

DIONIZY NIEPOSTYN

**PLYTY PLASTYCZNIE NIEJEDNORODNE I ORTOTROPOWE
W STADIUM ZNISZCZENIA**

1962

131	132
133	134
135	136
137	138
139	140
141	142
143	144
145	146
147	148
149	150
151	152
153	154
155	156
157	158
159	160
161	162
163	164
165	166
167	168
169	170
171	172
173	174
175	176
177	178
179	180
181	182
183	184
185	186
187	188
189	190
191	192
193	194
195	196
197	198
199	200
201	202
203	204
205	206
207	208
209	210
211	212
213	214
215	216
217	218
219	220
221	222
223	224
225	226
227	228
229	230
231	232
233	234
235	236
237	238
239	240
241	242
243	244
245	246
247	248
249	250
251	252
253	254
255	256
257	258
259	260
261	262
263	264
265	266
267	268
269	270
271	272
273	274
275	276
277	278
279	280
281	282
283	284
285	286
287	288
289	290
291	292
293	294
295	296
297	298
299	300
301	302
303	304
305	306
307	308
309	310
311	312
313	314
315	316
317	318
319	320
321	322
323	324
325	326
327	328
329	330
331	332
333	334
335	336
337	338
339	340
341	342
343	344
345	346
347	348
349	350
351	352
353	354
355	356
357	358
359	360
361	362
363	364
365	366
367	368
369	370
371	372
373	374
375	376
377	378
379	380
381	382
383	384
385	386
387	388
389	390
391	392
393	394
395	396
397	398
399	400
401	402
403	404
405	406
407	408
409	410
411	412
413	414
415	416
417	418
419	420
421	422
423	424
425	426
427	428
429	430
431	432
433	434
435	436
437	438
439	440
441	442
443	444
445	446
447	448
449	450
451	452
453	454
455	456
457	458
459	460
461	462
463	464
465	466
467	468
469	470
471	472
473	474
475	476
477	478
479	480
481	482
483	484
485	486
487	488
489	490
491	492
493	494
495	496
497	498
499	500

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXIX**

TOM X • ZESZYT 4 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	647
2. Rozwiązanie statyczne i kinematyczne zagadnienia nośności płyt	648
3. Powierzchnia odkształcona w stanie granicznym	649
4. Płyta przegubowo zamocowana na obwodzie, obciążona siłą skupioną	652
5. Płyta utwierdzona na obwodzie	655
6. Płyta prostokątna z obciążeniem ciągłym	659
7. Zakończenie	662

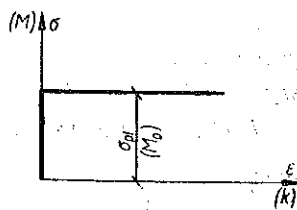
1. Wstęp

Przekroje elementów konstrukcyjnych można wymiarować opierając się na trzech podstawowych metodach:

- 1) metodzie naprężeń dopuszczalnych,
- 2) metodzie plastycznego wyrównania naprężeń, zwanej również metodą odkształceń plastycznych,
- 3) metodzie stanów granicznych.

Nie będziemy omawiali żadnej z wymienionych metod wymiarowania, które są wystarczająco wyjaśnione w wielu książkach (np. w pracach [1], [3]), ograniczymy się jedynie do stwierdzenia, że dwie ostatnie zakładają uplastycznienie przekroju. Chociaż wymiarowanie oparte jest na analizie pracy przekroju w stanie plastycznym, to siły uogólnione wyznaczamy na podstawie studium pracy konstrukcji w stanie sprężystym. Określenie wielkości i rozkładu sił wewnętrznych w stanie wyczerpania nośności układu pozwoli uniknąć niezgodności tych dwu etapów obliczania konstrukcji.

W teorii nośności granicznej zwykle zakłada się, że odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z odkształceniami plastycznymi i można je pominąć. W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z tego założenia, czyli przyjmujemy tzw. sztywno-plastyczny model ciała, dla którego wykres zależności pomiędzy naprężeniem σ i wydłużeniem ε przedstawiony jest na rys. 1. W przypadku elementów zginanych wykres zależności pomiędzy momentem M i krzywizną k jest identyczny. Na rysunku przedstawiony jest również wykres dla M i k .



Rys. 1

Rozwiązanie oparte na tym założeniu można stosować do materiałów o wyraźnej granicy plastyczności (np. dla stali). W przypadku elementów zginanych można je rozszerzyć na konstrukcję z materiału kruchego, uzbrojone wkładkami pracującymi na rozciąganie (np. z żelbetu).

W dalszych rozważaniach będziemy się również opierać na założeniach przyjmowanych w teorii płyt cienkich i na schemacie ciała sztywno-plastycznego.

Naprężenia występujące w określonej płycie zależą od jej obciążenia. Jeżeli założymy, że obciążenie rośnie proporcjonalnie do jakiegoś parametru (np. czasu),

to przy pewnej jego wartości powstają strefy uplastycznienia. W miarę wzrostu obciążenia strefy te powiększają się aż do chwili, kiedy płyta zamieni się w ustrój geometrycznie zmienny, tzw. mechanizm. Ten stan płyty nazywamy stanem wyczerpania nośności granicznej, a odpowiadające mu obciążenie — obciążeniem granicznym albo łamiącym.

2. Rozwiązanie statyczne i kinematyczne zagadnienia nośności płyt

Na podstawie twierdzeń ekstremalnych dla ciała sztywno plastycznego łatwo wykazać, że granice przedziału, w jakich zawarte jest obciążenie łamiące, można określić analizując możliwe statycznie rozkłady sił wewnętrznych lub możliwe kinematycznie stany zniszczenia. Metoda pierwsza, zwana statyczną, prowadzi do określenia intensywności obciążeń, które nie mogą przekroczyć rzeczywistego obciążenia granicznego; druga metoda, zwana kinematyczną, pozwala określić intensywność obciążeń, które nie mogą być mniejsze aniżeli rzeczywiste obciążenie graniczne.

W oparciu o te zasady ekstremalne można więc wyznaczyć granice przedziału, w którym musi być zawarte krytyczne obciążenie

$$(2.1) \quad P_s \leq P \leq P_k,$$

gdzie P_s oznacza obciążenie graniczne wyznaczone metodą statyczną, P_k obciążenie graniczne wyznaczone metodą kinematyczną, P obciążenie graniczne rzeczywiste.

Na podstawie (2.1) można również stwierdzić, że spośród różnych kinematycznie możliwych schematów zniszczenia najwłaściwszy jest ten, któremu odpowiada najmniejsze obciążenie graniczne. Natomiast zagadnienie poszukiwania najbardziej prawidłowego rozkładu sił wewnętrznych jest równoważne poszukiwaniu największego obciążenia krytycznego metodą statyczną.

Rozwiązanie statyczne wymaga sformułowania warunku plastyczności, tj. podania pewnej funkcji sił uogólnionych, który łącznie z równaniami równowagi pozwala wyznaczyć obciążenie graniczne.

W przypadku płyt żelbetowych można przyjąć następujący warunek plastyczności:

$$(2.2) \quad m_1 = |m_{01}|, \quad m_2 = |m_{02}|,$$

który w układzie jednostkowych momentów głównych m_1, m_2 przedstawia prostokąt; wielkości m_{01}, m_{02} oznaczają tu momenty wywołujące pełne uplastycznienie przekroju o długości jednostkowej.

W przypadku płyt plastycznie niejednorodnych i ortotropowych (zgodnie z klasyfikacją ciał podaną w pracy [8]), momenty m_{01} i m_{02} są funkcjami położenia.

Opierając się na teorii potencjału plastycznego można wykazać, że wektor krzywizny w danym punkcie powierzchni odkształconej płyty jest prostopadły do powierzchni granicznej w punkcie naprężenia. Jeżeli np. współrzędne punktu M (rys. 2) określają wielkość momentów głównych w jakimś punkcie płyty, czyli

punkt M jest punktem naprężenia (określenie zgodne z [10]), to wektor MN jest proporcjonalny do wektora krzywizny powierzchni odkształconej w rozpatrywanym punkcie.

Rozwiązanie kinematyczne polega na podaniu powierzchni odkształconej płyty w chwili jej zniszczenia, a następnie na wyznaczeniu pracy sił wewnętrznych δV i zewnętrznych δL na podstawie zasady prac przygotowanych. Z równania

$$(2.3) \quad \delta V = \delta L$$

możemy obliczyć obciążenie graniczne albo moment graniczny.

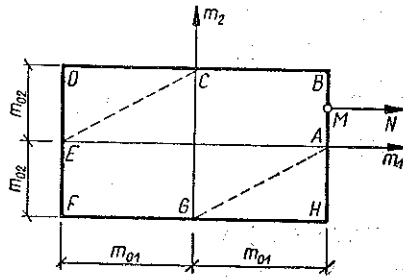
Wielkości występujące w równaniu (2.3) obliczamy w sposób następujący:

$$(2.4) \quad \delta V = \int_A (|k_1| m_{01} + |k_2| m_{02}) dA + \delta V_n,$$

$$(2.5) \quad \delta L = \int_A p \delta w dA.$$

We wzorach (2.4) i (2.5) m_{01} i m_{02} oznaczają odpowiednio momenty wywołujące pełne uplastycznienie przekrojów, k_1 i k_2 odpowiednio krzywizny głównych kierunków ortotropii, A pole powierzchni płyty, δV_n pracę wzdłuż linii nieciągłości odkształceń (linii załomów), p obciążenie na jednostkę pola powierzchni płyty oraz w przemieszczenie przygotowane w dowolnym punkcie płyty.

Warto zaznaczyć, że zamiast określić wyżej podanych, opartych na teorii odkształceń plastycznych, spotyka się również określenia występujące w teorii plastycznego płynięcia. Wtedy należałoby wprowadzić pojęcie szybkości przyrostów przemieszczeń, szybkości zmiany krzywizny, mocy dysypowanej sił wewnętrznych i zewnętrznych itd.



Rys. 2

3. Powierzchnia odkształcona w stanie granicznym

Moment łamiący zależy od wymiarów elementu zginanego i granicy plastyczności materiału, z jakiego wykonywany jest rozpatrywany element. Dla przekroju prostokątnego o wysokości h i szerokości l belki lub płyty wykonanej z materiału sztywno-plastycznego o granicy plastyczności Q_r

$$(3.1) \quad m_0 = \frac{1}{4} h^2 Q_r.$$

Podobnie dla płyty żelbetowej (zgodnie z obowiązującą normą)

$$(3.2) \quad m_0 = Q_r f_z r = R_m x r,$$

gdzie Q_r oznacza granicę plastyczności zbrojenia, f_z pole przekroju zbrojenia na jednostkę długości przekroju, r ramię wewnętrznego momentu, x wysokość strefy

ściskanej oraz R_m wytrzymałość betonu na ściskanie przy zginaniu.

Moment łamiący dla płyty o szerokości b , $M = bm_0$, gdzie m_0 jest określone zgodnie z (3.1) lub (3.2).

Zajmiemy się płytami, w których jednostkowe momenty łamiące są funkcjami położenia

$$(3.3) \quad m_y = m_0 f(x), \quad m_x = m_0 g(y).$$

Układ momentów przedstawiony jest na rys. 3.

Z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że w płytach żelbetonowych

krzyżowo zbrojnych, w których rozkład zbrojenia nie jest równomierny, zmienność momentów łamiących określa funkcja (3.3).

W przypadku pełnego uplastycznienia płyty, w której rozkład jednostkowych momentów określają zależności (3.3), pracę sił wewnętrznych określa następująca całka:

$$(3.4) \quad V = \int \int_A \left[m_x(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_y(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy.$$

Wzór (3.4) wyprowadzono przy założeniu małych ugięć bez uwzględnienia wpływu naprężeń stycznych na uplastycznienie przekroju oraz przy założeniu, że pod wpływem obciążenia powstają jedynie dodatnie momenty w płycie i krzywizna Gaussa w dowolnym punkcie płyty jest nieujemna.

Pracę sił zewnętrznych określamy w sposób następujący:

$$(3.5) \quad L = \int \int_A p w dx dy,$$

przy czym przez w oznaczono ugięcie płyty, przez p obciążenie ciągłe jednostkowe oraz przez A obszar całej rozpatrywanej płyty.

Stosując twierdzenie Greena możemy przekształcić całkę (3.4) na całkę krzywoliniową wzdłuż obwodu płyty:

$$(3.6) \quad V = - \int_C m_y(x) \frac{\partial w}{\partial y} dx - m_x(y) \frac{\partial w}{\partial x} dy.$$

Całka krzywoliniowa (3.6) przedstawia sumę iloczynów skalarnych wektora kąta obrotu w dowolnym punkcie obwodu płyty przez wektor momentu łamiącego.

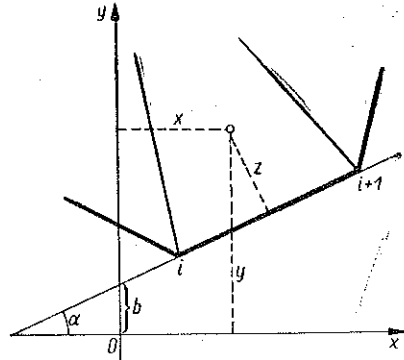
Możemy założyć, że dla określonej płyty pracującej w danych warunkach wyrażenie (3.6) jest określone i stałe, wobec tego

$$(3.7) \quad U = - \int_C m_y(x) \frac{\partial w}{\partial y} dx - m_x(y) \frac{\partial w}{\partial x} dy - \int_A p(-w) dA,$$

gdzie U oznacza pracę sił wewnętrznych i zewnętrznych. Funkcjonał ten osiąga minimum, gdy druga całka ma wartość największą. Ze względu na założenie nieujemnej krzywizny Gaussa nastąpi to przy największym ugięciu dostosowanym do założonych warunków brzegowych, a więc dla powierzchni prostokresłej.

Rozpatrując płytę w kształcie wielokąta możemy założyć, że powierzchnia odkształcona składa się z wielokątów płaskich. Jeżeli przez φ_i oznaczymy kąt nachylenia płaszczyzny przechodzącej przez bok $i, i+1$ wielokąta obwodu (rys. 4), to równanie jej jest następujące

$$(3.8) \quad w = \varphi_i(x \sin \alpha - y \cos \alpha + b \cos \alpha).$$



Rys. 4

Po uwzględnieniu (3.8) całka (3.6) na długości boku $i, i+1$ ma postać

$$(3.9) \quad V = \int_{i_i} \varphi_i m_\alpha ds,$$

przy czym

$$(3.10) \quad m_\alpha = m_y \cos^2 \alpha + m_x \sin^2 \alpha.$$

Pracę sił zewnętrznych (3.5) po uwzględnieniu (3.8) można przedstawić dla danej ściany powierzchni odkształconej w postaci iloczynu momentu statycznego S_i obciążenia danego pła względem boku płyty przez kąt obrotu ściany dookoła krawędzi

$$(3.11) \quad L_i = S_i \varphi_i.$$

Funkcję (3.7) można przedstawić w postaci

$$(3.12) \quad U = \sum_{i=1} \varphi_i \left(\int_{i_i} m_\alpha ds - S_i \right).$$

Warunek minimum daje

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = \int_{i_i} m_\alpha ds - S_i - \sum \frac{\partial S_i}{\partial \varphi_i} \varphi_i = 0.$$

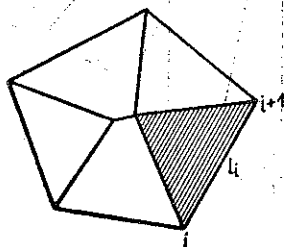
Ponieważ kąty obrotu φ_i są bardzo małe, możemy warunek minimum uprościć pomijając wyrazy zawierające φ_i , co prowadzi do równości

$$(3.13) \quad S_i = \int_{l_i} m_\alpha ds.$$

Jak więc widać, w stanie wyczerpania nośności granicznej powierzchnia odkształcona płyty w kształcie wielokąta musi spełniać warunek

$$(3.14) \quad \frac{S_1}{\int_{l_1} m_\alpha ds} = \dots = \frac{S_i}{\int_{l_i} m_\alpha ds} = \dots = \frac{S_n}{\int_{l_n} m_\alpha ds} = 1.$$

W przypadku płyty plastycznej jednorodnej i izotropowej



Rys. 5

$$\int_{l_i} m_\alpha ds = m_{gr} l_i;$$

i wtedy warunek (3.14) uprości się i można go przedstawić w formie

$$(3.15) \quad \frac{S_i}{l_i} = m_{gr} = \text{const}$$

podanej w pracy [12].

Z zależności (3.14) widać, że w przypadku płyt obciążonych siłą skupioną linie załamów muszą przechodzić przez punkt przyłożenia siły.

4. Płyta przegubowo zamocowana na obwodzie, obciążona siłą skupioną

Jak wynika z rozważań wyżej podanych, w przypadku obciążenia siłą skupioną linie załamów przebiegają od punktu przyłożenia siły do naroży płyty. Poszczególne płyty, na jakie podzieliły płytę linie załamów, pozostają płaskie.

Rozpatrzmy pracę wzdłuż linii załomu Oi w płycie pokazanej na rys. 6.

Nadajemy punktowi O , w którym jest przyłożona siła P , przemieszczenie prostopadłe do płyty. Powierzchnia odkształconama kształt powierzchni bocznej ostrosłupa o wysokości δw . Dwa sąsiednie płyty o wspólnej krawędzi Oi obróciły się w stosunku do siebie o kąt $\delta\varphi_i$, który można zastąpić jego tangensem ze względu na bardzo małe odkształcenia. Obliczymy ten kąt:

$$\delta\varphi_i = \frac{\delta w}{AO} + \frac{\delta w}{OB} = \frac{\delta w}{l_i} (\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i),$$

albo zapisując go w postaci wektora współliniowego z załomem Oi

$$\delta\vec{\varphi}_i = \frac{\delta w}{l_i} (\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i) (\vec{i} \cos \theta_i + \vec{j} \sin \theta_i).$$

Wektor momentu granicznego działającego na odcinek Δs linii załomu.

$$\Delta \bar{M} = m_y(x) \Delta x \bar{i} + m_x(y) \Delta y \bar{j},$$

gdzie \bar{i}, \bar{j} są to wektory jednostkowe skierowane wzdłuż osi Ox i Oy .

Praca sił wewnętrznych będzie równa całce liniowej

$$(4.1) \quad \delta V_i = \frac{\delta w}{l_i} (\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i) \int_{l_i} m_y(x) \cos \theta_i dx + m_x(y) \sin \theta_i dy,$$

którą można zapisać inaczej:

$$(4.2) \quad \delta V_i = \frac{\delta w}{l_i} (\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i) \int_{l_i} (m_y \cos^2 \theta_i + m_x \sin^2 \theta_i) ds.$$

Praca wzdłuż wszystkich linii załomów będzie równa sumie wyrazów (4.2) dla wszystkich załomów. Przystępując do przeliczenia tej wielkości do pracy sił zewnętrznych

$$(4.3) \quad \delta L = P \delta w$$

oraz wprowadzając oznaczenie

$$(4.4) \quad m_{\theta_i}(r, \theta_i) = m_y(x) \cos^2 \theta_i + m_x(y) \sin^2 \theta_i$$

obliczymy wielkość siły granicznej

$$(4.5) \quad P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} (\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i) \int_{l_i} m_{\theta_i} ds.$$

Należy pamiętać, że moment m_{θ_i} jest funkcją współrzędnych biegunowych r, θ_i i wobec tego nie można wyłączyć go przed całką. Jednocześnie wartość całki wzdłuż każdej linii jest inna.

Podane rozwiązania dla płyt wielokątnych można zastosować również do płyt ograniczonych liniami krzywymi, co wymaga jednak pewnych przekształceń wynikających z nieograniczonego wzrostu ilości boków.

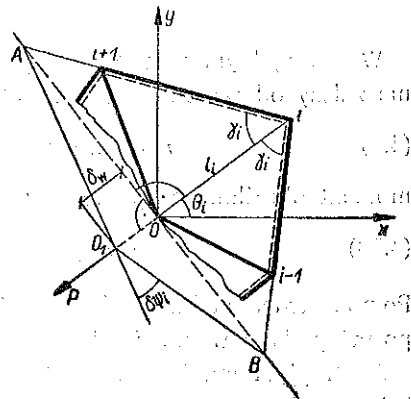
Jeżeli przekształcimy sumę $\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i$, tak jak to podane jest w pracy [11], to otrzymamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{ctg } \gamma_i + \text{ctg } \beta_i) = (1 + \text{ctg}^2 \gamma) \left(\frac{dy}{d\theta} + 1 \right).$$

Po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych ρ, θ i uwzględnieniu faktu, że γ jest kątem, jaki tworzy styczna do krzywej z promieniem wodzącym punktu styczności, obliczymy:

$$\text{ctg } \gamma = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2 + \rho'^2},$$

przy czym $\rho = \rho(\theta)$ jest równaniem obwodu płyty.



Rys. 6

Po podstawieniu obliczonych wielkości do (4.5) i zastąpieniu sumy przybliżonej przez całkę otrzymamy wielkość siły granicznej przyłożonej w początku układu współrzędnych:

$$(4.6) \quad P = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\varrho} \left(1 + 2 \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} - \frac{\varrho''}{\varrho} \right) \int_0^{\varrho} m_0 d\varrho \right] d\theta,$$

gdzie m_0 jest obwodowym momentem łamiącym,

$$(4.7) \quad m_0 = m_y(x) \cos^2 \theta + m_x(y) \sin^2 \theta,$$

który jest funkcją współrzędnych biegunowych $m_0 = m_0(\varrho, \theta)$. W przypadku płyty kołowej o promieniu a wyrażenie (4.6) uprości się do postaci

$$(4.8) \quad P = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^a m_0 d\varrho d\theta.$$

W szczególnym przypadku płyt ortotropowych, w których moment graniczny nie zależy od współrzędnych,

$$(4.9) \quad m_y = m_0 = \text{const}, \quad m_x = \kappa m_0 = \text{const},$$

moment określony za pomocą wzoru (4.4) uprości się do postaci

$$(4.10) \quad m_{\theta t} = m_0 (\cos^2 \theta_t + \kappa \sin^2 \theta_t).$$

Po podstawieniu tej wielkości do (4.5) obliczymy obciążenie graniczne, które przyjmie postać podaną w pracy [8].

Jeżeli płyta ma kształt n -kąta foremnego opisanego na okręgu koła, którego jeden z wierzchołków leży na osi Ox , to uwzględniając wartości

$$\theta_t = \frac{2\pi}{n} i, \quad \gamma_t = \beta_t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n},$$

otrzymamy

$$(4.11) \quad P_w = m(1+\kappa)n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Dla koła, tzn. gdy $n \rightarrow \infty$, obliczymy

$$(4.12) \quad P_k = \pi m (1+\kappa).$$

Jak łatwo zauważyć, stosunek obciążenia granicznego dla płyty kołowej P_k do obciążenia granicznego dla płyty w kształcie wielokąta foremnego opisanego na tym kole, równy jest stosunkowi pól koła A_k i wielokąta A_w ,

$$(4.13) \quad \frac{P_w}{P_k} = \frac{A_w}{A_k}.$$

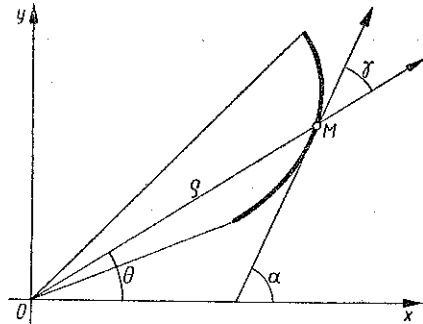
Podane wzory (4.10) i (4.13) można stosować jedynie w przypadku wielokąta o ilości boków większej od 4. Dla płyty trójkątnej podane zależności nie mają zastosowania, bowiem powstaną dodatkowe załomy ujemne, których tu nie uwzględniono. W przypadku płyty kwadratowej mogą powstać załomy ujemne, co zależy jednak od struktury płyty, a szczególnie od intensywności ortotropii.

5. Płyta utwierdzona na obwodzie

W przypadku utwierdzenia w płycie pozostają załomy ujemne, tzn. powstają linie uplastycznienia pod wpływem działania momentów ujemnych. Załomy ujemne mogą również powstać w płycie o krawędziach swobodnych i przegubowych w zależności od punktu przyłożenia siły. Przyjmujemy, że w płycie powstanie linia załomu ujemnego (rys. 7) o równaniu

$$(5.1) \quad \varrho = \varrho(\theta),$$

przy czym załom nie musi się pokrywać z obwodem utwierdzonym. Pracę sił wewnętrznych wzdłuż załomu ujemnego możemy obliczyć na podstawie (3.9). Załomy dodatnie przebiegają od punktu przyłożenia siły skupionej, tzn. od początku układu współrzędnych do załomu ujemnego. Wobec tego płaszczyzna styczna do powierzchni przechodzi przez tworzącą OM i styczną do krzywej w punkcie M . Kąt nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny xOy



Rys. 7

$$\varphi_i = \frac{\delta w}{\varrho \sin \gamma}.$$

Uwzględniając wartość

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varrho}{\varrho'}, \quad ds = \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2} d\theta,$$

możemy (3.9) przepisać w następującej postaci:

$$(5.2) \quad \delta V' = \delta w \int_0^{2\pi} m'_a \left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} \right) d\theta,$$

gdzie zgodnie z (3.10)

$$(5.3) \quad m'_a = m'_y \cos^2 \alpha + m'_x \sin^2 \alpha.$$

Występujące w powyższych wzorach wielkości m'_a , $m'_y(x)$ oraz $m'_x(y)$ oznaczają momenty łamiące ujemne (ich wartości bezwzględne). Uwzględniając w bilansie

prac sił zewnętrznych i wewnętrznych prace wzdłuż załomów radialnych i ujemnych otrzymamy wielkość obciążenia granicznego w postaci następującego funkcjonału:

$$(5.4) \quad P = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\rho} \left(1 + 2 \frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''}{\rho} \right) \int_0^{\rho} m_{\theta} d\rho + \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2} \right) m'_a \right] d\theta.$$

Przy rozważaniu płyt przegubowo zamocowanych albo ściślej płyt, w których nie powstają załomy ujemne, równanie $\rho = \rho(\theta)$ przedstawiało obwód płyty, a więc było to równanie dane. Natomiast w rozpatrywanym przypadku prowadzącym do zależności (5.4) równanie $\rho = \rho(\theta)$ określa załom ujemny, którego położenia nie znamy. Linię załomu ujemnego można wyznaczyć z warunku ekstremum funkcjonału w oparciu o równanie Eulera:

$$(5.5) \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \rho'} \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \rho''} \right) = 0.$$

Rozpatrzmy płytę ortotropową o następujących momentach łamiących:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} m_y &= m, & m'_y &= \kappa_1 m, \\ m_x &= \kappa m, & m'_x &= \kappa' \kappa_1 m, \end{aligned}$$

przy czym wszystkie wielkości m , κ , κ_1 i κ' są stałe na całym obszarze płyty. Jeżeli uwzględnimy zależności

$$a = \theta + \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = \rho/\rho'$$

i podstawimy (4.7), (5.3) oraz (5.6) do (5.4), to otrzymamy następujące wyrażenie na wielkość siły niszczącej:

$$(5.7) \quad P = m \int_0^{2\pi} \left\{ \kappa_1 \left[\frac{\rho'^2}{\rho^2} (\cos^2 \theta + \kappa' \sin^2 \theta) - \frac{\rho'}{\rho} (1 - \kappa') \sin 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa' \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right] + (\cos^2 \theta + \kappa \sin^2 \theta) \left(1 + 2 \frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''}{\rho} \right) \right\} d\theta.$$

Po obliczeniu pochodnych funkcji podcałkowej i podstawieniu do (5.5) otrzymamy równanie różniczkowe

$$(5.8) \quad \rho'^2 - \rho'' \rho + \frac{1 - \frac{\kappa + \kappa' \kappa_1}{1 + \kappa_1}}{\cos^2 \theta + \frac{\kappa + \kappa' \kappa_1}{1 + \kappa_1} \sin^2 \theta} (\rho' \rho \sin 2\theta + \rho^2 \cos 2\theta) = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(5.9) \quad \eta = \sqrt{\frac{1 + \kappa_1}{\kappa + \kappa' \kappa_1}} = \sqrt{\frac{m_y + m'_y}{m_x + m'_x}}$$

możemy napisać całkę ogólną równania (5.8) w postaci

$$(5.10) \quad e = \frac{A^2}{\sqrt{\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\eta^2}}} e \exp [C_1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/\mu)] \operatorname{tg} \theta,$$

gdzie A i C są stałymi całkowania. Równanie (5.10) przedstawia rodzinę spiral.

W warunkach pełnej symetrii kształtu i struktury płyty utwierdzonej względem prostej przechodzącej przez punkt przyłożonej siły P , krzywa musi być również symetryczna względem tej prostej. Ze względu na przyjętą strukturę osi symetrii może być jedynie prosta równoległa do jednej z osi współrzędnych, co pociąga za sobą warunek $C_1 = 0$. W tym przypadku linią załomu ujemnego jest elipsa, której półosie wynoszą

$$(5.11) \quad a = A, \quad b = a\eta.$$

Gdy siła działa w pobliżu brzegu utwierdzonego, to linia załomu będzie również pełną elipsą styczną do tego brzegu, siła niszcząca będzie równa

$$(5.12) \quad P = 2\pi m \sqrt{(1+\kappa_1)(\kappa+\kappa_1\kappa')}.$$

Jeżeli siła działa w pobliżu brzegu przegubowo zamocowanego, to linia załomu nie będzie krzywą zamkniętą, będzie ona przecinać brzeg płyty pod pewnym kątem zależnym od jego usytuowania oraz od współczynników charakteryzujących ortotropę płyty.

Rozwiązanie uprości się znacznie, jeżeli założyc

$$1+\kappa_1 = \kappa_1\kappa'+\kappa,$$

co po podstawieniu wielkości κ , κ_1 i κ' zgodnie z oznaczeniami (5.6) prowadzi do równości

$$(5.13) \quad m_x+m'_x = m_y+m'_y.$$

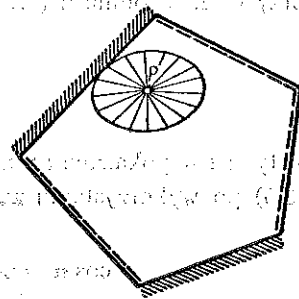
Przy takiej budowie płyty linią załomu będzie krzywa

$$(5.14) \quad e = Ae^{C\theta}$$

Równanie (5.14) przedstawia spirale logarytmiczne, a gdy $C = 0$, równanie okręgu koła. Z podanego wyżej rozwiązania widać, że jeżeli suma momentów łamiących przy załomach dodatnich i ujemnych dla każdego kierunku jest stała, to płyta zachowuje się jak izotropowa. Rozwiązanie dla przypadku płyty utwierdzonej, obciążonej siłą skupioną w pobliżu brzegu utwierdzonego jest następujące:

$$(5.15) \quad P = 2\pi m (1+\kappa).$$

Praktycznym przykładem płyt o strukturze (5.13) mogą być płyty żelbetowe, w których suma zbrojenia w warstwie górnej i dolnej dla każdego z dwóch prostopadłych



Rys. 8

kierunków jest stała. Przy dużej różnicy stosunków zbrojenia dolnego i górnego dla obu kierunków mogą oczywiście pozostać zakłócenia spowodowane zmianą ramienia wewnętrznego momentu.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wielkości (3.9) albo po przekształceniu (3.2) określono jako pracę sił wewnętrznych na obszarze uplastycznionym, a nie wzdłuż załomu obwodowego. Według tego samego wzoru można obliczyć pracę wzdłuż załomu ujemnego. Różnica w obu przypadkach sprowadza się do wartości momentów łamiących. Wyrażenie

$$(5.16) \quad \delta V = \delta w \int_0^{2\pi} m_k \left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} \right) d\theta$$

określa pracę na obszarze uplastycznionym, jeżeli m_k oznacza moment graniczny dodatni; jeżeli natomiast m_k jest momentem granicznym «ujemnym», to wyrażenie (5.16) określa pracę załomów ujemnych.

Z poprzednich rozważań wynika, że tę samą pracę na obszarze uplastycznienia wewnątrz linii załomu ujemnego określa prawa strona (4.6). Łatwo stąd zauważyć, że pociąga to za sobą równość

$$(5.17) \quad \frac{1}{\varrho} \left(1 + 2 \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} - \frac{\varrho''}{\varrho} \right) \int_0^{\varrho} m_\theta d\theta = \left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} \right) m_\alpha,$$

przy czym zgodnie z (3.10) i (4.10)

$$m_\alpha = m_y \cos^2 \alpha + m_x \sin^2 \alpha,$$

$$m_\theta = m_y \cos^2 \theta + m_x \sin^2 \theta;$$

kąty α i θ pokazane są na rys. 7. W przypadku ortotropii określonej związkami (5.6) po wykorzystaniu zależności pomiędzy kątami α , θ i γ

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \cos \alpha = \cos(\theta + \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\varrho' + \varrho'^2}} (\varrho' \cos \theta - \varrho \sin \theta), \\ \sin \alpha = \sin(\theta + \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} (\varrho \cos \theta + \varrho' \sin \theta), \end{aligned}$$

otrzymamy równanie

$$(5.19) \quad \varrho'^2 - \varrho'' \varrho + \frac{1 - \kappa}{\cos^2 \theta + \kappa \sin^2 \theta} (\varrho^2 \cos 2\theta + \varrho' \sin 2\theta) = 0.$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (5.19) jest identyczne z równaniem (5.8), jeżeli zastąpimy stosunek

$$\kappa = \frac{m_x}{m_y} \quad \text{przez} \quad \eta = \frac{m_x + m'_x}{m_y + m'_y}.$$

Uwzględniając poprzednie spostrzeżenia możemy (5.4) przepisać w innej postaci:

$$(5.20) \quad P = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\right) (m_\alpha + m'_\alpha) d\theta,$$

gdzie

$$(5.21) \quad \begin{aligned} m_\alpha &= m_y \cos^2 \alpha + m_x \sin^2 \alpha, \\ m'_\alpha &= m'_y \cos^2 \alpha + m'_x \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

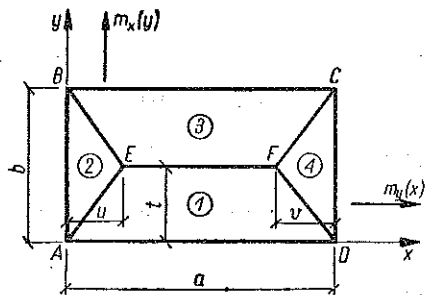
Po podstawieniu (5.21) i (5.18) do (5.20), otrzymamy

$$(5.22) \quad P = \int_0^{2\pi} \left[(m_y + m'_y) \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \cos \theta - \sin \theta \right)^2 + (m_x + m'_x) \left(\cos \theta + \frac{\varrho'}{\varrho} \sin \theta \right)^2 \right] d\theta.$$

Znając funkcję zmienności momentów łamiących, możemy wyznaczyć równanie linii załomu i obciążenie graniczne.

6. Płyta prostokątna z obciążeniem ciągłym

Wyznaczenie momentów łamiących czy też obciążenia granicznego wymaga wyznaczenia siatki linii załomów. Upraszczając nieco zagadnienie możemy przyjąć, że w przypadku płyty prostokątnej opartej przegubowo na obwodzie i obciążonej równomiernie zniszczenie nastąpi przy układzie linii załomów pokazanych na rys. 9. Położenie punktów węzłowych E i F określamy za pomocą parametrów u, v . Wielkości tych parametrów można wyznaczyć na podstawie zależności (3.14) lub wykorzystując wnioski z warunku (2.1).



Rys. 9

Zakładając, że istnieje symetria funkcji określających rozkłady momentów łamiących

(3.4) względem osi symetrii prostokąta $ABCD$, przy obciążeniu równomiernie rozłożonym na całym obszarze płyty, możemy z góry założyć

$$t = b/2, \quad u = v.$$

Pracę sił wewnętrznych obliczamy dla każdego płata oddzielnie, zakładając, że przemieszczenia δ w krawędzi EF są prostopadłe do płaszczyzny płyty:

$$\delta V_1 = \int_0^a m_y(x) \frac{\delta w}{b/2} dx, \quad \delta V_2 = \int_0^b m_x(y) \frac{\delta w}{u} dy.$$

Całkowita praca sił wewnętrznych

$$(6.1) \quad \delta V = 2(\delta V_1 + \delta V_2) = \frac{4\delta w}{b} \int_0^a m_y(x) dx + \frac{2\delta w}{u} \int_0^b m_x(y) dy.$$

Podobnie obliczamy pracę sił zewnętrznych

$$\delta L_1 = (\text{pole } AEFD) q \frac{y_0}{b/2} \delta w = \frac{1}{12} qb(3a - 4a) \delta w,$$

gdzie y_0 jest rzędną środka ciężkości trapezu oraz $\delta L_2 = qbu \delta w/6$.

Całkowita praca sił zewnętrznych

$$(6.2) \quad \delta L = 2(\delta L_1 + \delta L_2) = \frac{1}{6} qb(3a - 2u) \delta w.$$

Jeżeli wprowadzimy dodatkowe oznaczenia

$$(6.3) \quad M_x = \int_0^b m_x(y) dy, \quad M_y = \int_0^a m_y(x) dx, \quad \lambda = \frac{M_x}{M_y},$$

to po podstawieniu (6.1) i (6.2) do równania (2.3) obliczymy

$$(6.4) \quad q = \frac{12M_y}{b^2} \frac{2u+b}{u(3a-2u)}.$$

Obciążenie graniczne wyznaczmy jako minimum funkcji (6.4) ze względu na parametr u , co prowadzi do równania

$$(6.5) \quad 4u^2 + 4b\lambda u - 3ab\lambda = 0$$

oraz wartości parametru określającego siatkę zniszczenia

$$(6.6) \quad u = \frac{1}{2} b\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{3}{\beta\lambda}} - 1 \right).$$

Żeby wyznaczyć obciążenie graniczne płyty, należy wyznaczyć jednostkowe momenty łamiące, a następnie momenty «wypadkowe» zgodnie z (6.3), zastępując ewentualnie całkę przez sumę przybliżoną. Po wyznaczeniu wielkości u na podstawie (6.6) obliczamy obciążenie graniczne zgodnie z (6.4).

W przypadku konieczności zaprojektowania płyty należy obliczyć moment graniczny, co umożliwi wymiarowanie bez stosowania metody, którą można by nazwać kolejnymi przybliżeniami. Jak wynika z podanego rozwiązania wielkość obciążenia granicznego zależy nie tylko od momentów granicznych, ale i od ich stosunku. Korzystnie jest wobec tego podać dla orientacji, jaką wielkość λ przyjąć najlepiej. Przypuśćmy, że jako kryterium ekonomii przyjmiemy ogólną ilość stali

zbrojeniowej potrzebnej do zapewnienia właściwej nośności płyty. Ilość zbrojenia potrzebna dla każdego kierunku wynosi

$$f_x = \frac{M_x}{zQ_r}, \quad f_y = \frac{M_y}{zQ_r},$$

przy czym przyjmujemy z przybliżeniem, że ramię wewnętrznego momentu z jest jednakowe dla obu kierunków. Otrzymamy więc ogólną ilość zbrojenia (objętość)

$$(6.7) \quad \tilde{Z} = af_x + bf_y = \frac{ab}{zQ_r} \left(\frac{M_x}{b} + \frac{M_y}{a} \right) = \frac{ab}{zQ_r} M_y \left(\frac{\lambda}{b} + \frac{1}{a} \right).$$

Jeżeli podstawimy do (6.7) wartość M_y obliczoną z (6.4), a następnie wyznaczmy λ z (6.5) i podstawimy do (6.7), to w rezultacie otrzymamy

$$\tilde{Z} = \frac{qb}{24 zQ_r} (4au^2 - 4b^2 u + 3ab^2).$$

Z warunku minimum funkcji \tilde{Z} obliczymy

$$(6.8) \quad u = \frac{b^2}{2a}.$$

Wyznaczoną wartość u należy podstawić do (6.4) oraz do (6.3) i w ten sposób otrzymamy

$$(6.9) \quad M_x = \int_0^b m_x(y) dx = \frac{1}{24} qa^2 b\beta^4,$$

$$M_y = \int_0^a m_y(x) dy = \frac{1}{24} qab^2 (3 - 2\beta^2).$$

Podane wzory (6.9) pozwalają wyznaczyć momenty M_x i M_y , które są uzasadnione ekonomicznie i dają najmniejsze zużycie materiału.

Nośność płyty nie zależy od sposobu rozmieszczenia zbrojenia danego kierunku, co bezpośrednio wynika np. ze wzorów (6.9), a jedynie od ogólnej jego ilości. Najkorzystniej jest więc zaprojektować taki rozkład armatury, który zapewniłby możliwie najdłuższą pracę płyty w stanie sprężystym. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia jest trudne ze względu na założenie niejednorodności i ortotropii.

Dla celów praktycznych podamy tu rozwiązanie przybliżone. Przyjmiemy więc

$$(6.10) \quad m_x(y) = m \sin \frac{\pi y}{b}, \quad m_y(x) = m \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Podstawiając (6.10) do (6.9) obliczymy

$$(6.11) \quad m = \frac{qb^2}{48} \pi (3 - 2\beta^2).$$

Największy moment jednostkowy (6.11) w środku płyty jest większy od momentu średniego,

$$\frac{m_{\max}}{m_{s'r}} = \frac{\pi}{2},$$

w przedziale $0 \leq x \leq 0,22 a$ oraz $0,78 a \leq x \leq a$ zbrojenie powinno być mniejsze od średniego, a w obszarze środkowym większe. Jak łatwo obliczyć, na tych dwóch skrajnych częściach płyty potrzeba orientacyjnie około 22% ogólnej ilości zbrojenia dla danego kierunku, pozostałe 78% należy rozłożyć w części środkowej. Praktycznie można przyjąć, że w pasach szerokości $a/5$ przy brzegach należy dać połowę tego, co wypadaloby przy równomiernym rozłożeniu zbrojenia, a pręty odjęte należy dodać w środkowym odcinku.

7. Zakończenie

Obliczenie rozkładu sił wewnętrznych w płytach na podstawie teorii nośności granicznej jest zagadnieniem łatwiejszym od analogicznego zagadnienia w stanie sprężystym.

Należy przypomnieć, że były przeprowadzone badania doświadczalne, które z dużą dokładnością potwierdziły słuszność założeń metody nośności granicznej. Zagadnieniu temu poświęcona jest praca [9], w której są opisane badania dotyczące płyt izotropowych i ortotropowych.

Dla przykładu warto podać kilka wyników z cytowanej pracy, dotyczących płyt ortotropowych, prostokątnych.

Wielkości obciążenia łamiącego w T przy różnej intensywności ortotropii:

obliczone dla obciążenia ciągłego	36,5	33,1	31,1	27,1	43,0
obliczone dla układu sił skupionych	33,8	29,3	27,6	27,5	46,2
z doświadczenia	35,0	31,0	29,0	28,0	48,0

Przy badaniach obciążenie płyt żelbetowych zrealizowano przez działanie szeregu pras hydraulicznych ustawionych możliwie gęsto. Ten rodzaj obciążenia nie odpowiada ściśle ani schematowi obciążenia równomiernie rozłożonego, ani obciążenia siłami skupionymi.

Schemat obciążeń w czasie doświadczeń był pośredni pomiędzy obu schematami obliczeniowymi i w trzech przypadkach obciążenia łamiące uzyskane na drodze eksperymentalnej zawarte są pomiędzy odpowiednimi wynikami obliczeniowymi.

Wydaje się, że ze względu na łatwość i zgodność wyników doświadczalnych z teoretycznymi teoria nośności granicznej powinna być bardziej spopularyzowana. Pierwszym krokiem na tej drodze jest uwzględnienie tego działu, praktycznego zastosowania teorii plastyczności, w programach nauczania na pewnych specjalnościach w Politechnice Warszawskiej.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. A. BAŁADIN, I. I. GOLDIENBLAT, W. M. KACZENOW, M. I. PILDISZ, K. E. TAL, *Obliczanie konstrukcji budowlanych metodą stanów granicznych*, (tłum. z ros.), Warszawa 1955.
- [2] J. M. КАГАНОВ, *Основы теории пластичности*, Москва 1956.
- [3] J. MUTERMILCH, E. OLSZEWSKI, M. ŁUBIŃSKI, *Wymiarowanie konstrukcji stalowych, nowe metody*, Bud. i Arch., 1956.
- [4] D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna prostokątnych płyt ortotropowych*, Zesz. Nauk. PW, Bud. 6, 1956.
- [5] D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt kołowo-symetrycznych*, Inż. Bud. (w druku).
- [6] W. OLSZAK, *Zasada ekstremalna w teorii nośności granicznej płyt i jej analogia do zagadnień stanów granicznych geodynamiki*, Z. Nauk. PW, Bud., 1956.
- [7] W. OLSZAK, *O podstawach teorii ciał elastoplastycznych niejednorodnych*, cz. I, Arch. Mech. Stos., 3 (1954); cz. II, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).
- [8] W. OLSZAK, *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos., 3 (1953).
- [9] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Teoria stanów granicznych w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozpr. Inżyn., (1955).
- [10] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Stuttgart 1955.
- [11] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Москва 1949.
- [12] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Предельное равновесие железобетонных пластинок*, Изв. АН СССР, ОТН., 12 (1958).
- [13] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Предельное равновесие прямоугольной пластинки при действии сосредоточенной силы, приложенной в любой точке*. Исследования по вопросам теории пластичности и прочности строительных конструкций.
- [14] А. SAWCZUK, *Teoria stanów granicznych płyt plastycznie ortotropowych i niejednorodnych oraz jej zastosowania w technice*, praca kandydacka, Warszawa 1958.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКИЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ПЛАСТИНКИ В СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ

Несущую способность пластинки можно определить, рассматривая рассеянную мощность внутренних сил и мощность внешних сил соответствующих полю скорости приращений перемещений. Основываясь же на теории пластических деформаций можно, для определения несущей способности, опираться на понятие работы внешних и внутренних сил.

Поиск соответственной деформированной поверхности сводится к задаче определения минимума внешних и внутренних сил. На основании проведенного анализа для неоднородных и ортотропных пластинок в пластическом состоянии, доказывается, что при принятых предположениях деформированная поверхность является поверхностью с прямолинейными образующими. Автор основывается при этом на условии пластичности, представляющим прямоугольник в системе главных моментов и принятию жестко-пластической модели тела.

Дается решение для шарнирно закрепленной пластинки и защемленной по окружности. На основании вариационного исчисления ищется соответствующая форма линии отрицательного излома. Решением задачи является семейство кривых (5.2.5). Работа внутренних сил вдоль отрицательного излома и внутренней области будет выражаться подобными интегралами, разняющимися лишь значениями разрушающих моментов.

Полученные результаты, применяются в случае многоугольной пластинки, нагруженной сосредоточенной силой и для прямоугольной пластинки, находящейся под действием равномерной нагрузки.

Summary

PLASTICALLY NON-HOMOGENEOUS AND ORTHOTROPIC PLATES IN THE STATE OF DESTRUCTION

The limit load of a plate can be determined by considering the dissipation power of internal and external forces connected with the field of displacement rates. Making use of the theory of plastic strains work or displacement can be used.

The research of the correct form of the deflection surface reduces to the minimum problem of the total work of the internal and external forces. On the basis of an analysis for non-homogeneous and orthotropic plates in the plastic state it is shown that the deformed surface should be rectilinear. The yield condition used for this purpose is represented by a rectangle in the system of principal moments. Rigid-plastic properties are assumed.

Solutions are given for a plate on hinged support and clamped along the contour. The correct form of the negative crack lines is sought by means of the variational calculus. The family of curves (5.2.5) constitutes the solution of the problem. The works of the internal forces along a negative crack and in an internal region are expressed by similar integrals differing merely by the value of the collapse moment.

The results are applied to a polygonal plate loaded by a concentrated force and a rectangular plate loaded by a uniformly distributed force.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1962 r.