

HENRYK CZUDEK

**PIERŚCIEŃ KOŁOWY DLA PEWNEGO SZCZEGÓLNEGO
PRZYPADKU OBCIĄŻENIA**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXIII**

TOM X · ZESZYT 3 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

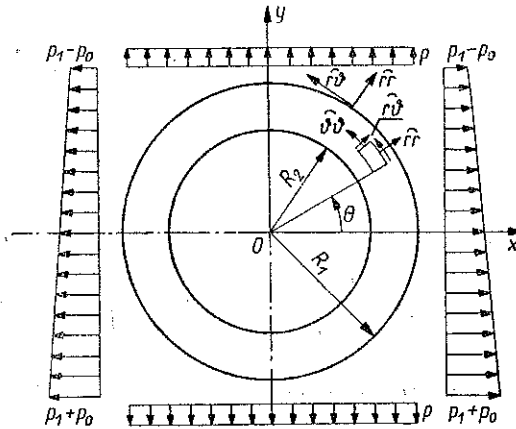
1. Wiadomości wstępne	499
2. Rozwiązanie ogólne	499
3. Rozwiązanie szczególne	501
4. Przykład	512

1. Wiadomości wstępne

Celem pracy jest wyznaczenie naprężeń panujących w pierścieniu grubościennym, na który działa obciążenie pionowe równomiernie rozłożone wzdłuż rzutu poziomego oraz boczne w postaci parcia poziomego o rozkładzie trapezowym.

Sposób obciążenia oraz przyjęte oznaczenia widoczne są na rys. 1. Rodzaj przyjętych obciążeń do rozważań odpowiada w przybliżeniu założeniom pracy rury składającej się z poszczególnych segmentów o nieznaczącej długości i ułożonej w ziemi. Wynik rozważań może więc być z powodzeniem stosowany np. przy obliczaniu grubościennego przepustu rurowego o przekroju kołowym.

Postawione w taki sposób zadanie stanowi treść tzw. statycznego zagadnienia teorii sprężystości dla pierścienia kołowego. Uzyskane rozwiązanie ma zastosowanie dla dowolnego stosunku promienia wewnętrznego do zewnętrznego, pozwala więc na wyznaczanie naprężeń również w tych przypadkach, gdy obliczenie według zasad wytrzymałości materiału daje wartości zbyt niedokładne nawet dla celów projektowania.



Rys. 1

2. Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne dla pierścienia kołowego znane jest już od dłuższego czasu. Wymienić tutaj można prace [1], [2], [3], [4], [5] i [6]. Brak jest natomiast efektywnych rozwiązań szczegółowych. W ostatnim czasie ukazała się praca [7], podająca rozwiązanie pierścienia kołowego dla pionowego obciążenia, rozłożonego równomiernie wzdłuż rzutu poziomego. Wyniki otrzymano w [7] przez wprowadzenie rzeczywistej funkcji naprężeń w układzie współrzędnych biegunowych. Wcześniejsza jest praca [8].

Rozwiązanie zagadnienia statycznego dla pierścienia kołowego przy zastosowaniu funkcji zmiennej zespolonej polega na wyznaczeniu dwóch funkcji analitycznych wewnątrz obszaru pierścienia. Powyższe funkcje mogą być przedstawione za pomocą szeregu Laurent'e'a, zaś współczynniki rozwinięcia wyznaczyć można z warunków brzegowych zagadnienia. Jest to sposób postępowania bezpośredni, podany np. w pracy [1]. Możliwe jest również zastąpienie bezpośredniego wyznaczania współczynników rozkładu obliczeniem pewnych całek określonych. Taki sposób podają prace [2] i [3]. W zasadzie obie wyżej podane metody postępowania są sobie równoważne.

Przy nieciągłym wzdłuż obwodu pierścienia rozkładzie obciążeń celowe jest na ogół stosowanie sposobu bezpośredniego wyznaczania współczynników rozkładu poszukiwanych funkcji w szereg Laurent'e'a.

Dla niektórych innych rodzajów obciążeń sposób F. Szelałgowskiego, [3], prowadzić może do znalezienia zamkniętych postaci rozwiązania, bowiem poszukiwane funkcje zespolone mają postać

$$(2.1) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(\sigma_R + i\tau_R) d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2(\sigma_R + i\tau_R) M d\gamma - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2(\sigma_e + i\tau_e) N d\delta + C,$$

$$(2.2) \quad F(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu) d\gamma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu) M d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(w) N d\delta + D,$$

gdzie M i N związane są z funkcjami Jacobiego za pomocą wzorów

$$(2.3) \quad M = \frac{iK}{\pi} \frac{\vartheta_4'(t)}{\vartheta_4(t)},$$

$$(2.4) \quad N = \frac{iK}{\pi} \frac{\vartheta_4'(t)}{\vartheta_4(t)}.$$

Bliższe wyjaśnienie użytych w (2.1)-(2.4) oznaczeń podaje praca [3].

Dla efektywnego rozwiązania postawionego w pracy zagadnienia użyto ze względu na istnienie nieciągłego obciążenia zewnętrznego sposobu bezpośredniego znajdowania współczynników rozkładu w szereg Laurent'e'a, zachowując oznaczenia podane w [1]. Naturalnie możliwe jest automatyczne przejście do oznaczeń F. Szelałgowskiego, zgodnie ze wzorami

$$(2.5) \quad F_{Sz}(z) = -2i\Psi_M(z),$$

$$(2.6) \quad \Phi_{Sz}(z) = 4\Phi_M,$$

gdzie wskaźnik dolny M odpowiada oznaczeniom stosowanym w pracy [1], zaś wskaźnik dolny Sz oznaczeniom zgodnie z [3]. Jak wiadomo, sposób bezpośredniego znajdowania współczynników rozkładu w szereg Laurent'a prowadzi do podstawowego równania

$$(2.7) \quad \widehat{rr} - i\widehat{r}\widehat{\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta} [\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} A'_k e^{ik\theta} & \text{na } L_1, \\ \sum_{-\infty}^{\infty} A''_k e^{ik\theta} & \text{na } L_2. \end{cases}$$

Funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ przyjmujemy w postaci

$$(2.8) \quad \Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

$$(2.9) \quad \Psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a'_k z^k.$$

Występujące w prawej części równania (2.7) współczynniki A'_k oraz A''_k są to współczynniki rozkładu zewnętrznego obciążenia zespolonego $\widehat{rr} - i\widehat{r}\widehat{\vartheta}$ na obwodzie L_1 oraz L_2 . Podstawiając zależności (2.8) i (2.9) w (2.7) oraz spełniając dodatkowy warunek ciągłości odkształceń wypisać można wzory na współczynniki a_k i a'_k . Podaje je praca [1]. Po wyznaczeniu poszukiwanych współczynników a_k i a'_k można z (2.10) i (2.11) obliczyć naprężenia panujące w dowolnym punkcie pierścienia:

$$(2.10) \quad \widehat{\vartheta\vartheta} - \widehat{rr} + 2i\widehat{r}\widehat{\vartheta} = 2e^{2i\theta} [\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

$$(2.11) \quad \widehat{rr} + \widehat{\vartheta\vartheta} = 4\text{Re } \Phi(z).$$

3. Rozwiązanie szczególne

Rozpatrzmy najpierw obciążenie pionowe rozłożone równomiernie wzdłuż rzutu poziomego.

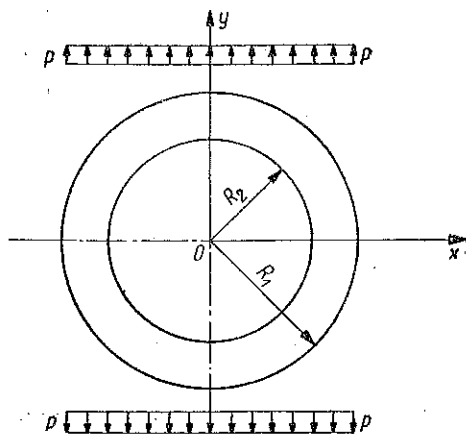
Sposób obciążenia rozpatrywanego przypadku pokazano na rys. 2. Jak łatwo sprawdzić, obciążenie zewnętrzne na obwodzie L_1 przedstawić można w sposób następujący:

$$(3.1) \quad \widehat{rr} = p \sin^2 \theta \quad \text{na } L_1,$$

$$(3.2) \quad \widehat{r\vartheta} = \frac{1}{2} p \sin 2\theta \quad \text{na } L_1.$$

Współczynniki rozkładu $\widehat{rr} - i\widehat{r\theta}$ na obwodach L_1 i L_2 w zespolony szereg Fouriera można więc określić bezpośrednio z tych warunków:

$$(3.3) \quad A_k'' = 0, \quad A_0' = \frac{p}{2}, \quad A_2' = -\frac{p}{2}, \quad A_k' = 0, \quad k \neq 0, 2.$$



Rys. 2

Zależności (2.7), (2.8), (2.10) i (3.3) prowadzą do następujących wielkości poszukiwanych współczynników:

$$a_0 = \frac{R_1^2 p}{4(R_1^2 - R_2^2)},$$

$$a_2 = \frac{3p R_1^2 R_2^2}{2[3R_1^2 R_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^6 - R_2^6)]},$$

$$a_{-2} = \frac{(R_1^6 - R_2^6) R_1^2 R_2^2 p}{2[3(R_1^2 - R_2^2) R_1^2 R_2^2 - (R_1^6 - R_2^6)](R_1^2 - R_2^2)},$$

$$a_{-2}' = \frac{p}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)},$$

$$a_0' = \frac{R_1^2 p [3R_2^4 (R_1^2 - R_2^2) + (R_1^6 - R_2^6)]}{2[3(R_1^2 - R_2^2) R_1^2 R_2^2 - (R_1^6 - R_2^6)](R_1^2 - R_2^2)},$$

$$a_{-4}' = \frac{3R_1^4 R_2^4 (R_1^2 + R_2^2)}{2[3(R_1^2 - R_2^2) R_1^2 R_2^2 - (R_1^6 - R_2^6)]}.$$

Pozostałe współczynniki równe są zeru.

Wyznaczywszy współczynniki rozkładu funkcji $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ w szereg Laurent'e'a możemy zgodnie z (2.8) i (2.9) podać powyższe funkcje w następującej postaci:

$$(3.4) \quad \Phi(z) = \frac{R_1^2 p}{4(R_1^2 - R_2^2)} + \frac{3p R_1^2 R_2^2}{2[3R_1^2 R_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^6 - R_2^6)] z^2} - \frac{(R_1^6 - R_2^6) R_1^2 R_2^2 p}{2[3R_1^2 R_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^6 - R_2^6)] (R_1^2 - R_2^2) z^2}$$

$$(3.5) \quad \Psi(z) = -\frac{R_1^2 p [3R_2^4 (R_1^2 - R_2^2) + (R_1^6 - R_2^6)]}{2[3R_1^2 R_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^6 - R_2^6)] (R_1^2 - R_2^2)} + \frac{p R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 - R_2^2) z^2} + \frac{3R_1^4 R_2^4 (R_1 + R_2)}{2[3R_1^2 R_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^6 - R_2^6)] z^4}$$

Podane wyżej funkcje w zasadzie stanowią już rozwiązanie zagadnienia, gdyż dla dowolnego punktu obszaru pierścieniowego pozwalają wyznaczyć naprężenia. Dla celów praktyki obliczeniowej wygodne jest jednak czasem posiadanie bezpośrednich wzorów na naprężenia w postaci rzeczywistej. Można również zbudować wyrażenie określające wielkości momentów zginających, sił normalnych oraz sił poprzecznych dla grubościennego pierścienia kołowego, a więc wielkości, do których projektujący jest przyzwyczajony. Należy jednak zaznaczyć, iż gdy chodzi o określenie stanu naprężeń w kilku tylko punktach, to najwygodniej jest posługiwać się bezpośrednio formą zespoloną (3.4) i (3.5) oraz (2.10) i (2.11).

W celu określenia wielkości naprężeń \widehat{rr} , $\widehat{\vartheta\vartheta}$ oraz $\widehat{r\vartheta}$, panujących w pierścieniu kołowym pod wpływem danego obciążenia, można posłużyć się wzorami (2.10) i (2.11), gdyż funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ można już uważać za znane. Podstawiając $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ z (3.4) i (3.5) oraz dokonując przekształceń, otrzymamy wzory

$$(3.6) \quad \widehat{rr} = 2a_0 - \frac{a'_{-2}}{r^2} + \left(-a'_0 - \frac{a'_{-4}}{r^4} + \frac{4a_{-2}}{r^2} \right) \cos 2\vartheta,$$

$$(3.7) \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = 2a_0 + \frac{a'_{-2}}{r^2} + \left(a'_0 + 4a_2 r^2 + \frac{a'_{-4}}{r^4} \right) \cos 2\vartheta,$$

$$(3.8) \quad \widehat{r\vartheta} = \left(a'_0 + 2a_2 r^2 + \frac{2a_{-2}}{r^2} - \frac{a'_{-4}}{r^4} \right) \sin 2\vartheta,$$

w których występują już wyłącznie zmienne rzeczywiste. Występujące w (3.6)-(3.8) współczynniki a'_k i a_k zostały już wyznaczone.

Znając naprężenia \widehat{rr} , $\widehat{\vartheta\vartheta}$ oraz $\widehat{r\vartheta}$ dla dowolnego punktu rozpatrywanego obszaru pierścieniowego łatwo jest napisać wzory na wielkość momentu zginającego, sił normalnych oraz sił poprzecznych. Siły wewnętrzne panujące w przekroju ϑ pierścienia przedstawić można w sposób następujący:

moment zginający względem okręgu środkowego pierścienia

$$(3.9) \quad M = \int_{R_2}^{R_1} \widehat{\vartheta} \widehat{\vartheta} \left(r - \frac{R_1 + R_2}{2} \right) dr;$$

siła normalna

$$(3.10) \quad N = \int_{R_2}^{R_1} \widehat{\vartheta} \widehat{\vartheta} dr;$$

siła poprzeczna

$$(3.11) \quad Q = \int_{R_2}^{R_1} r \widehat{\vartheta} dr.$$

Wykonując odpowiednie działania otrzymuje się wielkości sił wewnętrznych:

$$(3.12) \quad N = \int_{R_2}^{R_1} \left[2a_0 + \frac{a'_{-2}}{r^2} + \left(a'_0 + 4a_2 r^2 + \frac{a'_{-4}}{r^4} \right) \cos 2\vartheta \right] dr = 2a_0(R_1 - R_2) -$$

$$- \frac{a'_{-2}}{R_1 - R_2} + \left[(R_1 - R_2) a'_0 + \frac{4}{3} a_2 (R_1^3 - R_2^3) - \frac{a'_{-4}}{3(R_1^3 - R_2^3)} \right] \cos 2\vartheta;$$

$$(3.13) \quad M = \int_{R_2}^{R_1} \left[2a_0 + \frac{a'_{-2}}{r^2} + \cos 2\vartheta \left(a'_0 + 4a_2 r^2 + \frac{a'_{-4}}{r^4} \right) \right] r dr - \frac{N(R_1 + R_2)}{2} =$$

$$= a_0 (R_1^2 - R_2^2) + a'_{-2} \ln (R_1 - R_2) +$$

$$+ \cos 2\vartheta \left[a'_0 \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{2} + a_2 (R_1^4 - R_2^4) - \frac{a'_{-4}}{2(R_1^2 - R_2^2)} \right] - \frac{(R_1 + R_2)}{2} N.$$

Występujące we wzorach (3.12) i (3.13) współczynniki rozkładu zostały uprzednio określone.

Rozpatrzmy z kolei obciążenie pionowe o zmienności liniowej wzdłuż rzutu poziomego pierścienia.

Sposób obciążenia rozpatrywanego przypadku pokazano na rys. 3. Należy obciążenie zewnętrzne na obwodzie L_1 przedstawić w postaci

$$(3.14) \quad \widehat{rr} = p_0 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \text{na } L_1,$$

$$(3.15) \quad \widehat{r\vartheta} = p_0 \sin \theta \cos^2 \theta \quad \text{na } L_1.$$

W celu wyznaczenia współczynników rozkładu w szereg zespolony Fouriera obciążenia zespolonego $\widehat{rr} - i \widehat{r\vartheta}$ na obwodzie L_1 wyznaczmy wpieryw powyższe współczynniki kolejno dla naprężeń \widehat{rr} oraz $\widehat{r\vartheta}$, a następnie utworzymy wyrażenie

$\widehat{rr} - i\widehat{r}\widehat{\vartheta}$. Przy obliczaniu współczynników szeregu zespolonego posługiwać się będziemy znanymi zależnościami

$$(3.16) \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$(3.17) \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n),$$

$$(3.18) \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n),$$

łączącymi wyrazy szeregu zespolonego z wyrazami szeregów rzeczywistych Fouriera.

W zależnościach (3.16)-(3.18) a_n oraz b_n oznaczają współczynniki szeregu rzeczywistego Fouriera. Funkcja \widehat{rr} na L_1 daje się przedstawić w postaci

$$(3.19) \quad \widehat{rr}_{naL_1} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos n\theta.$$

Współczynniki a_n

$$(3.20) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{rr} \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_0 \cos \theta \sin^2 \theta \cos n\theta \, d\theta$$

określone są za pomocą wzoru

$$(3.21) \quad a_n = \frac{p_0}{\pi} D_n - \frac{p_0}{\pi} B_n.$$

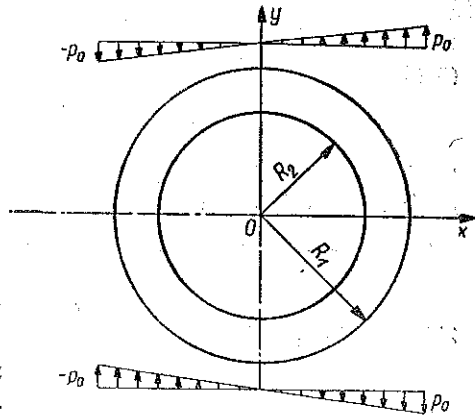
Występujące w tym równaniu współczynniki są odpowiednio równe

$$(3.22) \quad D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \cos n\theta \, d\theta,$$

$$(3.23) \quad B_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 \theta \cos n\theta \, d\theta.$$

Należy więc wyznaczyć powyższe całki określone. Całkę B_n obliczymy dla wskaźników parzystych ($n = 2k$) oraz nieparzystych ($n = 2k+1$). Całkę B_{2k} przedstawić można w postaci

$$(3.24) \quad B_{2k} = (-1)^{2k} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 \theta \, d\theta + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{4jk^2 [4k^2 - 2^2] \dots [4k^2 - (2j - 2)^2]}{(2j)!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+3} \theta \, d\theta \right\}.$$



Rys. 3

Występująca w (3.24) całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+3} \theta d\theta$ równa jest zeru:

$$(3.25) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+3} \theta d\theta = \left[\frac{1}{2^{2j}} \sum_{k=0}^j \binom{2j+1}{k} \frac{\sin(2j-2k+1)\theta}{(2j-2k+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ponieważ również całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 \theta d\theta = 0$, więc przy każdym wskaźniku parzystym $n = 2k$ całka $B_{2k} = 0$.

Całkę B_{2k+1} przedstawić można w postaci

$$(3.26) \quad B_{2k+1} = (-1)^k (2k+1) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 \theta d\theta + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{[(2k+1)^2 - 1^2][(2k+1)^2 - 3^2] \dots [(2k+1)^2 - (2j-1)^2]}{(2j+1)!} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+4} \theta d\theta \right\} = (-1)^k (2k+1) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 \theta d\theta + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+4} \theta d\theta \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\}.$$

Występujące w (3.26) całki określone są odpowiednio równie

$$(3.27) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} 2\pi = \frac{3!!}{2 \cdot 2!} \pi = \frac{3}{4} \pi,$$

$$(3.28) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+4} \theta d\theta = \frac{\pi}{2^{2j+3}} \binom{2j+4}{j+2} = \frac{(2j+3)!!}{2^{j+1} j!} \pi.$$

Podstawiając (3.27) i (3.28) w (3.26) otrzymamy ostateczny wzór określający współczynniki (całki) B_{2k+1} :

$$(3.29) \quad B_{2k+1} = \pi (-1)^k (2k+1) \times \\ \times \left\{ \frac{3}{4} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)! 2^{2j+3}} \binom{2j+4}{j+2} \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\}.$$

W podobny sposób wyznaczono całkę D_n .

Jak łatwo się przekonać całka $D_{2k} = 0$. Do wyznaczenia pozostaje więc tylko całka D_{2k+1} , przy czym

$$(3.30) \quad D_{2k+1} = (-1)^k (2k+1) \times \\ \times \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+2} \theta d\theta \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\}.$$

Występujące w (3.30) całki określone są odpowiednio równie:

$$(3.31) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\pi}{2^2} \binom{2}{1} = \pi,$$

$$(3.32) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2j+2} \theta d\theta = \frac{2\pi}{2^{2j+2}} \binom{2j+2}{j+1} = \frac{\pi}{2^{2j+4}} \binom{2j+2}{j+1}.$$

Po podstawieniu (3.31) i (3.32) w (3.30) otrzymamy ostateczny wzór określający współczynniki D_{2k+1} :

$$(3.33) \quad D_{2k+1} = \pi (-1)^k (2k+1) \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)! 2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1} \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\}.$$

Współczynnik rozkładu naprężeń \widehat{rr} na obwodzie L_1 w rzeczywisty szereg Fouriera wyznaczmy zgodnie z (3.21) posługując się wzorami ogólnymi (3.29) oraz (3.33). Można się przekonać, że różne od zera są jedynie następujące całki określone;

$$B_1 = \frac{3}{4} \pi, \quad B_3 = \frac{\pi}{4}, \quad D_1 = \pi.$$

Różne od zera będą również tylko współczynniki a_1 oraz a_3 . Ostatecznie więc rozkład naprężenia \widehat{rr} na L_1 w rzeczywisty szereg Fouriera sprowadza się do funkcji

$$(3.34) \quad \widehat{rr}_{naL_1} = p_0 \cos \theta \sin^2 \theta = \frac{p_0}{4} \cos \theta - \frac{p_0}{4} \cos^3 \theta,$$

gdź

$$a_1 = \frac{\pi p_0}{\pi} \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{p_0}{4}, \quad a_3 = \frac{\pi p_0}{\pi} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{p_0}{4}.$$

Funkcje $\widehat{r\vartheta}$ na L_1 można przedstawić w postaci

$$(3.35) \quad \widehat{r\vartheta}_{naL_1} = \sum_1^{\infty} b_n \sin n\theta.$$

Współczynniki b_n z równania (3.35) są równe

$$(3.36) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{r\vartheta} \sin n\theta \, d\theta = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_0 \sin \theta \cos^2 \theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{p_0}{\pi} E_n - \frac{p_0}{\pi} F_n,$$

przy czym

$$(3.37) \quad E_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \sin n\theta \, d\theta,$$

$$(3.38) \quad F_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \theta \sin n\theta \, d\theta.$$

Postępując podobnie jak poprzednio otrzymuje się następujące wartości całek E_n oraz F_n :

$$(3.39) \quad E_{2k} = F_{2k} = 0,$$

$$(3.40) \quad E_{2k+1} =$$

$$= (2k+1) \left\{ \frac{1}{2^2} \binom{2}{1} 2\pi + \pi \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)! 2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1} \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\} = \\ = \pi (2k+1) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)! 2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1} \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\},$$

$$(3.41) \quad F_{2k+1} =$$

$$= \pi (2k+1) \left\{ \frac{3}{4} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)! 2^{2j+3}} \binom{2j+4}{j+2} \prod_{i=1}^j [(2k+1)^2 - (2i-1)^2] \right\}.$$

Współczynniki rozkładu naprężeń $\widehat{r\vartheta}$ na obwodzie L_1 w rzeczywisty szereg Fouriera wyznaczyć można zgodnie z (3.35), posługując się przy tym wzorami (3.39)-(3.41). Różne od zera są jedynie współczynniki b_1 oraz b_3 :

$$b_1 = \frac{p_0}{\pi} \pi - \frac{p_0}{\pi} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{p_0}{4},$$

$$b_3 = \frac{p_0}{\pi} \cdot 0 - \frac{p_0}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{p_0}{4}.$$

Stąd funkcję $\widehat{r^\vartheta}$ na L_1 przedstawić więc można w sposób następujący:

$$(3.42) \quad \widehat{r^\vartheta}_{naL_1} = p_0 \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{p_0}{4} \sin \theta + \frac{p_0}{4} \sin^3 \theta.$$

Funkcję \widehat{rr} na L_1 można zgodnie z (3.16)-(3.18) przedstawić w postaci zespolonej, przy czym

$$(3.43) \quad c_1^{rr} = c_{-1}^{rr} = \frac{p_0}{8}, \quad c_3^{rr} = c_{-3}^{rr} = -\frac{p_0}{8}.$$

Podobnie również funkcja $\widehat{r^\vartheta}$ na L_1 może być przedstawiona w zespolonej postaci, przy czym

$$(3.44) \quad c_1^{r^\vartheta} = -c_{-1}^{r^\vartheta} = -\frac{ip_0}{8}, \quad c_3^{r^\vartheta} = -c_{-3}^{r^\vartheta} = -\frac{ip_0}{8}.$$

Posługując się wzorami (3.43) i (3.44) oraz (2.7) można wypisać współczynniki rozkładu w zespolony szereg Fouriera obciążenia zespolonego $\widehat{rr} - i\widehat{r^\vartheta}$ na obwodzie L_1 oraz L_2 :

$$(3.45) \quad \begin{cases} A_k'' = 0, \\ A_{-1}' = \frac{p_0}{8} - i\left(\frac{ip_0}{8}\right) = \frac{p_0}{4}, \\ A_3' = -\frac{p_0}{8} - i\left(-\frac{ip_0}{8}\right) = -\frac{p_0}{4}. \end{cases}$$

Wszystkie pozostałe współczynniki rozkładu równe są zeru. Wzory (2.7), (2.8), (2.9) i (3.45) pozwalają określić poszukiwane współczynniki a_k^* i $a_k^{*'}$:

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{p_0}{4} \frac{R_1^3}{(R_1^4 - R_2^4)}, \\ a_3^* &= \frac{p_0 R_1^3 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)}{8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)}, \\ a_{-3}^* &= -\frac{p_0 R_1^3 R_2^4 (R_1^8 - R_2^8)}{4 [8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)]}, \\ a_1^{*'} &= -\frac{p_0 R_1^3 [8R_2^6 (R_1^2 - R_2^2) + (R_1^8 - R_2^8)]}{4 [8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)]}, \\ a_{-3}^{*'} &= \frac{p_0}{4} \frac{R_1^3 R_2^4}{(R_1^4 - R_2^4)}, \\ a_{-5}^{*'} &= \frac{p_0 R_1^3 R_2^6 [R_2^6 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^8 - R_2^8)]}{8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)}. \end{aligned}$$

Pozostałe współczynniki równe są zeru. Funkcje $\Phi^*(z)$ oraz $F^*(z)$ dla rozpatrywanego rodzaju obciążenia pierścienia kołowego otrzymać można podstawiając współczynniki a_k^* i $a_k^{*'}$ do wzorów (2.8) i (2.9):

$$(3.46) \quad \Phi^*(z) = \frac{p_0}{4} \frac{R_1^3}{(R_1^4 - R_2^4)} z + \frac{p_0 R_1^3 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2) z^3}{8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)} - \frac{p_0 R_1^3 R_2^4 (R_1^8 - R_2^8)}{4 [8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)]} \frac{1}{z^3},$$

$$(3.47) \quad F^*(z) = \frac{-p_0 R_1^3 [8R_2^6 (R_1^2 - R_2^2) + (R_1^8 - R_2^8)] z}{4 [8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)]} + \frac{p_0}{4} \frac{R_1^3 R_2^4}{(R_1^4 - R_2^4)} \frac{1}{z^3} + \frac{p_0 R_1^3 R_2^6 [R_2^6 (R_1^2 - R_2^2) - (R_1^8 - R_2^8)]}{8R_1^4 R_2^4 (R_1^2 - R_2^2)^2 - (R_1^4 - R_2^4) (R_1^8 - R_2^8)} \frac{1}{z^5}.$$

Podane wyżej funkcje rozwiązują w zasadzie zagadnienie, gdyż wraz z (2.10) i (2.11) pozwalają wyznaczyć naprężenia w dowolnym punkcie pierścienia kołowego.

Naprężenia \widehat{rr} , $\widehat{\theta\theta}$ oraz $\widehat{r\theta}$ w formie rzeczywistej otrzymuje się ze wzorów (2.10) i (2.11) po podstawieniu funkcji (3.46) i (3.47) i dokonaniu przekształceń. Odpowiednie przekształcenia prowadzą do wzorów

$$(3.48) \quad \widehat{rr}^* = \left(a_1^* r - \frac{a_{-3}^{*'}}{r^3} \right) \cos \vartheta - \left(a_3^* r^3 + a_1^{*'} r + \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} - \frac{5a_{-3}^*}{r^3} \right) \cos 3\vartheta,$$

$$(3.49) \quad \widehat{\theta\theta}^* = \left(3a_1^* r + \frac{a_{-3}^{*'}}{r^3} \right) \cos \vartheta + \left(5a_3^* r^3 - \frac{a_{-3}^*}{r^3} + a_1^{*'} r + \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} \right) \cos 3\vartheta,$$

$$(3.50) \quad \widehat{r\theta}^* = \left(a_1^* r - \frac{a_{-3}^{*'}}{r^3} \right) \sin \vartheta + \left(a_1^{*'} r + 3a_3^* r^3 + \frac{3a_{-3}^*}{r^3} - \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} \right) \sin 3\vartheta.$$

Współczynniki a_k^* i $a_k^{*'}$ określone zostały wcześniej.

Można łatwo wyznaczyć ze wzorów (3.9)-(3.11) wielkości sił wewnętrznych. Wynoszą one odpowiednio:

siła normalna

$$(3.51) \quad N^* = \int_{R_2}^{R_1} \left[\left(3a_1^* r + \frac{a_{-3}^{*'}}{r^3} \right) \cos \vartheta + \left(5a_3^* r^3 - \frac{a_{-3}^*}{r^3} + a_1^{*'} r + \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} \right) \cos 3\vartheta \right] dr = \\ = \frac{1}{2} \left[3a_1^* (R_1^2 - R_2^2) - a_{-3}^{*'} \frac{1}{(R_1^2 - R_2^2)} \right] \cos \vartheta + \frac{1}{2} \left[\frac{5a_3^*}{2} (R_1^4 - R_2^4) + \right. \\ \left. + \frac{a_{-3}^*}{(R_1^2 - R_2^2)} + a_1^{*'} (R_1^2 - R_2^2) - \frac{a_{-5}^{*'}}{2} \frac{1}{(R_1^4 - R_2^4)} \right] \cos 3\vartheta;$$

siła poprzeczna

$$(3.52) \quad Q^* = \int_{R_2}^{R_1} \left[\left(a_1^* r - \frac{a_{-3}^{*'}}{r^3} \right) \sin \vartheta + \left(a_1^{*'} r + 3a_3^* r^3 + \frac{3a_{-3}^*}{r^3} - \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} \right) \sin 3\vartheta \right] dr$$

$$Q^* = \frac{1}{2} \left[a_1^* (R_1^2 - R_2^2) + a_{-3}^{*'} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \right] \sin \vartheta +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[a_1^{*'} (R_1^2 - R_2^2) + \frac{3a_3^*}{2} (R_1^4 - R_2^4) - 3a_{-3}^* \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{a_{-5}^{*'}}{2} \left(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4} \right) \right] \sin 3\vartheta;$$

moment zginający względem okręgu środkowego pierścienia

$$(3.53) \quad M^* = \int_{R_2}^{R_1} \left[\left(3a_1^* r^2 + \frac{a_{-3}^{*'}}{r^2} \right) \cos \vartheta + \left(5a_3^* r^4 - \frac{a_{-3}^*}{r^2} + a_1^{*'} r^2 + \frac{a_{-5}^{*'}}{r^4} \right) \cos 3\vartheta \right] dr -$$

$$- \frac{N^* (R_1 + R_2)}{2} = \left[a_1^* (R_1^3 - R_2^3) - a_{-3}^{*'} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \cos \vartheta + \left[a_3^* (R_1^5 - R_2^5) + \right.$$

$$\left. + a_{-3}^* \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{a_1^{*'}}{3} (R_1^3 - R_2^3) - \frac{a_{-5}^{*'}}{3} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \right] \cos 3\vartheta - \frac{N^* (R_1 + R_2)}{2}$$

Obliczymy obciążenie ogólne, odpowiadające pracy przepustu kołowego ułożonego w ziemi.

Dla wyznaczenia naprężeń powstających w pierścieniu kołowym od obciążenia przedstawionego na rys. 1 można posłużyć się przypadkami rozpatrzonych obciążeń szczególnych. Przyjmując układ osi zgodnie z rys. 1 otrzymamy z (3.6)-(3.8) oraz (3.48)-(3.50) następujące wzory na naprężenia:

$$(3.54) \quad \widehat{r_r} = \left(1 + \frac{p_1}{p} \right) \left(2a_0 - \frac{a_{-2}'}{r^2} \right) + \left(\frac{a_{-3}^{*1}}{r^3} - a_1^* r \right) \sin \vartheta +$$

$$- \left(a_3^* r^3 + a_1^{*'} r + \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} - \frac{5a_{-3}^*}{r^3} \right) \sin 3\vartheta + \left(1 - \frac{p_1}{p} \right) \left(\frac{4a_{-2}'}{r^2} - \frac{a_{-4}'}{r^4} - a_0' \right) \cos 2\vartheta,$$

$$(3.55) \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = \left(1 + \frac{p_1}{p} \right) \left(2a_0 + \frac{a_{-2}'}{r^2} \right) + \left(a_0' + 4a_2 r^2 + \frac{a_{-4}'}{r^4} \right) \left(1 - \frac{p_1}{p} \right) \cos 2\vartheta -$$

$$- \left(3a_1^* r + \frac{a_{-3}^{*1}}{r^3} \right) \sin \vartheta - \left(\frac{a_{-3}^*}{r^3} - a_1^{*'} r - \frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} - 5a_3^* r^3 \right) \sin 3\vartheta,$$

$$(3.56) \quad \widehat{r\vartheta} = - \left(\frac{a_{-3}^{*'}}{r^3} - a_1^* r \right) \cos \vartheta + \left(1 - \frac{p_1}{p} \right) \sin 2\vartheta \left(a_0' + 2a_2 r^2 + \frac{2a_{-2}'}{r^2} - \frac{a_{-4}'}{r^4} \right) +$$

$$+ \left(\frac{a_{-5}^{*'}}{r^5} - \frac{3a_{-3}^*}{r^3} - 3a_3^* r^3 - a_1^{*'} r \right) \cos 3\vartheta.$$

Dla celów praktyki projektowania przydatne jest często zamiast naprężeń znajomość sił wewnętrznych powstających w pierścieniu pod wpływem danego obciążenia. Siły wewnętrzne dla przypadku obciążenia przedstawionego na rys. 1 wynoszą odpowiednio: siła normalna

$$(3.57) \quad *N = \left[2a_0 (R_1 - R_2) - a'_{-2} \frac{1}{(R_1 - R_2)} \right] \left(1 + \frac{p_1}{p} \right) + \\ + \left(1 - \frac{p_1}{p} \right) \left[(R_1 - R_2) a'_0 + \frac{4}{3} a_2 (R_1^3 - R_2^3) - \frac{a'_{-4}}{3 (R_1^3 - R_2^3)} \right] \cos 2\vartheta - \\ - \frac{1}{2} \left[3a_1^* (R_1^2 - R_2^2) - a'^*_{-3} \frac{1}{(R_1^2 - R_2^2)} \right] \sin \vartheta + \frac{1}{2} \left[\frac{5a_3^*}{2} (R_1^4 - R_2^4) + \right. \\ \left. + a'^*_{-3} \frac{1}{(R_1^2 - R_2^2)} + a'^*_1 (R_1^2 - R_2^2) + \frac{a'^*_{-5}}{2} \frac{1}{(R_1^4 - R_2^4)} \right] \sin 3\vartheta;$$

siła poprzeczna

$$(3.58) \quad *Q = \frac{1}{2} \left[a_1^* (R_1^2 - R_2^2) + a'^*_{-3} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \right] \cos \vartheta + \left(1 - \frac{p_1}{p} \right) \times \\ \times \left[a'_0 (R_1 - R_2) + \frac{2}{3} a_2 (R_1^3 - R_2^3) - \frac{2a'_{-2}}{(R_1 - R_2)} + \frac{a'_{-4}}{3 (R_1^3 - R_2^3)} \right] \sin 2\vartheta - \\ - \frac{1}{2} \left[a'^*_1 (R_1^2 - R_2^2) + \frac{3a_3^*}{2} (R_1^4 - R_2^4) - 3a'^*_{-3} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a'^*_{-5}}{2} \left(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4} \right) \right] \cos 3\vartheta;$$

moment zginający względem okręgu środkowego pierścienia

$$(3.59) \quad *M = [a_0 + a'_{-2} \ln (R_1 - R_2)] \left(1 + \frac{p_1}{p} \right) - \frac{(R_1 + R_2) (*N)}{2} + \\ + \left(1 - \frac{p_1}{p} \right) \left[\frac{a'_0 (R_1^2 - R_2^2)}{2} + a_2 (R_1^4 - R_2^4) - \frac{a'_{-4}}{2 (R_1^2 - R_2^2)} \right] \cos 2\vartheta - \\ - \left[a_1^* (R_1^3 - R_2^3) - a'^*_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \sin \vartheta - \left[a_3^* (R_1^5 - R_2^5) + \right. \\ \left. + a'^*_{-3} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{a'^*_1}{3} (R_1^3 - R_2^3) - \frac{a'^*_{-5}}{3} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \right] \sin 3\vartheta.$$

4. Przykład

Dla łatwiejszego zobrazowania przedstawionego sposobu obliczeń podamy przykład (rys. 4). Dotyczy on w przybliżeniu obliczenia grubościennego przepustu rurowego pod nasypem kolejowym. Wymiary przepustu przyjęto podobne do wy-

miarów tzw. przepustów obetonowanych, stosowanych stosunkowo często w mostownictwie kolejowym. Podany sposób obliczeń może mieć zastosowanie również przy obliczaniu statycznym wielu innych konstrukcji rurowych.

Zgodnie z rysunkiem 4 przyjęto następujące wielkości obciążeń:

$$p = -4,40 \text{ T/mb,}$$

$$p_1 = -2,85 \text{ T/mb,}$$

$$p_0 = -0,35 \text{ T/mb.}$$

Współczynniki a_k i a'_k oraz a_k^* i a_k^{**} zgodnie z wyprowadzonymi wzorami wynoszą dla naszego przykładu:

$$a_0 = -\frac{4,40 \cdot 0,64}{4 \cdot 0,390} = -1,81,$$

$$a_2 = -\frac{3 \cdot 4,40 \cdot 0,64 \cdot 0,25}{2(3 \cdot 0,64 \cdot 0,25 \cdot 0,39 - 0,2464)} = 17,78,$$

$$a_{-2} = \frac{0,64 \cdot 0,25 \cdot 4,40 \cdot 0,2464}{0,39 \cdot (-0,1188)} = -3,78,$$

$$a'_{-2} = -\frac{4,40}{2} \cdot \frac{0,64 \cdot 0,25}{0,39} = -0,90,$$

$$a'_0 = \frac{4,40 \cdot 0,64 \cdot (3 \cdot 0,0625 \cdot 0,39 + 0,2464)}{-0,1188 \cdot 0,39} = -19,45,$$

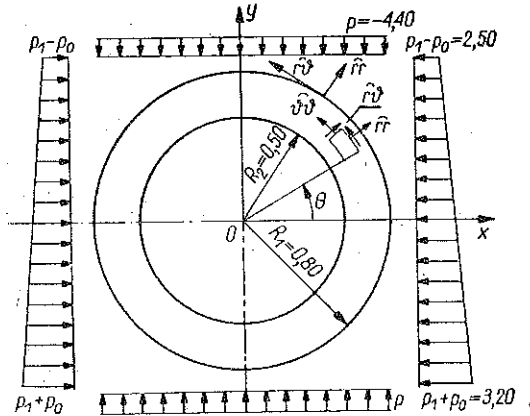
$$a'_{-4} = -\frac{3 \cdot 0,4095 \cdot 0,0625 \cdot 0,89}{-0,1188} = 0,58,$$

$$a_1^* = -\frac{0,35}{4} \cdot \frac{0,512}{0,347} = -0,1290,$$

$$a_3^* = -\frac{0,35 \cdot 0,512 \cdot 0,0625 \cdot 0,39}{8 \cdot 0,4095 \cdot 0,0625 \cdot 0,392 - 0,347 \cdot 0,1637} = 0,1694,$$

$$a_{-3}^* = \frac{0,35 \cdot 0,512 \cdot 0,0625 \cdot 0,1637}{4 \cdot (-0,02576)} = -0,0178,$$

$$a_1^{**} = \frac{0,35 \cdot 0,512 \cdot (8 \cdot 0,0156 \cdot 0,39 + 0,1637)}{4 \cdot 0,02576} = -0,3695,$$



Rys. 4

$$a_{-3}^{*'} = -\frac{0,35}{4} \cdot \frac{0,512}{0,347} \cdot 0,0625 = -0,0081,$$

$$a_{-5}^{*'} = -\frac{0,35 \cdot 0,512 \cdot 0,0156 \cdot (0,0156 \cdot 0,39 - 0,1637)}{-0,02576} = -0,0171.$$

Na podstawie wyznaczonych współczynników a_k , a'_k , a_k^* i $a_k^{*'}$ obliczyć można naprężenia w dowolnym punkcie pierścienia oraz siły wewnętrzne przekroju. Przykładowo wyznaczono jedynie naprężenia obwodowe ${}^*\widehat{\sigma\sigma}$ zgodnie z (3.55):

$$\begin{aligned} {}^*\widehat{\sigma\sigma} &= 1,65 \left[(-1,81) + \frac{1}{r^2} (-0,90) \right] - \left(-3 \cdot 0,129 r - \frac{0,0081}{r^3} \right) \sin \vartheta + \\ &\quad + 0,35 \left(-19,45 + 4 \cdot 17,78 r^2 + \frac{0,58}{r^4} \right) \cos 2\vartheta + \\ &\quad - \left(-\frac{0,0178}{r^3} + 0,3695 r + \frac{0,0171}{r^5} - 5 \cdot 0,1694 r^3 \right) \sin 3\vartheta = \\ &= -5,970 - \frac{1,484}{r^2} + \left(0,387 r + \frac{0,0081}{r^3} \right) \sin \vartheta + \\ &\quad + \left(-6,850 + 25,040 r^2 + \frac{0,204}{r^4} \right) \cos 2\vartheta + \\ &\quad - \left(0,3695 r + \frac{0,0171}{r^5} - \frac{0,0178}{r^3} - 0,847 r^3 \right) \sin 3\vartheta. \end{aligned}$$

Przy $\vartheta = 0$ naprężenia obwodowe określone są następującym wzorem

$${}^*\widehat{\sigma\sigma}_{(\vartheta=0)} = -12,850 + 25,040 r^2 - \frac{1,484}{r^2} + \frac{0,204}{r^4}.$$

Z powyższego równania otrzymuje się konkretne wartości liczbowe:

$$\left[{}^*\widehat{\sigma\sigma} \right]_{\substack{\vartheta=0 \\ r=R_1}} = 0,14 \text{ kG/cm}^2, \quad \left[{}^*\widehat{\sigma\sigma} \right]_{\substack{\vartheta=0 \\ r=R_2}} = -0,91 \text{ kG/cm}^2,$$

Przy $\vartheta = \pi/4$ naprężenia obwodowe wyniosą

$${}^*\widehat{\sigma\sigma}_{(\vartheta=\pi/4)} = -5,970 - \frac{1,484}{r^2} + 0,70711 \left(0,0175 r + \frac{0,0259}{r^3} - \frac{0,0171}{r^5} + 0,847 r^3 \right).$$

Z powyższego wzoru otrzymuje się następujące wartości naprężeń:

$$\left[{}^*\widehat{\sigma\sigma} \right]_{\substack{\vartheta=\pi/4 \\ r=R_1}} = -0,78 \text{ kG/cm}^2, \quad \left[{}^*\widehat{\sigma\sigma} \right]_{\substack{\vartheta=\pi/4 \\ r=R_2}} = -1,18 \text{ kG/cm}^2.$$

Przy $\vartheta = \pi/2$ naprężenia obwodowe wyznaczyć można z wzoru

$$*\vartheta\vartheta = -12,820 - 25,04 r^2 - \frac{1,484}{r^2} - \frac{0,204}{r^4} + \frac{0,017}{r^5} - \frac{0,010}{r^3} + 0,757 r.$$

Z zależności tej wyznaczono następujące wartości naprężeń:

$$\left[*\vartheta\vartheta \right]_{r=R_1}^{\vartheta=\pi/2} = -3,10 \text{ kG/cm}^2, \quad \left[*\vartheta\vartheta \right]_{r=R_2}^{\vartheta=\pi/2} = -2,73 \text{ kG/cm}^2.$$

Literatura cytowana w tekście

- [1] И. МУСКЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1954.
 [2] G. W. KOŁOSOW, *Sur une application des formules de M. Schwarz, de M. Villat et de M. Dini au problème plan de l'élasticité*, Comp. Rendus, Paris 1931, 389.
 [3] F. SZELAĞOWSKI, *Jednokierunkowe rozciąganie pierścienia kołowego*, Rozpr. Inżyn., 4 (1956).
 [4] F. SZELAĞOWSKI, *Pierścień kołowy pod wpływem działania danego obciążenia*, Rozpr. Inżyn., 6 (1958).
 [5] В. Н. ЗАМЪЯТИНА, *Плоская задача теории упругости для кругового кольца*, Прикл. Мат. Мех., 1 (1942).
 [6] L. M. MILNE-THOMSON, *Plane Elastic Systems*, Springer-Verlag 1960.
 [7] С. А. ОРЛОВ, *Напряжения в толстостенном кольце для одного случая нагрузки*, Исслед. по теории сооружений, Выпуск IX, Москва 1960.

Резюме

РЕШЕНИЕ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ РАСЧЕТА

Решается статическая задача для кругового кольца, подверженного влиянию вертикальной нагрузки, распределенной равномерно вдоль горизонтальной проекции и горизонтального давления, изменяющегося по закону трапеции. Вид принятых нагрузок соответствует в приближении предположениям о работе трубы, состоящей из коротких сегментов, расположенной в земле.

Решение получено при использовании способа Мусхелишвили, путем разложения нагрузки на наружной окружности кольца в комплексный ряд Фурье. Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ ищутся в форме ряда Лорана.

Summary

SOLUTION OF A PARTICULAR PROBLEM OF THE CIRCULAR RING

This paper gives a solution of the problem of a circular ring under a vertical load uniformly distributed along the horizontal projection and a side load by horizontal pressure of trapezoidal distribution.

The type of the loads assumed corresponds approximately to the assumption that the tube is composed of short segment and buried in earth.

The solution is obtained by means of the Muskhelishvili method by expanding the load along the outer contour in a complex Fourier series. The function $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$ are sought in the form of a Laurent's series.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1962 r.