

**FELIKS DYMEK**

**PEWNE ZAGADNIENIE ZGINANIA PASMA PLYTOWEGO**

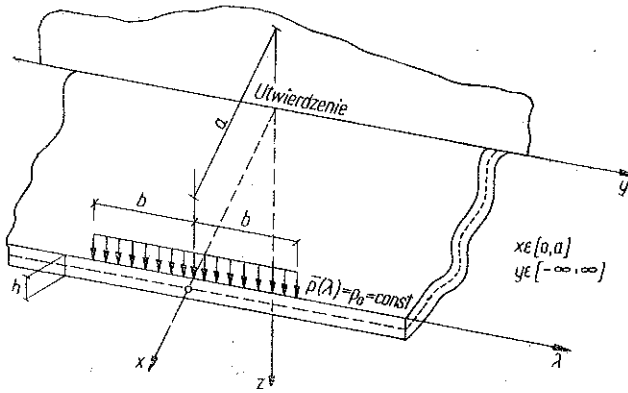
**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXLIII**

**TOM X • ZESZYT 4 • ROK 1962**

Zadanie zginania nieograniczonego pasma płytowego o stałej grubości  $h$  (rys. 1), utwierdzonego na brzegu  $x = 0$ , zaś na drugim  $x = a$  obciążonego w sposób następujący:

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{p}(\lambda) &= p_0 = \text{const}, & \text{gdy } 0 \leq |y| = |\lambda| \leq b; \\ \bar{p}(\lambda) &= 0, & \text{gdy } b < |y| = |\lambda| < \infty \end{aligned}$$

w oparciu o założenia technicznej teorii izotropowych płyt cienkich (teoria Z. GERMAIN) było przedmiotem pracy [1].



Rys. 1

Autor pracy [1], korzystając z przekształcenia całkowego Fouriera, podaje tzw. formalne rozwiązanie w postaci całki niewłaściwej w przedziale  $(-\infty, +\infty)$ .

Celem niniejszej pracy będzie podanie rozwiązania w formie użytecznej do obliczeń liczbowych, jakich wymaga praktyka inżynierska.

Jak wiadomo, stan naprężenia i odkształcenia cienkiej płyty izotropowej opisany jest równaniem różniczkowym

$$(2) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 w(x, y) = 0$$

dla tej części płyty, w której nie występuje obciążenie zewnętrzne, oraz równaniem

$$(3) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 w(x, y) = \frac{p(x, y)}{K}$$

dla tej części, w której działa obciążenie zewnętrzne i spełnione są pewne warunki brzegowe. We wzorach powyższych  $w(x, y)$  oznacza odkształconą powierzchnię środkową płyty,  $K = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  sztywność płytową przy zginaniu oraz

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

operator różniczkowy Laplace'a.

Momenty zginające i skręcające określone są w sposób następujący:

$$(4) \quad \begin{aligned} m_{xx} &= -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & m_{yy} &= -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ m_{xy} &= -K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

zaś siły poprzeczne

$$(5) \quad \begin{aligned} q_{xx} &= -K \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), & q_{yy} &= -K \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned}$$

Ponieważ techniczna teoria płyt cienkich nie pozwala w sposób ścisły spełnić wszystkich trzech warunków brzegowych występujących na każdym brzegu płyty  $m_{nn}(s)$ ,  $m_{ns}(s)$  i  $q_{nn}(s)$ , lecz tylko dwa spośród nich, wprowadzono pojęcie sił brzegowych  $\bar{q}_{nn}(s)$ , które są statycznie równoważne siłom przekrojowym brzegowym  $m_{ns}(s)$  i  $q_{nn}(s)$ . Siły brzegowe wyrażają się następująco:

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{q}_{xx} &= -K \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], & \bar{q}_{yy} &= -K \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned}$$

Naprężenia wyznaczmy ze wzorów

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{12}{h^3} z m_{xx}(x, y), & \sigma_{yy}(x, y, z) &= \frac{12}{h^3} z m_{yy}(x, y), \\ \tau_{xy}(x, y, z) &= \frac{12}{h^3} z m_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe (2) posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Jednakże wśród nieskończonej klasy funkcji spełniających równanie (2) istnieje tylko jedno rozwiązanie takie, które spełnia zarówno równanie różniczkowe (2), jak też wymagane warunki brzegowe.

Z uwagi na symetrię rozpatrywanego zagadnienia względem osi  $x$  założymy, że odkształcona powierzchnia środkowa płyty da się przedstawić w postaci całki Fouriera postaci

$$(8) \quad w(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A \operatorname{ch} \alpha x + B \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + C \operatorname{sh} \alpha x + D \alpha x \operatorname{ch} \alpha x) \cos \alpha y \, d\alpha,$$

zaś obciążenie zewnętrzne przy pomocy całki Fouriera

$$(9) \quad p(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\alpha) \cos \alpha y \, d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p_0 \frac{\sin \alpha b}{\alpha} \cos \alpha y \, d\alpha,$$

przy czym dla warunku (1)

$$p(\alpha) = \int_0^{\infty} \bar{p}(\lambda) \cos \alpha \lambda \, d\lambda = \int_0^b p_0 \cos \alpha \lambda \, d\lambda = p_0 \frac{\sin \alpha b}{\alpha}.$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$(10) \quad \begin{aligned} w(x, y) &= 0, & \text{jeśli } x &= 0, & y &\in (-\infty, \infty); \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= 0, & \text{jeśli } x &= 0, & y &\in (-\infty, \infty); \\ m_{xx}(x, y) &= 0, & \text{jeśli } x &= a, & y &\in (-\infty, \infty); \\ \bar{q}_{xx}(x, y) &= p(y), & \text{jeśli } x &= a, & y &\in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Nieokreślone dotąd funkcje parametru  $\alpha$  —  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  i  $D(\alpha)$  we wzorze (8) wyznaczmy z warunków brzegowych (10).

Przy założeniu jednostajnej zbieżności całki (8) obliczyć możemy pochodne cząstkowe (4) i (6), jakich wymagają warunki brzegowe (10).

Z warunków (10) otrzymujemy:

$$(11) \quad \begin{aligned} A(\alpha) &\equiv 0, \\ B(\alpha) &= \frac{p_0 \sin \alpha b [(1+\nu) \operatorname{sh} \alpha a + (1-\nu) \alpha a \operatorname{ch} \alpha a]}{K\alpha^2 \Delta(\alpha)}, \\ C(\alpha) &= \frac{p_0 \sin \alpha b [(1-\nu) \alpha a \operatorname{sh} \alpha a + 2 \operatorname{ch} \alpha a]}{K\alpha^2 \Delta(\alpha)}, \\ D(\alpha) &= \frac{p_0 \sin \alpha b [(1-\nu) \alpha a \operatorname{sh} \alpha a + 2 \operatorname{ch} \alpha a]}{K\alpha^2 \Delta(\alpha)}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$\Delta(\alpha) = [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{ch}^2 \alpha a + (1-\nu)^2 \alpha^2 a^2 + (1+\nu)^2.$$

Wprowadzając nową zmienną całkowania  $u = \alpha a$  oraz oznaczenia

$$\theta = \frac{x}{a}, \quad \delta = \frac{b}{a}, \quad \gamma = \frac{y}{a}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad -\infty < \gamma < \infty,$$

a następnie uwzględniając, że zachodzą związki

$$(12) \quad \sin \delta u \cos \gamma u = \frac{1}{2} (\sin \kappa u + \sin \eta u), \quad \text{gdzie} \quad \kappa = \frac{b+y}{a},$$

$$\sin \delta u \sin \gamma u = -\frac{1}{2} (\cos \kappa u - \cos \eta u), \quad \text{gdzie} \quad \eta = \frac{b-y}{a}.$$

po przekształceniach i uporządkowaniu, otrzymujemy z (8):

$$(13) \quad w(x, y) = \frac{p_0}{\pi K} \left\{ [(1+\nu) a^2 x + (1-\nu) a^3] \times \right. \\ \times \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u^3 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u^3 \Delta(u)} \right] + \\ + (1-\nu) a^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] + \\ + 2a^3 \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u^4 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u^4 \Delta(u)} \right] - \\ - (1-\nu) a^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] - \\ \left. - 2a^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u^3 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{u^3 \Delta(u)} \right] \right\}.$$

Wzory (4) przyjmą postać

$$(14) \quad m_{xx}(x, y) = -\frac{p_0}{\pi} \left\{ (1-\nu^2) (x-a) \times \right. \\ \times \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u \Delta(u)} \right] - \\ - 2(1-\nu) (x-a) \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{u \Delta(u)} \right] + \\ \left. + 2(1+\nu) a \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] \right\}.$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \nu)^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{\Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{\Delta(u)} \right] - \\
& - 2(1 + \nu) a \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] + \\
& + (1 - \nu)^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{\Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{\Delta(u)} \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(15) \quad m_{yy}(x, y) = & \frac{p_0}{\pi} \left\{ (1 - \nu^2) (a + x) \times \right. \\
& \times \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u \Delta(u)} \right] - \\
& - (1 - \nu)^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{\Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{\Delta(u)} \right] - \\
& - 2(1 - \nu) (x + av) \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{u \Delta(u)} \right] + \\
& + (1 - \nu)^2 x \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{\Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{\Delta(u)} \right] + \\
& + 2(1 + \nu) a \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] - \\
& - 2(1 + \nu) va \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} + \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

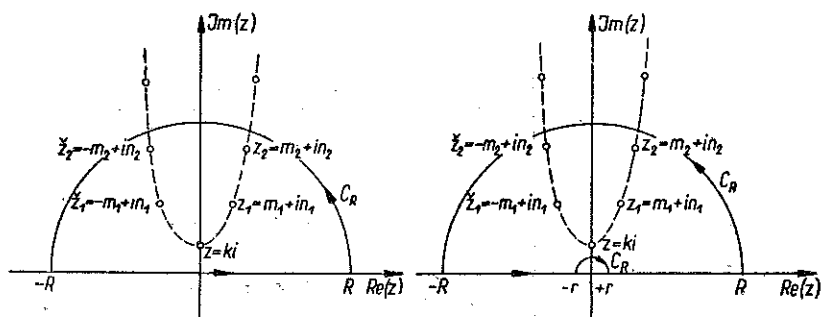
$$\begin{aligned}
(16) \quad m_{xy}(x, y) = & - \frac{p_0}{\pi} \left\{ (1 - \nu^2) a \times \right. \\
& \times \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \cos \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} - \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \cos \eta u du}{u^2 \Delta(u)} \right] + \\
& + [(1 - \nu)^2 a - 2(1 - \nu) x] \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \cos \kappa u du}{u \Delta(u)} - \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \cos \eta u du}{u \Delta(u)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \nu^2) x \left[ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} \theta u \cos \kappa u du}{u \Delta(u)} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} \theta u \cos \eta u du}{u \Delta(u)} \right] + \\
& + (1 - \nu^2) x \left[ \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} \theta u \cos \kappa u du}{\Delta(u)} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} \theta u \cos \eta u du}{\Delta(u)} \right] - \\
& - (1 - \nu^2) x \left[ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \theta u \cos \kappa u du}{\Delta(u)} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \theta u \cos \eta u du}{\Delta(u)} \right]
\end{aligned}$$

Przez  $\Delta(u)$  oznaczono wyrażenie

$$\Delta(u) = [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{ch}^2 u + (1 - \nu)^2 u^2 + (1 + \nu)^2.$$

Całki wzorów (13)-(16) obliczyć można w oparciu o twierdzenie o reszduach Cauchy'ego.



Rys. 2

Ponieważ równanie algebraiczne przestępne zmiennej zespolonej

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

postaci

$$(17) \quad \Delta(z) = [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{ch}^2 z + (1 - \nu)^2 z^2 + (1 + \nu)^2 = 0, \quad 0 \leq \nu \leq 0,5$$

posiada na górnej półpłaszczyźnie  $\operatorname{Im} z > 0$  zmiennej zespolonej jeden pierwiastek postaci  $z = ki$  oraz nieskończenie wiele pierwiastków postaci

$$z_p = \pm m_p + in_p, \quad p = 1, 2, 3 \dots \infty.$$

Tablica 1

$\nu$	$k$	$z_1 = \pm m_1 + in_1$		$z_2 = \pm m_2 + in_2$		$z_3 = \pm m_3 + in_3$	
		$m_1$	$n_1$	$m_2$	$n_2$	$m_3$	$n_3$
0	1,1896165	1,0772	2,6045	1,9517	5,946	2,3794	9,1638
0,15	1,39445	0,8455	2,5825	1,82745	5,95633	2,26548	9,17263
0,25	1,68284	0,5401	2,5024	1,72976	5,9619	2,17893	9,1785
0,35	3,07298	0,5847	1,8851	1,6123	5,9648	2,07965	9,1840
0,50	3,725015	0,8983	1,7241	1,3600	5,9538	1,88995	9,18954

Zatem obierając drogi całkowania jak na rys. 2, gdy  $R \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$  oraz przy założeniu  $\kappa > 0$  i  $0 \leq \theta \leq 1$  otrzymujemy następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi e^{-\kappa k} \sin k \sin \theta k}{k \{ [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k \}} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \text{sh } z_p \text{ sh } \theta z_p}{z_p \{ [4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{\Delta(u)} &= \pi \frac{e^{-\kappa k} \sin k \cos \theta k}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \text{sh } z_p \text{ ch } \theta z_p}{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p}, \\
 (18) \quad \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \sin \kappa u du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi}{8} \frac{\pi e^{-\kappa k} \cos k \cos \theta k}{k \{ [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k \}} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \text{ch } z_p \text{ ch } \theta z_p}{z_p \{ [4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{\Delta(u)} &= \pi \frac{e^{-\kappa k} \cos k \sin \theta k}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \text{ch } z_p \text{ sh } \theta z_p}{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} &= \frac{\theta}{8} \frac{\pi e^{-\kappa k} \cos k \sin \theta k}{k^2 [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} +
 \end{aligned}$$

Tablica 1

$z_4 = \pm m_4 + in_4$		$z_5 = \pm m_5 + in_5$		$z_6 = \pm m_6 + in_6$	
$m_4$	$n_4$	$m_5$	$n_5$	$m_6$	$n_6$
2,6733	12,3500	2,89852	15,5215		
2,56277	12,35717	2,7897	15,52758		
2,4798	12,36215	2,7084	15,5319		
2,38603	12,36733	2,617175	15,5364	2,80350	18,697843
2,2132	12,3745	2,45153	15,54335	2 64171	18,70423



$$\begin{aligned}
& + \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \theta z_p}{z_p^2 \{ [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}} \\
\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} \theta u \sin \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} &= \frac{\pi}{8} \frac{\pi e^{-\kappa k} \sin k \cos \theta k}{k^2 \{ [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k \}} + \\
& + \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \theta z_p}{z_p^2 \{ [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}} \\
\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \theta u \sin \kappa u du}{u^3 \Delta(u)} &= \frac{\pi}{8} \theta \frac{\pi e^{-\kappa k} \sin k \sin \theta k}{k^3 \{ [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k \}} + \\
& + \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \theta z_p}{z_p^3 \{ [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}} \\
p.f. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} \theta u \sin \kappa u du}{u^3 \Delta(u)} &= \frac{\pi}{16} [\theta^2 - \kappa^2 - (1-2\nu)] + \\
(19) \quad & + \frac{\pi e^{-\kappa k} \cos k \cos \theta k}{k^3 \{ [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k \}} + \\
& + \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \theta z_p}{z_p^3 \{ [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}} \\
p.f. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} \theta u \sin \kappa u du}{u^4 \Delta(u)} &= \frac{\pi}{16} \left[ -\theta \kappa^2 - \theta(1-2\nu) + \frac{\theta^3}{3} \right] + \\
& + \frac{\pi e^{-\kappa k} \cos k \sin \theta k}{k^4 \{ [4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k \}} + \\
& + \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \theta z_p}{z_p^4 \{ [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p \}} \\
\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \theta u \cos \kappa u du}{\Delta(u)} &= - \frac{\pi e^{-\kappa k} \sin k \sin \theta k}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} + \\
& + \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\kappa z_p} \operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \theta z_p}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ ch } \theta u \cos \kappa u du}{\Delta(u)} &= \frac{\pi e^{-\kappa k} \cos k \cos \theta k}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu z_p} \text{ch } z_p \text{ ch } \theta z_p}{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ ch } \theta u \cos \kappa u du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k} \frac{e^{-\kappa k} \sin k \cos \theta k}{\{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k\}} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu z_p} \text{sh } z_p \text{ ch } \theta z_p}{z_p \{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p\}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \theta u \cos \kappa u du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k} \frac{e^{-\kappa k} \cos k \sin \theta k}{\{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k\}} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu z_p} \text{ch } z_p \text{ sh } \theta z_p}{z_p \{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p\}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ sh } \theta u \cos \kappa u du}{u^2 \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k^2} \frac{e^{-\kappa k} \sin k \sin \theta k}{\{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k\}} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu z_p} \text{sh } z_p \text{ sh } \theta z_p}{z_p^2 \{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p\}}.
 \end{aligned}$$

(19)  
[c.d.]

Całki (18) i (19) nie tracą sensu w przypadku  $\kappa < 0$ . Gdy  $\kappa < 0$ , to  $-\kappa = s > 0$  i wówczas prawe strony całek (18) zmieniają znak na przeciwny oraz zamiast symbolu  $\kappa > 0$  wchodzi obecnie symbol  $-\kappa = s > 0$ ; natomiast prawe strony wzorów (19) pozostają bez zmiany, jedynie symbol  $\kappa > 0$  należy zastąpić przez  $-\kappa = s > 0$ .

Ponieważ warunek  $\kappa = (b+y)/a > 0$  przy  $a > 0$  wymaga, aby  $b+y > 0$ , co jest możliwe, gdy  $y > -b$ , podobnie warunek  $\eta = (b-y)/a > 0$  przy  $a > 0$  zachodzi gdy  $y < b$ ; stąd w przedziale  $-b < y < b$  jest  $\kappa > 0$  oraz  $\eta > 0$ .

Uwzględniając (18) i (19) przy warunku  $\kappa > 0$  oraz  $\eta > 0$  we wzorach (13)-(16), otrzymujemy po uporządkowaniu

$$\begin{aligned}
 (20) \quad w(x, y) &= \frac{p_0}{K} \frac{e^{-\left(\frac{b+y}{a}\right)k} + e^{-\left(\frac{b-y}{a}\right)k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ \frac{(1-\nu) a^2 x}{k^2} \sin \left[ \left(1 - \frac{x}{a}\right) k \right] - \right. \\
 &\left. - \frac{(1+\nu) a^2 x + (1-\nu) a^3}{k^3} \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) - \frac{2a^2 x}{k^3} \cos k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2a^3}{k^4} \cos k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) \Big\} + \frac{p_0}{K} \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) + \\
& + \frac{p_0}{K} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i \left( \frac{b+y}{a} \right) z_p} + e^{i \left( \frac{b-y}{a} \right) z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ [(1+\nu) a^2 x + (1-\nu) a^3] \times \right. \\
& \times \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^3} (1-\nu) a^2 x \operatorname{sh} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] + 2a^3 \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^4} - \\
& \left. - 2a^2 x \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^3} \right\} \quad \text{dla } y \in [-b, b]; \\
(21) \quad m_{xx}(x, y) = & -p_0 \frac{e^{-\left( \frac{b+y}{a} \right) k} + e^{-\left( \frac{b-y}{a} \right) k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ \frac{(1-\nu^2)(x-a)}{k} \times \right. \\
& \times \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \frac{2(1-\nu)(x-a)}{k} \cos k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) - \\
& - \left[ (1-\nu)^2 x + \frac{2(1+\nu)a}{k^2} \right] \sin \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] \Big\} - p_0 (a-x) - \\
& - p_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i \left( \frac{b+y}{a} \right) z_p} + e^{i \left( \frac{b-y}{a} \right) z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ (1-\nu^2)(x-a) \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} \right. \\
& - 2(1-\nu)(x-a) \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} - \left. \left[ (1-\nu)^2 x - \frac{2(1+\nu)a}{z_p^2} \right] \operatorname{sh} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \\
& \quad \text{dla } y \in [-b, b]; \\
(22) \quad m_{yy}(x, y) = & p_0 \frac{e^{-\left( \frac{b+y}{a} \right) k} + e^{-\left( \frac{b-y}{a} \right) k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ \frac{(1-\nu^2)(a+x)}{k} \times \right. \\
& \times \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) - (1-\nu)^2 x \sin \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] + \\
& + \frac{2(1-\nu)(x+ay)}{k} \cos k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) - \frac{2(1+\nu)a}{k^2} \cos k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \\
& + \frac{2(1+\nu)va}{k^2} \sin k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) \Big\} + p_0 \nu (x-a) + \\
& + p_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i \left( \frac{b+y}{a} \right) z_p} + e^{i \left( \frac{b-y}{a} \right) z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ (1-\nu^2)(a+x) \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} \right.
\end{aligned}$$

$$-2(1-\nu)(x+av) \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} + 2(1+\nu)a \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^2}$$

$$-2(1+\nu)va \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^2} - (1-\nu)^2 x \operatorname{sh} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right]$$

dla  $y \in [-b, b]$ ;

$$(23) \quad m_{xy}(x, y) = -p_0 \frac{e^{-\left(\frac{b+y}{a}\right)k} - e^{-\left(\frac{b-y}{a}\right)k}}{[4-(1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ (1-\nu^2)a \times \right. \\ \times \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \frac{[(1-\nu)^2 a - 2(1-\nu)x]}{k} \cos k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \\ \left. + \frac{(1-\nu^2)x}{k} \sin k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) + (1-\nu)^2 x \cos \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] \right\} - \\ - p_0 i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\left(\frac{b+y}{a}\right)z_p} - e^{i\left(\frac{b-y}{a}\right)z_p}}{[4-(1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ [(1-\nu)^2 a - 2(1-\nu)x] \times \right. \\ \times \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} + (1-\nu^2)a \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^2} + (1-\nu^2)x \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} + \\ \left. + (1-\nu)^2 x \operatorname{ch} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \quad \text{dla } y \in [-b, b].$$

Gdy  $y > b$  zachodzi  $\kappa = (b+y)/a > 0$ , zaś  $\eta = (b-y)/a < 0$ , stąd uwzględniając (18) i (19) przy  $\kappa > 0$  oraz  $\eta < 0$  we wzorach (13)-(16) otrzymujemy:

$$(24) \quad w(x, y) = \frac{p_0}{K} \frac{e^{-\left(\frac{b+y}{a}\right)k} - e^{-\left(\frac{b-y}{a}\right)k}}{[4-(1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \times \\ \times \left\{ \frac{(1-\nu)a^2 x}{k^2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] - \frac{[(1+\nu)a^2 x + (1-\nu)a^3]}{k^3} \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2a^3}{k^4} \cos k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) - \frac{2a^2 x}{k^3} \cos k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) \right\} + \\ + \frac{p_0}{K} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\left(\frac{b+y}{a}\right)z_p} - e^{i\left(\frac{b-y}{a}\right)z_p}}{[4-(1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \times$$

$$\times \left\{ \frac{[(1+\nu)a^2x + (1-\nu)a^3] \frac{\text{sh } z_p \text{ sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^3} - (1-\nu)a^2x \frac{\text{sh} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right]}{z_p^2} + 2a^3 \frac{\text{ch } z_p \text{ sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^4} - 2a^2x \frac{\text{ch } z_p \text{ ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^3} \right\} \quad \text{dla } \nu \in [b, \infty);$$

$$(25) \quad m_{xx}(x, y) = -p_0 \frac{e^{-\frac{(b+y)}{a}k} - e^{-\frac{(y-b)}{a}k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ \frac{(1-\nu^2)(x-a)}{k} \times \right. \\ \times \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \frac{2(1-\nu)(x-a)}{k} \cos k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) - \\ \left. - \left[ \frac{2(1+\nu)a}{k^2} + (1-\nu)^2 x \right] \sin \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] \right\} - \\ - p_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{(b+y)}{a}z_p} - e^{i\frac{(y-b)}{a}z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ (1-\nu^2)(x-a) \frac{\text{sh } z_p \text{ sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} - \right. \\ \left. - 2(1-\nu)(x-a) \frac{\text{ch } z_p \text{ ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} - \left[ (1-\nu)^2 x - \frac{2(1+\nu)a}{z_p^2} \right] \text{sh} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \\ \text{dla } y \in [b, \infty);$$

$$(26) \quad m_{yy}(x, y) = p_0 \frac{e^{-\frac{(b+y)}{a}k} - e^{-\frac{(y-b)}{a}k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ \frac{(1-\nu^2)(a+x)}{k} \times \right. \\ \times \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) - (1-\nu)^2 x \sin \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] + \frac{2(1-\nu)(x+av)}{k} \times \\ \left. \times \cos k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) - \frac{2(1+\nu)a}{k^2} \cos k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \frac{2(1+\nu)va}{k^2} \sin k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) \right\} + \\ + p_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{(b+y)}{a}z_p} - e^{i\frac{(y-b)}{a}z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ (1-\nu^2)(a+x) \frac{\text{sh } z_p \text{ sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} - \right. \\ \left. - 2(1-\nu)(x+av) \frac{\text{ch } z_p \text{ ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} + 2(1+\nu)a \frac{\text{ch } z_p \text{ sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^2} - \right. \\ \left. - 2(1+\nu)va \frac{\text{sh } z_p \text{ ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^2} - (1-\nu)^2 x \text{sh} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \\ \text{dla } y \in [b, \infty);$$

$$\begin{aligned}
 (27) \quad m_{xy}(x, y) = & -p_0 \frac{e^{-\left(\frac{b+y}{a}\right)k} - e^{-\left(\frac{y-b}{a}\right)k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \left\{ \frac{(1-\nu^2)a}{k^2} \times \right. \\
 & \times \sin k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \frac{[(1-\nu)^2 a - 2(1-\nu)x]}{k} \cos k \sin \left( \frac{kx}{a} \right) + \\
 & \left. + \frac{(1-\nu^2)x}{k} \sin k \cos \left( \frac{kx}{a} \right) + (1-\nu)^2 x \cos \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) k \right] \right\} - \\
 & - p_0 i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\left(\frac{b+y}{a}\right)z_p} - e^{i\left(\frac{y-b}{a}\right)z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ [(1-\nu)^2 a - 2(1-\nu)x] \times \right. \\
 & \times \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} + (1-\nu^2) a \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p^2} + (1-\nu^2) x \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \left( \frac{z_p x}{a} \right)}{z_p} + \\
 & \left. + (1-\nu)^2 x \operatorname{ch} \left[ \left( 1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \\
 & \text{dla } y \in [b, \infty).
 \end{aligned}$$

Podstawiając  $-y$  na miejsce  $y$  do zależności (24)-(27) i zmieniając znak po prawej stronie równości na przeciwny w przypadku funkcji nieparzystej  $m_{xy}$ , otrzymamy analogiczne wzory dla odkształconej powierzchni środkowej płyty oraz momentów zginających i skręcających odnoszące się do obszaru  $y \in (-\infty, -b]$ .

Jak łatwo wykazać podane rozwiązanie w postaci wzorów (20)-(27) czyni zadość wszystkim warunkom brzegowym (10), warunkom w nieskończoności oraz spełnia równanie różniczkowe (2).

Na podstawie wzorów (20)-(23) otrzymujemy w szczególności

$$\begin{aligned}
 \lim_{b \rightarrow \infty} w(x, y) &= \frac{p_0}{K} \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{6} x^3 \right), & y \in (-\infty, +\infty); \\
 \lim_{b \rightarrow \infty} m_{xx}(x, y) &= -p_0(a-x), & y \in (-\infty, +\infty); \\
 \lim_{b \rightarrow \infty} m_{yy}(x, y) &= p_0 \nu(x-a), & y \in (-\infty, +\infty); \\
 \lim_{b \rightarrow \infty} m_{xy}(x, y) &\equiv 0, & y \in (-\infty, +\infty),
 \end{aligned}$$

tj. dobrze znane wzory dla zgięcia walcowego płyty.

Dla graficznego zilustrowania rozwiązania i uwidocznienia wpływu współczynnika Poissona  $\nu$  skonstruowano wykresy odkształconej powierzchni środkowej

A

Tablica 2. Dla współczyn-

$z = m + in$	$\bar{z} = -m + in$	dla $w(a, y)$
		$\frac{\frac{\operatorname{sh} 2z}{z^4} - \frac{2}{z^3}}{3 \operatorname{sh} 2z + 2z} a^3$
$z_1 = 1,0772 + i 2,6045$	$\bar{z}_1 = -1,0772 + i 2,6045$	$(0,0111030 + i 0,00823315) a^3$
$z_2 = 1,9517 + i 5,946$	$\bar{z}_2 = -1,9517 + i 5,946$	$(0,000217100 + i 0,000190551) a^3$
$z_3 = 2,3794 + i 9,1638$	$\bar{z}_3 = -2,3794 + i 9,1638$	$(0,0000388307 + i 0,0000282125) a^3$

Ciąg dalszy tablicy 2A

dla $m_{yy}(a, y)$		dla $m_{yy}(0, y)$
$\frac{\frac{\operatorname{sh} 2z}{z^2} - \frac{2}{z}}{3 \operatorname{sh} 2z + 2z} a$	$\frac{\frac{\operatorname{sh} 2\bar{z}}{\bar{z}^2} - \frac{2}{\bar{z}}}{3 \operatorname{sh} 2\bar{z} + 2\bar{z}} a$	$\frac{0,000}{3 \operatorname{sh} 2z + 2z} a$
$(-0,108630 + i 0,0160051) a$	$(-0,108630 - i 0,0160051) a$	$(0,000 + i 0,000) a$
$(-0,0112712 - i 0,000972275) a$	$(-0,0112712 + i 0,000972275) a$	$(0,000 + i 0,000) a$
$(-0,00427129 - i 0,000516073) a$	$(-0,00427129 + i 0,000516073) a$	$(0,000 + i 0,000) a$

B

Tablica 2. Dla współczyn-

$z = m + in$	$\bar{z} = -m + in$	dla $w(a, y)$
		$\frac{\frac{\operatorname{sh} 2z}{z^4} - \frac{2}{z^3}}{2,4375 \operatorname{sh} 2z + 1,125 z} a^3$
$z_1 = 0,5401 + i 2,5024$	$\bar{z}_1 = -0,5401 + i 2,5024$	$(0,0816979 - i 0,0198144) a^3$
$z_2 = 1,72976 + i 5,9619$	$\bar{z}_2 = -1,72976 + i 5,9619$	$(0,000387856 + i 0,000178494) a^3$
$z_3 = 2,17893 + i 9,1785$	$\bar{z}_3 = -2,17893 + i 9,1785$	$(0,0000586979 + i 0,0000267782) a^3$

Ciąg dalszy tablicy 2B

dla $m_{yy}(a, y)$		dla $m_{yy}(0, y)$
$\frac{0,9375 \frac{\operatorname{sh} 2z}{z^2} - \frac{1,875}{z}}{2,4375 \operatorname{sh} 2z + 1,125 z} a$	$\frac{0,9375 \frac{\operatorname{sh} 2\bar{z}}{\bar{z}^2} - \frac{1,875}{\bar{z}}}{2,4375 \operatorname{sh} 2\bar{z} + 1,125 \bar{z}} a$	$\frac{-0,375 \frac{\operatorname{ch} z}{z} - 0,625 \frac{\operatorname{sh} z}{z^2}}{2,4375 \operatorname{sh} 2z + 1,125 z} a$
$(-0,407063 + i 0,317939) a$	$(-0,407063 - i 0,317939) a$	$(-0,00860326 - i 0,0719734) a$
$(-0,0152879 + i 0,00205240) a$	$(-0,0152879 - i 0,00205240) a$	$(-0,00110539 + i 0,00504607) a$
$(-0,00537882 + i 0,000205360) a$	$(-0,00537882 - i 0,000205360) a$	$(0,000426445 - i 0,00196227) a$

plyty  $w(a, y)$ , momentów zginających  $m_{xx}(0, y)$ ,  $m_{yy}(0, y)$ ,  $m_{yy}(a, y)$  i momentów skręcających  $m_{xy}(a, y)$  dla dwóch wartości współczynnika Poissona  $\nu = 0$  oraz  $\nu = 0,25$ , przy czym w obliczeniach liczbowych ograniczono się do trzech pierwszych wyrazów szeregów  $p = 1, 2, 3$  (tablice 3, 4 i 5). Wielkości pomocnicze do obliczeń

nika Poissona  $\nu = 0$

dla $w(a, y)$	dla $m_{xx}(0, y)$	
$\frac{\text{sh } 2\frac{z}{a} - \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^3}}{3 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 2\frac{z}{a}} a^3$	$2 \frac{\text{ch } z}{z} + \frac{\text{sh } z}{z^2}$ $\frac{2}{3 \text{sh } 2z + 2z} a$	$\frac{\text{ch } \frac{z}{a} - \frac{\text{sh } \frac{z}{a}}{\frac{z}{a^2}}}{3 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 2\frac{z}{a}} a$
$(0,0111030 - i 0,00823315) a^3$ $(0,000217100 - i 0,000190551) a^3$ $(0,0000388307 - i 0,0000282125) a^3$	$(-0,0368740 + i 0,111646) a$ $(0,00598885 - i 0,0159059) a$ $(-0,00214068 + i 0,00658919) a$	$(-0,0368740 - i 0,111646) a$ $(0,00598885 + i 0,0159059) a$ $(-0,00214068 - i 0,00658919) a$

dla $m_{yy}(0, y)$	dla $m_{xy}(a, y)$	
$\frac{0,000}{3 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 2\frac{z}{a}} a$	$\frac{\text{sh}^2 z}{z^2} + i$ $\frac{1}{3 \text{sh } 2z + 2z} a$	$\frac{\text{sh}^2 \frac{z}{a}}{\frac{z}{a^2}} + i$ $\frac{1}{3 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 2\frac{z}{a}} a$
$(0,000 - i 0,000) a$ $(0,000 - i 0,000) a$ $(0,000 - i 0,000) a$	$(0,0531143 + i 0,0551336) a$ $(0,00840636 + i 0,00501292) a$ $(0,00362322 + i 0,00164221) a$	$(-0,0531143 + i 0,0551336) a$ $(-0,00840636 + i 0,00501292) a$ $(-0,00362322 + i 0,00164221) a$

nika Poissona  $\nu = 0,25$

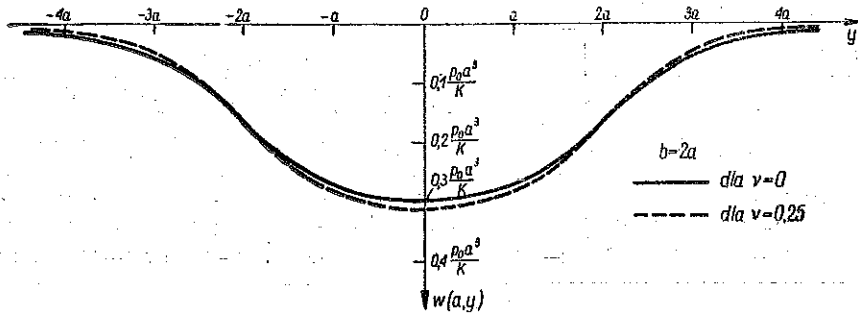
dla $w(a, y)$	dla $m_{xx}(0, y)$	
$\frac{\text{sh } 2\frac{z}{a} - \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^3}}{2,4375 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 1,125\frac{z}{a}} a^3$	$1,5 \frac{\text{ch } z}{z} + 2,5 \frac{\text{sh } z}{z^2}$ $\frac{1,5}{2,4375 \text{sh } 2z + 1,125 z} a$	$\frac{\text{ch } \frac{z}{a} - \frac{\text{sh } \frac{z}{a}}{\frac{z}{a^2}}}{2,4375 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 1,125\frac{z}{a}} a$
$(0,0816979 + i 0,0198144) a^3$ $(0,000387856 - i 0,000178494) a^3$ $(0,0000586979 - i 0,0000267782) a^3$	$(0,0344129 + i 0,287893) a$ $(0,00442159 - i 0,0201843) a$ $(-0,00170579 + i 0,00784910) a$	$(0,0344129 - i 0,287893) a$ $(0,00442159 + i 0,0201843) a$ $(-0,00170579 - i 0,00784910) a$

dla $m_{yy}(0, y)$	dla $m_{xy}(a, y)$	
$\frac{-0,375 \frac{\text{ch } \frac{z}{a}}{\frac{z}{a}} - 0,625 \frac{\text{sh } \frac{z}{a}}{\frac{z}{a^2}}}{2,4375 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 1,125\frac{z}{a}} a$	$0,9375 \frac{\text{sh}^2 z}{z^2} + 0,5625$ $\frac{0,9375}{2,4375 \text{sh } 2z + 1,125 z} a$	$0,9375 \frac{\text{sh}^2 \frac{z}{a}}{\frac{z}{a^2}} + 0,5625$ $\frac{0,9375}{2,4375 \text{sh } 2\frac{z}{a} + 1,125\frac{z}{a}} a$
$(-0,00860326 + i 0,0719734) a$ $(-0,00110539 - i 0,00504607) a$ $(0,000426445 + i 0,00196227) a$	$(0,22474153 + i 0,21381674) a$ $(0,00894914 + i 0,00514216) a$ $(0,00357624 + i 0,00152746) a$	$(-0,22474153 + i 0,21381674) a$ $(-0,00894914 + i 0,00514216) a$ $(-0,00357624 + i 0,00152746) a$

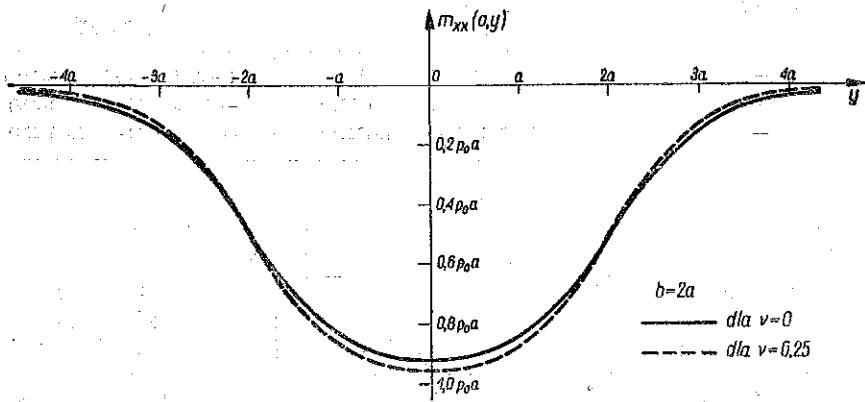
liczbowych za pomocą szeregów dla dwu wartości współczynnika Poissona  $\nu = 0$  i  $\nu = 0,25$  zestawiono w tabelcy 2.

Wielkości pomocnicze zestawiono w tabelcy 2 pozwalają na wykonanie obliczeń liczbowych dla każdego stosunku  $b/a$ .



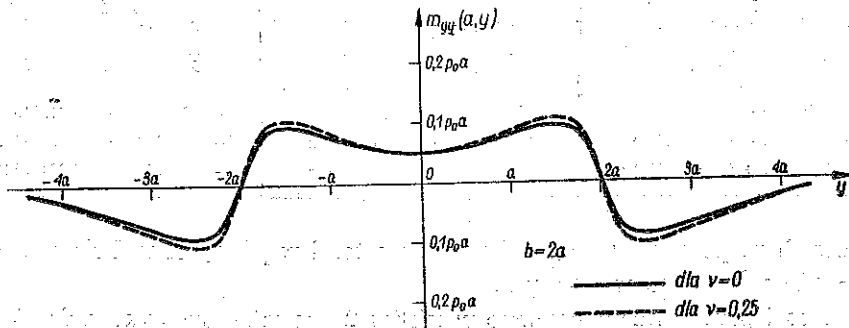


Rys. 3

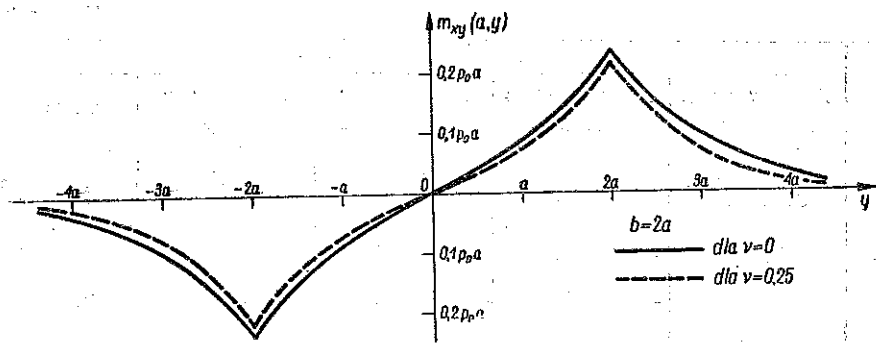


Rys. 4

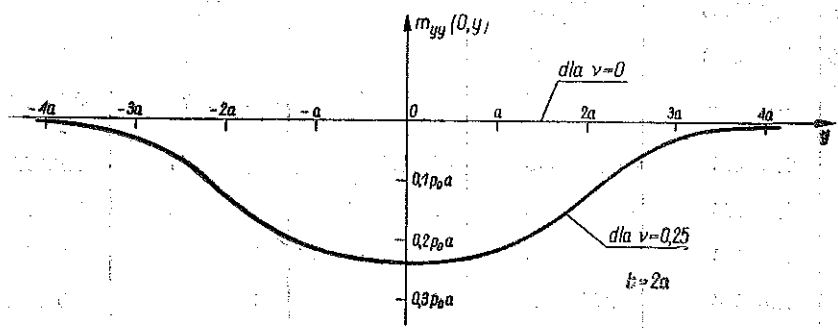
Uwaga: Rysunek 5 jest na str. 749.



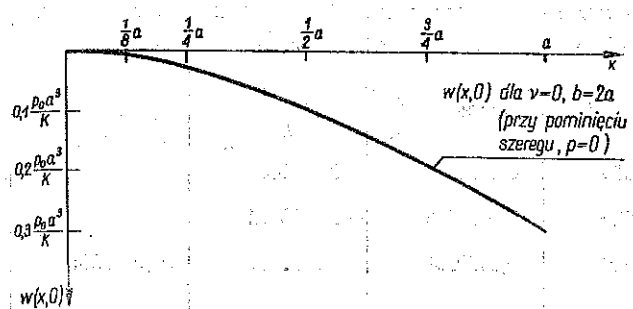
Rys. 6



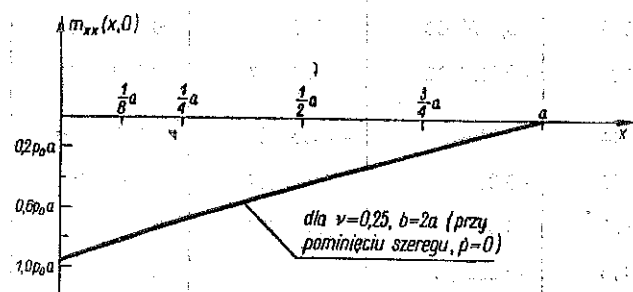
Rys. 7



Rys. 5



Rys. 8



Rys. 9

Tablica 3 (do

$W(a, y)$ dla $v = 0, b = 2a$					
$y$	Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0	$0,298244 \frac{p_0 a^3}{K}$	$-0,0002840 \frac{p_0 a^3}{K}$	$-0 \cdot \frac{p_0 a^3}{K}$	$0 \cdot \frac{p_0 a^3}{K}$	$0,2979600 \frac{p_0 a^3}{K}$
0,5a	0,291852	-0,0003811	-0,0000001	0	0,2914708
a	0,270346	-0,0003026	-0,0000013	0	0,2700420
1,5a	0,225891	0,0028858	-0,0000037	-0,0000002	0,2287729
1,75a	0,190455	0,0088776	0,0000463	0,0000033	0,1993822
2a - 0	0,1422883	0,0222062	0,0004342	0,0000777	0,1650064
2a + 0	0,1877950	-0,0222058	-0,0004342	-0,0000777	0,1650773
2,25a	0,139483	-0,0088775	-0,0000463	-0,0000033	0,1305559
2,5a	0,103600	-0,0028866	0,0000037	0,0000002	0,1007174
3a	0,057153	0,0002943	0,0000013	0	0,0574487
4a	0,017394	0,0001420	0	0	0,0175360
$w(a, y)$ dla $v = 0,25, b = 2a$					
$y$	Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0	$0,3104681 \frac{p_0 a^3}{K}$	$0,0015013 \frac{p_0 a^3}{K}$	$0 \cdot \frac{p_0 a^3}{K}$	$0 \cdot \frac{p_0 a^3}{K}$	$0,3119693 \frac{p_0 a^3}{K}$
0,5a	0,3018854	0,0034551	-0,0000001	0	0,3053404
a	0,2696926	0,0131616	-0,0000012	0	0,2828530
1,5a	0,1897210	0,0480861	0,0000117	0,0000001	0,2378189
1,75a	0,1153993	0,0894621	0,0001249	0,0000073	0,2049937
2a - 0	0,0019314	0,1633932	0,0007757	0,0001174	0,1662177
2a + 0	0,3306121	-0,1633932	-0,0007757	-0,0001174	0,1663258
2,25a	0,2170734	-0,0894670	-0,0001249	-0,0000073	0,1274741
2,5a	0,1425260	-0,0480895	-0,0000117	-0,0000001	0,0944247
3a	0,0614428	-0,0131448	0,0000012	0	0,0482992
4a	0,0114174	-0,0007507	0	0	0,0106667

rys. 3 i rys. 4)

$m_{xx}(0, y)$ dla $\nu = 0, b = 2a$				
Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
-0,9193773 $p_0 a$	0,0015931 $p_0 a$	0,0000004 $p_0 a$	0 $p_0 a$	-0,9177838 $p_0 a$
-0,9406899	0,0045011	0,0000007	0	-0,9001881
-0,8552769	0,0170852	-0,0000556	0,0000006	-0,8382566
-0,7531316	0,0483376	-0,0016909	0,0001415	-0,7063435
-0,6717116	0,0680368	-0,0057659	0,0011059	-0,6083349
-0,5610402	0,0737410	-0,0119777	0,0042814	-0,4949955
-0,4314922	-0,0737550	0,0119777	-0,0042814	-0,4975509
-0,3204882	-0,0580530	0,0057659	-0,0011059	-0,3838812
-0,2380408	-0,0483603	0,0016909	-0,0001415	-0,2865425
-0,1313194	-0,0171233	0,0000556	-0,0000006	-0,1483778
-0,0399655	-0,0007965	-0,0000002	0	-0,0407622

$m_{xx}(0, y)$ dla $\nu = 0,25, b = 2a$				
Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
-0,9602574 $p_0 a$	0,0063764 $p_0 a$	0,0000003 $p_0 a$	0 $p_0 a$	-0,9538807 $p_0 a$
-0,9453394	0,0097113	-0,0000017	0	-0,9356299
-0,8893846	0,0197295	-0,0000990	0,0000011	-0,8697530
-0,7503844	0,0250645	-0,0018500	0,0001574	-0,7270125
-0,6212043	0,0050264	-0,0056197	0,0011141	-0,6206835
-0,4239837	-0,0688025	-0,0088432	0,0034116	-0,4982178
-0,5746437	0,0688490	0,0088432	-0,0034116	-0,5003630
-0,3772998	-0,0049689	0,0056197	-0,0011141	-0,3777631
-0,2477277	-0,0249696	0,0018500	-0,0001574	-0,2710047
-0,1067949	-0,0194107	0,0000990	-0,0000011	-0,1261077
-0,0198476	-0,0031882	-0,0000001	0	-0,0230359

Tablica 4 (do

$m_{yy}(a, y)$ dla $\nu = 0, b = 2a$					
$y$	Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0	0,0496577 $p_0 a$	0,0910170 $p_0 a$	0,0000002 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0,0506749 $p_0 a$
0,5a	0,0587042	-0,0002774	0,0000030	0	0,0584298
a	0,0891396	-0,0096058	0,0000266	0,0000007	0,0795601
1,5a	0,1520533	-0,0551567	-0,0005639	-0,0000227	0,0963100
1,75a	0,2022021	-0,1136405	-0,0042970	-0,0005573	0,0836072
2a - 0	0,2703677	-0,2172566	-0,0225424	-0,0085426	0,0220262
2a + 0	-0,2657682	0,2172634	0,0225424	0,0035426	-0,0174198
2,25a	-0,1973978	0,1136508	0,0042970	0,0006573	-0,0787927
2,5a	-0,1466160	0,0551781	0,0005639	0,0000227	-0,0908513
3a	-0,0803833	0,0096952	-0,0000266	-0,0000007	-0,0712154
4a	-0,0246159	-0,0005085	-0,0000001	0	-0,0251245

$m_{yy}(a, y)$ dla $\nu = 0,25, b = 2a$					
$y$	Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0	0,0607052 $p_0 a$	-0,0126664 $p_0 a$	0,0000004 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0,0480401 $p_0 a$
0,5a	0,0834930	-0,0254785	0,0000031	0	0,0580177
a	0,1689629	-0,0342803	0,0000020	0,0000005	0,0846852
1,5a	0,3812832	-0,2731265	-0,0011651	-0,0000543	0,1059374
1,75a	0,5786035	-0,4773527	-0,0056411	-0,0009489	0,0936608
2a - 0	-0,8798543	-0,8141294	-0,0305758	-0,0107576	0,0243915
2a + 0	-0,8777577	0,8141226	0,0305758	0,0107576	-0,0223016
2,25a	-0,5763185	0,4773363	0,0056411	0,0009489	-0,0913922
2,5a	-0,3783994	0,2730744	0,0011651	0,0000543	-0,1041057
3a	-0,1631272	0,0339554	-0,0000020	-0,0000005	-0,0791744
4a	-0,0303135	0,0063335	-0,0000002	0,0000000	-0,0239802

rys. 6 i rys. 7)

$m_{xy}(a, y)$ dla $\nu = 0, b = 2a$				
Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0 $p_0 a$
0,0422155	-0,0021660	0,0000008	0,0000000	0,0400504
0,0298123	-0,0108282	-0,0000311	-0,0000003	0,0889528
0,1937759	-0,0405720	-0,0002996	-0,0000813	0,1521230
0,2642848	-0,0701740	-0,0037856	-0,0006860	0,1896392
0,3583422	-0,1102714	-0,0100258	-0,0032844	0,2347606
0,3583422	-0,1102714	-0,0100258	-0,0032844	0,2347606
0,2661565	-0,0701671	-0,0037856	-0,0006860	0,1915177
0,1976861	-0,0405560	-0,0002996	-0,0008130	0,1560491
0,1020572	-0,0107800	-0,0000311	-0,0000003	0,0982459
0,0331902	-0,0001524	0,0000001	0	0,0330379

$m_{xy}(a, y)$ dla $\nu = 0,25, b = 2a$				
Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0 $p_0 a$	0 $p_0 a$
0,0429241	-0,0135172	-0,0000001	0	0,0294059
0,1180742	-0,0487258	-0,0000413	-0,0000004	0,0593056
0,2818690	-0,1522055	-0,0010297	-0,0000788	0,1285550
0,4308764	-0,2590256	-0,0037931	-0,0005370	0,1674207
0,6572790	-0,4276274	-0,0102843	-0,0030549	0,2163124
0,6572790	-0,4276274	-0,0102843	-0,0030549	0,2163124
0,4315565	-0,2590425	-0,0037931	-0,0006370	0,1680339
0,2833516	-0,1522518	-0,0010297	-0,0000788	0,1299912
0,1221523	-0,0489614	-0,0000413	-0,0000004	0,0731491
0,0226993	-0,0040098	0,0000001	0	0,0186896

Tablica 5 do rys. 5, rys. 8, rys. 9

y	$m_{yy}(0, y)$ dla $\nu = 0,25, b = 2a$				
	Pierwszy wyraz rozwiązania	Pierwszy wyraz szeregu ( $p = 1$ )	Drugi wyraz szeregu ( $p = 2$ )	Trzeci wyraz szeregu ( $p = 3$ )	Suma
0	-0,2400543 $p_0 a$	0,0315941 $p_0 a$	0,0000001 $p_0 a$	0 $p_0 a$	-0,2384702 $p_0 a$
0,5a	-0,2363348	0,0024278	-0,0000004	0	-0,2339075
a	-0,2223461	0,0349324	-0,0000247	0,0000003	-0,2174382
1,5a	-0,1875961	0,0352661	-0,0004625	0,0000393	-0,1817531
1,75a	-0,1553010	0,0012566	-0,0014049	0,0002785	-0,1551708
2a-0	-0,1059954	-0,0172007	-0,0022108	0,0003529	-0,1245540
2a+0	-0,1436610	0,0172123	0,0022108	-0,0003529	-0,1250908
2,25a	-0,0943250	-0,0012422	0,0014049	-0,0002785	-0,0944408
2,5a	-0,0519321	-0,0052424	0,0004625	-0,0000393	-0,0577514
3a	-0,0266988	-0,0048527	0,0000247	-0,0000003	-0,0315270
4a	-0,0049614	-0,0007970	0	0	-0,0057584

x	$m_{xx}(x, 0)$ dla $\nu = 0,25, b = 2a$ przy pominięciu szeregu	$w(x, 0)$ dla $\nu = 0, b = 2a$ przy pominięciu szeregu	x	$m_{xx}(x, 0)$ dla $\nu = 0,25, b = 2a$ przy pominięciu szeregu	$w(x, 0)$ dla $\nu = 0, b = 1a$ przy pominięciu szeregu
0	-0,9602576 $p_0 a$	0 $p_0 a^3/K$	1/4 a	-0,6949859	0,0260983
1/16 a	-0,8925493		1/2 a	-0,4467912	0,0941661
3/32 a	-0,8590156		3/4 a	-0,2164143	0,1895187
1/8 a	-0,8257116	0,0068532	a	0,0000000	0,2982447
3/16 a	-0,7598327				

Jeśli oznaczymy je (tablica 2) przez

$$u_p + i\beta_p, \quad u_p - i\beta_p,$$

to szeregi wzorów (20) i (24) dla  $x = a$  przyjmą postać

$$(28) \quad w(a, y) = 2 \frac{p_0}{K} a^3 \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ e^{-\left(\frac{b+y}{a}\right) n_p} \left[ \alpha_p \cos\left(\frac{b+y}{a}\right) m_p - \beta_p \sin\left(\frac{b+y}{a}\right) m_p \right] + e^{-\left(\frac{b-y}{a}\right) n_p} \left[ \alpha_p \cos\left(\frac{b-y}{a}\right) m_p - \beta_p \sin\left(\frac{b-y}{a}\right) m_p \right] \right\} \quad \text{dla } y \in [-b, b],$$

$$(28) \quad \bar{w}(a, y) = 2 \frac{p_0}{K} a^3 \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ e^{-\left(\frac{b+y}{a}\right)n_p} \left[ \alpha_p \cos\left(\frac{b+y}{a}\right) m_p - \beta_p \sin\left(\frac{b+y}{a}\right) m_p \right] + \right. \\ \left. + e^{-\left(\frac{y-b}{a}\right)n_p} \left[ -\alpha_p \cos\left(\frac{y-b}{a}\right) m_p + \beta_p \sin\left(\frac{y-b}{a}\right) m_p \right] \right\} \quad \text{dla } y \in [b, \infty).$$

Podobne wyrażenia otrzymamy dla  $\bar{m}_{xx}(0, y)$ ,  $\bar{m}_{yy}(0, y)$ ,  $\bar{m}_{yy}(a, y)$  oraz  $\bar{m}_{xy}(a, y)$ .

Dla zilustrowania zbieżności szeregów zestawiono tablice 3, 4 i 5 podając kolejno: pierwszy wyraz rozwiązania, pierwszy, drugi, trzeci wyrazy szeregów ( $p = 1, 2, 3$ ). Jak wynika z tychże tablic, otrzymane szeregi są bardzo szybko zbieżne.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] H. JUNG, *Über eine Anwendung der Fourier-transformation in der Plattenstatik*, Mathematische Nachrichten, 6, 6 (1952), Seite 343.
- [2] W. NOWACKI, *Zginanie płyt ciętych nieskończenie długich*, Arch. Mech. Stos., 2, 1 (1949).
- [3] K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady Warszawa 1957.
- [4] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN Warszawa 1960.
- [5] F. LÖSCH, *Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen*, Springer-Verlag, Berlin 1954.
- [6] F. LEJA, *Teoria funkcji analitycznych*, PWN Warszawa 1957.

#### Резюме

#### НЕКОТОРАЯ ЗАДАЧА, КАСАЮЩАЯСЯ ИЗГИБА ПЛАСТИНЧАТОЙ ПОЛОСЫ

На основании технической теории тонких изотропных пластинок (теории Жермен) в настоящей работе рассматривается задача по изгибу бесконечной консольной пластинчатой полосы постоянной толщины  $h$ , при внешней нагрузке на свободном крае,  $x = a = \text{const}$  изменяющейся согласно зависимости (1).

Опираясь на работы [1] и [2], предполагается, что деформированную срединную поверхность пластинки можно представить при помощи интеграла Фурье (8), а внешнюю нагрузку пластинки — при помощи интеграла (9).

Затем используется теория вычетов Коши, для определения интегралов в формулах (13) до (16). Определенные корни алгебраического трансцендентного уравнения (17) сопоставлены на табл. 1.

Дается точное решение дифференциального уравнения (2), при краевых условиях (10), в виде формул (20) - (27).

На основании полученных формул строятся диаграммы (рис. 3-7), которые сопоставляются на таблицах 3, 4 и 5, причем приведенные исчисления ограничиваются тремя первыми выражениями рядов ( $p = 1, 2, 3$ ).

Ввиду того, что полученные формулы являются произведениями двух функций, из которых одна не зависит от  $x$ , а вторая от  $y$ , то вспомогательные величины, сопоставленные на



таблице 2, дают возможность численно производить исчисление собранных на таблице 2 для всех отношений  $b/a$ .

Диаграммы на рис. 8 и 9 построены, не принимая во внимание рядов ( $p = 0$ ).

Работа иллюстрирует также влияние коэффициента Пуассона  $\nu$  на величины сил в сечениях  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$ ,  $m_{xy}$  и перемещения  $w$ .

## Summary

### A BENDING PROBLEM OF THE PLATE STRIP

The engineer's theory of thin isotropic plates (the Sophie Germain theory) is used to analyse the problem of the infinite cantilever plate strip of uniform thickness  $h$ , the load on the free edge being variable according to (1).

On the basis of the Refs. [1] and [2] it is assumed that the deformed middle surface can be represented by means of a Fourier integral (8) and the external load of the plate — by means of the integral (9).

Next, the Cauchy residue method is used for calculating the integrals in (13)-(16). The roots of the transcendental equation (17) are collated in Tab. 1.

The accurate solution of the differential equation (2) with the boundary conditions (10) are obtained in the form of the equations (20)-(27).

On the basis of the equations obtained the graphs Fig. 3-7 and the tables 3, 4 and 5 have been prepared by confining ourselves to the first three terms of the series ( $p = 1, 2, 3$ ).

The expressions obtained constituting products of two functions one of which is independent of  $x$  and the other of  $y$ , the auxiliary quantities contained in Tab. 2 enable us to perform numerical computations of which the results are collated in Tab. 2 for every  $b/a$  ration.

The graphs Figs. 8 and 9 have been drawn by rejecting the series ( $p = 0$ ).

The paper illustrates also the influence of the Poisson ratio  $\nu$  on the values of the section forces  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$ ,  $m_{xy}$  and the displacement  $w$ .

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1961 r.*