-1)^n w(a, y)] \sin \beta_m y \, dy - \beta_m \{ D[\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2] - q_2 \} \times \\
& \times \int_0^a [w(x, 0) - (-1)^m w(x, b)] \sin \alpha_n x \, dx - \alpha_n \int_0^b [M_x(0, y) - (-1)^n M_x(a, y)] \times \\
& \times \sin \beta_m y \, dy - \beta_m \int_0^a [M_y(x, 0) - (-1)^m M_y(x, b)] \sin \alpha_n x \, dx + 2D(1-\nu) \times \\
& \times \alpha_n \beta_m [w(0, 0) - (-1)^m w(0, b) - (-1)^n w(a, 0) + (-1)^{n+m} w(a, b)] - \\
& - p_3(m, n) = 0.
\end{aligned}$$

Jeśli w trzecim z równań (2.9) podstawimy $u_1(m, n) = v_2(m, n) = 0$ oraz wykonamy przejście graniczne $R \rightarrow \infty$, to otrzymamy transformatę rozwiązania ogólnego izotropowej płyty prostokątnej. Związek ten można by po prostych przekształceniach otrzymać również ze wzoru (4.1) wyprowadzonego w pracy [8].

3. Rozwiązanie ogólne

Niech warunki brzegowe określone będą w sposób następujący:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x, 0) = \sum_n A_n \cos \alpha_n x, & u(x, b) = \sum_n C_n \cos \alpha_n x, \\ v(0, y) = \sum_m B_m \cos \beta_m y, & v(a, y) = \sum_m D_m \cos \beta_m y, \end{array} \right.$$

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} N_y(x, 0) = \sum_n E_n \sin \alpha_n x, & N_y(x, b) = \sum_n G_n \sin \alpha_n x, \\ N_x(0, y) = \sum_m F_m \sin \beta_m y, & N_x(a, y) = \sum_m H_m \sin \beta_m y, \\ w(x, 0) = \sum_n K_n \sin \alpha_n x, & w(x, b) = \sum_n M_n \sin \alpha_n x, \\ w(0, y) = \sum_m L_m \sin \beta_m y, & w(a, y) = \sum_m N_m \sin \beta_m y, \\ M_y(x, 0) = \sum_n P_n \sin \alpha_n x, & M_y(x, b) = \sum_n S_n \sin \alpha_n x, \\ M_x(0, y) = \sum_m R_m \sin \beta_m y, & M_x(a, y) = \sum_m T_m \sin \beta_m y. \end{array} \right.$$

Oznaczmy

$$(3.2) \quad \frac{a}{b} = \varrho.$$

Po rozwiązaniu układu (2.9) i przeprowadzeniu transformacji odwrotnej każdej z otrzymanych wielkości zgodnie ze wzorami (2.3) wyznaczamy w związku z (3.1) następujące rozwiązania ogólne:

$$(3.3) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n \frac{1}{D_{mn}} \left\{ (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \{ D[\alpha_n^3 + (2-\nu)\alpha_n\beta_m^2] - q_1\alpha_n \} [L_m - \right. \\ \left. - (-1)^n N_m] + (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \{ D[\beta_m^3 + (2-\nu)\alpha_n^2\beta_m] - q_2\beta_m \} \varrho [K_n - \right. \\ \left. - (-1)^m M_n] + \alpha_n (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [R_m - (-1)^n T_m] + \varrho \beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [P_n - \right. \\ \left. - (-1)^m S_n] - \frac{4D(1-\nu)}{b} \alpha_n \beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2) [w(0, 0) - (-1)^m w(0, b) - \right. \\ \left. - (-1)^n w(a, 0) + (-1)^{n+m} w(a, b)] + \frac{2}{b} (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 p_3(m, n) + \right. \\ \left. + \frac{E\delta}{R} \alpha_n^3 \beta_m [B_m - (-1)^n D_m + \varrho A_n - (-1)^m \varrho C_n] - \frac{\varrho}{R} \beta_m [(2+\nu)\alpha_n^2 + \right. \\ \left. + \beta_m^2] [E_n - (-1)^m G_n] + \frac{1}{R} \alpha_n [\beta_m^2 - \nu\alpha_n^2] [F_m - (-1)^n H_m] \right\} \times \\ \times \sin \alpha_n x \sin \beta_m y = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n \frac{1}{D_{mn}} A_{mn} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

$$(3.4) \quad u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n \frac{1}{D_{mn}} \left\{ \frac{1}{R} \alpha_n (\nu\alpha_n^2 - \beta_m^2) \{ D[\alpha_n^3 + (2-\nu)\alpha_n\beta_m^2] - q_1\alpha_n \} [L_m - \right. \\ \left. - (-1)^n N_m] + \frac{\varrho}{R} \alpha_n (\nu\alpha_n^2 - \beta_m^2) \{ D[\beta_m^3 + (2-\nu)\alpha_n^2\beta_m] - q_2\beta_m \} [K_n - \right. \\ \left. - (-1)^m M_n] + \frac{1}{R} \alpha_n^2 (\nu\alpha_n^2 - \beta_m^2) [R_m - (-1)^n T_m] + \frac{\varrho}{R} \alpha_n \beta_m (\nu\alpha_n^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_m^2) [P_n - (-1)^m S_n] - \frac{4D(1-\nu)}{bR} \alpha_n^2 \beta_m (\nu \alpha_n^2 - \beta_m^2) [w(0, 0) - \\
& \quad - (-1)^m w(0, b) - (1)^n w(a, 0) + (-1)^{n+m} w(a, b)] + \\
& \quad + \frac{2}{bR} \alpha_n (\nu \alpha_n^2 - \beta_m^2) p_3(m, n) + \beta_m (\beta_m^2 - \nu \alpha_n^2) [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - \\
& \quad - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)] [\varrho A_n - (-1)^m \varrho C_n + B_m - (-1)^n D_m] + \\
& + 2\varrho \frac{1+\nu}{E\delta} \alpha_n \beta_m \left[\frac{1+\nu}{2} D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{1}{R^2} \frac{E\delta}{2(1+\nu)} - \frac{1+\nu}{2} (q_1 \alpha_n^2 + \right. \\
& \quad \left. + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2) \right] [E_n - (-1)^m G_n] - 2 \frac{1+\nu}{E\delta} \left[D \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2 + \beta_m^2 \right) (\alpha_n^2 + \right. \\
& \quad \left. + \beta_m^2)^2 - \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha_n^2 + \beta_m^2 \right) (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2) \right] + \\
& \quad + \frac{1}{R^2} \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \alpha_n^2 \left. \right] [F_m - (-1)^n H_m] \left. \right\} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y + \\
& + \frac{1}{a} \sum_m \left\{ \frac{1}{\beta_m} (B_m - D_m) - \frac{2(1+\nu)}{E\delta} \frac{1}{\beta_m^2} (F_m - H_m) \right\} \sin \beta_m y = \\
& = \frac{2}{a} \sum_m \left\{ \sum_n B_{mn} \cos \alpha_n x + \frac{1}{2} \bar{B}_m \right\} \sin \beta_m y,
\end{aligned}$$

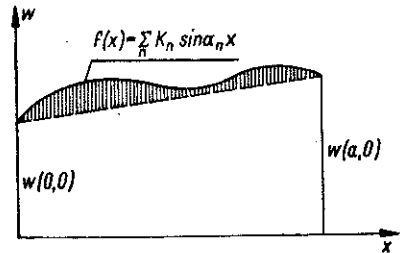
$$\begin{aligned}
(3.5) \quad v(x, y) &= \frac{2}{a} \sum_m \sum_n \frac{1}{D_{mn}} \left\{ \frac{1}{R} \beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu) \alpha_n^2] \{ D [\alpha_n^2 + (2-\nu) \alpha_n \beta_m^2] - \right. \\
& \quad - q_1 \alpha_n \} [L_m - (-1)^n N_m] + \frac{\varrho}{R} \beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu) \alpha_n^2] \{ D [\beta_m^3 + \\
& \quad + (2-\nu) \alpha_n^2 \beta_m] - q_2 \beta_m \} [K_n - (-1)^m M_n] + \frac{1}{R} \alpha_n \beta_m [\beta_m^2 + \\
& \quad + (2+\nu) \alpha_n^2] [R_m - (-1)^n T_m] + \frac{\varrho}{R} \beta_m^2 [\beta_m^2 + (2+\nu) \alpha_n^2] [P_n - (-1)^m S_n] - \\
& \quad - \frac{4D(1-\nu)}{bR} \alpha_n \beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu) \alpha_n^2] [w(0, 0) - (-1)^m w(0, b) - \\
& \quad - (-1)^n w(a, 0) + (-1)^{n+m} w(a, b)] + \frac{2}{bR} \beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu) \alpha_n^2] p_3(m, n) + \\
& \quad + \left[D \alpha_n (\alpha_n^2 - \nu \beta_m^2) (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - \alpha_n (\alpha_n^2 - \nu \beta_m^2) (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2) \right] + \\
& \quad + \frac{E\delta}{R^2} \alpha_n^3 \left. \right] [B_m - (-1)^n D_m + \varrho A_n - (-1)^m \varrho C_n] - 2\varrho \frac{1+\nu}{E\delta} \left\{ D \left(\alpha_n^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-\nu}{2} \beta_m^2 (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - \left(\alpha_n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_m^2 \right) (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2) + \\
& + \frac{1}{R^2} \frac{E\delta}{2(1+\nu)} [\beta_m^2 + 2(1+\nu)\alpha_n^2] \{E_n - (-1)^m G_n\} + \\
& + 2 \frac{1+\nu}{E\delta} \alpha_n \beta_m \left[\frac{1+\nu}{2} D (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - \frac{1+\nu}{2} (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R^2} \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \right] [F_m - (-1)^n H_m] \cos \beta_m y \sin \alpha_n x + \\
& + \frac{\rho}{a} \sum_n \left\{ \frac{1}{\alpha_n} (A_n - C_n) - 2 \frac{1+\nu}{E\delta} \frac{1}{\alpha_n^2} (E_n - G_n) \right\} \sin \alpha_n x = \\
& = \frac{2}{a} \sum_n \left\{ \sum_m C_{mn} \cos \beta_m y + \frac{1}{2} \bar{C}_n \right\} \sin \alpha_n x,
\end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad D_{mn} = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [D (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)] + \frac{E\delta}{R^2} \alpha_n^4.$$

Jeśli w równaniu (3.3) przejść do granicy $R \rightarrow \infty$, powinniśmy otrzymać równanie wynikające z odpowiednich rozwiązań Z. KĄCZKOWSKIEGO, ([9], wzory (2.2), (3.2) i (4.7)). Musimy jednakże pamiętać o tym, że K_n , M_n , L_m i N_m w (3.1) są współczynnikami rozwinięcia w szereg FOURIERA, funkcji wyrażających ugięcia całkowite (por. rys. 4). Natomiast w pracy [9] analogiczne współczynniki dotyczą rozwinięcia w szereg ugięć «dodatkowych» (zakreskowana część wykresu na rys. 4), otrzymanych z pominięciem przemieszczeń krawędzi. Oznaczmy współczynniki rozwinięć funkcji przedstawiających ugięcia «dodatkowe» odpowiednio przez \bar{K}_n , \bar{M}_n , \bar{L}_m i \bar{N}_m . Łatwo wykazać, że między K_n i \bar{K}_n itd. zachodzą następujące związki:



Rys. 4

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_n = \bar{K}_n + \frac{2}{a\alpha_n} [w(0,0) - (-1)^n w(a,0)], \\ M_n = \bar{M}_n + \frac{2}{a\alpha_n} [w(0,b) - (-1)^n w(a,b)], \\ L_m = \bar{L}_m + \frac{2}{b\beta_m} [w(0,0) - (-1)^m w(0,b)], \\ N_m = \bar{N}_m + \frac{2}{b\beta_m} [w(a,0) - (-1)^m w(a,b)]. \end{array} \right.$$

Uwzględnienie zależności (3.7) prowadzi do oczekiwanej tożsamości. Jeśli powłoka jest podparta inaczej niż schemat podstawowy, wówczas co najmniej część współczynników rozkładu w szereg FOURIERA, zawartych we wzorach (3.1), będzie różna od zera. Aby je określić, musimy wykorzystać warunki brzegowe układu rzeczywistego. W tablicy 1 zestawiliśmy związki zachodzące między poszukiwanymi współczynnikami a warunkami dodatkowymi.

Tablica 1.

1	2
Współczynnik rozkładu wielkości brzegowej w szereg FOURIERA	Odpowiadający warunek
A_n	$S(x,0) = 0$
C_n	$S(x,b) = 0$
B_m	$S(0,y) = 0$
D_m	$S(a,y) = 0$
E_n	$v(x,0) = 0$
G_n	$v(x,b) = 0$
F_m	$u(0,y) = 0$
H_m	$u(a,y) = 0$
K_n	$Q_y(x,0) = 0$
M_n	$Q_y(x,b) = 0$
L_m	$Q_x(0,y) = 0$
N_m	$Q_x(a,y) = 0$
P_n	$w_y(x,0) = 0$
S_n	$w_y(x,b) = 0$
R_m	$w_x(0,y) = 0$
T_m	$w_x(a,y) = 0$
$w(0,0)$	$R(0,0) = 0$
$w(a,0)$	$R(a,0) = 0$
$w(0,b)$	$R(0,b) = 0$
$w(a,b)$	$R(a,b) = 0$

Występujące w kolumnie 2 siły styczne i siły poprzeczne określamy ze wzorów (por. np. [4] s. 13, wzór (1.3), s. 19, wzory (1.28) i (1.31)):

$$(3.8) \quad S(x, y) = \frac{E \delta}{2(1+\nu)} (u_y + v_x),$$

$$(3.9) \quad Q_x(x, y) = -D [w_{xxx} + (2-\nu)w_{xyy}],$$

$$(3.10) \quad Q_y(x, y) = -D [w_{yyy} + (2-\nu)w_{xxy}].$$

Natomiast reakcję radialną R_i skupioną w narożu i wyliczamy ze związku (por. np. [9], wzór (2.13))

$$(3.11) \quad R_i = \pm 2M_{xy} = \pm 2D(1-\nu)w_{xy}.$$

Rozwiązanie powłoki o dowolnych warunkach brzegowych stanie się możliwe, gdy wyznaczymy wszystkie wielkości występujące w kolumnie 2 powyższej tablicy. Obliczamy wprawdzie przemieszczenia krawędzi w płaszczyźnie stycznej do powierzchni powłoki. Z równań (3.4) i (3.5) otrzymujemy bezpośrednio

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad u(0, y) = & \frac{2a^2}{D} \sum_m \left\{ a^5 \varrho \beta_m \sum_n \frac{\beta_m^2 - \nu \alpha_n^2}{\Delta_{mn}} [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)] \times \right. \\
 & \times [A_n - (-1)^m C_n] + \frac{D \beta_m}{a} [\Omega_{1m} B_m - \Omega'_{1m} D_m] - \frac{\delta^2}{6a(1-\nu)} [\Omega_{2m} F_m - \Omega'_{2m} H_m] + \\
 & + \frac{2(1+\nu)}{E \delta} a^5 \varrho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n}{\Delta_{mn}} \left[\frac{1+\nu}{2} D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{E \delta}{2R^2(1+\nu)} - \frac{1+\nu}{2} (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2) \right] [E_n - (-1)^m G_n] + \\
 & + \frac{a^5}{R} \varrho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n (\nu \alpha_n^2 - \beta_m^2)}{\Delta_{mn}} \{ D[\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2] - q_2 \} [K_n - (-1)^m M_n] + \\
 & + \frac{D}{aR} [\Omega_{3m} L_m - \Omega'_{3m} N_m] + \frac{a^5}{R} \varrho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n (\nu \alpha_n^2 - \beta_m^2)}{\Delta_{mn}} [P_n - (-1)^m S_n] + \\
 & + \frac{a}{R} \left\{ R_m - 4D(1-\nu)m\pi \frac{1}{b^2} [w(0, 0) - (-1)^m w(0, b)] \right\} \Omega_{4m} - \\
 & - \frac{a}{R} \left\{ T_m - 4D(1-\nu)m\pi \frac{1}{b^2} [w(a, 0) - (-1)^m w(a, b)] \right\} \Omega'_{4m} + \\
 & \left. + \frac{2a^5}{bR} \sum_n \frac{\alpha_n (\nu \alpha_n^2 - \beta_m^2)}{\Delta_{mn}} p_3(m, n) \right\} \sin \beta_m y.
 \end{aligned}$$

Przyjęliśmy tu oznaczenie

$$(3.13) \quad \Delta_{mn} = \frac{a^8}{D} D_{mn} = (n\pi)^8 + c_{1m}(n\pi)^6 + c_{2m}(n\pi)^4 + c_{3m}(n\pi)^2 + c_{4m},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{aligned}
 c_{1m} &= 4(\varrho m\pi)^2 - \frac{q_1 a^2}{D}, \\
 c_{2m} &= 6(\varrho m\pi)^4 - 2(\varrho m\pi)^2 \frac{q_1 a^2}{D} - \varrho^2 (\varrho m\pi)^2 \frac{q_2 b^2}{D} + \frac{E\delta a^4}{DR^2} - \frac{\mu\omega^2 a^4}{D}, \\
 c_{3m} &= 4(\varrho m\pi)^6 - (\varrho m\pi)^4 \frac{q_1 a^2}{D} - 2\varrho^2 (\varrho m\pi)^4 \frac{q_2 b^2}{D} - 2(\varrho m\pi)^2 \frac{\mu\omega^2 a^4}{D}, \\
 c_{4m} &= (\varrho m\pi)^8 - \varrho^2 (\varrho m\pi)^6 \frac{q_2 b^2}{D} - (\varrho m\pi)^4 \frac{\mu\omega^2 a^4}{D}.
 \end{aligned} \right.$$

Wprowadziliśmy również następujące funkcje:

$$(3.15) \left\{ \begin{aligned} \Omega_{1m} &= \frac{1}{a^2 \beta_m^2} Z_{1m} + \left[(2-\nu) (\varrho m \pi)^4 - (\varrho m \pi)^2 \left(\frac{q_1 a^2}{D} - \nu \varrho^2 \frac{q_2 b^2}{D} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} \right] Z_{2m} + \left[(1-2\nu) (\varrho m \pi)^2 + \nu \frac{q_1 a^2}{D} \right] Z_{3m} - \nu Z_{4m}, \\ \Omega_{2m} &= \frac{1}{a^2 \beta_m^2} Z_{1m} + \left[\frac{5-\nu}{2} (\varrho m \pi)^4 + \frac{6(1-\nu) a^4}{\delta^2 R^2} - \right. \\ &\quad \left. - (\varrho m \pi)^2 \left(\frac{q_1 a^2}{D} + \varrho \frac{1-\nu}{2} \frac{q_2 b^2}{D} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} \right] Z_{2m} + \\ &\quad + \left[(2-\nu) (\varrho m \pi)^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{q_1 a^2}{D} \right] Z_{3m} + \frac{1-\nu}{2} Z_{4m}, \\ \Omega_{3m} &= \left[(\nu-2) (\varrho m \pi)^4 + \frac{q_1 a^2}{D} (\varrho m \pi)^2 \right] Z_{2m} - \\ &\quad - \left[(1-\nu)^2 (\varrho m \pi)^2 + \nu \frac{q_1 a^2}{D} \right] Z_{3m} + \nu Z_{4m}, \\ \Omega_{4m} &= -(\varrho m \pi)^2 Z_{2m} + \nu Z_{3m}, \end{aligned} \right.$$

przy czym funkcje Z_{1m}, Z'_{1m}, \dots są sumami następujących szeregów:

$$(3.16) \left\{ \begin{aligned} Z_{1m} &= \frac{1}{2} + c_{4m} \sum_n \frac{1}{\Delta_{mn}}, & Z'_{1m} &= \frac{1}{2} + c_{4m} \sum_n \frac{(-1)^n}{\Delta_{mn}}, \\ Z_{2m} &= \sum_n \frac{(n\pi)^2}{\Delta_{mn}}, & Z'_{2m} &= \sum_n \frac{(-1)^n (n\pi)^2}{\Delta_{mn}}, \\ Z_{3m} &= \sum_n \frac{(n\pi)^4}{\Delta_{mn}}, & Z'_{3m} &= \sum_n \frac{(-1)^n (n\pi)^4}{\Delta_{mn}}, \\ Z_{4m} &= \sum_n \frac{(n\pi)^6}{\Delta_{mn}}, & Z'_{4m} &= \sum_n \frac{(-1)^n (n\pi)^6}{\Delta_{mn}}. \end{aligned} \right.$$

Funkcje te zostały wyznaczone w p. 5 niniejszej pracy.

Wzory określające $\Omega'_{1m}, \Omega'_{2m}, \dots$ otrzymujemy z (3.15) zastępując Z przez Z' . W podobny sposób znajdujemy

$$(3.17) \quad v(x, 0) = \frac{2b^2}{D} \sum_n \left\{ \frac{D a_n}{b} [\Omega_{1n} A_n - \Omega'_{1n} C_n] + \right. \\ \left. + \frac{b^5}{\varrho} a_n \sum_n \frac{\frac{E\delta}{R^2} \alpha_n^2 + [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)] (\alpha_n^2 - \nu \beta_m^2)}{\bar{\Delta}_{mn}} \times \right. \\ \left. \times [B_m - (-1)^n D_m] - \frac{\delta^2}{6b(1-\nu)} [\Omega_{2n} E_n - \Omega'_{2n} G_n] + \frac{2(1+\nu)}{E\delta} \frac{b^5}{\varrho} \alpha_n \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_m \frac{\beta_m}{\bar{\Delta}_{mm}} \left[\frac{1+\nu}{2} D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{1}{R^2} \frac{E\delta}{2(1+\nu)} - \frac{1+\nu}{2} (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu\omega^2) \right] \times \\
& \times [F_m - (-1)^n H_m] + \frac{D}{bR} [\Omega_{3n} K_n - \Omega'_{3n} M_n] + \frac{b^5}{R\varrho} \alpha_n \sum_m \frac{\beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu)\alpha_n^2]}{\bar{\Delta}_{mm}} \times \\
& \times \{ D[\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2] - q_1 \} [L_m - (-1)^n N_m] + \\
& + \frac{b^5}{R\varrho} \alpha_n \sum_m \frac{\beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu)\alpha_n^2]}{\bar{\Delta}_{mm}} [R_m - (-1)^n T_m] + \\
& + \frac{b}{R} \left\{ P_n - 4D(1-\nu) \frac{1}{a^2} n\pi [w(0, 0) - (-1)^n w(a, 0)] \right\} \Omega_{4n} - \\
& - \frac{b}{R} \left\{ S_n - 4D(1-\nu) \frac{1}{a^2} n\pi [w(0, b) - (-1)^n w(a, b)] \right\} \Omega'_{4n} + \\
& + \frac{2b^5}{aR} \sum_m \frac{\beta_m [\beta_m^2 + (2+\nu)\alpha_n^2]}{\bar{\Delta}_{mm}} p_3(m, n) \left. \right\} \sin \alpha_n x.
\end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia

$$(3.18) \quad \bar{\Delta}_{mm} = \frac{b^8}{D} D_{mm} = (m\pi)^8 + d_{1n}(m\pi)^6 + d_{2n}(m\pi)^4 + d_{3n}(m\pi)^2 + d_{4n},$$

przy czym

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{aligned} d_{1n} &= 4 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 - \frac{q_2 b^2}{D}, \\ d_{2n} &= 6 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^4 - 2 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 \frac{q_2 b^2}{D} - \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 \frac{q_1 a^2}{D} - \frac{\mu\omega^2 b^4}{D}, \\ d_{3n} &= 4 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^6 - \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^4 \frac{q_2 b^2}{D} - \frac{2}{\varrho^2} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^4 \frac{q_1 a^2}{D} - 2 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 \frac{\mu\omega^2 b^4}{D}, \\ d_{4n} &= \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^8 - \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^6 \frac{q_1 a^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^4 \frac{\mu\omega^2 b^4}{D} + \frac{12b^4(1-\nu^2)}{\delta^2 R^2}. \end{aligned} \right.$$

We wzorach (3.17) występują następujące funkcje:

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_{3n} &= (2+\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 \left[(2-\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 - \frac{q_2 b^2}{D} \right] Z_{2n} + \left[4 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 - \frac{q_2 b^2}{D} \right] Z_{3n} + Z_{4n}, \\ \Omega_{4n} &= (2+\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 Z_{2n} + Z_{3n}. \end{aligned} \right.$$

Funkcje Ω_{1n} i Ω_{2n} otrzymujemy ze wzorów (3.15) przez podstawienie $q_1 = q_2$, $a = b$, $m = n$. Funkcje Ω'_{1n} , Ω'_{2n} , ... wyznaczamy ze wzorów określających Ω_{1n} , Ω_{2n} , ... zastępując w nich Z_n przez Z'_n .

Mamy również

$$(3.21) \quad Z_{1n} = \frac{1}{2} + d_{4n} \sum_m \frac{1}{\Delta_{mn}}, \quad Z'_{1n} = \frac{1}{2} + d_{4n} \sum_m \frac{(-1)^m}{\Delta_{mn}}.$$

Pozostałe funkcje Z_n i Z'_n (por. p. 5) mają budowę analogiczną do budowy funkcji określonych wzorami (3.16). Powinniśmy tam zamienić jedynie n na m oraz Δ_{mn} na $\bar{\Delta}_{mm}$.

Obliczenie przemieszczeń $u(a, y)$ oraz $v(x, b)$ nie nastęrcza już teraz żadnych trudności. Wystarczy bowiem pomnożyć wszystkie wyrazy wzoru (3.12) przez $(-1)^n$, zaś wszystkie wyrazy wzoru (3.17) przez $(-1)^m$. W obu przypadkach wynika stąd konieczność zastąpienia funkcji Z przez Z' i na odwrót.

W dalszym ciągu obliczamy siły $S(x, y)$ ze wzoru (3.8). Różniczkując (3.4) i (3.5) zgodnie z zasadami różniczkowania szeregów FOURIERA (por. [10], s. 141, wzór (10.1)) znajdujemy wartości, jakie przyjmują te siły wzdłuż krawędzi rozpatrywanej powłoki:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} S(0, y) = & \frac{E \delta}{2(1+\nu)} \sum_n \left[\frac{C_n - A_n}{b} + \frac{\alpha_n \bar{C}_n}{a} \right] + \frac{E \delta}{2(1+\nu)} \sum_m \left\{ \frac{D_m - B_m + \beta_m \bar{B}_m}{a} + \right. \\ & \left. + \sum_n \left[\frac{2}{a} (\beta_m B_{mn} + \alpha_n C_{mn}) - \frac{2}{b} [A_n - (-1)^m C_n] - \frac{2}{a} [B_m - (-1)^n D] \right] \right\} \cos \beta_m y = \\ & = -\frac{1}{b} \sum_n \frac{E_n - G_n}{\alpha_n} + \frac{2}{a} \sum_m \left\{ \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2} a^6 \varrho (\varrho m \pi)^2 \times \right. \\ & \times \sum_n \frac{\alpha_n^2 [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)]}{\Delta_{mn}} [(-1)^m C_n - A_n] - \\ & \quad \left. - E \delta (\varrho m \pi)^2 [\Omega_{5m} B_m - \Omega'_{5m} D_m] - \right. \\ & \quad - \frac{\varrho a^8}{D} \sum_n \frac{\alpha_n [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)] (\alpha_n^2 - \nu \beta_m^2) + \frac{E \delta}{R^2} \alpha_n^3}{\Delta_{mn}} \times \\ & \quad \times [E_n - (-1)^m G_n] - a \varrho m \pi [\Omega_{1m} F_m - \Omega'_{1m} H_m] + \\ & \quad \left. + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2 R} a^6 \varrho (\varrho m \pi)^2 \sum_n \frac{\alpha_n^2 \{D[\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2] - q_2\}}{\Delta_{mn}} [K_n - (-1)^m M_n] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{E \delta a}{R} \varrho m \pi [\Omega_{6m} L_m - \Omega'_{6m} N_m] + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2 R} a^6 \varrho (\varrho m \pi)^2 \sum_n \frac{\alpha_n^3}{\Delta_{mn}} [P_n - (-1)^m S_n] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{12(1-\nu^2)a^3}{\delta^2 R} \varrho m \pi \left\{ R_m - \frac{4D(1-\nu)}{b^2} m \pi [w(0, 0) - (-1)^m w(0, b)] \right\} Z_{3m} - \\
& - \frac{12(1-\nu^2)a^3}{\delta^2 R} \varrho m \pi \left\{ T_m - \frac{4D(1-\nu)}{b^2} m \pi [w(a, 0) - (-1)^m w(a, b)] \right\} Z'_{3m} + \\
& + \frac{24(1-\nu^2)a^6}{\delta^2 R} \varrho (\varrho m \pi) \sum_n \frac{\alpha_n^3}{\Delta_{mn}} p_3(m, n) \left\{ \cos \beta_m y. \right.
\end{aligned}$$

We wzorach tych wprowadziliśmy oznaczenia

(3.23)

$$\begin{cases} \Omega_{5m} = \left[(m\pi\varrho)^4 - \varrho^2 (m\pi\varrho)^2 \frac{q_2 b^2}{D} - \frac{\mu\omega^2 a^4}{D} \right] Z_{2m} + \left[2(m\pi\varrho)^2 - \frac{q_1 a^2}{D} \right] Z_{3m} + Z_{4m}, \\ \Omega_{6m} = \left[(2-\nu) (\varrho m \pi)^2 - \frac{q_1 a^2}{D} \right] Z_{3m} + Z_{4m}. \end{cases}$$

W podobny sposób obliczamy

$$\begin{aligned}
(3.24) \quad S(x, 0) = & -\frac{1}{a} \sum_m \frac{F_m - H_m}{\beta_m} + \frac{2}{b} \sum_n \left\{ -E\delta \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 [\Omega_{5n} A_n - \Omega'_{5n} C_n] + \right. \\
& + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2 \varrho} b^6 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^2 \sum_m \frac{\beta_m^2 [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu\omega^2)]}{\Delta_{mn}} [(-1)^n D_m - B_m] - \\
& - b \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right) [\Omega_{1n} E_n - \Omega'_{1n} G_n] - \frac{b^8}{\varrho D} \sum_m \frac{\beta_m [D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2 + \mu\omega^2)] (\beta_m^2 - \nu \alpha_n^2)}{\Delta_{mn}} \times \\
& \times [F_m - (-1)^n H_m] + \frac{E\delta b}{R} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^3 [\Omega_{6n} K_n - \Omega'_{6n} M_n] + \\
& + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2 R \varrho} b^4 \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^4 \sum_m \frac{\beta_m \{ D[\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2] - q_1 \}}{\Delta_{mn}} [L_m - (-1)^n N_m] + \\
& + \frac{12(1-\nu^2)b^4}{\delta^2 R \varrho} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^4 \sum_m \frac{\beta_m}{\Delta_{mn}} [R_m - (-1)^n T_m] + \frac{12(1-\nu^2)b^3}{\delta^2 R} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^3 \times \\
& \times \left\{ P_n - \frac{4D(1-\nu)}{a^2} n\pi [w(0, 0) - (-1)^n w(a, 0)] \right\} Z_{2n} - \frac{12(1-\nu^2)b^3}{\delta^2 R} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^3 \times \\
& \times \left\{ S_n - \frac{4D(1-\nu)}{a^2} n\pi [w(0, b) - (-1)^n w(a, b)] \right\} Z'_{2n} + \\
& + \frac{24(1-\nu^2)b^4}{\delta^2 R \varrho} \left(\frac{n\pi}{\varrho} \right)^3 \sum_m \frac{\beta_m}{\Delta_{mn}} p_3(m, n) \left\{ \cos \alpha_n x, \right.
\end{aligned}$$

gdzie

$$(3.25) \quad \Omega_{6n} = \left[(2-\nu) \left(\frac{n\pi}{\rho} \right)^2 - \frac{q_2 b^2}{D} \right] Z_{2n} + Z_{3n}.$$

Funkcję Ω_{6n} otrzymujemy z (3.23) podstawiając $q_1 = q_2$, $m = n$, $a = b$. Funkcje Ω'_m i Ω''_m oraz siły styczne $S(a, y)$ i $S(x, b)$ określamy w podany poprzednio sposób.

Nachylenie powierzchni odkształconej wzdłuż krawędzi powłoki obliczamy różniczkując funkcję (3.3):

$$(3.26) \quad w_x(0, y) = \frac{2}{a} \sum_m \left\{ \frac{12(1-\nu^2)a^3}{\delta^2 R} \rho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n^4}{\Delta_{mn}} [A_n - (-1)^m C_n] + \right. \\ + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\delta^2 R} \beta_m [Z_{3m} B_m - Z'_{3m} D_m] - \frac{a^8}{DR} \rho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n [(2+\nu)\alpha_n^2 + \beta_m^2]}{\Delta_{mn}} [E_n - (-1)^m G_n] - \\ - \frac{a^4}{DR} [\Omega_{4m} F_m - \Omega'_{4m} H_m] + \frac{a^8}{D} \rho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 + \beta_m^2) \{ D[\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2] - q_2 \}}{\Delta_{mn}} \times \\ \times [K_n - (-1)^m M_n] - [\Omega_{7m} L_m - \Omega'_{7m} N_m] + \frac{a^8}{D} \rho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^3}{\Delta_{mn}} [P_n - (-1)^m S_n] + \\ + \frac{a^2}{D} \left\{ R_m - \frac{4D(1-\nu)}{b^2} m\pi [w(0, 0) - (-1)^m w(0, b)] \right\} \Omega_{8m} - \\ - \frac{a^2}{D} \left\{ T_m - \frac{4D(1-\nu)}{b^2} m\pi [w(a, 0) - (-1)^m w(a, b)] \right\} \Omega'_{8m} + \\ \left. + \frac{2a^8}{Db} \sum_n \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}{\Delta_{mn}} p_3(m, n) \right\} \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$(3.27) \quad \begin{cases} \Omega_{7m} = Z_{1m} + (\rho m \pi)^2 \left[(2+\nu) (\rho m \pi)^4 - 2 \frac{q_2 b^2}{D} \rho^2 (\rho m \pi)^2 - 2 \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} \right] Z_{2m} + \\ + \left[(1+2\nu) (\rho m \pi)^4 - \frac{q_2 b^2}{D} \rho^2 (\rho m \pi)^2 - \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} + \frac{E \delta a^4}{DR^2} \right] Z_{3m} + \nu (\rho m \pi)^2 Z_{4m}, \\ \Omega'_{8m} = (\rho m \pi)^4 Z_{2m} + 2(\rho m \pi)^2 Z_{3m} + Z_{4m}. \end{cases}$$

Podobnie

$$(3.28) \quad w_y(x, 0) = \frac{2}{b} \sum_n \left\{ \frac{12(1-\nu^2)b^3}{\delta^2 R} \alpha_n^3 [Z_{2n} A_n - Z'_{2n} C_n] + \right. \\ + \frac{12(1-\nu^2)b}{\delta^2 R \rho} \alpha_n^3 \sum_m \frac{\beta_m^2}{\Delta_{mn}} [B_m - (-1)^n D_n] - \frac{b^4}{DR} [\Omega_{4n} E_n - \Omega'_{4n} G_n] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b^8}{RD\varrho} \alpha_n \sum_m \frac{\beta_m (\beta_m^2 - \nu \alpha_n^2)}{\Delta_{mn}} [F_m - (-1)^n H_m] - [\Omega_{7n} K_n - \Omega'_{7n} M_n] + \\
& + \frac{b^8}{D\varrho} \alpha_n \sum_m \frac{\beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \{D[\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2] - q_1\}}{\Delta_{mn}} [L_m - (-1)^n N_m] + \frac{b^2}{D} \left\{ P_n - \right. \\
& - \frac{4D(1-\nu)}{a^2} n\pi [w(0,0) - (-1)^n w(a,0)] \left. \right\} \Omega_{8n} - \frac{b^2}{D} \left\{ S_n - \frac{4D(1-\nu)}{a^2} n\pi [w(0,b) - \right. \\
& \left. - (-1)^n w(a,b)] \right\} \Omega'_{8n} + \frac{2b^8}{Da} \sum_m \frac{\beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}{\Delta_{mn}} p_3(m,n) \left. \right\} \sin \alpha_n x.
\end{aligned}$$

Funkcje Ω'_{7m} , Ω'_{8m} , Ω_{7n} , Ω_{8n} , Ω'_{7n} i Ω'_{8n} oraz nachylenia $w_x(a, y)$, $w_y(x, b)$ wyznaczamy ze wzorów (3.27) w sposób omówiony poprzednio. Przejdźmy do obliczenia sił poprzecznych występujących na obwodzie powłoki. Ze wzoru (3.10) po zróżniczkowaniu (3.3) i żmudnych przekształceniach znajdujemy

$$\begin{aligned}
(3.29) \quad Q_x(0, y) = & -\frac{2}{a} \sum_m \left\{ -\frac{E \delta a^8}{R} \varrho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n^4 [\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2]}{\Delta_{mn}} [A_n - (-1)^m C_n] - \right. \\
& - \frac{E \delta a^2}{R} \beta_m [\Omega_{9m} B_m - \Omega'_{9m} D_m] + \frac{a^8}{R} \varrho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n [\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2] [(2+\nu)\alpha_n^2 + \beta_m^2]}{\Delta_{mn}} \times \\
& \times [E_n - (-1)^m G_n] + \frac{a^2}{R} [\Omega_{10m} F_m - \Omega'_{10m} H_m] + a^8 \varrho \beta_m \times \\
& \times \sum_n \frac{\alpha_n \left\{ (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [-D(1-\nu)^2 \alpha_n^2 \beta_m^2 + q_2 \alpha_n^2 - (2-\nu)(q_1 \alpha_n^2 + \mu \omega^2)] + (2-\nu) \frac{E \delta}{R^2} \alpha_n^4 \right\}}{\Delta_{mn}} \times \\
& \times [K_n - (-1)^m M_n] + \frac{D}{a^2} [\Omega_{11m} L_m - \Omega'_{11m} N_m] - \\
& - a^8 \varrho \beta_m \sum_n \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2]}{\Delta_{mn}} [P_n - (-1)^m S_n] + \\
& + \left\{ R_m - \frac{4D(1-\nu)}{b^2} m\pi [w(0,0) - (-1)^m w(0,b)] \right\} \Omega_{12m} - \\
& - \left\{ T_m - \frac{4D(1-\nu)}{b^2} m\pi [w(a,0) - (-1)^m w(a,b)] \right\} \Omega'_{12m} - \\
& - \frac{2a^8}{b} \sum_n \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [\alpha_n^2 + (2-\nu)\beta_m^2]}{\Delta_{mn}} p_3(m,n) \left. \right\} \sin \beta_m y,
\end{aligned}$$

gdzie

(3.30)

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_{9m} &= \Omega_{6m} + \frac{q_1 a^2}{D} Z_{3m}, \\ \Omega_{10m} &= \Omega_{3m} + \frac{q_1 a^2}{D} [\nu Z_{3m} - (\varrho m \pi)^2 Z_{2m}], \\ \Omega_{11m} &= 2(1-\nu) (\varrho m \pi)^2 Z_{1m} + (\varrho m \pi)^4 \left\{ (1-\nu) (5+\nu) (\varrho m \pi)^4 + \nu \frac{q_1 a^2}{D} (\varrho m \pi)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (5-4\nu) \left[\varrho^2 \frac{q_2 b^2}{D} (\varrho m \pi)^2 + \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} \right] \right\} Z_{2m} + 2(\varrho m \pi)^2 \left\{ (1-\nu) (2+\nu) (\varrho m \pi)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{q_1 a^2}{D} (\varrho m \pi)^2 - (2-\nu) \left[\frac{q_2 b^2}{D} \varrho^2 (\varrho m \pi)^2 + \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} \right] + (1-\nu) \frac{E \delta a^4}{DR^2} \right\} Z_{3m} + \\ &\quad + \left[(1-\nu^2) (\varrho m \pi)^4 + (\varrho m \pi)^2 \left(\nu \frac{q_1 a^2}{D} - \frac{q_2 b^2}{D} \varrho^2 \right) - \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} + \frac{E \delta a^4}{DR^2} \right] Z_{4m}, \\ \Omega_{12m} &= Z_{1m} + (\varrho m \pi)^2 \left[(2+\nu) (\varrho m \pi)^4 - (\varrho m \pi)^2 \left(\frac{q_1 a^2}{D} + 2\varrho^2 \frac{q_2 b^2}{D} \right) - 2 \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} \right] Z_{2m} + \\ &\quad + \left[(1+2\nu) (\varrho m \pi)^4 - (\varrho m \pi)^2 \left(\frac{2q_1 a^2}{D} + \varrho^2 \frac{q_2 b^2}{D} \right) - \frac{\mu \omega^2 a^4}{D} + \frac{E \delta a^4}{DR^2} \right] Z_{3m} + \\ &\quad + \left[\nu (\varrho m \pi)^2 - \frac{q_1 a^2}{D} \right] Z_{4m}. \end{aligned} \right.$$

W podobny sposób obliczamy

(3.31)

$$\begin{aligned} Q_y(x, 0) &= -\frac{2}{b} \sum_n \left\{ -\frac{E \delta b^4}{R} \alpha_n^3 [\Omega_{9n} A_n - \Omega'_{9n} C_n] - \frac{E \delta b^8}{R \varrho} \alpha_n^3 \sum_m \frac{\beta_m^2 [\beta_m^2 + (2-\nu) \alpha_n^2]}{\bar{A}_{mn}} \times \right. \\ &\quad \times [B_m - (-1)^n D_m] + \frac{b^2}{R} [\Omega_{10n} E_n - \Omega'_{10n} G_n] - \frac{b^8}{R \varrho} \alpha_n \sum_m \frac{\beta_m (\beta_m^2 - \nu \alpha_n^2) [\beta_m^2 + (2-\nu) \alpha_n^2]}{\bar{A}_{mn}} \times \\ &\quad \times [F_m - (-1)^n H_m] + \frac{D}{b^2} [\Omega_{11n} K_n - \Omega'_{11n} M_n] + \\ &\quad + \frac{b^8}{\varrho} \alpha_n \sum_m \frac{\beta_m \left\{ (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [-D(1-\nu)^2 \alpha_n^2 \beta_m^2 + q_1 \beta_m^2 - (2-\nu)(q_2 \beta_m^2 + \mu \omega^2)] + (2-\nu) \frac{E \delta}{R^2} \alpha_n^4 \right\}}{\bar{A}_{mn}} \times \\ &\quad \times [L_m - (-1)^n N_m] + \left. \left\{ P_n - \frac{4(1-\nu)}{a^2} n \pi [w(0, 0) - (-1)^n w(a, 0)] \right\} \Omega_{12n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ S_n - \frac{4(1-\nu)}{a^2} n\pi [w(0, b) - (-1)^n w(a, b)] \right\} \Omega'_{12n} - \frac{b^8}{\varrho} \alpha_n \times \\
& \quad \times \sum_m \frac{\beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2]}{\bar{\Delta}_{mn}} [R_m - (-1)^n T_m] - \\
& \quad - \frac{2b^8}{a} \sum_m \frac{\beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 [\beta_m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2]}{\bar{\Delta}_{mn}} p_3(m, n) \left. \right\} \sin \alpha_n x,
\end{aligned}$$

gdzie

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{aligned}
\Omega_{9n} &= \Omega_{6n} + \frac{q_2 b^2}{D} Z_{2n}, \\
\Omega_{10n} &= \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 (4-\nu^2) Z_{2n} + 4 \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 Z_{3n} + Z_{4n}, \\
\Omega_{11n} &= 2(1-\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 Z_{1n} + \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 \left\{ (1-\nu)(5+\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 + \nu \frac{q_2 b^2}{D} \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - (5-4\nu) \left[\frac{1}{\varrho^2} \frac{q_1 a^2}{D} \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2 b^4}{D} \right] + \frac{E\delta b^4}{DR^2} \right\} Z_{2n} + 2 \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 \times \\
& \quad \times \left\{ (1-\nu)(2+\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 + \nu \frac{q_2 b^2}{D} \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 - (2-\nu) \left[\frac{q_1 a^2}{D} \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\mu\omega^2 b^4}{D} \right] \right\} Z_{3n} + \left[(1-\nu^2) \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 \left(\nu \frac{q_2 b^2}{D} - \frac{q_1 a^2}{D\varrho^2} \right) - \frac{\mu\omega^2 b^4}{D} \right] Z_{4n}, \\
\Omega_{12n} &= Z_{1n} + \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 \left[(2+\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 - \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{q_2 b^2}{D} + 2 \frac{q_1 a^2}{\varrho^2 D} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{\mu\omega^2 b^4}{D} \right] Z_{2n} + \left[(1+2\nu) \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^4 - \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{2q_2 b^2}{D} + \frac{q_1 a^2}{\varrho^2 D} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu\omega^2 b^4}{D} \right] Z_{3n} + \left[\nu \left(\frac{n\pi}{\varrho}\right)^2 - \frac{q_2 b^2}{D} \right] Z_{4n}.
\end{aligned} \right.$$

Wzory określające $Q_x(a, y)$ i $Q_y(x, b)$ otrzymujemy w sposób poprzednio omówiony. We wszystkich podanych dotąd wzorach, które uzyskaliśmy różniczkując odpowiednio szeregi FOURIERA, występują szeregi zbieżne. Jeślibyśmy jednakże chcieli obliczyć wartość reakcji radialnej w narożu różniczkując (3.3) zgodnie ze wzorem (3.11), okazałoby się wówczas, że jest ona uzależniona od radialnego przemieszczenia naroża za pomocą szeregu rozbieżnego. Trudność tę można jednakże ominąć postępując w sposób wskazany przez Z. KĄCZKOWSKIEGO w pracy [9]. W naszym ujęciu sposób ten sprowadza się do zastąpienia w wyrażeniu (3.3) współczynników

K_n, M_n, L_m, N_m przez współczynniki $\bar{K}_n, \bar{M}_n, \bar{L}_m$ i \bar{N}_m zgodnie ze wzorami (3.7). Po przekształceniach otrzymujemy następujący wzór:

$$(3.33) \quad R(0, 0) = -\frac{4D(1-\nu)}{ab} \left\{ \sum_m m\pi \left[\frac{E\delta a^4}{DR} \beta_m (Z_{3m} B_m - Z'_{3m} D_m) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^4}{DR} (\Omega'_{4m} H_m - \Omega_{4m} F_m) + (\Omega'_{7m} N_m - \Omega_{7m} L_m) + \frac{a^2}{D} (\Omega_{8m} R_m - \Omega'_{8m} T_m) \right] + \right. \\ \left. + \sum_n n\pi \left[\frac{E\delta b^6}{DR} \alpha_n^3 (Z_{2n} A_n - Z'_{2n} C_n) + \frac{b^4}{DR} (\Omega'_{4n} G_n - \Omega_{4n} E_n) + (\Omega'_{7n} M_n - \Omega_{7n} K_n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b^2}{D} (\Omega_{8n} P_n - \Omega'_{8n} S_n) \right] + \frac{1}{2} w(0, 0) \left(1 + 4 \sum_n \Omega_{13n} \right) + \frac{1}{2} w(a, b) \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_n (-1)^n \Omega'_{13n} \right] - \frac{1}{2} w(a, 0) \left[1 + 4 \sum_n (-1)^n \Omega_{13n} \right] - \frac{1}{2} w(0, b) \left[1 + 4 \sum_n \Omega'_{13n} \right] + \right. \\ \left. + 2 \sum_m \sum_n \frac{\alpha_n \beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}{D_{mn}} p_3(m, n) \right\}.$$

Z równania (3.33) można obliczyć bez trudu $R(a, 0)$, $R(0, b)$ i $R(a, b)$. W pierwszym przypadku należy pomnożyć przez $(-1)^n$ wyrazy znajdujące się pod znakiem \sum_n i podstawić $Z_m = Z'_m$. W drugim przypadku należy pomnożyć przez $(-1)^m$ wyrazy stojące pod znakiem \sum_m podstawiając jednocześnie $Z_n = Z'_n$. Wreszcie w przypadku trzecim należy wykonać obie te operacje łącznie.

Wzory wyprowadzone w niniejszym punkcie są dość skomplikowane. Ze wzorów tych — jak łatwo sprawdzić — wynikają:

(a) rozwiązania uzyskane przez W. NOWACKIEGO, a dotyczące powłoki wzdłuż obwodu przesuwnie-utwierdzonej, [3],

(b) rozwiązania dotyczące płyty prostokątnej, które można otrzymać jako przypadek szczególny (izotropia) z równań wyprowadzonych przez Z. KAĆCZKOWSKIEGO w pracach [9] i [11].

Liczba możliwych wariantów podparcia powłoki jest bardzo duża. Poświęćmy nieco uwagi klasyfikacji zadań (dotyczących obliczania drgań własnych), jakie mogą wyniknąć z punktu widzenia stopnia trudności ich rozwiązania.

Rozróżnimy 4 typy zadań.

1. Typ I — dwie równoległe krawędzie powłoki są przegubowo-przesuwnie podparte. Zadania takie rozpatrywane były m.in. pod względem statycznym, jak już wspominaliśmy, przez W.Z. WŁASOWA ([1], s. 351), zaś pod względem wybożenia i drgań przez W. NOWACKIEGO, [3]. Prowadzą one do równań częstości w postaci zamkniętej (równania przestępne).

2. Typ. II — wzdłuż co najmniej dwóch nierównoległych krawędzi powłoki istnieją warunki brzegowe różne od przegubowo-przesuwne podparcia; jednakże

na każdym brzegu nieznan jest tylko jeden nieskończony ciąg współczynników rozkładu wielkości brzegowych w szereg FOURIERA. Przypadki takie, rozpatrywane w [3], sprowadzają się do nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych.

3. Typ III — warunki brzegowe na dwóch równoległych krawędziach różnią się tylko jednym elementem od warunków przegubowo-przesuwne podparcia (por. typ II). Natomiast na co najmniej jednej z pozostałych krawędzi nieznane są dwa lub więcej ciągów współczynników rozkładu wielkości brzegowych w szereg FOURIERA. Również i ten typ zadań można na ogół sprowadzić do nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych.

4. Typ IV obejmuje pozostałe przypadki i, jak już zauważył W. NOWACKI, [6], prowadzi do układu nieskończonych układów równań sprzężonych względem poszczególnych ciągów współczynników.

4. Sumy szeregów występujących w pracy

Występujące w pracy szeregi można w prosty sposób zsumować (w podobny sposób Z. KĄCZKOWSKI obliczył w pracy [11] sumy niektórych szeregów). Podstawą do obliczenia odpowiednich sum są zawarte w [12] wzory (1.217.1) i (1.217.2); przekształcamy je do postaci następującej:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 + z^2} = \frac{1}{2z} \operatorname{cth} z - \frac{1}{2z^2}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2 + z^2} = \frac{1}{2z} \operatorname{cosech} z - \frac{1}{2z^2}. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę szereg

$$(4.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^{8-2s}}{(n\pi)^8 + c_{1m}(n\pi)^6 + c_{2m}(n\pi)^4 + c_{3m}(n\pi)^2 + c_{4m}} \quad (s = 1, 2, 3, 4).$$

Szereg ten możemy przedstawić w postaci

$$(4.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A}{(n\pi)^2 + z_{1m}^2} + \frac{B}{(n\pi)^2 + z_{2m}^2} + \frac{C}{(n\pi)^2 + z_{3m}^2} + \frac{D}{(n\pi)^2 + z_{4m}^2} \right\},$$

gdzie A , B , C , i D są nieoznaczonymi współczynnikami, zaś

$$(4.4) \quad z_{1m}^2 = -r_{1m}, \quad z_{2m}^2 = -r_{2m}, \quad z_{3m}^2 = -r_{3m}, \quad z_{4m}^2 = -r_{4m}.$$

We wzorach tych r_{1m}, r_{2m}, \dots są pierwiastkami następującego równania algebraicznego 4 stopnia:

$$(4.5) \quad r^4 + c_{1m}r^3 + c_{2m}r^2 + c_{3m}r + c_{4m} = 0.$$

Przy ustalonym s (4.2), sprowadzamy wyrazy pod znakiem sumy (4.3) do wspólnego mianownika, a następnie obliczamy wartości A , B , C i D metodą porównania współczynników. Rozkład szeregu (4.3) na sumę czterech szeregów i uwzględnienie

4.1.1 prowadzi do wyznaczenia poszukiwanych sum. Postępując w ten sposób otrzymaliśmy następujące wzory (w celu uproszczenia zapisu pomijamy przy z indeks m):

$$(4.6) \left\{ \begin{array}{l} Z_{1m} = \varphi_{5m} c_{4m} \left(-\varphi_{1m} \frac{1}{z_1 \operatorname{th} z_1} + \varphi_{2m} \frac{1}{z_2 \operatorname{th} z_2} - \varphi_{3m} \frac{1}{z_3 \operatorname{th} z_3} + \varphi_{4m} \frac{1}{z_4 \operatorname{th} z_4} \right), \\ Z_{2m} = \varphi_{5m} \left(\varphi_{1m} \frac{z_1}{\operatorname{th} z_1} - \varphi_{2m} \frac{z_2}{\operatorname{th} z_2} + \varphi_{3m} \frac{z_3}{\operatorname{th} z_3} - \varphi_{4m} \frac{z_4}{\operatorname{th} z_4} \right), \\ Z_{3m} = \varphi_{5m} \left(-\varphi_{1m} \frac{z_1^3}{\operatorname{th} z_1} + \varphi_{2m} \frac{z_2^3}{\operatorname{th} z_2} - \varphi_{3m} \frac{z_3^3}{\operatorname{th} z_3} + \varphi_{4m} \frac{z_4^3}{\operatorname{th} z_4} \right), \\ Z_{4m} = \varphi_{5m} \left(\varphi_{1m} \frac{z_1^5}{\operatorname{th} z_1} - \varphi_{2m} \frac{z_2^5}{\operatorname{th} z_2} + \varphi_{3m} \frac{z_3^5}{\operatorname{th} z_3} - \varphi_{4m} \frac{z_4^5}{\operatorname{th} z_4} \right), \end{array} \right.$$

gdzie

$$(4.7) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1m} = (z_2^2 - z_3^2)(z_2^2 - z_4^2)(z_3^2 - z_4^2), \\ \varphi_{2m} = (z_1^2 - z_3^2)(z_1^2 - z_4^2)(z_3^2 - z_4^2), \\ \varphi_{3m} = (z_1^2 - z_2^2)(z_1^2 - z_4^2)(z_2^2 - z_4^2), \\ \varphi_{4m} = (z_1^2 - z_2^2)(z_1^2 - z_3^2)(z_2^2 - z_3^2), \\ \varphi_{5m} = \frac{1}{2(z_1^2 - z_2^2)(z_1^2 - z_3^2)(z_1^2 - z_4^2)(z_2^2 - z_3^2)(z_2^2 - z_4^2)(z_3^2 - z_4^2)}. \end{array} \right.$$

W analogiczny sposób obliczamy

$$(4.8) \left\{ \begin{array}{l} Z'_{1m} = \varphi_{5m} c_{4m} \left(-\varphi_{1m} \frac{1}{z_1 \operatorname{sh} z_1} + \varphi_{2m} \frac{1}{z_2 \operatorname{sh} z_2} - \varphi_{3m} \frac{1}{z_3 \operatorname{sh} z_3} + \varphi_{4m} \frac{1}{z_4 \operatorname{sh} z_4} \right), \\ Z'_{2m} = \varphi_{5m} \left(\varphi_{1m} \frac{z_1}{\operatorname{sh} z_1} - \varphi_{2m} \frac{z_2}{\operatorname{sh} z_2} + \varphi_{3m} \frac{z_3}{\operatorname{sh} z_3} - \varphi_{4m} \frac{z_4}{\operatorname{sh} z_4} \right), \\ Z'_{3m} = \varphi_{5m} \left(-\varphi_{1m} \frac{z_1^3}{\operatorname{sh} z_1} + \varphi_{2m} \frac{z_2^3}{\operatorname{sh} z_2} - \varphi_{3m} \frac{z_3^3}{\operatorname{sh} z_3} + \varphi_{4m} \frac{z_4^3}{\operatorname{sh} z_4} \right), \\ Z'_{4m} = \varphi_{5m} \left(\varphi_{1m} \frac{z_1^5}{\operatorname{sh} z_1} - \varphi_{2m} \frac{z_2^5}{\operatorname{sh} z_2} + \varphi_{3m} \frac{z_3^5}{\operatorname{sh} z_3} - \varphi_{4m} \frac{z_4^5}{\operatorname{sh} z_4} \right). \end{array} \right.$$

Funkcje Z'_{1n} , Z'_{1n} , Z'_{2n} , ... mają budowę identyczną. W podanych wzorach i w (4.4) należy zastąpić jedynie m przez n , przy czym r_{1n} , r_{2n} , ... są pierwiastkami równania

$$(4.9) \quad r^4 + d_{1n} r^3 + d_{2n} r^2 + d_{3n} r + d_{4n} = 0.$$

5. Wnioski

Podane rozwiązania umożliwiają uzyskanie dokładniejszych niż dotąd wyników liczbowych w wielu praktycznie ważnych przypadkach. Występują tu jednakże trudności natury algebraicznej: konieczność rozwiązania równania czwartego

stopnia i obliczenia z wystarczającą dokładnością sum skomplikowanych szeregów nieskończonych. Wydaje się przeto, że dopiero przy zastosowaniu elektronowych maszyn liczących uda się wykorzystać wyniki niniejszej pracy dla celów praktycznych. Zauważmy, że wyprowadzone wzory pozwalają również na badanie powłoki o nieciągłych warunkach brzegowych (por. [11]). Do tej grupy zadań należy również przypadek obciążenia swobodnej krawędzi powłoki nieciągłym obciążeniem zewnętrznym (np. siła skupiona).

Za pomocą zastosowanej tu metody uda się zapewne rozwiązać również przypadki ogólniejsze: powłokę o dowolnej wyniosłości i powłokę ortotropową. Wydaje się również możliwe potraktowanie powłoki walcowej o przekroju kołowym jako wycinka rury cylindrycznej i rozwiązanie problemu jako trójwymiarowego zadania teorii sprężystości.

Literatura cytowana w tekście

- [1] В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек*, ГИТТЛ, Москва 1949.
- [2] В.В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, ГИТТЛ, Москва 1956.
- [3] W. NOWACKI, *Wyboczenie i drgania własne powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos., 1, 7 (1955), s. 111.
- [4] О.Д. ОНИАШВИЛИ, *Некоторые динамические задачи теории оболочек*, Изд. АН. СССР, Москва 1957.
- [5] Н.К. СНИТКО, *Методы расчета сооружений на вибрацию и удар*, ГИИСА, Ленинград 1953.
- [6] W. NOWACKI, *Z zagadnień stateczności powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos., 4, 8 (1956), s. 705.
- [7] R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty trójkątnej 30°-60°-90° za pomocą transformacji właściwej*, Arch. Inżyn. Łądown., 2, 1960.
- [8] P. WILDE, *The General Solution for a Rectangular Orthotropic Plate Expressed by Double Trigonometric Series [Ogólne rozwiązanie prostokątnej płyty ortotropowej wyrażone podwójnymi szeregami trygonometrycznymi]*, Arch. Mech. Stos., 5, 10 (1958), s. 747.
- [9] Z. KĄCZKOWSKI, *Orthotropic Rectangular Plates with Arbitrary Boundary Conditions [Ortotropowe płyty prostokątne o dowolnych warunkach brzegowych]*, Arch. Mech. Stos., 2, 8 (1956).
- [10] Г. ТОЛСТОВ, *Szeregi Fouriera [Ряды Фурье]*, PWN Warszawa 1954.
- [11] Z. KĄCZKOWSKI, *Ortotropowe płyty prostokątne o brzegach swobodnych*, Arch. Mech. Stos., 4, 7 (1955), s. 457.
- [12] И.М. РЫЖИК, И.С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИТТЛ, Москва 1951.

Резюме

ИЗОТРОПНАЯ ПЛОСКАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается плоская цилиндрическая оболочка кругового сечения. Равновесие оболочки описывает дифференциальное уравнение (1.1), предложенное В. Власовым, [1]. Чтобы получить решение системы (1.1) при произвольных неразрывных краевых условиях, применяется метод соб-

ственной трансформации, [7]. В рассматриваемом случае выступают трансформации трех типов (2.2); форма ядер вытекает из предположенной основной схемы в виде шарнирно передвигной оболочки, опертой вдоль края (ср. [3]). После трансформации система (1.1) принимает вид системы алгебраических уравнений (2.9). Неизвестные краевые функции принимаются в форме одинарных рядов Фурье (3.1). После обратной трансформации получаются решения (3.3), (3.4) и (3.5), из которых путем дифференцирования определяются остальные краевые величины (3.12)-(3.33). Выведенные формулы позволяют получить статические и динамические (стационарные колебания) оболочки с произвольными краевыми условиями. Выступающие в работе ряды суммируются способом, предложенным уже в работе (11).

Summary

ISOTROPIC CIRCULAR SHELL WITH ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS

The object of the present considerations is a circular shell. The equilibrium of the shell is described by approximate differential equations (1.1) established by V. VLASOV, [1]. To obtain the solution of the system of equations (1.1), with any continuous boundary conditions, the method of eigen-transforms is used, [7]. In the case considered there appear transformations of three types (2.2). The form of the kernels follows from the basic scheme assumed, which consists in a shell on a hinged sliding support along the contour (cf. [3]). After transformation the system (1.1) takes the form of the algebraic equations (2.9). Unknown boundary functions are assumed in the form of simple FOURIER series (3.1). After inverse transformation the solutions (3.3), (3.4) and (3.5) are obtained, from which, the remaining boundary quantities, (3.12)-(3.33), are found by differentiation. The equations derived enable static and dynamic solution (steady-state vibration) of a shell with arbitrary boundary conditions. The series are summed up in a manner similar to that of the Ref. [11].

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
IPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 marca 1960 r.
