

RYSZARD DĄBROWSKI

POWŁOKI WALCOWE ZAMKNIĘĆ WODNYCH

133	133
200	200
207	207
211	211
215	215
219	219
223	223
227	227
231	231
235	235
239	239
243	243

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXLI**

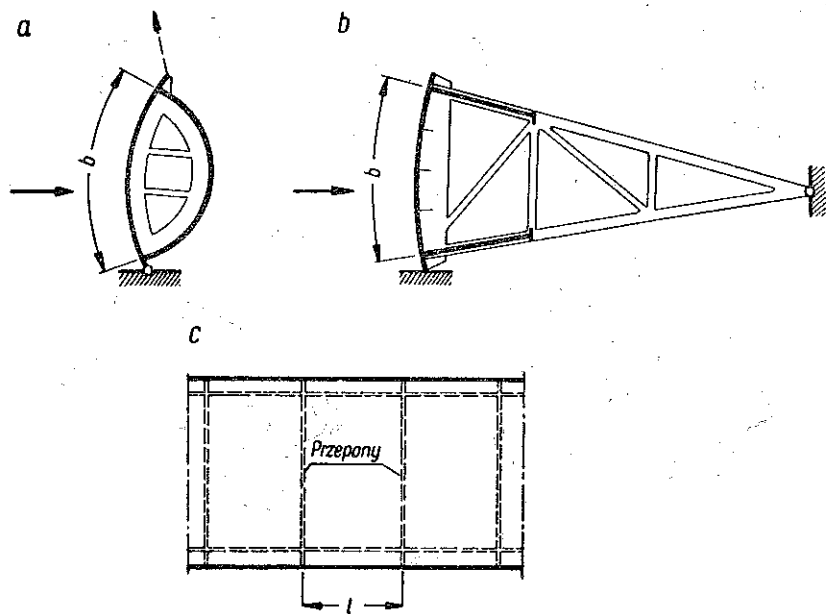
TOM X • ZESZYT 4 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	679
2. Rozwiązanie dla powłoki swobodnie podpartej za pomocą szeregów podwójnych	685
3. Zagadnienie brzegowe dla powłoki swobodnie podpartej	690
4. Powłoka ciągła	695
5. Powłoki ortotropowe	697
6. Przykłady liczbowe i wnioski	700
6.1. Powłoka swobodnie podparta. Zastosowanie szeregów podwójnych. Przykład 1, 2, 3 i 4	700
6.2. Zastosowanie równań zaburzenia brzegowego. Przykład 5	703
6.3. Powłoka utwierdzona. Przykład 6	704
6.4. Powłoka ortotropowa swobodnie podparta. Przykład 7	705
7. Uwagi końcowe	706

1. Wstęp

1.1. Ruchome zamknięcia wodne, wykonywane ze stali, mogą być różnego rodzaju (por. [1]). W tym miejscu wymieńmy tylko te konstrukcje zamknięć, w których poszycie na stronie odwodnej jest zakrzywione według powierzchni walcowej, zazwyczaj kolistej — a więc kłapy soczewkowate (rys. 1a) i zamknięcia segmentowe (rys. 1b). Poszycie opiera się na przeponach poprzecznych i usztywnie-

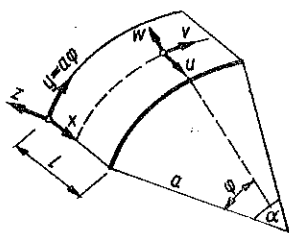


Rys. 1

niach podłużnych ustroju nośnego i pod względem pracy statycznej stanowi *powłokę walcową*, której rozpiętość l , czyli odległość między przeponami, jest zazwyczaj mniejsza od szerokości b (rys. 1a-1c). Powłoki takie noszą nazwę powłok *krótkich*. Jeżeli poszycie jest *gładkie* (rys. 1a), to stanowi ono powłokę *izotropową*. Poszycie wzmocnione dostatecznie gęsto rozstawionymi żebrami usztywniającymi [bądź to podłużnymi (rys. 1b), bądź też poprzecznymi] może być traktowane jako powłoka *ortotropowa*.

Celem niniejszego opracowania jest określenie stanu naprężenia w poszyciu za pomocą możliwie prostych równań teorii powłok walcowo-kolistych.

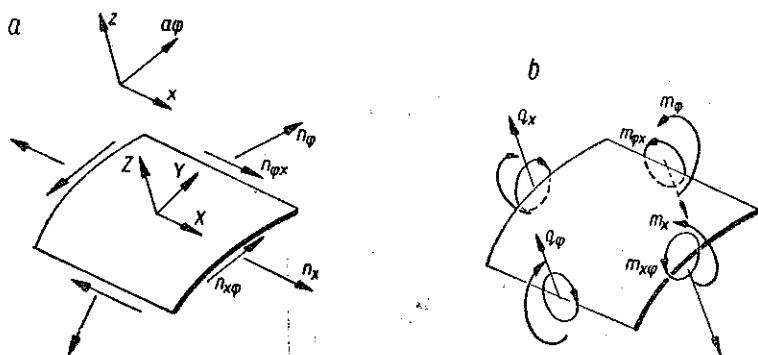
W pierwszym rzędzie badana będzie pewna wyidealizowana pojedyncza powłoka walcowo-kolistą, która wzdłuż wszystkich krawędzi jest *swobodnie podparta* (rys. 2).



Rys. 2

Podparcie takie należy rozumieć w ten sposób, że na całym obwodzie przesunięcia radialne w są równe zero, na krawędziach poprzecznych $x=0, x=l$ spełnione są warunki: $v=0, u \neq 0$ i na krawędziach podłużnych $\varphi=0, \varphi=\alpha$ analogicznie $u=0, v \neq 0$ (rys. 2). Warunki te wskazują, że elementy podpierające są w swojej płaszczyźnie niepodatne (przepony w płaszczyźnie poprzecznej, belki brzegowe w swoich płaszczyznach radialnych), natomiast w kierunku do niej prostopadłym idealnie giętkie. Poza tym na całym

obwodzie powinny zniknąć siły normalne n_x, n_φ (rys. 3a) i momenty zginające m_x, m_φ (rys. 3b). Nie znikają tam natomiast siły $n_{x\varphi}$ i siły q_x, q_φ . Te ostatnie wraz z momentami skręcającymi $m_{x\varphi}, m_{\varphi x}$ można sprowadzić do tzw. zastępczych sił poprzecznych $\bar{q}_x, \bar{q}_\varphi$. A zatem dla krawędzi $n_{x\varphi} \neq 0, \bar{q}_x \neq 0, \bar{q}_\varphi \neq 0$.



Rys. 3

W realnych konstrukcjach będziemy mieli do czynienia z nieco odmiennymi warunkami brzegowymi. Chodzi tu mianowicie o pominięcie podatności podpór na obwodzie powłoki. Brzegowe siły styczne $n_{x\varphi}$ oddziałujące na elementy brzegowe $\varphi=0, \varphi=\alpha$ i $x=0, x=l$ wywołują w samych elementach brzegowych jak i w częściach powłoki przylegających do nich wydłużenia $\varepsilon_x = du/dx$ lub $\varepsilon_\varphi = dv/a d\varphi + w/a$. Na skutek tego powstaną tam również pewne dodatkowe siły normalne n_x lub n_φ .

Z nieściśłościami tego typu spotykamy się wszakże przy obliczaniu walcowych powłok dachowych, gdzie np. dla krawędzi $x=0, x=l$ przyjmuje się warunek

$\varepsilon_{\varphi} = 0$ (co prawda podłużne belki brzegowe traktuje się tam jako odkształcalne, $\varepsilon_x \neq 0$, i w związku z tym rozwiązuje się zagadnienie zaburzeń brzegowych)¹.

Zależnie od rodzaju powłoki zaburzenia związane z różnymi od zera naprężeniami normalnymi będą miały większy wpływ bądź to na krawędziach podłużnych (powłoki długie), bądź też na krawędziach zakrzywionych (powłoki krótkie).

Izotropowe powłoki swobodnie podparte, poddane parciu hydrostatycznemu lub stałemu obciążeniu radialnemu, zostały obszernie potraktowane w punkcie następnym przy zastosowaniu *podwójnych szeregów Fouriera*, [2], [3] i [4].

Metoda *zaburzenia brzegowego*, do której uciec się trzeba w przypadku złej zbieżności szeregów podwójnych, przedstawiona została w punkcie trzecim.

Przypadek powłoki *ciągłej*, kiedy to na podporach poprzecznych $x = 0$, $x = l$ występuje moment m_x , a przesunięcie u jest równe zeru, rozpatrzony został pokrótce w punkcie czwartym za pomocą szeregów podwójnych.

W kolejnym punkcie piątym wyprowadzone zostało równanie różniczkowe dla powłoki *ortotropowej* będące pewnym uproszczeniem w stosunku do rozwiązania ściśłego. Dla praktycznych obliczeń możliwe są jeszcze dalsze uproszczenia.

Przedstawione w punktach 2, 3 i 5 rozwiązania odnoszą się właściwie tylko do powłok jednorodnych, tym niemniej otrzymane tam wyniki mają znaczenie ogólniejsze, uwydatniają bowiem wpływ zakrzywienia na zgięciowy stan naprężenia w powłoce i dają między innymi odpowiedź na pytanie, w jakim stopniu momenty w powłoce walcowo-kolistej różnią się od momentów w płycie prostokątnej o tych samych wymiarach boków.

Tok rozwiązania powłoki walcowej swobodnie podpartej pod dowolnym obciążeniem powierzchniowym, także hydrostatycznym, przy użyciu szeregów podwójnych przedstawił dość szczegółowo (jednak bez przykładowej ilustracji wyników) S. L. LEE, [5]. Oparł się on na równaniach różniczkowych opublikowanych przez ASCE, [6]. Równania te, choć nie są całkowicie ścisłe, prowadzą już do dość zawiłych wzorów obliczeniowych. Poza tym przyjął on dla uproszczenia współczynnik Poissona $\nu = 0$, można więc oczekiwać znacznych nieścisłości w wartości momentów dla powłok stalowych (przypomnijmy, że np. dla płyty kwadratowej maksymalny moment od obciążenia równomiernie rozłożonego wynosi $0,0368 pl^2$ dla $\nu = 0$ i $0,0475 pl^2$ dla $\nu = 0,3$). Więcej uwagi warto zatem poświęcić wstępnej analizie różnych teorii powłoki walcowo-kolistej z uwagi na ich dokładność i stopień trudności obliczeń.

1.2. Ogólnie można wydzielić *dwie grupy teorii powłoki walcowo-kolistej*. W pierwszej z nich równania różniczkowe zagadnienia otrzymano przy pominięciu pewnych sił przekrojowych (z reguły są to $m_x = m_{x\varphi} = q_x = 0$). W grupie drugiej uwzględnione zostały wszystkie siły wewnętrzne w sposób ścisły lub też przy pewnych

¹ Zaburzenia związane z $n_{x\varphi} \neq 0$ na krawędziach zakrzywionych można, jak wiadomo, w sposób przybliżony rozwiązać na zasadzie pojęcia szerokości współpracującej (por. uwagi końcowe, p. 7).

uproszczeniach. Przy tym autorzy z reguły analizują równanie jednorodne związane z zagadnieniem zaburzeń brzegowych.

W grupie *pierwszej* na czoło wysuwa się szeroko cytowane rozwiązanie FINSTERWALDERA, [7]. Nieco odmienne rozwiązanie podał w tym samym czasie WŁASOW, [8], przyjmując w pierwszym wariancie $\varepsilon_p = 0$, a w drugim ponadto $\gamma_{x\varphi} = 0$. Najdalej idącym uproszczeniem w tej grupie charakteryzuje się aproksymacja SCHORERA, [9]. Do upraszczających założeń $\varepsilon_p = 0$ i $\gamma_{x\varphi} = 0$ dochodzi przyjęcie $\nu = 0$ i stosowanie jednowyrazowych wyrażeń dla sił wewnętrznych. Przy tych uproszczeniach podstawowe równanie różniczkowe względem niewiadomego przesunięcia w (po wyeliminowaniu u i v) przybiera bardzo prostą postać

$$(1.1) \quad \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{a^4}{k} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

gdzie $k = t^2/12 a^2$, a oznacza promień krzywizny oraz t grubość powłoki.

Mimo daleko idących uproszczeń rozwiązanie Schorera daje (jak wykazują obliczenia porównujące je z innymi metodami dokładniejszymi, [10]) dobre rezultaty dla powłok długich i średnich.

Dla naszych celów (powłoka krótka) metody grupy *pierwszej* są mało przydatne, a to dlatego, że określenie rzędu wielkości pomijanego tam momentu m_x jest jednym z celów niniejszej pracy².

W grupie *drugiej* mamy przede wszystkim do zanotowania liczne opracowania oparte na tych samych uproszczeniach i prowadzące do stosunkowo prostej postaci równania różniczkowego zagadnienia:

$$(1.2) \quad \nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{k} a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

wyprowadzonego po raz pierwszy przez DONNELLA, [12]. Praca jego jak i późniejsze KÁRMÁNA i TSIENA, [13], dotyczyły zagadnienia stateczności.

Do problemu zaburzeń brzegowych w powłokach dachowych równanie (1.2) z powodzeniem było stosowane później przez JENKINSA, [14], GIBSONA i COOPERA, [15], i GIRKMANNĄ, [4]. Na tym równaniu oparte są również dociekania niemieckiej grupy badaczy (NEUBER, RABICH, RÜDIGER-URBAN, GRÜNING; por. [16]). Zasadniczo do równania (1.2) sprowadza się również równanie wyprowadzone dla powłoki

² Warto w tym miejscu dodać, że dokładność aproksymacji SCHORERA jest identyczna z dokładnością uzyskiwaną przy obliczaniu powłoki metodą tarczownicy zastępczej przy dostatecznie dużej liczbie tarcz lub po wprowadzeniu do normalnych obliczeń proponowanego przez D. YITZHAKIEGO, [11], sposobu wyokrąglenia wykresu momentów m_φ .

walcowej przez WŁASOWA w jego późniejszej pracy, [17], [18], z ogólniejszej teorii powłok słabo zakrzywionych przy użyciu funkcji naprężeń $\Phi = \nabla^4 w$.

Ścisłą teorię dachu o powłoce walcowo-kolistej rozwinął DISCHINGER, [19], bazując na ścisłych równaniach różniczkowych FLÜGGEGO, [3].

Omówione powyżej teorie odnoszą się głównie do rozwiązania problemu brzegowego dla krawędzi $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, kiedy zaburzenie przybiera postać

$$(1.3) \quad e^{p\varphi} \sin \bar{n}x,$$

gdzie $\bar{n} = n\pi/l$ i n jest liczbą całkowitą, natomiast p jest pierwiastkiem równania charakterystycznego ósmego stopnia.

W wielu przypadkach, między innymi dla powłok ciągłych, interesujące jest zagadnienie zaburzenia brzegowego na brzegach $x = 0$, $x = l$ typu

$$(1.4) \quad e^{p\varphi} \sin n\varphi,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, równanie (1.2) odnosi się bowiem do powłok zamkniętych (rury). Zagadnieniu temu poświęcona była przede wszystkim praca MIESELA, [20], oparta na równaniach ścisłych, i późniejsze opracowania A. JAKOBSENA, [21], OHLIGA, [22], GIRKMANNNA, [4]. Inne prace, między innymi HOFFA, [23], SCHMIDTA [24], PARME'A, [25], i HOLLANDA, [26], opierają się na prostszym równaniu Donnella,

Sprawę dokładności poszczególnych teorii zbadali MOE, [27]. Na podstawie porównania pierwiastków równania charakterystycznego dla zaburzenia typu (1.3), otrzymanych według teorii FINSTERWALDERA, A. JAKOBSENA, JENKINSA, SCHORERA i dwu innych teorii z pierwiastkami ścisłego równania DISCHINGERA wysnuł on wnioski o zakresie stosowalności wymienionych teorii przybliżonych. Teorie Jakobsena i Jenkinsa zapewniają dobre rezultaty zarówno dla powłok długich jak i krótkich. Stosowanie rozwiązań Finsterwaldera i Schorera należałoby natomiast ograniczyć do powłok długich.

Dokładność równania Donnella (identycznego z równaniem Jenkinsa i innych) dla obu rodzajów zaburzeń zbadana została w pracy HOFFA, [28]. Dla zaburzeń (1.3) potwierdził on wnioski MOEGO. Co do zaburzenia (1.4) stwierdził on dostateczną dokładność wyrażen dla $n > 4$, tzn. dla półfal obciążenia odpowiadających kątomu mniejszemu od $\pi/4$.

AMBARCUMIAN, [29], porównał dokładność rozwiązania Własowa (jest ono równoważne rozwiązaniu Donnella) z wynikami teorii Love'a-Timoszenki dla powłoki walcowej na całym obwodzie niepodatnie podpartej, poddanej obciążeniu radialnemu (rozwiązanie za pomocą szeregów podwójnych). Pod uwagę wzięte były ponadto różne przybliżenia, z których jedno jest odpowiednikiem równania Schorera. Wnioski tej pracy są zgodne z podanymi powyżej.

Warto dodać, że wysuwane były propozycje zmodyfikowania równania Donnella, tak ażeby było ono dostatecznie dokładne również dla powłok silnie zakrzywionych.

TING i YUAN, [30], podają uzupełnione równanie, przedstawione przez samego DONNELLA w 1938 r.

$$(1.5) \quad \nabla^8 w + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{1-\nu^2}{k} a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Zawiera ono, jak widać, dwa dodatkowe wyrazy.

Ulepszone równanie Donnella przedstawił niedawno MORLEY, [31], w postaci

$$(1.6) \quad \nabla^4 (\nabla^2 + 1)^2 w + \frac{1-\nu^2}{k} a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Pewne modyfikacje równania Donnella były przedstawione również przez innych autorów. Warto wszakże podkreślić, że chodzi tu właśnie tylko o modyfikację.

Z przedstawionego przeglądu wynika celowość stosowania równania Donnella w rozpatrywanym zagadnieniu. Znaczne uproszczenie obliczeń a zarazem wystarczająca dokładność, to zalety tego równania. Jest ono wystarczająco dokładne przy rozwiązywaniu problemu brzegowego, zarówno typu (1.3) jak i (1.4), bowiem w tym ostatnim przypadku warunek $\bar{n} \equiv n\pi/a > 4$ dla powłok zamknięć wodnych z reguły będzie spełniony. Jednakże rozwiązanie jest szczególnie uciążliwe dla powłoki krótkiej. Zaburzenia na brzegach zakrzywionych wpływają na siebie nawzajem i na zaburzenia na brzegach podłużnych (dla powłoki długiej $n = 1$, $a = 2\pi$; por. rozwiązanie w [4]).

Dla powłoki ciągłej prostsze jest zastosowanie szeregów podwójnych, analogicznie jak to zrobiono już dość dawno dla płyt utwierdzonych, [32]. Jednakże słaba zbieżność szeregów nie pozwala dość dokładnie obliczyć wszystkich sił wewnętrznych w powłoce.

Interesuje nas również teoria powłoki walcowej *ortotropowej*. Równania dla sił wewnętrznych w takiej powłoce podał pierwszy DISCHINGER, [19]. Rozwiązanie to powtórzył w znanej monografii LUNDGREN, [33]. Tablice pomocnicze do obliczania takich powłok opracował JAKOBSEN, [34], w oparciu o swoją teorię.

Poniżej, w punkcie piątym, wyprowadzone zostało równanie różniczkowe będące dla powłoki ortotropowej odpowiednikiem równania Donnella (1.2).

1.3. W pracy niniejszej stosowane są następujące ważniejsze oznaczenia:

- a promień krzywizny powłoki,
- $b = \alpha a$, długość krawędzi poprzecznej (zakrzywionej),
- $D = Et/(1 - \nu^2)$,
- D_x zastępcza sztywność wydłużenia w kierunku x w powłoce ortotropowej,
- E moduł sprężystości,
- $f_x = D/D_x$, $i_x = K/K_x$,
- $K = Et^3/12(1 - \nu^2)$,

K_x	zastępcza sztywność zginania w kierunku x w powłoce ortotropowej,
k	$= t^2/12a^2$,
k_x	$= K_x/Da^2$,
l	rozpiętość powłoki,
m, n	liczby całkowite,
$m_x, m_\varphi, m_{x\varphi}$	momenty zginające według rys. 3b,
$n_x, n_\varphi, n_{x\varphi}$	siły normalne i siła styczna według rys. 3a,
q_x, q_φ	siły poprzeczne według rys. 3b,
t	grubość powłoki,
u, v, w	składowe przesunięcia w kierunku tworzącej, stycznej i normalnej do powłoki (rys. 2),
$x, y = a\varphi$	współrzędne punktu powierzchni środkowej powłoki,
X, Y, Z	składowe obciążenia powierzchniowe (rys. 3a),
α	kąt zawarty między skrajnymi promieniami (rys. 2),
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	wartości według (3.3),
ε	$= l/b = l/aa$,
η	$= n\pi/a$,
κ	$= \lambda^2/\rho^2$,
λ	$= m\pi a/l$,
μ	$= (1 - \nu f_x)/(1 - \nu)$,
ν	współczynnik Poissona,
ξ	$= x/a$,
ρ	$= \sqrt[8]{(1 - \nu^2) \lambda^4/k}$,
$\sigma_x, \sigma_\varphi, \tau_{x\varphi}$	naprężenia normalne i styczne: $\sigma_x = n_x/t$, $\sigma_\varphi = n_\varphi/t$, $\tau_{x\varphi} = n_{x\varphi}/t$,
φ	współrzędna kątowna,
Φ	współczynnik według (3.9),
ψ	współczynnik według (2.23), ψ_x według (5.12),
ω	współczynnik według (3.14),
$()'$	$= \partial/\partial\xi$, $()^{(4)} = \partial^4/\partial\xi^4$,
$()^\circ$	$= \partial/\partial\varphi$,
∇^2	$= ()'' + ()''$.

2. Rozwiązanie dla powłoki swobodnie podpartej za pomocą szeregów podwójnych

2.1. Z warunków równowagi rzutów sił na kierunki x, y, z (rys. 3a) otrzymuje się równania

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & n'_x + n'_{x\varphi} + Xa = 0, \\
 & n''_\varphi + n'_{x\varphi} - \frac{1}{a} (m''_\varphi + m'_{x\varphi}) + Ya = 0, \\
 & n_\varphi + \frac{1}{a} (m''_\varphi + 2m'_{x\varphi} + m'_x) - Za = 0.
 \end{aligned}$$

Zależności między siłami i przemieszczeniami przyjmuje się następującej uproszczonej postaci ([35], rozdział 5, (12a-f))

$$(2.2) \quad \begin{aligned} n_x &= \frac{D}{a}(u' + \nu v' + \nu w), & m_x &= \frac{K}{a^2}(w'' + \nu w'''), \\ n_\varphi &= \frac{D}{a}(v' + w + \nu u'), & m_\varphi &= \frac{K}{a^2}(w'' + \nu w'''), \\ n_{x\varphi} = n_{\varphi x} &= \frac{D(1-\nu)}{2a}(v' + u'), & m_{x\varphi} = m_{\varphi x} &= \frac{K(1-\nu)}{a^2}w''; \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.3) \quad D = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

W wyrażeniach dla sił błonowych w równaniach (2.2) pominięto wpływ ugięcia w i dzięki temu otrzymano $n_{x\varphi} = n_{\varphi x}$. Również w wyrażeniu dla momentów skreślono składniki uboczne i otrzymano $m_{x\varphi} = m_{\varphi x}$.

Po podstawieniu (2.2) do (2.1) i pominięciu w drugim z równań (2.1) składnika momentowego otrzymuje się

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2}u'' + \frac{1+\nu}{2}v' + \nu w' + X \frac{a^2}{D} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2}u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2}v'' + w' + Y \frac{a^2}{D} &= 0, \\ \nu u' + v' + w + k(w^{(4)} + 2w'''' + w''') - Z \frac{a^2}{D} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.5) \quad k = \frac{K}{Da^2} = \frac{t^2}{12a^2}.$$

Eliminując z dwóch pierwszych równań (2.4) u bądź też v otrzymujemy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \nabla^4 v &= -(2+\nu)w'''' - w'' + \frac{a^2}{D} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}X'' - \frac{2}{1-\nu}Y'' - Y'' \right), \\ \nabla^4 u &= w'''' - \nu w'''' + \frac{a^2}{D} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}Y'' - \frac{2}{1-\nu}X'' - X'' \right). \end{aligned}$$

Uwzględniając w trzecim z równań (2.4) zależności (2.6) otrzymujemy po wykonaniu działań równanie różniczkowe zawierające tylko przesunięcie radialne;

$$(2.7) \quad k\nabla^8 w + (1-\nu^2)w^{(4)} + \frac{a^2}{D}[X'''' - \nu X'''' - (2+\nu)Y'''' - Y'''' - \nabla^4 Z] = 0.$$

W przypadku $X = Y = 0$ równanie (2.7) upraszcza się:

$$(2.8) \quad k\nabla^8 w + (1 - \nu^2) w^{(4)} - \frac{a^2}{D} \nabla^4 Z = 0.$$

Jest to *niejednorodne* równanie Donnella dla przypadku obciążenia radialnego. Rozwiązanie równania (2.8) przyjmujemy w postaci podwójnych szeregów Fouriera, [2], [3], [4] i [5],

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n u_{mn} \cos \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\ v &= \sum_m \sum_n v_{mn} \sin \lambda \xi \cos \eta \varphi, \\ w &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\ Z &= \sum_m \sum_n Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \end{aligned}$$

gdzie przy $\xi = x/a$ oznaczono

$$(2.10) \quad \lambda = \frac{m\pi a}{l}, \quad \eta = \frac{n\pi}{a},$$

a m i n są tu liczbami całkowitymi.

Podstawienie w i Z według (2.9) do (2.8) daje po uwzględnieniu $a^2/kD = a^4/K$

$$(2.11) \quad w_{mn} = \frac{(\lambda^2 + \eta^2)^2}{(\lambda^2 + \eta^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{k} \lambda^4} \frac{Z_{mn} a^4}{K}.$$

Z (2.6) przy uwzględnieniu (2.11) otrzymuje się

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u_{mn} &= -\frac{\lambda(\eta^2 - \nu\lambda^2)}{(\lambda^2 + \eta^2)^2} w_{mn} = -\frac{\lambda\eta^2 - \nu\lambda^3}{(\lambda^2 + \eta^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{k} \lambda^4} \frac{Z_{mn} a^4}{K}, \\ v_{mn} &= \frac{(2 + \nu)\eta\lambda^2 + \eta^3}{(\lambda^2 + \eta^2)^2} w_{mn} = \frac{(2 + \nu)\eta\lambda^2 + \eta^3}{(\lambda^2 + \eta^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{k} \lambda^4} \frac{Z_{mn} a^4}{K}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu u, v, w do (2.2) przy uwzględnieniu (2.11) i (2.13) otrzymujemy ogólne wzory dla sił błonowych i momentów

$$(2.13) \quad \begin{aligned} n_x &= \frac{12a^3}{t^2} (1 - \nu^2) \sum_m \sum_n \frac{1}{\xi} \lambda^2 \eta^2 Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\ n_\varphi &= \frac{12a^3}{t^2} (1 - \nu^2) \sum_m \sum_n \frac{1}{\xi} \lambda^4 Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\ n_{x\varphi} &= \frac{12a^3}{t^2} (1 - \nu^2) \sum_m \sum_n \frac{1}{\xi} \eta \lambda^3 Z_{mn} \cos \lambda \xi \cos \eta \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_x &= -a^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{\zeta} (\lambda^2 + \nu \eta^2) (\lambda^2 + \eta^2)^2 Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_\varphi &= -a^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{\zeta} (\eta^2 + \nu \lambda^2) (\lambda^2 + \eta^2)^2 Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_{x\varphi} &= (1 - \nu) a^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{\zeta} \lambda \eta (\lambda^2 + \eta^2)^2 Z_{mn} \cos \lambda \xi \cos \eta \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

gdzie w mianownikach

$$\zeta = (\lambda^2 + \eta^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{k} \lambda^4.
 \tag{2.14}$$

Dla sił poprzecznych obowiązują zależności

$$q_x = \frac{1}{a} (m'_x + m'_{x\varphi}), \quad q_\varphi = \frac{1}{a} (m'_\varphi + m'_{x\varphi}),
 \tag{2.15}$$

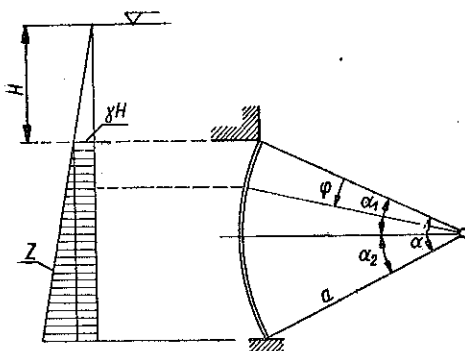
a dla zastępczych sił poprzecznych

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_x &= q_x + \frac{1}{a} m_{x\varphi} = \frac{1}{a} (m'_x + 2m'_{x\varphi}), \\
 \bar{q}_\varphi &= q_\varphi + \frac{1}{a} m'_{x\varphi} = \frac{1}{a} (m'_\varphi + 2m'_{x\varphi}).
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń z (2.13) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_x &= -a \sum_m \sum_n [\lambda^3 + (2 - \nu) \lambda \eta^2] (\lambda^2 + \eta^2)^2 \frac{1}{\zeta} Z_{mn} \cos \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 \bar{q}_\varphi &= -a \sum_m \sum_n [\eta^3 + (2 - \nu) \eta \lambda^2] (\lambda^2 + \eta^2)^2 \frac{1}{\zeta} Z_{mn} \cos \lambda \xi \sin \eta \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

2.2. Dla ogólnego przypadku obciążenia hydrostatycznego (rys. 4) określić należy występujący w (2.11), (2.12), (2.13) i (2.17) współczynnik obciążenia Z_{mn} .



Rys. 4

Przy oznaczeniach według rys. 4 dla składowej Z otrzymuje się

$$Z = -\gamma \{H + a [\sin \alpha_1 - \sin (\alpha_1 - \varphi)]\}.
 \tag{2.18}$$

W kierunku x składowa Z pozostaje stała i dlatego

$$Z_{mn} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{m} Z_n,
 \tag{2.19}$$

przy czym Z_n jest zależne tylko od n :

$$(2.20) \quad Z_n = \frac{2}{a} \int_0^a Z(\varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{a} d\varphi = -\frac{4\gamma H}{\pi} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{2} - \frac{2\gamma a}{\pi} \frac{1}{n} \times \\ \times \left[(1 - \cos n\pi) \sin a_1 - \frac{1}{1 - a^2/n^2\pi^2} (\sin a_1 + \sin a_2 \cos n\pi) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dla $a_1 = a_2 = a/2$ otrzymuje się stąd przy uwzględnieniu (2.19)

$$(2.21) \quad Z_{mn} = -\frac{16\gamma}{\pi^2} \frac{1}{mn} \left\{ H \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2} \left[1 - \cos n\pi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{1 - a^2/n^2\pi^2} (1 + \cos n\pi) \right] \right\}, \quad m = 1, 3, 5, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$$

Równania (2.13) wraz z (2.21) określają stan naprężenia w ogólnym przypadku obciążenia hydrostatycznego.

2.3. Dla zamknięć osadzonych głęboko zmienność parcia Z jest tego rodzaju, że można w przybliżeniu przyjąć do obliczeń stałe parcie średnie $Z = -p$, dla którego

$$(2.22) \quad Z_{mn} = -\frac{16p}{\pi^2} \frac{1}{mn}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$$

Dla tego przypadku obciążenia równania (2.9) i (2.13) można doprowadzić do postaci wygodniejszej do liczenia. Mnożąc licznik i mianownik przez $l^3/\pi^3 a^3$ i oznaczając

$$(2.23) \quad \varepsilon = \frac{l}{a}, \quad \psi = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{l^4}{a^2 t^2},$$

otrzymuje się następujące równania:

$$(2.24) \quad w = -\frac{16}{\pi^6} \frac{pl^4}{K} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} R_{mn} \sin \lambda\xi \sin \eta\varphi, \\ u = \frac{16}{\pi^3} \frac{pal}{Et} \psi \sum_m \sum_n \frac{1}{nc_{mn}} (\varepsilon^2 n^2 - \nu m^2) \cos \lambda\xi \sin \eta\varphi, \\ v = -\frac{16}{\pi^3} \frac{pal}{Et} \psi \varepsilon \sum_m \sum_n \frac{1}{mc_{mn}} [(2+\nu)m^2 + \varepsilon^2 n^2] \sin \lambda\xi \cos \eta\varphi, \\ n_x = -\frac{16}{\pi^2} p a \psi \varepsilon^2 \sum_m \sum_n \frac{mn}{c_{mn}} \sin \lambda\xi \sin \eta\varphi, \\ n_\varphi = -\frac{16}{\pi^2} p a \psi \sum_m \sum_n \frac{m^3}{nc_{mn}} \sin \lambda\xi \sin \eta\varphi,$$

$$\begin{aligned}
 n_{x\varphi} &= -\frac{16}{\pi^2} p a \psi \varepsilon \sum_m \sum_n \frac{m^2}{c_{mn}} \cos \lambda \xi \cos \eta \varphi, \\
 m_x &= \frac{16}{\pi^4} p l^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} (m^2 + \nu \varepsilon^2 n^2) R_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_\varphi &= \frac{16}{\pi^4} p l^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} (\varepsilon^2 n^2 + \nu m^2) R_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_{x\varphi} &= -\frac{16(1-\nu)}{\pi^4} p l^2 \varepsilon \sum_m \sum_n R_{mn} \cos \lambda \xi \cos \eta \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

[c. d.]

$m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots,$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$c_{mn} = (m^2 + \varepsilon^2 n^2)^4 + \psi m^4, \quad R_{mn} = \frac{(m^2 + \varepsilon^2 n^2)^2}{(m^2 + \varepsilon^2 n^2)^4 + \psi m^4}.
 \tag{2.25}$$

Podobnie z (2.17)

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_x &= \frac{16}{\pi^3} p l \sum_m \sum_n \frac{1}{n} [m^2 + (2-\nu) \varepsilon^2 n^2] R_{mn} \cos \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 \bar{q}_\varphi &= \frac{16}{\pi^3} p l \sum_m \sum_n \frac{\varepsilon}{m} [\varepsilon^2 n^2 + (2-\nu) m^2] R_{mn} \sin \lambda \xi \cos \eta \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Dla $\psi = 0$, czyli dla $a = \infty$, otrzymuje się z (2.24) wartości w , m_x , $m_\varphi \equiv m_y$ i $m_{x\varphi} \equiv m_{xy}$ dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej, znane jako rozwiązanie Naviera.

Równania (2.24) zapewniają dobrą zbieżność dla przesunięć u , v , w i sił błonowych n_x , n_φ , $n_{x\varphi}$. Gorszą zbieżność wykazują szeregi dla momentów i zastępczych sił poprzecznych według (2.26)³.

3. Zagadnienie brzegowe dla powłoki swobodnie podpartej

Jak wykazują obliczenia porównawcze (por. p. 6) zbieżność szeregów podwójnych pogarsza się ze wzrostem kąta α . Dla takich powłok celowe może być stosowanie rozwiązania zagadnienia brzegowego dla krawędzi $\varphi = 0$. Można przy tym posłużyć się rozwiązaniem, jakie GIRKMANN wyprowadził dla powłok dachowych, [36], opierając się na równaniu (1.2).

³ W trakcie opracowywania niniejszej publikacji autor zwrócił uwagę na książkę WŁASOWA, w której rozwiązał on również, na podstawie swoich równań przy użyciu funkcji naprężeń, przypadek powłoki swobodnie podpartej i równocześnie obciążonej, [18], s. 340. Pomicz równania Donnella i Własowa są tej samej dokładności, wyniki przy ich stosowaniu powinny być identyczne. Jednak wyprowadzone w niniejszej pracy wzory dla momentów m_x , m_φ i $m_{x\varphi}$ mają w porównaniu z odpowiednikami w [18] postać prostszą, wygodniejszą do liczenia.

Założenie

$$(3.1) \quad w = He^{\nu\varphi} \sin \frac{\lambda x}{a}, \quad \lambda = \frac{m\pi a}{l}$$

i podstawienie do (1.2) daje równanie charakterystyczne i osiem pierwiastków

$$p_{1,2,3,4} = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1),$$

$$p_{5,6,7,8} = \pm(\alpha_2 \pm i\beta_2),$$

gdzie przy oznaczeniach

$$(3.2) \quad \varrho = \sqrt[8]{\frac{(1-\nu^2)\lambda^4}{k}}, \quad \kappa = \frac{\lambda^2}{\varrho^2}$$

mamy

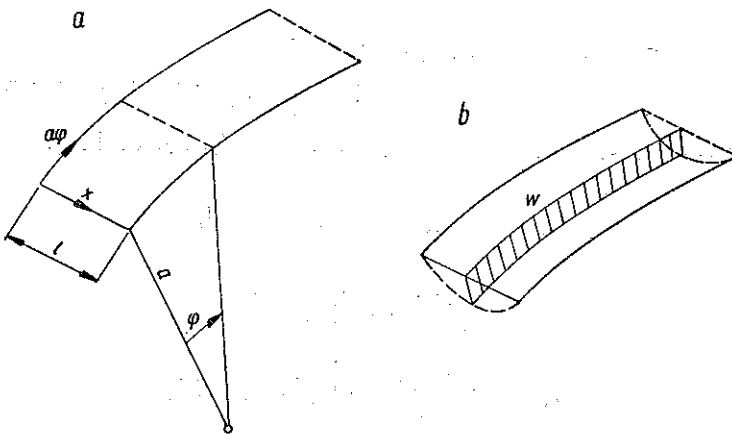
$$\alpha_1 = \frac{\varrho}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{(1+\kappa\sqrt{2})^2+1}+(1+\kappa\sqrt{2})},$$

$$\alpha_2 = \frac{\varrho}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{(1-\kappa\sqrt{2})^2+1}-(1-\kappa\sqrt{2})},$$

(3.3)

$$\beta_1 = \frac{\varrho}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{(1+\kappa\sqrt{2})^2+1}-(1+\kappa\sqrt{2})},$$

$$\beta_2 = \frac{\varrho}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{(1-\kappa\sqrt{2})^2+1}+(1-\kappa\sqrt{2})}.$$



Rys. 5

Wprowadzając funkcje kołowe otrzymuje się

$$(3.4) \quad w = [(A_0 \cos \beta_1 \varphi + B_0 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + (C_0 \cos \beta_2 \varphi + D_0 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}] \sin \lambda \xi,$$

gdzie A_0 , B_0 , C_0 i D_0 są to stałe, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

W (3.4) zachowano tylko składniki zanikające ze wzrostem φ , rozpatrujemy bowiem powłokę swobodnie podpartą o dostatecznie dużym kącie α , kiedy zaburzenia na krawędzi $\varphi = 0$ zanikną przed dojściem do krawędzi $\varphi = \alpha$ lub po prostu półpasma walcowe ograniczone na krawędzi $\varphi = 0$ (rys. 5a).

Dla przesunięcia u , sił n_φ , n_x i momentów m_φ , m_x wyprowadzimy równania analogiczne do równań (1275) w [36], jednak przy uwzględnieniu $\nu \neq 0$ z uwagi na to, że mamy do czynienia z powłoką krótką:

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{\lambda}{\varrho^4} [(A_2 \sin \beta_1 \varphi - B_2 \cos \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} - \\
 &\quad - (C_2 \sin \beta_2 \varphi - D_2 \cos \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}] \cos \lambda \xi, \\
 n_\varphi &= -\frac{D \kappa^2}{a} [(A_0 \sin \beta_1 \varphi - B_0 \cos \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} - \\
 &\quad - (C_0 \sin \beta_2 \varphi - D_0 \cos \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}] \sin \lambda \xi, \\
 n_x &= \frac{D \kappa^2}{a \lambda^2} [(A_2 \sin \beta_1 \varphi - B_2 \cos \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} - \\
 &\quad - (C_2 \sin \beta_2 \varphi - D_2 \cos \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}] \sin \lambda \xi. \\
 (3.5) \quad m_\varphi &= Dk \{ (A_2 \cos \beta_1 \varphi + B_2 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + (C_2 \cos \beta_2 \varphi + \\
 &\quad + D_2 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi} - \nu \lambda^2 [(A_0 \cos \beta_1 \varphi + B_0 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + \\
 &\quad + (C_0 \cos \beta_2 \varphi + D_0 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}] \} \sin \lambda \xi, \\
 m_x &= -Dk \lambda^2 \{ (A_0 \cos \beta_1 \varphi + B_0 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + \\
 &\quad + (C_0 \cos \beta_2 \varphi + D_0 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi} - \\
 &\quad - \frac{\nu}{\lambda^2} [(A_2 \cos \beta_1 \varphi + B_2 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + \\
 &\quad + (C_2 \cos \beta_2 \varphi + D_2 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}] \} \sin \lambda \xi,
 \end{aligned}$$

gdzie stałe A_2 , B_2 , C_2 i D_2 wyrażone są przez stałe A_0 , B_0 , C_0 i D_0 :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{\varrho^2}{\sqrt{2}} [(1 + \kappa \sqrt{2}) A_0 - B_0], \\
 B_2 &= \frac{\varrho^2}{\sqrt{2}} [A_0 + (1 + \kappa \sqrt{2}) B_0], \\
 (3.6) \quad C_2 &= -\frac{\varrho^2}{\sqrt{2}} [(1 - \kappa \sqrt{2}) C_0 + D_0], \\
 D_2 &= \frac{\varrho^2}{\sqrt{2}} [C_0 - (1 - \kappa \sqrt{2}) D_0].
 \end{aligned}$$

Obciążenie p przedstawić należy w postaci szeregu pojedynczego

$$p(x, \varphi) = \sum_m p_m \sin \lambda \xi.$$

Rozpatrujemy zagadnienie brzegowe dla obciążenia

$$(3.7) \quad Z = -p_m \sin \lambda \xi.$$

Rozwiązanie przedstawiamy jako sumę stanu wyjściowego, oznaczonego wskaźnikiem 0, i stanu uzupełniającego, oznaczonego wskaźnikiem 1.

Jako stan wyjściowy przyjmujemy rozwiązanie równania jednorodnego (2.8) dla obciążenia (3.7):

$$(3.8) \quad kw_0^{(8)} + (1 - \nu^2)w_0^{(4)} - \frac{a^2}{D}Z^{(4)} = 0;$$

stąd znajdziemy (rys. 5b)

$$(3.9) \quad w_0 = -\Phi \frac{p_m a^2}{Et} \sin \lambda \xi,$$

$$\Phi = \frac{1}{1 + \frac{k\lambda^4}{1-\nu^2}} = \frac{1}{1 + \frac{m^4 \pi^4 a^2 t^2}{12(1-\nu^2)l^4}}.$$

Jak wykazują obliczenia, współczynnik Φ jest nieco mniejszy od jedności. Wykazuje on stopień zmniejszenia przesunięcia w porównaniu ze stanem błonowym, dla którego $\Phi = 1$.

Na podstawie (2.6) i (2.2) przy uwzględnieniu $(\)' = 0$ mamy

$$(3.10) \quad u_0 = -\Phi \frac{\nu p_m a^2}{Et\lambda} \cos \lambda \xi,$$

$$n_{\varphi 0} = -\Phi p_m a \sin \lambda \xi,$$

$$m_{x0} = \Phi \frac{K p_m \lambda^2}{Et} \sin \lambda \xi, \quad m_{\varphi 0} = \nu m_{x0}.$$

Stan wyjściowy łącznie ze stanem uzupełniającym powinny zapewnić na krawędzi $\varphi = 0$ zanikanie przesunięć w , u , sił normalnych n_φ i momentów m_φ . Warunki te są następujące:

$$(3.11) \quad (w_0) + (w_1) = 0, \quad (u_0) + (u_1) = 0,$$

$$(n_{\varphi 0}) + (n_{\varphi 1}) = 0, \quad (m_{\varphi 0}) + (m_{\varphi 1}) = 0.$$

Po podstawieniu wartości według (3.4), (3.5) i (3.10) do (3.11) otrzymuje się

$$(3.12) \quad A_0 + C_0 - \Phi \frac{p_m a^2}{Et} = 0, \quad B_2 - D_2 - \Phi \frac{\nu p_m a^2 \varrho^4}{Et\lambda^2} = 0,$$

$$B_0 - D_0 - \Phi \frac{p_m a^2}{D\lambda^2} = 0, \quad A_2 + C_2 - \nu\lambda^2(A_0 + C_0) + \Phi\nu\lambda^2 \frac{p_m a^2}{Et} = 0.$$

Ostatnie równanie po uwzględnieniu $A_0 + C_0 = \Phi p_m a^2 / Et$ na podstawie pierwszego upraszcza się do postaci

$$A_2 + C_2 = 0.$$

Przy uwzględnieniu (3.6) otrzymujemy z (3.12) następujące wartości stałych:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} A_0/C &= -\kappa\sqrt{2} + (2 - \kappa\sqrt{2}) \frac{\kappa^2}{1 - \nu^2} - \omega, \\ B_0/C &= 2 - \kappa\sqrt{2} + \frac{\kappa^3\sqrt{2}}{1 - \nu^2} - \omega, \\ C_0/C &= \kappa\sqrt{2} + (2 + \kappa\sqrt{2}) \frac{\kappa^2}{1 - \nu^2} + \omega, \\ D_0/C &= -(2 + \kappa\sqrt{2}) + \frac{\kappa^3\sqrt{2}}{1 - \nu^2} - \omega, \\ A_2/C\lambda^2 &= -\frac{\sqrt{2}}{\kappa} (1 + \kappa^2) + (1 - \kappa^2) \frac{\kappa\sqrt{2}}{(1 - \nu^2)} - \omega, \\ B_2/C\lambda^2 &= \frac{\sqrt{2}}{\kappa} (1 - \kappa^2) + (1 + \kappa^2) \frac{\kappa\sqrt{2}}{(1 - \nu^2)} - \left(\frac{\sqrt{2}}{\kappa} + 1\right)\omega, \\ C_2 &= -A_2, \\ D_2/C\lambda^2 &= \frac{\sqrt{2}}{\kappa} (1 - \kappa^2) + (1 + \kappa^2) \frac{\kappa\sqrt{2}}{(1 - \nu^2)} - \left(\frac{\sqrt{2}}{\kappa} - 1\right)\omega, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14) \quad \omega = \frac{\nu}{1 - \nu^2} \kappa\sqrt{2}, \quad C = \Phi \frac{p_m a^2}{4D\kappa^2}.$$

We wzorach (3.13) pierwszy składnik wynika z uwzględnienia ($n_{\varphi 0}$), drugi występuje wskutek warunków ($w_0 \neq 0$ i ($m_{\varphi 0} \neq 0$ i wreszcie trzeci wiąże się z ($u_0 \neq 0$. Nieuwzględnienie któregoś ze składników wyjściowych oznacza pominięcie odpowiedniego składnika w (3.13).

Ostateczną wartość sił i momentów otrzymujemy dodając wartości obu stanów. Dla momentów wynikają stąd równania:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} m_x &= m_{x0} + \Phi \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{8\sqrt{3}} p_m at (P + \nu Q) \sin \lambda\xi, \\ m_\varphi &= \nu m_{x0} + \Phi \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{8\sqrt{3}} p_m at (Q + \nu P) \sin \lambda\xi, \end{aligned}$$

gdzie

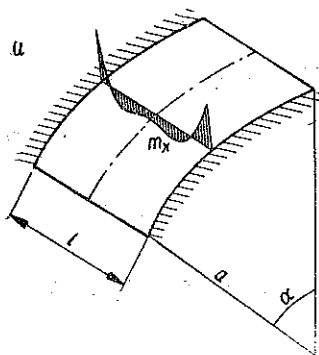
$$\begin{aligned}
 p_m &= \frac{4p}{\pi m}, \\
 P &= -\frac{1}{C} (A_0 \cos \beta_1 \varphi + B_0 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} - \\
 &\quad - \frac{1}{C} (C_0 \cos \beta_2 \varphi + D_0 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi}, \\
 Q &= \frac{1}{C\lambda^2} (A_2 \cos \beta_1 \varphi + B_2 \sin \beta_1 \varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + \\
 &\quad + \frac{1}{C\lambda^2} (C_2 \cos \beta_2 \varphi + D_2 \sin \beta_2 \varphi) e^{-\alpha_2 \varphi},
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

natomiast stałe określone są równaniami (3.13). Ponieważ z reguły $Q > P$, wpływ współczynnika ν na wielkość m_x jest bardzo istotny (por. rys. 6).

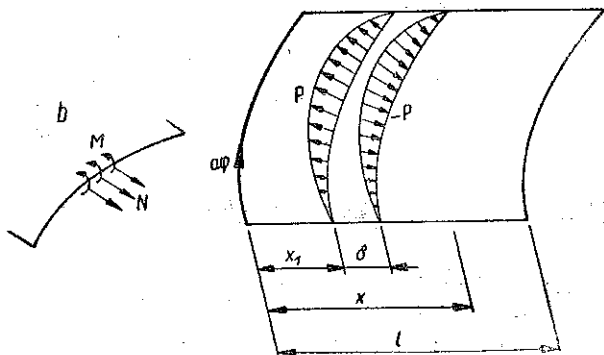
Dla obciążenia równomiernego również w kierunku x , $p = \sum p_m \sin \lambda \xi$, przedstawione obliczenie należałoby powtórzyć dla kolejnych $m = 1, 3, 5, \dots$, co jest dość uciążliwe. Zauważmy, że maksymalne wartości m_x mogą nie leżeć na osi $x = l/2$.

4. Powłoka ciągła

Powłoka ciągła może być traktowana jako powłoka utwierdzona na krawędziach $x = 0$, oraz $x = l$ i swobodnie podparta na pozostałych (rys. 6). Do wyznaczenia momentów podporowych m_x zastosowane zostały szeregi podwójne.



Rys. 6



Rys. 7

Obciążenie momentem należy przedstawić za pomocą szeregu podwójnego. Obciążenie wzdłuż linii (rys. 7) można przedstawić w postaci (por. [36], s. 65)

$$p(x, \varphi) = \frac{2P}{l} \sum_m \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} = \frac{2}{l} \sum_m \sum_n P_n \sin \eta \varphi \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda \xi.$$

Dla dwóch identycznych obciążeń liniowych skierowanych przeciwnie i odległych od siebie o małą wartość δ (rys. 7) otrzymamy (uwzględniając $P_n \delta = M_n$ i $\sin m\pi\delta/2l = m\pi\delta/2l$)

$$(4.1) \quad p(x, \varphi) = -\frac{2\pi}{l^2} \sum_m \sum_n M_n m \sin \eta\varphi \cos \lambda\xi_1 \sin \lambda\xi_2,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$$

A zatem według (2.9) odpowiada obciążeniu momentem

$$(4.2) \quad Z_{mn} = -\frac{2\pi}{l^2} M_n m \cos \lambda\xi_1.$$

Moment podporowy wyznaczamy z warunku zgodności odkształceń na podporze: przesunięcie u i kąt obrotu $\partial w/\partial x$ od obciążenia p i momentów podporowych M oraz sił podporowych N (rys. 6) są równe zeru:

$$(4.3) \quad (u)^p + (u)^M + (u)^N = 0,$$

$$(4.4) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^p + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^M + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^N = 0.$$

W przybliżeniu można przyjąć, że siły N wywołują jedynie przesunięcie $(u)^N$, czyli $(\partial w/\partial x)^N = 0$, a zatem moment można wyznaczyć od razu z równania (4.4).

Zgodnie z (2.9) kąt obrotu wynosi ogólnie

$$(4.5) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{l^3}{K\pi^3} \sum_m \sum_n m R_{mn} Z_{mn} \cos \lambda\xi \sin \eta\varphi,$$

gdzie

$$(4.6) \quad R_{mn} = \frac{(m^2 + \varepsilon^2 n^2)^2}{(m^2 + \varepsilon^2 n^2)^4 + \psi m^4}.$$

Dla obciążenia równomiernego otrzymuje się na podporze ($\cos \lambda\xi = 1$)

$$(4.7) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^p = -\frac{16pl^3}{K\pi^5} \sum_m \sum_n \frac{1}{n} R_{mn} \sin \eta\varphi, \quad m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots,$$

i od momentów zewnętrznych na obu podporach

$$(4.8) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^M = -\frac{2l}{K\pi^2} \sum_m \sum_n M_n \bar{m}^2 R_{mn} (1 - \cos \bar{m}\pi) \sin \eta\varphi,$$

$$\bar{m} = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$$

Przy $1 - \cos \bar{m}\pi = 2$ dla \bar{m} nieparzystych i $1 - \cos \bar{m}\pi = 0$ dla \bar{m} parzystych otrzymamy (po podstawieniu (4.7) i (4.8) do (4.4) dla wybranego n)

$$(4.9) \quad M_n = -\frac{4pl^2}{\pi^3} \frac{1}{n} \frac{\sum_m R_{mn}}{\sum_m m^2 R_{mn}}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Dodając składniki (4.9) otrzymuje się ostatecznie dla obciążenia równomiernie rozłożonego

$$(4.10) \quad M = \sum_n M_n \sin \eta\varphi = \\ = -\frac{4pl^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \frac{\sum_n R_{mn}}{\sum_n m^2 R_{mn}}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$$

Mimo tego, że obciążenie zastępcze (4.1) jest rozbieżne, wyrażenie (4.10) jest zbieżne, co prawda zbieżne bardzo wolno. Daje ono tylko moment podporowy. Momenty w przęśle otrzymuje się jako sumę

$$(4.11) \quad m_x = \frac{16}{\pi^4} pl^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} (m^2 + \nu\varepsilon^2 n^2) R_{mn} \sin \lambda\xi \sin \eta\varphi + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_m \sum_n M_n \bar{m} (\bar{m}^2 + \nu\varepsilon^2 n^2) R_{mn} [\sin \lambda\xi + \sin \lambda(1 - \xi)] \sin \eta\varphi, \\ m = 1, 3, 5, \dots; \bar{m} = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$$

Oba składniki wyrażenia (4.11) dają dla $x = 0$ i $x = l$ zerowe wartości m_x , mimo że drugi z nich powinien dawać wartość momentu podporowego. Ta nieścisłość jest wynikiem samej koncepcji przedstawienia momentu w postaci obciążenia przeszło-owego.

Powłoki walcowe podparte niepodatnie na całym obwodzie rozpatrywał za pomocą szeregów podwójnych na podstawie równań dokładniejszych, jednak przy założeniu $\nu = 0$, OLSEN, [37]. Obliczenia te dotyczyły w pierwszym rzędzie rozkładu sił podłużnych n_x .

5. Powłoki ortotropowe

5.1. Jeżeli powłoka jest wzmocniona żebrami podłużnymi (rys. 1b) lub poprzecznymi, można traktować ją, jak wiadomo, jako powłokę ortotropową.

Poprzednie rozważania opierały się na równaniu Donnella. Wydaje się zatem rzeczą wskazaną uogólnić to równanie na powłoki ortotropowe.

Założmy, że przez dodanie żeber podłużnych sztywność wydłużenia i sztywność zginania wzrosną do wartości podanych przez JAKOBSENA, [34]⁴

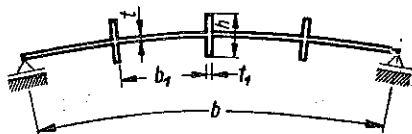
⁴ Inni autorzy, np. [38], podają zależności, w których dzielnik $1 - \nu^2$ odnosi się jedynie do pierwszych wyrazów w licznikach wyrażeń (5.1).

$$(5.1) \quad D_x = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{b_1 t + t_1 h}{b_1 + t_1}, \quad K_x = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{b_1 t^3 + t_1 h^3}{b_1 + t_1}$$

dla żeber umieszczonych symetrycznie (rys. 8). Dla żeber umieszczonych jednostronnie zmieni się wartość K_x :

$$K_x = \frac{E}{(1-\nu^2)(b_1+t_1)} \left[\frac{b_1 t^3 + t_1 h^3}{3} - \frac{(b_1 t^2 + t_1 h^2)^2}{4(b_1 + t_1 h)} \right]$$

W równaniach (2.2) zmienimy zależności dla n_x i m_x :



Rys. 8

$$n_x = \frac{D_x}{a} u' + \nu \frac{D}{a} (v' + w')$$

(5.2)

$$m_x = \frac{K_x}{a^2} w'' + \nu \frac{K}{a^2} w''$$

Podstawiając (5.2) i pozostałe wielkości według (2.2) do równań równowagi (2.1) i pomijając składnik momentowy w drugim z nich, otrzymujemy

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2} f_x u'' + \frac{1+\nu}{2} f_x v'' + \nu f_x w'' + X \frac{a^2}{D_x} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' + w'' + Y \frac{a^2}{D} &= 0, \\ \nu u' + v' + w' + k_x w^{(4)} + k(w'' + 2w''') - \frac{Za^2}{D} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.4) \quad f_x = D/D_x, \quad i_x = K/K_x, \quad k_x = K_x/Da^2.$$

Zależności odpowiednie do (2.6) przybiorą po przekształceniach postać

$$(5.5) \quad \begin{aligned} v^{(4)} + 2\mu v'''' + f_x v'' &= -f_x w'' - \frac{2-f_x \nu(1+\nu)}{1-\nu} w'' - \\ &\quad - \left(\frac{2}{1-\nu} Y'' + Y'' - \frac{1+\nu}{1-\nu} f_x X'' \right) \frac{a^2}{D}, \\ u^{(4)} + 2\mu u'''' + f_x u'' &= -\nu w'' + f_x w'' - \\ &\quad - \left(X'' + \frac{2}{1-\nu} X'' - \frac{1+\nu}{1-\nu} f_x Y'' \right) \frac{a^2}{D}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mu = \frac{1-\nu f_x}{1-\nu}$$

Operator występujący po lewej stronie w równaniach (5.5)

$$(5.6) \quad L_1 = (\)^{(4)} + 2\mu (\)'''' + f_x (\)''$$

stosujemy do trzeciego z równań (5.3):

$$L_1(\nu u' + v) + L_1(w) + k_x L_1(w^{(4)}) + k L_1(w'' + 2w''') - \frac{\alpha^2}{D} L_1(Z) = 0.$$

Uwzględniając (5.5) eliminujemy stąd u oraz v i znajdziemy

$$(5.7) \quad w^{(8)} + 2(\mu + i_x) w^{(6)} + (4\mu i_x + i_x + f_x) w^{(4)} + 2i_x(\mu + f_x) w'' + f_x i_x w'' + \frac{1}{k_x} (1 - \nu^2) w^{(4)} = \left[Z^{(4)} + 2\mu Z'''' + f_x Z'' + \nu X'''' + \frac{2\nu - f_x - \nu f_x}{1 - \nu} X'' + Y'' + \frac{2 - \nu f_x - \nu^2 f_x}{1 - \nu} Y'' \right] \frac{\alpha^4}{K_x}.$$

Równanie (5.7) jest uogólnionym równaniem Donnella dla powłoki ortotropowej. Dla powłoki izotropowej $f_x = i_x = \mu = 1$, $k_x = k$ i równanie (5.7) przekształca się w równanie (2.7). Równanie (5.7) może stanowić podstawę do rozwiązania zarówno równania niejednorodnego [przez podstawienie w, X, Y, Z według (2.9)] jak i zagadnienia brzegowego przy $X = Y = Z = 0$.

Stosując do równania (5.7) operator (5.6) oraz operator

$$(5.8) \quad L_2 = (\)^{(4)} + 2i_x (\)'''' + i_x (\)''$$

można zapisać je w prostej postaci (przyjmujemy ponadto $X = 0$)

$$(5.9) \quad L_1 L_2(w) + \frac{1}{k_x} (1 - \nu^2) w^{(4)} = \left[L_1(Z) + Y'' + \frac{2 - \nu f_x - \nu^2 f_x}{1 - \nu} Y'' \right] \frac{\alpha^4}{K_x}.$$

Równanie (5.9) jest znacznie prostsze od równania Jakobsena⁵.

⁵ Po oddaniu niniejszej pracy do druku autor zwrócił uwagę na krótki artykuł [42], w którym Y. C. DAS wyprowadził równanie analogiczne do równania (5.9) przy nieco odmiennych założeniach; w artykule tym brak jednak rozwiązań szczegółowych. Jest znamienne, że recenzent artykułu DASA (por. Applied Mechanics Reviews, 1962, Rev. No. 1340) zwraca uwagę na dwie wcześniejsze publikacje (STEIN-MAYERA i AMBARCUMIANA), w których rzekomo równanie typu Donnella dla powłok ortotropowych było również wyprowadzone. Obie te publikacje nie są dostępne autorowi niniejszej pracy i nie mogą być bliżej omówione. Warto natomiast wspomnieć, że w wydanej niedawno monografii AMBARCUMIANA, [43], jeden rozdział poświęcony jest ogólnemu przypadkowi anizotropii powłoki walcowo-kolistej (typu sandwich).

Podane poniżej rozwiązanie odnoszące się do powłoki walcowo-kolistej swobodnie podpartej na całym obwodzie oraz rozwiązanie dla powłoki ortotropowej utwierdzonej wzdłuż krawędzi zakrzywionych przedstawione jest w innej pracy autora, [44].

5.2. Podstawiając do (5.9) wartości w i Z według założenia (2.9) otrzymujemy w wyrażone przez Z . Na podstawie (5.5) można z kolei uzyskać u i v . Otrzymane wielkości pozwolą wreszcie określić siły błonowe i momenty na podstawie (2.2) i (5.2):

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{l^4}{\pi^4 K_x} \sum_m \sum_n R_{mn} Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_x &= -\frac{l^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n (m^2 + \nu i_x \varepsilon^2 n^2) R_{mn} Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_\varphi &= -\frac{l^2}{\pi^2} i_x \sum_m \sum_n (\varepsilon^2 n^2 + \nu m^2) R_{mn} Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 m_{x\varphi} &= \frac{(1-\nu)l^2}{\pi^2} i_x \sum_m \sum_n m \varepsilon n R_{mn} Z_{mn} \cos \lambda \xi \cos \eta \varphi, \\
 n_x &= \frac{\psi_x a}{1-\nu^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{c_{mn}} [(1-\nu^2 f_x) m^2 \varepsilon^2 n^2 + \nu(1-1/f_x) m^4 + \\
 &\quad + \nu(1-f_x) \varepsilon^4 n^4] Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 n_\varphi &= \psi_x a \sum_m \sum_n \frac{1}{c_{mn}} \left(m^4 + \frac{i_x - f_x}{1-\nu^2} \varepsilon^4 n^4 \right) Z_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi, \\
 n_{x\varphi} &= \frac{\psi_x a}{2(1+\nu)} \sum_m \sum_n \frac{1}{c_{mn}} \left(\frac{2-\nu f_x - \nu^2 f_x}{1-\nu} + \nu \right) m^3 \varepsilon n Z_{mn} \cos \lambda \xi \cos \eta \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 R_{mn} &= \frac{m^4 + 2\mu m^2 \varepsilon^2 n^2 + f_x \varepsilon^4 n^4}{c_{mn}}, \\
 c_{mn} &= (m^4 + 2\mu m^2 \varepsilon^2 n^2 + f_x \varepsilon^4 n^4) (m^4 + 2i_x m^2 \varepsilon^2 n^2 + i_x \varepsilon^4 n^4) + \psi_x m^4
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

oraz

$$\psi_x = \frac{(1-\nu^2) D l^4}{\pi^4 K_x a^2}.
 \tag{5.12}$$

Dla obciążenia równomiernego $Z = -p$ ma zastosowanie (2.22).

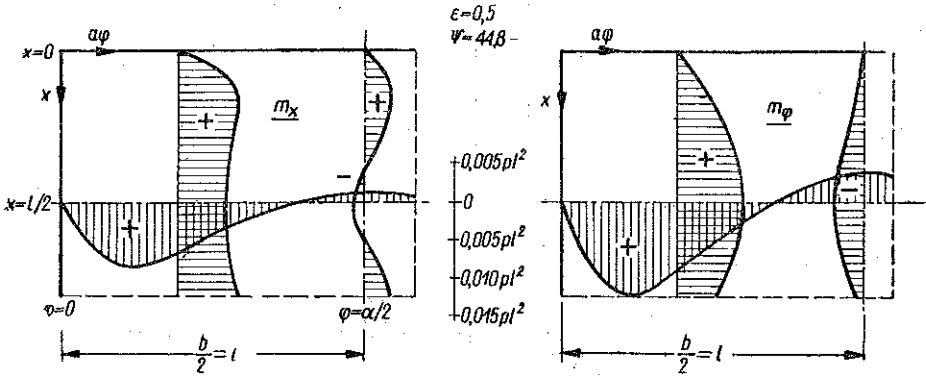
6. Przykłady liczbowe i wnioski

6.1. Powłoka swobodnie podparta. Zastosowanie szeregów podwójnych. *Przykład 1.* Powłoka ma wymiary (w cm): $a = 500$, $l = 100$, $b = \alpha a = 200$, $t = 1$. Według (2.23): $\varepsilon = 0,5$ i przy $\nu = 0,3$ $\varphi = 44,8$. Dla obciążenia stałego otrzymuje się na podstawie (2.24)

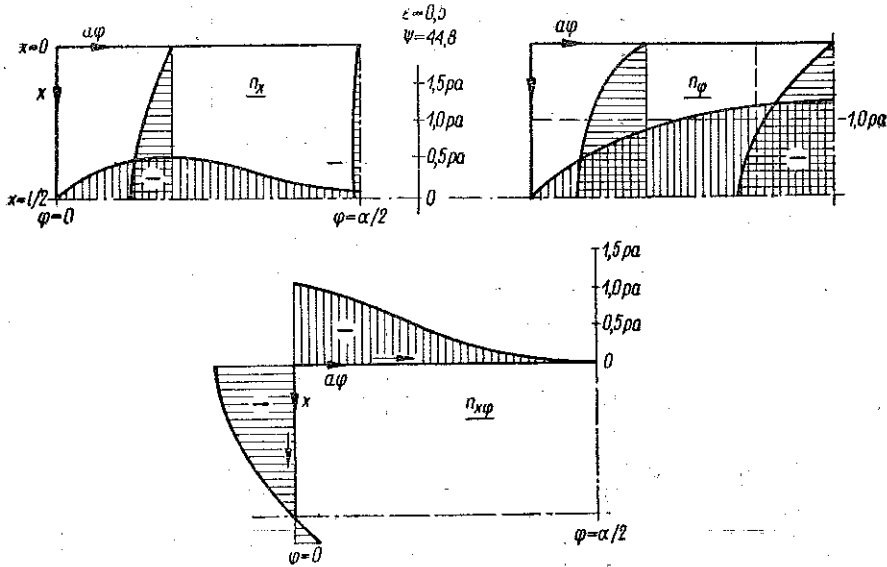
$$m_x = 0,164 p l^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{(m^2 + 0,075 n^2) (m^2 + 0,25 n^2)^2}{(m^2 + 0,25 n^2)^4 + 44,8 m^4} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}$$

$$m_\varphi = 0,164 p l^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{(0,3 m^2 + 0,25 n^2) (m^2 + 0,25 n^2)^2}{(m^2 + 0,25 n^2)^4 + 44,8 m^4} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}$$

$m = 1, 3, 5 \dots; n = 1, 3, 5 \dots$



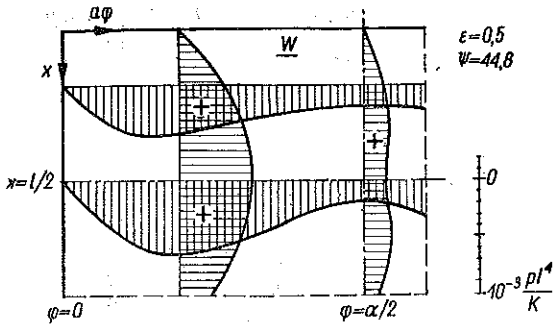
Rys. 9



Rys. 10

Wykresy m_x i m_φ dla przekrojów $x = l/2$ oraz $\varphi = 0,6 \alpha/\pi$ i $\varphi = \alpha/2$ pokazane są na rys. 9. Analogicznie otrzymujemy siły błonowe $n_x, n_\varphi, n_{x\varphi}$ (rys. 10) i przesunięcie w (rys. 11).

Z obliczonych wartości najwolniej zbieżne są momenty. Nawet jeżeli w sumowaniu poprzestać na składnikach większych od 1/100 składnika o największej wartości absolutnej, trzeba dla momentu w środku powłoki uwzględnić ponad 30 wyrazów szeregu. Ponieważ dla $x = l/2$, $\varphi = a/2$ składniki te zmieniają znaki na przemian, otrzymana suma co do bezwzględnej wartości wynosi ok. 1/5 wyrazu największego i dokładność wyniku nie jest większa od 5%. W środku powłoki w tym przykładzie nie występuje wartość maksymal-

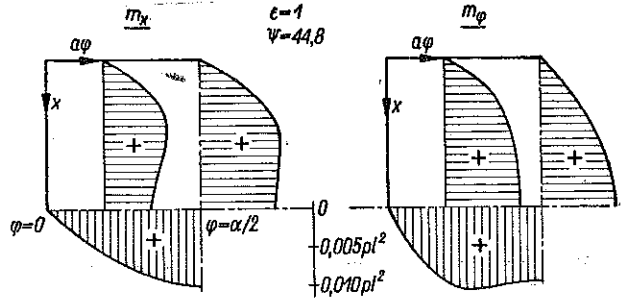


Rys. 11

na momentów. Dla tych ostatnich otrzymuje się przy tej samej liczbie wyrazów lepszą dokładność.

Natomiast dla płyty prostokątnej ($\psi = 0$) o stosunku boków $\varepsilon = 0,5$ maksymalną wartość m_x w środku płyty, $0,102 pl^2$, można otrzymać z dokładnością ok. 1% już na podstawie 10-12 wyrazów. Porównanie maksymalnych wartości obu momentów zginających w powłocie i płycie wykazuje, że maksymalny moment w powłocie ($m_{\varphi \max} = 0,012 pl^2$) jest ośmiokrotnie mniejszy.

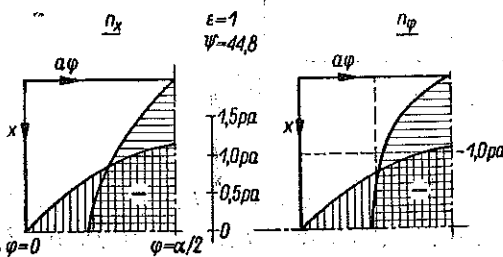
Przykład 2. Z kolei rozpatrzona będzie powłoka o $l = b = 100$ ($\varepsilon = 1$). Przy tym niech $t = 1$, $a = 500$ i jak w przykładzie 1 $\psi = 44,8$. Wykresy m_x i m_{φ} przedstawiono na rys. 12, przebieg sił błonowych na rys. 13. Wartości momentów są w tym przykładzie lepiej zbieżne niż w przykładzie 1.



Rys. 12

Przykład 2. Z kolei rozpatrzona będzie powłoka o $l = b = 100$ ($\varepsilon = 1$).

Przy tym niech $t = 1$, $a = 500$ i jak w przykładzie 1 $\psi = 44,8$. Wykresy m_x i m_{φ} przedstawiono na rys. 12, przebieg sił błonowych na rys. 13. Wartości momentów są w tym przykładzie lepiej zbieżne niż w przykładzie 1.

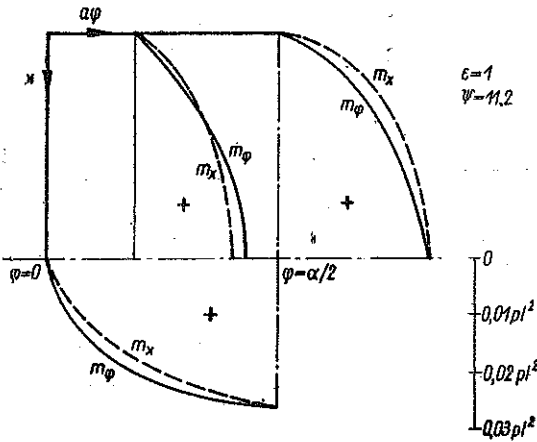


Rys. 13

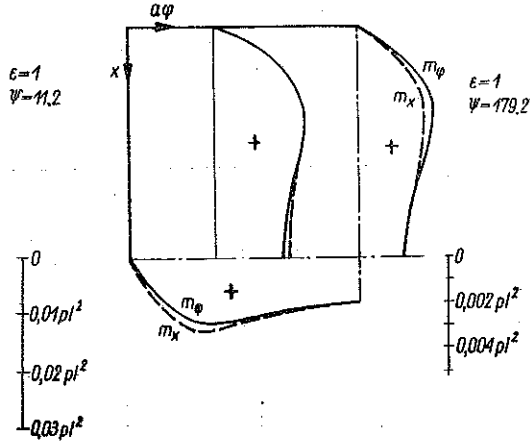
Zauważmy jeszcze, że przy $\varepsilon = 1$ funkcje m_φ można określić za pomocą funkcji m_x według (2.24) przestawiając m i n , a zatem m_φ dla $\varphi = \xi_1 a$ oraz $x = \xi_2 l$ równe jest m_x dla $\varphi = \xi_2 a$ oraz $x = \xi_1 l$.

Przykład 3. Przy $\varepsilon = 1$ niech $t = 2$, $a = 500$, czyli $\psi = 11,2$. Tę samą wartość ψ otrzyma się zachowując grubość $t = 1$ i zwiększając promień dwukrotnie do $a = 1000$.

Wykresy momentów przedstawione są na rys. 14. Momenty wzrosły przeszło dwukrotnie w porównaniu z przykładem 2.



Rys. 14



Rys. 15

Przykład 4. Przy $\varepsilon = 1$ niech $t = 1$, $a = 250$, czyli $\psi = 179,2$. Wartości momentów (rys. 15) otrzymano przeszło trzykrotnie mniejsze niż w przykładzie 2.

W ostatnich trzech przykładach, gdzie obliczano powłokę o równych bokach, maksymalne wartości momentów wahają się w szerokich granicach od $0,004 pl^2$ dla $t = 1$ i $a = 250$ do $0,026 pl^2$ dla $t = 2$ i $a = 500$. Ale i ta ostatnia wartość jest mniejsza od momentu płytowego $0,0475 pl^2$.

Wnioski co do zbieżności wzorów obliczeniowych są następujące:

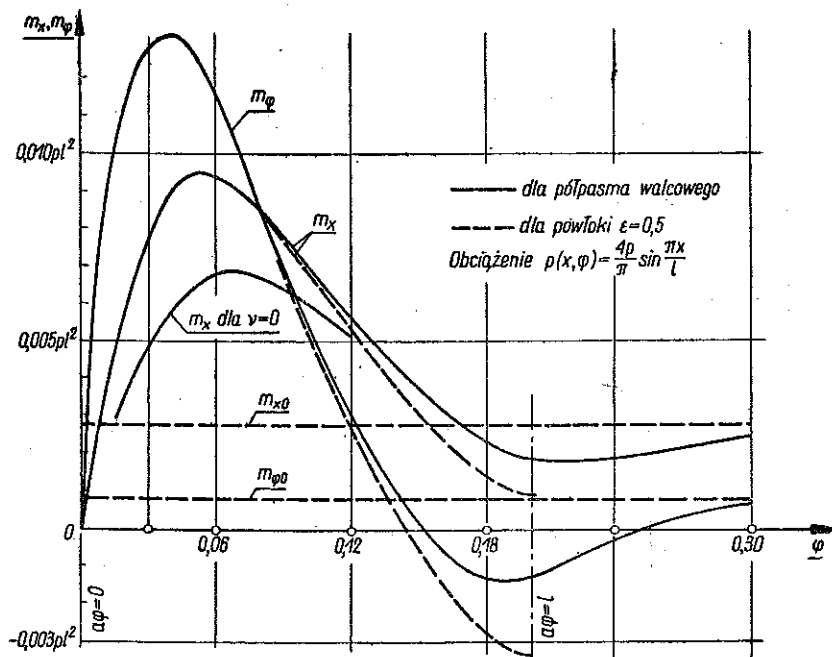
Przy stałych wymiarach boków ($\varepsilon = \text{const}$) zbieżność wzrasta ze zmniejszaniem się ψ , czyli ze wzrostem grubości t i promienia a .

Przy stałym ψ (czyli stałe a, l, t) zbieżność pogarsza się ze zmniejszaniem się ε , czyli ze wzrostem kąta α .

6.2. Zastosowanie równań zaburzenia brzegowego. *Przykład 5.* Dla półpasma walcowego przy $a = 500$, $l = 100$, $t = 1$ mamy dla obciążenia według jednej półfali w kierunku x ($m = 1$) na podstawie (3.1), (2.5) i (3.2) $\lambda = 15,708$, $k = 33,33 \cdot 10^{-8}$, $q = 25,269$, $\kappa = 0,38644$. Według (3.3): $\alpha_1 = 27,656$, $\alpha_2 = 12,062$, $\beta_1 = 8,163$, $\beta_2 = 18,715$.

Wykresy momentów m_x i m_φ otrzymanych na podstawie (3.15) dla $x = l/2$ przy $m = 1$ widoczne są na rys. 16. Naniesiono tam również wartości m_{x0} i $m_{\varphi 0}$ według

(3.10), do których momenty m_x i m_φ zmierzają asymptotycznie. Dla porównania na odcinku od $\varphi = 0$ do $\varphi = l/a$ naniesiono wartości obliczone według (2.13) dla $\varepsilon = 0,5$ $m = 1$. W miejscu $\varphi = l/a$ (środek powłoki z przykładu 1) rozwiązanie



Rys. 16

dla półpasma walcowego daje wyniki nieco odmienne, ponieważ w powłoce ograniczonej o $\varepsilon = 0,5$ uwytadnia się tam również wpływ zaburzenia na brzegu $\varphi = \alpha$.

6.3. Powłoka utwierdzona. Przykład 6. Powłoka o wymiarach jak w przykładzie 2 jest częścią powłoki ciągłej. Według (4.9) dla $\varepsilon = 1$

$$M_n = -\frac{4pl^2}{\pi^3} \sin \frac{n\pi\varphi}{a} \frac{1}{n} \frac{\sum_m \frac{(m^2+n^2)^2}{(m^2+n^2)^4 + 44,8 m^4}}{\sum_m \frac{(m^2+n^2)^2 m^2}{(m^2+n^2)^4 + 44,8 m^4}}$$

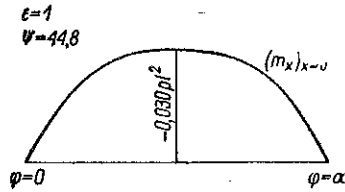
Szereg w mianowniku jest bardzo wolno zbieżny. Dla dużych m wyrazy tego szeregu zbliżają się do wartości $1/m^2$. Poprzestając w sumowaniu na $m = \bar{m}$ i przyporządkowanej wartości sumy $S_{\bar{m}}$ można, przy uwzględnieniu

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

obliczyć dokładniejszą wartość sumy S_∞ równą

$$S_\infty = S_m + \frac{\pi^2}{8} - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\bar{m}} \frac{1}{m^2}.$$

Wykres m_x na podporze, obliczony dla $n = 1, 3, 5$ według (4.10), widoczny jest na rys. 17. Co do bezwzględnej wartości maksymalny moment podporowy jest trzykrotnie większy niż maksymalny moment przęsłowy w przykładzie 2. Ten ujemny moment podporowy szybko maleje w kierunku środka powłoki, gdzie stan naprężenia jest miarodajny przy określaniu stateczności powłoki.



Rys. 17

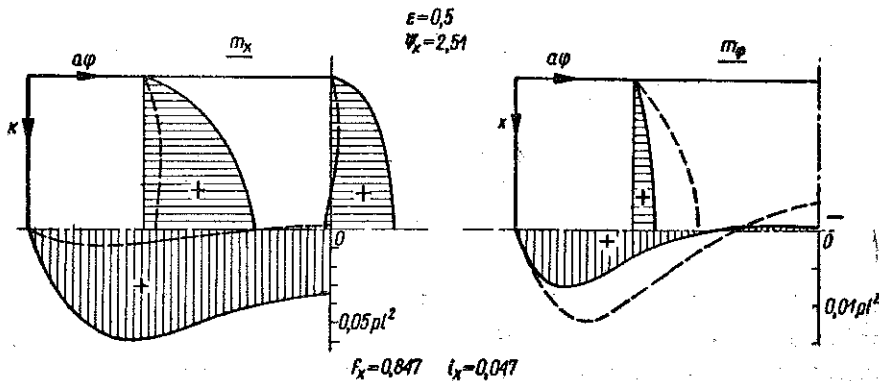
Jak wykazują obliczenia porównawcze, moment utwierdzenia na krawędziach poprzecznych w przypadku, kiedy krawędzie podłużne mogą swobodnie przesuwać się w kierunku obwodowym (jak w tym przykładzie), może być znacznie większy od momentu utwierdzenia w przypadku rury obciążonej obrotowo-symetrycznie. Dla tej ostatniej przy dostatecznie dużym l i $\nu = 0,3$ jest $m_{x0} = 0,3pat$.

6.4. Powłoka ortotropowa swobodnie podparta. Przykład 7. Wymiary: $a = 500$, $l = 100$, $b = 200$, czyli $\varepsilon = 0,5$ oraz $t = 1$. Żebra cienkościenne według rys. 8 o wymiarach 100.10 mm i rozstawie 50 cm. Według (5.4): $f_x = 0,847$, $i_x = 0,0476$ oraz $\mu = 1,065$. Według (5.12) $\psi_x = 2,51$. Na podstawie (5.10) dla $Z = -p$

$$m_x = \frac{16}{\pi^4} pl^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} (m^2 + 0,00357 n^2) R_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \varphi,$$

$$R_{mn} = \frac{m^4 + 0,533 m^2 n^2 + 0,0529 n^4}{(m^4 + 0,533 m^2 n^2 + 0,0529 n^4)(m^4 + 0,0238 m^2 n^2 + 0,00298 n^4) + 2,51 m^4},$$

$m = 1, 3, 5 \dots ; n = 1, 3, 5 \dots$



Rys. 18

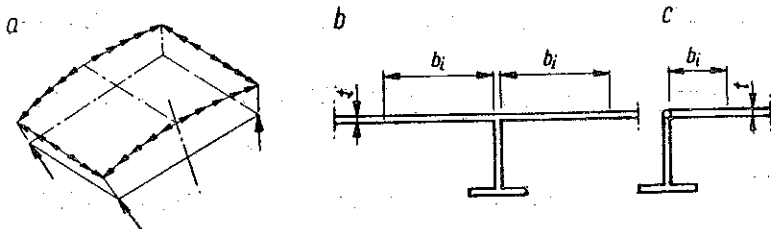
Wykres m_x i m_φ widoczny jest na rys. 18. Maksymalny moment m_x wzrósł pięciokrotnie w porównaniu z momentem maksymalnym występującym w odpowiedniej powłoce izotropowej (przykład 1). Z drugiej strony moment m_φ zmalał prawie dwukrotnie. Wykresy wartości w powłoce izotropowej przedstawiono na rys. 18 linią kreskowaną.

Dla płyty ortotropowej o $\varepsilon = 0,5$ i tej samej ortotropii co w powłoce maksymalny moment m_x jest bliski wartości $pl^2/8$. A zatem również w powłoce ortotropowej posiadającej żebra podłużne momenty m_x maleją w sposób znaczny na skutek obecności sił blonowych, których w płycie nie ma.

7. Uwagi końcowe

W przedstawionych rozwiązaniach otrzymuje się dla powłoki swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach $n_x = n_\varphi = 0$, natomiast dla powłoki ciągłej $n_\varphi = 0$ na wszystkich krawędziach i $n_x = 0$ na krawędziach podłużnych. Jest to wynikiem założonej niepodatności elementów podpierających w swoich płaszczyznach.

Oddziaływanie powłoki na podpory sprowadza się przede wszystkim do sił stycznych $n_{x\varphi}$ (rys. 19a) i pewnych reakcji $\bar{q}_x, \bar{q}_\varphi$. Siły te przenoszone są przez elementy podpierające, przy czym z elementami podpierającymi współpracuje sąsiednia część powłoki.



Rys. 19

Dla krawędzi zakrzywionej szerokość współpracującą można w przybliżeniu obliczyć wychodząc z obrotowo-symetrycznego stanu naprężenia. Dla powłoki ciągłej (rys. 19b) otrzymuje się $b_i = 0,76 \sqrt{at}$, a dla krawędzi swobodnie podpartej (rys. 19c) $b_i = 0,38 \sqrt{at}$ (por. [35], s. 560).

Jeżeli przepony poprzeczne obliczy się na działanie sił $\bar{q}_x, n_{x\varphi}$, otrzyma się dla ich górnych krawędzi, zależnie od sztywności przepony i jej wysokości, naprężenia ściskające lub rozciągające.

Szerokość współpracująca dla krawędzi podłużnych obliczyć można w przybliżeniu nie uwzględniając zakrzywienia na podstawie rozdziału IX w [36].

Wypada jeszcze zwrócić uwagę na zagadnienie stateczności. Element powłoki znajduje się w złożonym stanie naprężenia. Obok sił normalnych n_x, n_φ i sił styczn-

nych $n_{x\varphi}$ występują jeszcze momenty m_x , m_φ i $m_{x\varphi}$. W tych warunkach przy wzroście obciążenia nie nastąpi utrata stateczności w sensie rozgałęzienia (bifurkacji) stanu równowagi. Mamy tu do czynienia ze skomplikowanym zagadnieniem wytrzymałościowym teorii II rzędu.

Tym niemniej rozpatrzenie podstawowych przypadków utraty stateczności zwraca uwagę na istotne parametry zapewniające stateczność czy też, w przypadku złożonego stanu naprężenia, dostateczną wytrzymałość i sztywność powłoki.

Przy ściskaniu osiowym powłoki zamkniętej, wzmocnionej na końcach przeponami (rys. 19a), występuje zjawisko przeskoku i naprężenie krytyczne, jak wynika z badań kilku autorów, por. [36], s. 595, wynosi

$$(7.1) \quad \sigma_{xk} = \frac{P_k}{t} = 0,19 \frac{Et}{a}$$

Pomijając pewien wpływ zaburzeń na końcach powłoki otrzymuje się, że naprężenie krytyczne nie zależy od rozpiętości l .

Przy obciążeniu radialnym istotny wpływ na zachowanie się powłoki ma stosunek l/a . Według FLÜGGEGO, [3], utrata stateczności występuje przy

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{p_k a}{t} = \Phi \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Wartości współczynnika Φ dla różnych wartości parametru $k = t^2/12 a^2$ przedstawione zostały w postaci wykresów jako funkcja l/a , [36], s. 582.

WINDENBURG na podstawie porównania wyników doświadczeń z rozwiązaniem analitycznym zaproponował prosty wzór

$$(7.2) \quad \sigma_{\varphi k} = 0,92 E \frac{(t/a)^{3/2}}{l/a},$$

por. [39].

Bardziej celowe będzie posłużyć się wartością obliczoną według teorii nieliniowej przez TIEREBUSZKĘ, [40],

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{p_k a}{t} = 0,7 E \frac{(t/a)^{3/2}}{l/a}$$

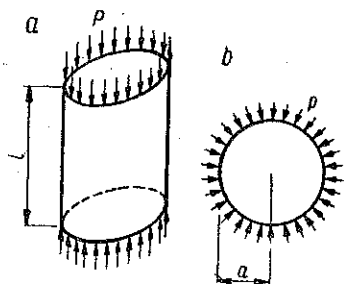
stosowaną w interesującym nas obszarze parametrów l/a .

Przy łącznym działaniu obciążenia osiowego i radialnego wartości krytyczne P_k^t i p_k^t można powiązać przybliżoną zależnością

$$(7.3) \quad \frac{P_k^t}{P_k} + \frac{p_k^t}{p_k} = 1,$$

gdzie P_k i p_k są określone za pomocą wzorów (7.1) i (7.2).

Postępując się analogią z przybliżonym obliczaniem słupów ściskanych mimośrodowo można na podstawie (7.3) wyprowadzić przybliżone wzory dla sprawdzenia naprężeń dopuszczalnych σ_φ i σ_x wewnątrz powłoki:



Rys. 20

$$(7.4) \quad \frac{|n_\varphi|}{\beta_1 t} + \frac{6m_\varphi}{t^2} \leq \sigma_{0 dop},$$

$$\beta_1 = \frac{0,7 E}{\sigma_{pl}} \frac{(t/a)^{3/2}}{l/a} \left(1 - 5,3 \frac{|n_x|}{Et} \frac{a}{t} \right);$$

$$(7.5) \quad \frac{|n_x|}{\beta_2 t} + \frac{6m_\varphi}{t^2} \leq \sigma_{0 dop}$$

$$\beta_2 = \frac{0,19 E}{\sigma_{pl}} \frac{t}{a} \left[1 - 1,45 \frac{|n_\varphi|}{Et} \frac{l/a}{(t/a)^{3/2}} \right].$$

Tutaj $\sigma_{0 dop}$ oznacza podstawowe naprężenia dopuszczalne σ_{pl}/s , gdzie σ_{pl} jest granicą plastyczności, natomiast s współczynnikiem bezpieczeństwa. Współczynniki zmniejszające β_1 i β_2 według (7.4) i (7.5) odnoszą się tylko do obszaru sprężystego, kiedy $\sigma_{xk} < \sigma_{pl}$ oraz $\sigma_{\varphi k} < \sigma_{pl}$. Dla obszaru plastycznego $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Na krawędziach, gdzie oprócz naprężeń stycznych $\tau_{x\varphi}$ wystąpią wskutek zaburzeń brzegowych naprężenia normalne n_x lub n_φ , należy sprawdzić naprężenie porównawcze według hipotezy Hubera:

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 + 3\tau_{x\varphi}^2} \leq \sigma_{0 dop}.$$

W niniejszym opracowaniu rozpatrzono pracę statyczną poszycia, które traktowane było jako powłoka walcowo-kolista. Cała konstrukcja zamknięcia wodnego, rozpatrywana jako pręt cienkościenny, doznaje poza tym zginania i skręcania — zależnie od warunków podparcia. Zagadnieniom tym poświęcona była monografia [41].

Literatura cytowana w tekście

- [1] C. F. KOLLBRUNNER, *Hydraulic Steel Gates*, Proc. of Research and Construction on Steel-Engineering, 13, 1950.
- [2] S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, N. York 1940.
- [3] W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer-Verlag, Berlin 1934.
- [4] K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, 3. Aufl., Springer, Wien 1954.
- [5] S. L. LEE, *Bending of Partially Loaded Simply Supported Cylindrical Shells*, Publ. Int. Ass. for Bridge and Structural Eng. 19, 1959, s. 155.
- [6] Am. Soc. Civ. Eng., *Manuals of Engineering Practice*, No 31: *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*, N. York 1952.
- [7] U. FINSTERWALDER, *Die Theorie des kreiszylindrischen Schalengewölbes System Zeiss-Dywidag*, Abh. IVBH 1, 1932, s. 127.
- [8] В. З. Власов, *Новый метод расчета тонкостенных призматических и цилиндрических оболочек*, Госстройиздат, 1933.

- [9] H. SCHORER, *Line Load Action on Thin Cylindrical Shells*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., **61**, 1935, s. 181.
- [10] Cement and Concrete Assoc., *Concrete Shell Roof Construction*, Proceedings of a Symposium, London 1954.
- [11] D. YITZHAKI, *The Design of Prismatic and Cylindrical Shell Roofs*, Haifa 1958.
- [12] L. H. DONNELL, *Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion*, NACA Techn. Rep., **479**, 1933.
- [13] T. KÁRMÁN, TSIEN HSUE SHEN, *The Bending of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression*, J. Aeron. Sci., **8**, 1941, s. 303.
- [14] R. S. JENKINS, *Theory and Design of Cylindrical Shell Structures*, Modern Build. Techn. Bull. 1, London 1947.
- [15] J. E. GIBSON, D. W. COOPER, *The Design of Cylindrical Shell Roofs*, Spon Ltd, London 1954.
- [16] G. GRÜNING, *Die Berechnung von Kreiszyinderschalen ohne Benutzung von Randwertafeln*, Bauplanung-Bautechnik, **11**, 1957, s. 297.
- [17] В. З. Власов, *Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек*, И.М.М., **8**, 1944, 2.
- [18] В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Гостехиздат, 1949.
- [19] F. DISCHINGER, *Die strenge Theorie der Kreiszyinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiss-Dywidag-Schalen*, Beton und Eisen, **34**, 1935, s. 257, 283.
- [20] K. MIESEL, *Über die Festigkeit von Kreiszyinderschalen bei nichtachsensymmetrischer Belastung*, Ing.-Arch., **1**, 1930, s. 22.
- [21] AAS JAKOBSEN, *Über das Randstörungsproblem an Kreiszyinderschalen*, Bauingenieur, **20**, 1939, s. 394.
- [22] R. OHLIG, *Räumliche Tragwerke des Stahlbetonbehälterbaues*, Beton- und Stahlbetonbau, **48**, 1953, s. 233.
- [23] N. J. HOFF, *Boundary-Value Problems of the Thin-Walled Circular Cylinder*, J. Appl. Mech., **76**, 1954, s. 343.
- [24] H. SCHMIDT, *Ein Beitrag zum Randstörungsproblem an den Binderscheiben der Kreiszyinderschalen*, Bauplanung-Bautechnik, **11**, 1957, H. 1,2.
- [25] A. L. PARME, *Ribless Cylindrical Shells*, Proc. of the Second Symposium on Concrete Shell Roof Construction, Oslo 1958.
- [26] I. HOLLAND, *An Application of Donnell's Theory of Circular Cylindrical Shells to the Analysis of Curved Edge Disturbancy*, Publ. Int. Ass. for Bridge a. Structural Eng., **19**, 1959, s. 65.
- [27] J. MOE, *On the Theory of Cylindrical Shells. Explicit Solution and Discussion of the Accuracy of Various Shell Theories*, Publ. Int. Ass. for Bridge a. Structural Erg., **13**, 1953, s. 283.
- [28] N. J. HOFF, *The Accuracy of Donnell's Equations*, J. Appl. Mech., **77**, 1955, s. 329.
- [29] С. А. Амбарцумян, *К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек*, И.М. М., **18**, 1954.
- [30] L. TING, S. W. YUAN, *On Radial Deflections of a Cylinder of Finite Length with Various End Conditions*, J. Aeron. Sci., **25**, 1958, s. 230.
- [31] L. S. D. MORLEY, *An Improvement on Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinder*, Quart. J. Mech. a. Appl. Math., **12**, 1959, s. 89.
- [32] V. LEWÉ, *Piltdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten*, W. Ernst, Berlin 1926.
- [33] H. LUNDGREN, *Cylindrical Shells*, Vol. 1, The Danish Technical Press, Copenhagen 1949.
- [34] A. JAKOBSEN, *Die Berechnung von Kreiszyinderschalen*, Springer, Berlin 1958.
- [35] W. FLÜGGE, *Stresses in Shells*, Springer, Berlin 1960.
- [36] K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1957, Arkady oraz Dodatek, Arkady, Warszawa 1961.
- [37] O. OLSEN, *Continuous Shells*. Proc. of the Second Symposium on Concrete Shell Roof Construction, Oslo 1957.

- [38] В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, 1951.
- [39] Y. C. FUNG, E. E. SECHLER, *Instability of Thin Elastic Shells*, Proc. First Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, Oxford 1960.
- [40] О. И. Теребушко, *Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении, внешнем давлении и сжатии*. Расчет пространственных конструкций, 5, 1959.
- [41] R. DĄBROWSKI, *Skręcanie mostowych i hydrotechnicznych konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym*, Gdańsk 1958.
- [42] Y. C. DAS, *On the Bending of Orthotropic Cylindrical Shells*, J. Aero-Space Sci., 28, 1961, s. 661.
- [43] С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек*, Физматгиз, 1961.
- [44] R. DĄBROWSKI, *Die Berechnung der allseitig starr gestützten orthotropen Kreiszyinderschalen*, Bauingenieur, 37 (1962), 459.

Резюме

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ЗАТВОРОВ ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

Проводится анализ напряженного состояния в обшивке затворов, которые в статическом отношении можно рассматривать как круговую цилиндрическую оболочку. После вступительных обсуждений различных теорий этой оболочки (п. 1), дальнейшие рассуждения основываются на дифференциальном уравнении Донелла.

Прежде всего решается, при помощи двойных рядов, случай свободно опертой оболочки, подверженной гидростатическому давлению, или действию равномерно расположенной радиальной нагрузки (п. 2). Для более закрученных оболочек эти ряды являются медленно сходящимися и для этого случая решается краевая задача с учетом коэффициента $\nu \neq 0$; выводятся готовые формулы для внутренних сил (п. 3).

Затем в п. 4 рассматривается также, при использовании двойных рядов, защемленная оболочка, как часть сплошной оболочки. Для ортотропной оболочки выводится дифференциальное уравнение, эквивалентное уравнению Донелла (п. 5).

В п. 6 иллюстрируется несколькими примерами распределение внутренних сил, главным образом в изотропных, свободно опертых оболочках и влияние различных параметров на их величину.

Заключительные замечания посвящены проверке напряжений с учетом возможности потери устойчивости; они основываются на материале заключающимся в известных источниках.

Summary

WATER GATE SHELLS

This is an analysis of the stress in the covering of steel water gates which may be treated as a circular cylindrical shell. After a brief discussion of various theories of such a shell (Sec. 1) further analysis is based on the Donnell differential equation.

First, double series are used to solve the problem of a simply supported shell subjected to a hydrostatic pressure or a uniform radial load (Sec. 2). For shells of stronger curvature the convergence of the series is poor. In this case, a boundary value problem is solved, taking into consideration the coefficient $\nu \neq 0$. Equations for the internal forces are derived (Sec. 3).

Next, Sec. 4 contains a discussion, also by using double series, of a clamped shell considered to constitute a portion of a continuous shell.

For an orthotropic shell, differential equation is derived corresponding to the Donnell equation (Sec. 5).

In Sec. 6 several examples are used to illustrate the distribution of internal forces, above all, in simply supported isotropic shells and the influence of various parameters on their magnitude.

Final remarks are devoted to the verification of the stresses taking into consideration the danger of buckling. They are based on the analysis known from textbooks.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 listopada 1961 r.