

ROMAN DOWGIŃD

**O STATECZNOŚCI PREFABRYKOWANYCH I STALOWYCH
USTROJÓW RAMOWYCH HAL PRZEMYSŁOWYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXVII**

TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962

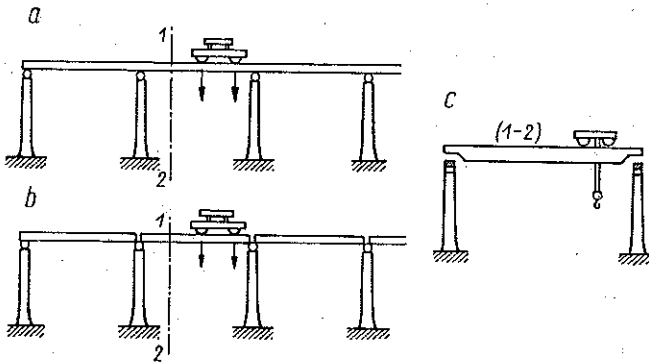
SPIS TREŚCI

1. Wstęp	347
2. Układy i krakowiany podstawowe	350
3. Stateczność ramy zbudowanej z dwóch niejednakowych prętów połączonych poprzeczką	351
4. Stateczność ustroju złożonego z dowolnej ilości prętów połączonych poprzeczkami	358
5. Wzór na ugięcia ustroju złożonego z dowolnej ilości prętów	363
6. Siły krytyczne dla ramy złożonej z trzech zamocowanych prętów połączonych przegubowo poprzeczkami	368
7. Zastosowanie metody odkształceń do ram z poprzeczkami przegubowymi	376
8. Uwagi końcowe	379

1. Wstęp

Tematem rozprawy jest stateczność pewnej klasy ustrojów, spotykanych w obecnym budownictwie przemysłowym w skali masowej. Ustroje te, prefabrykowane lub stalowe, można nazwać ramami z przegubowymi poprzeczkami (por. [1]).

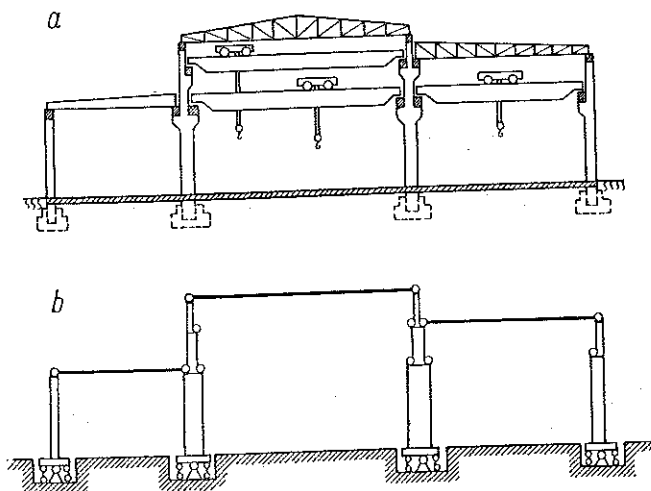
Rysunek 1 przedstawia jeden z najprostszych ustrojów tego typu. Jest to tzw. estakada, składająca się z dwóch niezależnych od siebie szeregów podłużnych słupów, połączonych górną belkami podsuwnicowymi (poprzeczkami), po których porusza się suwnica z wózkiem obciążonym ciężarem zawieszonym na haku. Na rysunku 1a belki podsuwnicowe są ciągłe, na rys. 1b — rozcięte, lecz w obu przypadkach połączenia ich ze słupami są przegubowe. Są to typowe połączenia poprzeczek ze słupami w konstrukcjach prefabrykowanych i stalowych. Za pomocą kółek zostały tu oznaczone połączenia przegubowe nieprzesuwne.



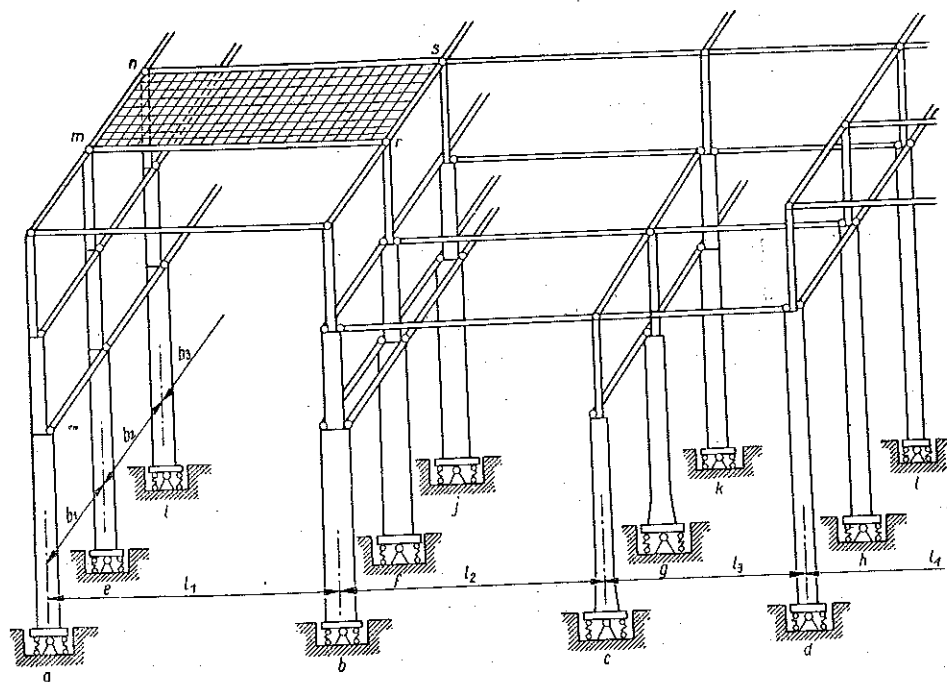
Rys. 1

Rysunek 2 przedstawia, z punktu widzenia stateczności, znacznie bardziej skomplikowany ustrój. Jest to jeden z wariantów hali trójnawowej z suwnicami, usytuowanymi w różnych nawach i na różnych poziomach. Układ statyczny hali w przekroju poprzecznym przedstawiony jest na rys. 2b. W kierunku podłużnym mamy tu do czynienia z układem słupów, połączonych, podobnie jak na rys. 1, poprzeczkami dołączonymi w różnych poziomach do słupów przegubowo. Rolę poprzeczek grają w danym przykładzie belki podsuwnicowe i belki pod dźwigarami dachowymi. Współpraca słupów ze sobą zależna jest jeszcze dodatkowo od układu stężeń poziomych w dachowych płaszczyznach poziomych.

Rozmaitość możliwych układów została zobrazowana na rys. 3, który należy traktować jako szkic skupiający na jednym rysunku szereg różnorodnych wariantów układów wielopiętowych, nie występujących na ogół w jednym ustroju równocześnie. Każdy ze słupów może być obciążony dowolnym układem stałych i ruchomych sił poprzecznych i osiowych, przekazywanych na nie bezpośrednio lub za pośred-

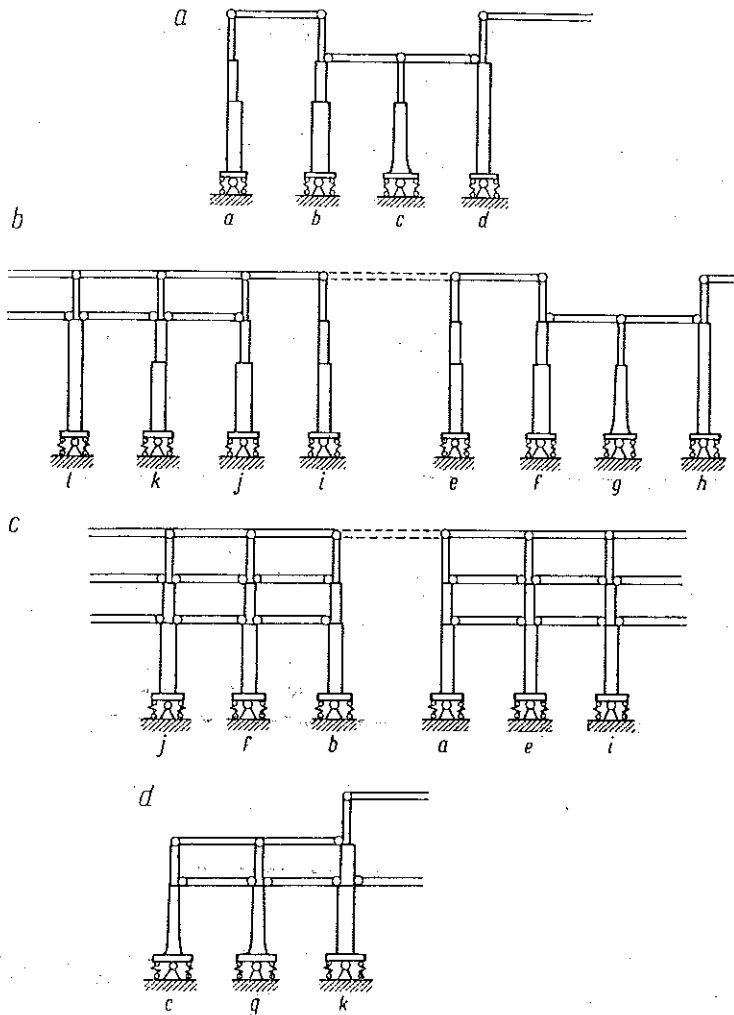


Rys. 2



Rys. 3

nictwem poprzeczek. Poprzeczki mogą być wolnopodparte, rozcięte lub ciągłe, lecz w każdym przypadku oparte na słupach przegubowo. Zamocowania słupów mogą być sprężyste lub sztywne. Przestrzenność układu stwarzają stężenia np. typu *mnr*s. Stężenie to należy rozumieć jako sztywną taflę połączoną przegubowo z wierzchołkami słupów *e, i, f, j*, która może być zastosowana również w dowolnych innych częściach ustroju.



Rys. 4

Układy przestrzenne (rys. 3) mogą być przedstawione w postaci szeregu układów płaskich (rys. 4). W danym przypadku mielibyśmy do czynienia z następującym zespołem układów: w kierunku rozpiętości L_1, L_2, L_3, \dots z układem prętów *a, b, c, d, \dots* według rys. 4a oraz układem prętów *e, f, g, h, \dots* połączonych za pośred-

nictwem tafli mnr s we wspólny układ z prętami i, j, k, \dots zgodnie z rys. 4b, oraz z ciągami prętów w kierunku rozstawu b_1, b_2, b_3, \dots , mianowicie z układem prętów $a, e, i, \dots, b, f, j, \dots$ według rys. 4c oraz układem c, g, k, \dots według rys. 4d itd. Zagadnienia ściskania mimośrodowego należy rozwiązać dla każdego z tych układów z osobna.

Układy przedstawione na rys. 4b i 4c dają korzyści polegające na wciągnięciu do współpracy kilku ciągów prętów przez zastosowanie stężeń pomiędzy nimi. Odgrywa to korzystną rolę przy niejednoczesności maksymalnych obciążeń prętów przez wciągnięcie do współpracy prętów mniej obciążonych.

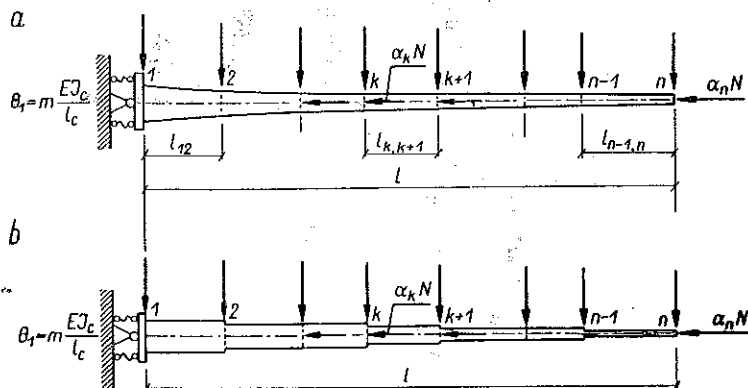
Przedstawienie układu przestrzennego z rys. 3 w postaci prostopadłych do siebie układów płaskich (rys. 4) należy traktować przy rozwiązywaniu zagadnień stateczności jako pewne uproszczenie.

Zagadnienie zostaje więc sprowadzone do rozważenia stateczności układów płaskich typu przedstawionego na rys. 4, tj. ram złożonych z dowolnej ilości prętów o dowolnie zmiennych momentach bezwładności, zamocowanych sprężysto lub sztywno na podporach i połączonych ze sobą w dowolnych poziomach przegubowo poprzeczkami. Obciążenie ram składa się z dowolnych układów sił poprzecznych i osiowych.

Podana tu zostanie jednolita metoda określania parametru krytycznego dla ram powyższego typu. Metoda ta oparta jest na rachunku krakowianów w ujęciu numerycznym, co prowadzi do pewnego algorytmu krakowianowego.

2. Układy i krakowiany podstawowe

Jako podstawowy układ stanowiący punkt wyjścia przy rozważaniach problemu stateczności zostaje przyjęty pręt jednoprzęsłowy o zmiennym (według określonej



Rys. 5

reguły) momencie bezwładności, zamocowany sprężysto na podporze, zgodnie z rys. 5a. W przykładach liczbowych będziemy brali pod uwagę pręty zmienne schodkowo (rys. 5b) często spotykane w praktyce (rys. 2).

Dla każdego z prętów wchodzących w skład badanego ustroju ramowego (rys. 4) zestawiamy krakowiany podstawowe, których sens i oznaczenia zostały wyjaśnione w pracy Z. DOWGIRDA, [2]. Mamy zatem dla każdego z prętów następujące krakowiany i iloczyn krakowianów:

1. Krakowian momentów L .

2. Krakowian ciężarów sprężystych typu A dla momentów rozłożonych między punktami podziału prostoliniowo lub typu B przy momentach rozłożonych krzywoliniowo.

3. Iloczyn krakowianów $C_0 = LA$ lub $C_0 = LB$; w iloczynie tym zostaje uwzględniony sposób zamocowania pręta na podporze.

4. Krakowian rozmieszczenia sił osiowych D , reprezentujący układ działających na pręt sił osiowych.

5. Iloczyn krakowianów $Q = LAL$.

6. Krakowian stateczności $G_0 = C_0 D_0$.

Powyższe krakowiany podstawowe mogą być wzięte dla poszczególnych przypadków z jednej ze znanych publikacji, np. [3], lub też wyprowadzone na podstawie prostych, jakkolwiek niekiedy pracochłonnych reguł.

3. Stateczność ramy zbudowanej z dwóch niejednakowych prętów połączonych poprzeczką

Przebieg postępowania przy określaniu parametru krytycznego zobrazujemy początkowo na układzie ramowym z jedną poprzeczką, a zatem na układzie jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym. Rozpatrzmy więc układ ramowy przedstawiony na rys. 6.

Jest to rama złożona z dwóch niejednakowych prętów, obciążona dowolnym układem sił poprzecznych i osiowych. Parametrem krytycznym jest siła osiowa N , którą będziemy oznaczali przez η .

Oddziaływanie poprzeczki na końce prętów zastąpimy przez działanie statycznie niewyznaczalnej siły x , jak to jest przedstawione na rys. 7.

Dla momentów całkowitych M możemy dla prętów traktowanych jako odrębne konstrukcje zestawić dwa następujące układy równań:

$$(1) \quad \begin{cases} M_1^a \\ M_2^a \\ \dots \\ M_{n-1}^a \\ M_n^a \end{cases} = \begin{cases} M_1^{aP} \\ M_2^{aP} \\ \dots \\ M_{n-1}^{aP} \\ M_n^{aP} \end{cases} - \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ x \end{cases} L_0^a + \eta \begin{cases} y_1^a \\ y_2^a \\ \dots \\ y_{n-1}^a \\ y_n^a \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} M_1^a \\ M_2^a \\ \dots \\ M_{n-1}^a \\ M_n^a \end{cases}} \right\} D^a,$$

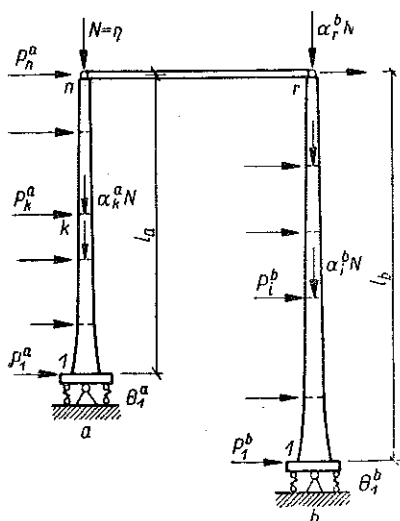
$$\begin{cases} M_1^b \\ M_2^b \\ \dots \\ M_{r-1}^b \\ M_r^b \end{cases} = \begin{cases} M_1^{bP} \\ M_2^{bP} \\ \dots \\ M_{r-1}^{bP} \\ M_r^{bP} \end{cases} - \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ x \end{cases} L_0^b + \eta \begin{cases} y_1^b \\ y_2^b \\ \dots \\ y_{r-1}^b \\ y_r^b \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} M_1^b \\ M_2^b \\ \dots \\ M_{r-1}^b \\ M_r^b \end{cases}} \right\} D^b.$$

Dla otrzymania ugięć korzystamy ze wzorów (3.107) oraz (3.116) z książki Z. DOWGIRDA, [2], tj.:

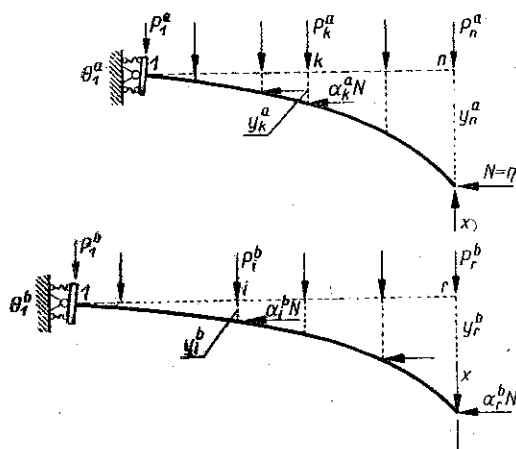
$$Y = WL, \quad \text{gdzie} \quad W = MA_0 \quad (\text{lub } MB_0).$$

Stąd otrzymuje się

$$(2) \quad Y = MA_0 L \quad (\text{lub } MB_0 L).$$



Rys. 6



Rys. 7

Zgodnie z [2] typ A_0 zastosujemy do momentów od sił poprzecznych, typ B_0 od osiowych. Na podstawie (1) i (2) mamy

$$(3) \quad \begin{Bmatrix} y_1^a \\ y_2^a \\ \dots \\ y_{n-1}^a \\ y_n^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1^{aP} \\ M_2^{aP} \\ \dots \\ M_{n-1}^{aP} \\ M_n^{aP} \end{Bmatrix} A_0^a L^a + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ x \end{Bmatrix} \left\{ L_0^a A_0^a L^a + \eta \right\} \begin{Bmatrix} y_1^a \\ y_2^a \\ \dots \\ y_{n-1}^a \\ y_n^a \end{Bmatrix} \quad D^a B_0^a L^a,$$

$$\begin{Bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ \dots \\ y_{r-1}^b \\ y_r^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1^{bP} \\ M_2^{bP} \\ \dots \\ M_{r-1}^{bP} \\ M_r^{bP} \end{Bmatrix} A_0^b L^b + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ x \end{Bmatrix} \left\{ L_0^b A_0^b L^b + \eta \right\} \begin{Bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ \dots \\ y_{r-1}^b \\ y_r^b \end{Bmatrix} \quad D^b B_0^b L^b.$$

Po elementarnych przekształceniach i przy uwzględnieniu, że istnieje zależność

$$(4) \quad M^P A_0 L = M^P (LA) = M^P C_0 = Y^P,$$

równania (3) otrzymują postać

$$(5) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1^a \\ y_2^a \\ \dots \\ y_{n-1}^a \\ y_n^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{aP} \\ y_2^{aP} \\ \dots \\ y_{n-1}^{aP} \\ y_n^{aP} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ x \end{pmatrix} Q^{a+\eta} \begin{pmatrix} y_1^a \\ y_2^a \\ \dots \\ y_{n-1}^a \\ y_n^a \end{pmatrix} \end{cases} G_0^a,$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ \dots \\ y_{r-1}^b \\ y_r^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{bP} \\ y_2^{bP} \\ \dots \\ y_{r-1}^{bP} \\ y_r^{bP} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ x \end{pmatrix} Q^{b+\eta} \begin{pmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ \dots \\ y_{r-1}^b \\ y_r^b \end{pmatrix} \end{cases} G_0^b.$$

Układ równań (5) przedstawić możemy w postaci następującej:

$$(6) \quad \begin{cases} y_i^a = y_i^{aP} - x q_{ni}^a + \eta (y_1^a g_{i1}^a + y_2^a g_{i2}^a + \dots + y_n^a g_{in}^a), & i = 1, 2, \dots, n, \\ y_j^b = y_j^{bP} + x q_{rj}^b + \eta (y_1^b g_{j1}^b + y_2^b g_{j2}^b + \dots + y_r^b g_{jr}^b), & j = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

Wielkość siły x znajdziemy z warunku brzegowego

$$(7) \quad y_n^a = y_r^b,$$

a mianowicie

$$(8) \quad x = \frac{1}{q_{nn}^a + q_{rr}^b} [y_n^{aP} - y_r^{bP} + \eta (y_1^a g_{n1}^a + y_2^a g_{n2}^a + \dots + y_n^a g_{nn}^a - y_1^b g_{r1}^b - y_2^b g_{r2}^b - \dots - y_r^b g_{rr}^b)].$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(9) \quad q = q_{nn}^a + q_{rr}^b$$

i po wstawieniu wielkości x według wzoru (8) do układu równań (6) otrzymujemy

$$(10) \quad \begin{cases} y_i^a = y_i^{aP} - \frac{1}{q} (y_n^{aP} q_{ni}^a - y_r^{bP} q_{ni}^a) + \frac{1}{q} \eta [y_1^a (q g_{i1}^a - q_{ni}^a g_{n1}^a) + \\ \quad + y_2^a (q g_{i2}^a - q_{ni}^a g_{n2}^a) + \dots + y_n^a (q g_{in}^a - q_{ni}^a g_{nn}^a) + \\ \quad + y_1^b q_{ni}^a g_{r1}^b + y_2^b q_{ni}^a g_{r2}^b + \dots + y_r^b q_{ni}^a g_{rr}^b], & i = 1, 2, \dots, n, \\ y_j^b = y_j^{bP} + \frac{1}{q} (y_n^{aP} q_{rj}^b - y_r^{bP} q_{rj}^b) + \frac{1}{q} \eta [y_1^a q_{rj}^b g_{n1}^a + y_2^a q_{rj}^b g_{n2}^a + \dots + \\ \quad + y_n^a q_{rj}^b g_{nn}^a + y_1^b (q g_{j1}^b - q_{r1}^b g_{rj}^b) + y_2^b (q g_{j2}^b - q_{rj}^b g_{r2}^b) + \dots + \\ \quad + y_r^b (q g_{jr}^b - q_{rj}^b g_{rr}^b)], & j = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

We wzorze (11) miejsca puste należy wypełnić zerami.

Równania rozwinięte (11) możemy przedstawić w formie zwartej

$$(12) \quad Y = Y^P H_0^r + \eta Y G_0^r,$$

albo też

$$(13) \quad Y(\tau - \eta G_0^r) = Y^P H_0^r.$$

W zagadnieniach stateczności interesuje nas we wzorze (13) tylko krakowian stateczności G_0^r , którego postać rozwinięta podana jest po prawej stronie wzoru (11) na ostatnim miejscu.

Podamy dla przykładu krakowian stateczności G_0^r dla układu dwóch prętów o różnych długościach, o jednakowych momentach bezwładności J , sztywno zamocowanych na podporach przy podziale dłuższego pręta na trzy, zaś pręta krótszego na dwie równe części, jak to jest uwidocznione na rys. 8.

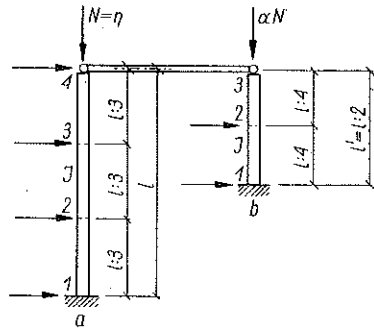
W danym przypadku we wzorze (11) należy przyjąć $n = 4$, $r = 3$, wobec czego krakowian G_0^r przyjmuje postać

$$(14) \quad G_0^r = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qg_{11}^a - q_{41}^a g_{41}^a & qg_{21}^a - q_{42}^a g_{41}^a & qg_{31}^a - q_{43}^a g_{41}^a & qg_{41}^a - q_{44}^a g_{41}^a \\ qg_{14}^a - q_{41}^a g_{44}^a & qg_{24}^a - q_{42}^a g_{44}^a & qg_{34}^a - q_{43}^a g_{41}^a & qg_{44}^a - q_{44}^a g_{44}^a \\ q_{41}^a g_{31}^b & q_{42}^a g_{31}^b & q_{43}^a g_{31}^b & q_{44}^a g_{31}^b \\ q_{41}^a g_{33}^b & q_{42}^a g_{33}^b & q_{43}^a g_{33}^b & q_{44}^a g_{33}^b \\ \hline q_{31}^b g_{41}^a & q_{32}^b g_{41}^a & q_{33}^b g_{41}^a \\ q_{31}^b g_{44}^a & q_{32}^b g_{44}^a & q_{33}^b g_{44}^a \\ qg_{11}^b - q_{31}^b g_{31}^b & qg_{21}^b - q_{32}^b g_{31}^b & qg_{31}^b - q_{33}^b g_{31}^b \\ qg_{13}^b - q_{31}^b g_{33}^b & qg_{23}^b - q_{32}^b g_{33}^b & qg_{33}^b - q_{33}^b g_{33}^b \end{pmatrix}$$

gdzie

$$q = q_{44}^a + q_{33}^b.$$

Zadanie rozwiążemy przy zastosowaniu krakowianów ciężarów sprężystych typu A dla elementów q_{ik} oraz typu B dla elementów g_{ik} .



Rys. 8

Będziemy posługiwali się krakowianami podstawowymi dla pręta a

$$(15) \quad L^a = \frac{L}{3} \begin{Bmatrix} \cdot & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \\ & & & \cdot \end{Bmatrix}, \quad A^a = \frac{l}{18EJ} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{Bmatrix},$$

$$B^a = \frac{L}{36EJ} \begin{Bmatrix} 5 & 1 & & \\ 1 & 10 & 1 & \\ & 1 & 10 & 1 \\ & & 1 & 5 \end{Bmatrix}, \quad D_0^a = \begin{Bmatrix} \cdot & & & 1 \\ -1 & & & 1 \\ & -1 & & 1 \\ & & & \cdot \end{Bmatrix},$$

dla pręta b

$$(16) \quad L^b = \frac{l}{2} \begin{Bmatrix} \cdot & 1 & 2 \\ & & 1 \\ & & \cdot \end{Bmatrix}, \quad A^b = \frac{l}{12EJ} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \end{Bmatrix},$$

$$B^b = \frac{l}{24EJ} \begin{Bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ & 1 & 5 \end{Bmatrix}, \quad D_0^b = \begin{Bmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & 1 \\ \cdot \end{Bmatrix}.$$

Dla ułatwienia rachunków celowe jest w przykładach liczbowych przedstawiać wyrazy q_{ik} i g_{ik} bez współczynników liczbowych, stojących przed krakowianami Q_0 i G_0 . Dla pręta a , zgodnie ze wzorami (15), mamy

$$(17) \quad Q^a = L^a A^a L^a = \frac{l^3}{162EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & 2 & 5 & 8 \\ & 5 & 16 & 28 \\ & 8 & 28 & 54 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & 0,01543 & 0,03395 & 0,05247 \\ & 0,03395 & 0,10494 & 0,17901 \\ & 0,05247 & 0,17901 & 0,34259 \end{Bmatrix},$$

$$(18) \quad G_0^a = L^a B^a D^a = \frac{l^2}{108EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & -1 & -12 & -24 \\ & & -1 & -12 \\ & & & 6 & 24 & 53 \end{Bmatrix} = \\ = \frac{l^2}{EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & -0,00926 & -0,11111 & -0,22222 \\ & & -0,00926 & -0,11111 \\ & & & 0,05556 & 0,22222 & 0,49074 \end{Bmatrix}.$$

Dla pręta b , zgodnie ze wzorami (16), otrzymujemy

$$(19) \quad Q^b = L^b A^b L^b = \frac{l^3}{48EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & 2 & 5 \\ & 5 & 16 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & 0,00650 & 0,01432 \\ & 0,01432 & 0,04421 \end{Bmatrix},$$

$$(20) \quad G_0^b = L^b B^b D_0^b = \frac{al^2}{192EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & -1 & 12 \\ & 6 & 23 \end{Bmatrix} = \frac{al^2}{EJ} \begin{Bmatrix} \cdot & -0,00521 & -0,06250 \\ & 0,03125 & 0,11979 \end{Bmatrix}.$$

We wzorach (19) i (20) zostało uwzględnione sprowadzenie długości l' pręta krótszego do długości l pręta dłuższego oraz wzięto pod uwagę współczynnik α w krakowianie D_0^b , a zatem i w krakowianie G_0^b .

W związku z powyższym

$$q = q_{44}^a + q_{33}^b = \frac{l^3}{EJ} (0,34259 + 0,04427) = 0,38686 \frac{l^3}{EJ}$$

oraz

$$(21) \quad \frac{1}{q} = \frac{EJ}{l^3} \cdot 2,58494.$$

Przy uwzględnieniu wzorów (17)-(21) krakowian G_0^r ze wzoru (14) przyjmuje postać

$$(22) \quad G_0^r = \frac{l^2}{1000 EJ} \times \begin{array}{ccc|cc} & & & & \\ & 20,880 & 8,282 & 25,428 & -8,226 & -25,428 \\ & 15,070 & 42,154 & -12,714 & -4,113 & -12,714 \\ & -11,000 & -4,860 & 56,158 & 18,165 & 56,158 \\ \hline & -8,477\alpha & -28,921\alpha & -55,348\alpha & -2,900\alpha & -55,348\alpha \\ & 16,247\alpha & 55,431\alpha & 106,083\alpha & 26,820\alpha & 106,083\alpha \end{array}$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy na pręcie b nie ma obciążenia osiowego, tj. gdy w układzie na rys. 8 należy przyjąć

$$(23) \quad a = 0.$$

W tym przypadku o wielkości najmniejszej siły krytycznej decyduje górny lewy blok krakowianu (22). Przy iteracji będziemy operowali jego krakowianem

$$(24) \quad (G_0^r)_t = \frac{l^2}{1000 EJ} \begin{pmatrix} 20,88 & -8,28 & -25,43 \\ 15,07 & 42,15 & -12,71 \\ -11,00 & -4,86 & 56,16 \end{pmatrix}.$$

W wyniku iteracji otrzymujemy wektor własny odpowiadający największemu pierwiastkowi

$$U_1 = \tau (0 \quad -1; \quad -0,376 \quad 3,486)$$

oraz wielkości

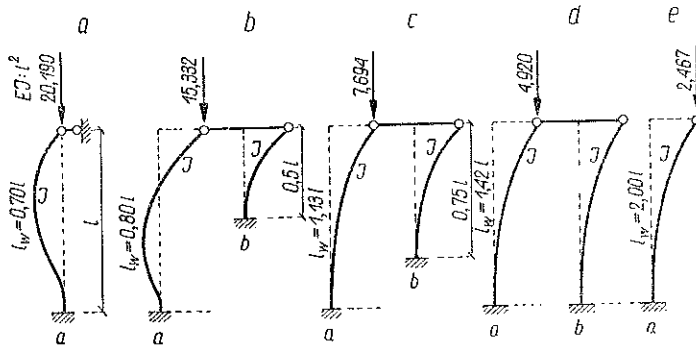
$$(25) \quad \varrho = 65,224, \quad N_{min} = 1000 \cdot \frac{EJ}{l^2} : 65,224 = 15,332 \frac{EJ}{l^2}.$$

Zastępcza długość wyboczeniowa pręta a jest równa

$$(26) \quad l_w = (\pi : \sqrt{15,332}) l = 0,80 l.$$

Postać utraty stateczności badanej ramy przedstawiona jest na rys. 9b. Ponieważ można byłoby się spodziewać postaci przedstawionej na rys. 9c, przeto na rys. 9

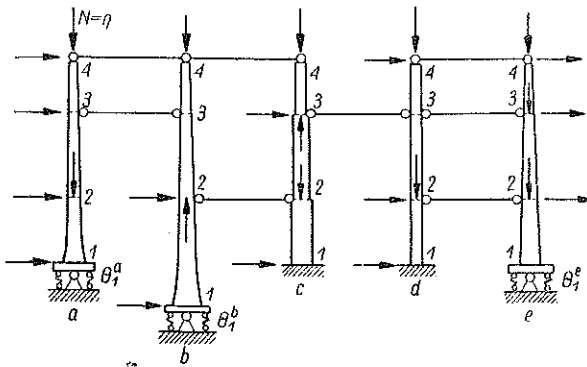
zostały zestawione przypadki wyjaśniające prawidłową zmienność postaci utraty stateczności pręta a oraz siły krytycznej i zastępczej długości wybocheniowej w zależności od zmiany sztywności podparcia wierzchołka pręta. Wielkości sił krytycznych i postaci wybożenia na rys. 9c i 9d otrzymane są w wyżej podany sposób na podstawie krakowianu G_0^r ze wzoru (11).



Rys. 9

4. Stateczność ustroju złożonego z dowolnej ilości prętów połączonych przegubowo poprzeczkami

Sposób określenia stateczności ustroju złożonego z dowolnej ilości prętów zamocowanych na podporach i połączonych przegubowo poprzeczkami zilustrujemy na przykładzie układu złożonego z pięciu prętów uwidocznionego na rys. 10.



Rys. 10

Jak się okaże, ustrój z pięciu prętów pozwoli na ustalenie prawa pozwalającego na bezpośrednie, automatyczne napisanie równania dla ugięć Y , a zatem i krakowianu stateczności G_0^r dla ustrojów złożonych z dowolnej ilości prętów zamocowanych na podporach i połączonych w dowolnych punktach podziału poprzeczkami.

Na przykładzie więc ustroju przedstawionego na rys. 10 zostanie ustalona metoda postępowania przy określaniu parametru krytycznego dla ustroju zbudowanego z dowolnej ilości prętów.

Należy przy tym zaznaczyć, że podany tu algorytm rozwiązuje jednocześnie zagadnienie wpływu sił osiowych mniejszych od krytycznych, co jednak nie jest tematem niniejszej rozprawy.

Układ na rys. 10 składa się z prętów ukształtowanych według ustalonego prawa (ukształtowanie płynne lub schodkowe). Długości prętów mogą być różne, zamocowania prętów na podporach mogą być sprężyste lub sztywne. Podział prętów na odcinki jest dowolny, przy czym numeracja punktów podziału przy poprzeczkach powinna być (ze względu na oznaczenia niewiadomych sił x w poprzeczkach) jednakowa na obydwóch końcach poprzeczek. Układ sił poprzecznych i podłużnych jest dowolny, przy czym wielkości sił osiowych określone są za pomocą dowolnych współczynników jednej z sił $N = \eta$, przyjętej jako parametr podstawowy.

Długości prętów i ich części należy sprowadzić do długości porównawczej l_c , momenty bezwładności do J_c .

Jako układ podstawowy obieramy samodzielne pręty jednoprzęsłowe wspornikowe a, b, c, d i e nie połączone ze sobą poprzeczkami.

Podstawowe krakowiany dla tych prętów uważamy za znane. Krakowiany ciężarów sprężystych określają zmienne momenty bezwładności J prętów i prostoliniowy lub krzywoliniowy rozkład momentów M . Sposób zamocowania prętów na podporze uwzględniony jest w krakowianach C_0 . Rozmieszczenie sił osiowych określone jest za pomocą krakowianu D .

Przykładowy podział prętów na rys. 10 na 3 odcinki i konkretne rozmieszczenie poprzeczek ilustruje postępowanie w przypadku ogólnym.

Stopień statycznej niewyznaczalności układu z rys. 10 odpowiada oczywiście ilości poprzeczek.

Oznaczenia niewiadomych sił x w poprzeczkach przedstawione są na rys. 11.

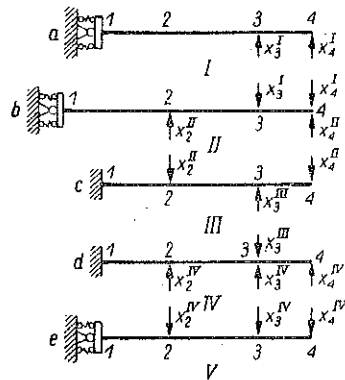
Niewiadome x przedstawimy w postaci

$$(27) \quad X^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^I \\ x_4^I \end{Bmatrix}, \quad X^{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2^{II} \\ 0 \\ x_4^{II} \end{Bmatrix}, \quad X^{III} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^{III} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad X^{IV} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2^{IV} \\ x_3^{IV} \\ x_4^{IV} \end{Bmatrix}, \quad X^V = \{0\}.$$

Wprowadzamy pojęcie krakowianów selektorów τ_1 , obrazujących rozmieszczenie poprzeczek. W danym przypadku selektory te przyjmują postać

$$(28) \quad \tau_1^I = \begin{Bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{Bmatrix}, \quad \tau_1^{II} = \begin{Bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\tau_1^{III} = \begin{Bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{Bmatrix}, \quad \tau_1^{IV} = \begin{Bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{Bmatrix}, \quad \tau_1^V = \{0\}.$$



Rys. 11

Zestawiamy układ równań dla momentów M dla każdego z prętów wspornikowych według rys. 11:

$$(29) \quad \begin{cases} M^a = M^{aP} - X^I \tau_1^I L_0^a + \eta Y^a D^a, \\ M^b = M^{bP} + X^I \tau_1^I L_0^b - X^{II} \tau_1^{II} L_0^b + \eta Y^b D^b, \\ M^c = M^{cP} + X^{II} \tau_1^{II} L_0^c - X^{III} \tau_1^{III} L_0^c + \eta Y^c D^c, \\ M^d = M^{dP} + X^{III} \tau_1^{III} L_0^d - X^{IV} \tau_1^{IV} L_0^d + \eta Y^d D^d, \\ M^e = M^{eP} + X^{IV} \tau_1^{IV} L_0^e + \eta Y^e D^e. \end{cases}$$

Przyjmując oznaczenia według wzoru

$$(30) \quad M = \begin{Bmatrix} M^a \\ M^b \\ M^c \\ M^d \\ M^e \end{Bmatrix}, \quad M^P = \begin{Bmatrix} M^{aP} \\ M^{bP} \\ M^{cP} \\ M^{dP} \\ M^{eP} \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{Bmatrix} D^a & & & & \\ & D^b & & & \\ & & D^c & & \\ & & & D^d & \\ & & & & D^e \end{Bmatrix},$$

$$X\tau_1 = \begin{Bmatrix} X^I \\ X^{II} \\ X^{III} \\ X^{IV} \\ X^V \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1^I \\ \tau_1^{II} \\ \tau_1^{III} \\ \tau_1^{IV} \end{Bmatrix}, \quad L_0^r = \begin{Bmatrix} L_0^a & -L_0^b & & & \\ & L_0^b & -L_0^c & & \\ & & L_0^c & -L_0^d & \\ & & & L_0^d & -L_0^e \\ & & & & L_0^e & -L_0^f \end{Bmatrix},$$

możemy układ równań (29) przedstawić w formie zwartej:

$$(31) \quad M = M^P - X\tau_1 L_0^r + \eta YD.$$

Układ równań dla ugięć Y otrzymamy na podstawie równań (29) i wzoru $Y = WL = MA_0 L$ (albo $MB_0 L$):

$$(32) \quad \begin{cases} Y^a = M^{aP} A_0^a L^a - X^I \tau_1^I L_0^a A_0^a L^a + \eta Y^a D^a B_0^a L^a, \\ Y^b = M^{bP} A_0^b L^b + X^I \tau_1^I L_0^b A_0^b L^b - X^{II} \tau_1^{II} L_0^b A_0^b L^b + \eta Y^b D^b B_0^b L^b, \\ Y^c = M^{cP} A_0^c L^c + X^{II} \tau_1^{II} L_0^c A_0^c L^c - X^{III} \tau_1^{III} L_0^c A_0^c L^c + \eta Y^c D^c B_0^c L^c, \\ Y^d = M^{dP} A_0^d L^d + X^{III} \tau_1^{III} L_0^d A_0^d L^d - X^{IV} \tau_1^{IV} L_0^d A_0^d L^d + \eta Y^d D^d B_0^d L^d, \\ Y^e = M^{eP} A_0^e L^e + X^{IV} \tau_1^{IV} L_0^e A_0^e L^e + \eta Y^e D^e B_0^e L^e. \end{cases}$$

Po uwzględnieniu równości

$$M^P A L = M^P C_0 = Y^P$$

i po odpowiednich przekształceniach układ równań (32) przyjmuje postać

$$(33) \quad \begin{cases} Y^a = Y^{aP} - X^I \tau_1^I Q^a + \eta Y^a G_0^a, \\ Y^b = Y^{bP} + X^I \tau_1^I Q^b - X^{II} \tau_1^{II} Q^b + \eta Y^b G_0^b, \\ Y^c = Y^{cP} + X^{II} \tau_1^{II} Q^c - X^{III} \tau_1^{III} Q^c + \eta Y^c G_0^c, \\ Y^d = Y^{dP} + X^{III} \tau_1^{III} Q^d - X^{IV} \tau_1^{IV} Q^d + \eta Y^d G_0^d, \\ Y^e = Y^{eP} + X^{IV} \tau_1^{IV} Q^e + \eta Y^e G_0^e. \end{cases}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(34) \quad Y = \begin{Bmatrix} Y^a \\ Y^b \\ Y^c \\ Y^d \\ Y^e \end{Bmatrix}, \quad Y^P = \begin{Bmatrix} Y^{aP} \\ Y^{bP} \\ Y^{cP} \\ Y^{dP} \\ Y^{eP} \end{Bmatrix}, \quad G_0 = \begin{Bmatrix} G_0^a & & & & \\ & G_0^b & & & \\ & & G_0^c & & \\ & & & G_0^d & \\ & & & & G_0^e \end{Bmatrix},$$

$$Q_0^r = \begin{Bmatrix} Q^a & -Q^b & & & \\ & Q^b & -Q^c & & \\ & & Q^c & -Q^d & \\ & & & Q^d & -Q^e \end{Bmatrix}$$

równania (33) możemy przedstawić w postaci zwartej

$$(35) \quad Y = Y^P X \tau_1 Q_0^r + \eta Y G_0.$$

Układ warunków równości ugięć prętów w miejscach wspólnych poprzeczek przedstawi się w postaci

$$(36) \quad \begin{cases} Y^a \tau_1^I = Y^b \tau_1^I, \\ Y^b \tau_1^{II} = Y^c \tau_1^{II}, \\ Y^c \tau_1^{III} = Y^d \tau_1^{III}, \\ Y^d \tau_1^{IV} = Y^e \tau_1^{IV}. \end{cases}$$

Wzory (36) możemy przedstawić w postaci

$$(37) \quad \begin{Bmatrix} Y^a \\ Y^b \\ Y^c \\ Y^d \\ Y^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1^I & & & & \\ -\tau_1^I & \tau_1^{II} & & & \\ & -\tau_1^{II} & \tau_1^{III} & & \\ & & -\tau_1^{III} & \tau_1^{IV} & \\ & & & -\tau_1^{IV} & \end{Bmatrix} = \{0\}$$

albo

$$(38) \quad Y\tau_1^r = \{0\}.$$

Po podstawieniu do wzoru (38) na miejscu Y jego wartości stojącej po prawej stronie równania (35) otrzymamy

$$Y^P\tau_1^r - X\tau_1 Q_0^r \tau_1^r + \eta YG_0 \tau_1^r = \{0\},$$

skąd

$$X(\tau_1^r Q_0^r \tau_1) = Y^P\tau_1^r + \eta YG_0 \tau_1^r,$$

albo

$$(39) \quad XQ_0^{rr} = Y^P\tau_1^r + \eta YG_0 \tau_1^r,$$

gdzie

$$(40) \quad Q_0^{rr} = \tau_1^r Q^r \tau_1.$$

Równanie (39) przedstawia przy pięciu prętach i przy podziale prętów punktami 1, 2, 3 i 4 na 3 odcinki układ $5 \cdot 4 = 20$ równań algebraicznych, wśród których jest tyle równań niezależnych, ile jest poprzeczek w ustroju, tj. ile jest niewiadomych x ; pozostałe zaś równania są tożsamościami typu $0 = 0$. Równania niezależne określają jednoznacznie niewiadome siły x w poprzeczkach.

Krakowian Q_0^{rr} nie ma odwrotności. Jednak układ niewiadomych X w równaniach (39) zostaje jednoznacznie określony przez znalezienie pewnego krakowianu, który oznaczmy przez T_0 . Sposób określenia krakowianu T_0 wyjaśnimy dalej bezpośrednio w przykładach. Tutaj podkreślimy tylko, że krakowiany Q_0^{rr} i T_0 są symetryczne i że spełniają one następujące zależności:

$$(41) \quad T_0 Q_0^{rr} = T_0 Q^{rr} = T Q_0^{rr} = T Q^{rr} = Q_0^{rr} T_0 = Q_0^{rr} T = Q^{rr} T_0 = Q^{rr} T = \tau_1 = (\tau_1)_0.$$

Mnożymy obecnie obydwie strony równania (39) przez T_0 i otrzymujemy

$$XQ_0^{rr} T_0 = Y^P\tau_1^r T_0 + \eta YG_0 \tau_1^r T_0.$$

Ponieważ zgodnie z zależnościami (41)

$$XQ_0^{rr} T_0 = X(T_0 Q^{rr}) = X\tau_1,$$

przeto otrzymujemy

$$(42) \quad X\tau_1 = Y^P\tau_1^r T_0 + \eta YG_0 \tau_1^r T_0.$$

Równanie (42) określa wszystkie niewiadome siły x w poprzeczkach, stanowi zatem rozwiązanie zagadnienia.

Wstawienie wartości $X\tau_1$ według wzoru (42) do równania (35) pozwala na ustalenie ogólnej postaci równania ugięć Y :

$$Y = Y^P - (Y^P\tau_1^r T_0 + \eta YG_0 \tau_1^r T_0) Q_0^r + \eta YG_0,$$

co po przekształceniach może być przedstawione w postaci [identycznej z (13)]

$$(43) \quad Y(\tau - \eta G_0^r) = Y^P H_0^r,$$

gdzie

$$(44) \quad \begin{cases} G_0^r = G_0 - Q_0^r T(\tau_1^r)_0 G, \\ H_0^r = \tau - Q_1^r T(\tau_1^r)_0. \end{cases}$$

Równania (43) i (44) odnoszą się do ustrojów o dowolnej ilości prętów zamocowanych i poprzeczek.

Przy rozpatrywaniu zagadnień stateczności interesować nas będzie tylko krakowian stateczności G_0^r . Przy poszukiwaniu wpływu sił osiowych mniejszych od krytycznych wykonujemy dalsze przekształcenie równania (43). W tym przypadku parametr $N = \eta$ ma wartość mniejszą od najmniejszej krytycznej i krakowian $(\tau - \eta G_0^r)$ posiada odwrotność. Dla wyodrębnienia Y z równania (43) mnożymy je obustronnie

$$Y(\tau - \eta G_0^r)(\tau - \eta G^r)^{-1} = Y^P H_0^r (\tau - \eta G^r)^{-1}$$

i po odpowiednim przekształceniu otrzymujemy

$$(45) \quad Y = Y^P H_0^r (\tau - \eta G^r)^{-1}.$$

Wzór powyższy określa więc ugięcia Y przy siłach osiowych mniejszych od krytycznych.

5. Wzór na ugięcia ustroju złożonego z dowolnej ilości prętów. Algorytm krakowianowy

Wzór ogólny (43) na ugięcia Y ustroju złożonego z dowolnej ilości prętów zamocowanych połączonych przegubowo poprzeczkami przedstawimy w postaci rozwiniętej, przydatnej do celów rachunkowych.

Postać tę wyprowadzimy dla układu złożonego z pięciu prętów (rys. 10). Przy tej ilości prętów ujawni się już prawo ogólne dla układów o dowolnej ilości prętów. Rozwiemy więc wzory (44) na H_0^r i G_0^r w oparciu o wyniki uzyskane w p. 4. Dla uzyskania krakowianu T_0 występującego we wzorach (44) należy ustalić postać rozwiniętą krakowianu Q_0^{rr} określonego za pomocą wzoru (40).

W oparciu o wzory (30), (34), (37) i (40) otrzymujemy

$$(46) \quad Q_0^{rr} = \tau_1^r Q^r \tau_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_1^I & & & & \\ -\tau_1^I & \tau_1^{II} & & & \\ & -\tau_1^{II} & \tau_1^{III} & & \\ & & -\tau_1^{III} & \tau_1^{IV} & \\ & & & -\tau_1^{IV} & \tau_1^V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^a & & & & \\ -Q^b & Q^b & & & \\ & -Q^c & Q^c & & \\ & & -Q^d & Q^d & \\ & & & -Q^e & Q^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^I & & & & \\ & \tau_1^{II} & & & \\ & & \tau_1^{III} & & \\ & & & \tau_1^{IV} & \\ & & & & \tau_1^V \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_1^I(Q^a + Q^b)\tau_1^I & -\tau_1^{II}Q^b\tau_1^I & & & \\ -\tau_1^I Q^b \tau_1^{II} & \tau_1^{II}(Q^b + Q^c)\tau_1^{II} & -\tau_1^{III}Q^c\tau_1^{II} & & \\ & -\tau_1^{II}Q^c\tau_1^{III} & \tau_1^{III}(Q^c + Q^d)\tau_1^{III} & -\tau_1^{IV}Q^d\tau_1^{III} & \\ & & -\tau_1^{III}Q^d\tau_1^{IV} & \tau_1^{IV}(Q^d + Q^e)\tau_1^{IV} & \\ & & & & \tau_1^V(Q^e) \end{pmatrix}.$$

Dla wzoru (46) możemy przyjąć oznaczenia

$$(47) \quad Q_0^{rr} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{rr} & Q_{21}^{rr} & & & \\ Q_{12}^{rr} & Q_{22}^{rr} & Q_{32}^{rr} & & \\ & Q_{23}^{rr} & Q_{33}^{rr} & Q_{43}^{rr} & \\ & & Q_{34}^{rr} & Q_{44}^{rr} & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Krakowian (46) jest, jak łatwo zauważyć, symetryczny. Budowa wyrazów na głównej przekątnej wskazuje bezpośrednio, że są to elementy symetryczne (por. [2]). Symetria pozostałych elementów wynika z zależności typu

$$Q_{23}^{rr} = (Q_{32}^{rr})_0,$$

ponieważ (wobec symetrii krakowianów τ_1^{II} , τ_1^{III} oraz Q^c) możemy napisać

$$(Q_{32}^{rr})_0 = \tau(-\tau_1^{\text{III}} Q^c \tau_1^{\text{II}}) = -\tau_1^{\text{II}} Q^c \tau_1^{\text{III}} = Q_{23}^{rr}.$$

Jak już zaznaczyliśmy, krakowian Q_0^{rr} nie ma odwrotności, lecz można mu przyporządkować krakowian T_0 . Szczegółowe rozważania na ten temat podane są w pracy [3]. Tutaj ograniczymy się do podania ogólnej postaci krakowianu T_0 .

Rozwinięta postać krakowianu symetrycznego T_0 jest następująca:

$$(48) \quad T_0 = T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} & T_{41} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{42} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{43} \\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} \end{pmatrix}.$$

Możemy więc obecnie napisać rozwiniętą postać iloczynu krakowianowego $Q_0^r T(\tau_1^r)_0$ występującego we wzorach (44). Na podstawie wzorów (34), (37) i (48) otrzymujemy

$$(49) \quad \tilde{Q}_0^r T(\tau_1^r) = \begin{pmatrix} Q^a & -Q^b & & & \\ & Q^b & -Q^c & & \\ & & Q^c & -Q^d & \\ & & & Q^d & -Q^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} & T_{41} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{42} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{43} \\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^{\text{I}} & -\tau_1^{\text{I}} & & & \\ & \tau_1^{\text{II}} & -\tau_1^{\text{II}} & & \\ & & \tau_1^{\text{III}} & -\tau_1^{\text{III}} & \\ & & & \tau_1^{\text{IV}} & -\tau_1^{\text{IV}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^a T_{11} & -Q^b(T_{11}-T_{12}) & -Q^c(T_{12}-T_{13}) \\ -Q^a(T_{11}-T_{21}) & Q^b(T_{11}-T_{12}-T_{21}+T_{22}) & Q^c(T_{12}-T_{13}-T_{22}+T_{23}) \\ -Q^a(T_{21}-T_{31}) & Q^b(T_{21}-T_{22}-T_{31}+T_{32}) & Q^c(T_{22}-T_{23}-T_{32}+T_{33}) \\ -Q^a(T_{31}-T_{41}) & Q^b(T_{31}-T_{32}-T_{41}+T_{42}) & Q^c(T_{32}-T_{33}-T_{42}+T_{43}) \\ -Q^a T_{41} & Q^b(T_{41}-T_{42}) & Q^c(T_{42}-T_{43}) \\ & -Q^d(T_{13}-T_{14}) & -Q^e T_{14} \\ & Q^d(T_{13}-T_{14}-T_{23}+T_{24}) & Q^e(T_{14}-T_{24}) \\ & Q^d(T_{23}-T_{24}-T_{33}+T_{34}) & Q^e(T_{24}-T_{34}) \\ & Q^d(T_{33}-T_{34}-T_{43}+T_{44}) & Q^e(T_{34}-T_{44}) \\ & Q^d(T_{43}-T_{44}) & Q^e T_{44} \end{pmatrix}.$$

Należy zaznaczyć, że we wzorze (49) nie występują selektory τ_1^I , τ_1^{II} , τ_1^{III} i τ_1^{IV} . Wynika to z budowy przekątnej selektorów i związanych z tym zależności typu

$$(50) \quad \begin{cases} T_{11} \tau_1^I = T_{11}, & \tau_1^I T_{11} = (T_{11})_0 = T_{11}, \\ T_{21} \tau_1^I = T_{21}, & \tau_1^I T_{21} = (T_{21})_0 = T_{12}, \\ T_{12} \tau_1^{II} = T_{12}, & \tau_1^{II} T_{12} = (T_{12})_0 = T_{21}, \\ T_{22} \tau_1^{II} = T_{22}, & \tau_1^{II} T_{22} = (T_{22})_0 = T_{22}. \end{cases}$$

Obliczamy następnie iloczyn występujący we wzorze (44) w krakowianie G_0^r z wykorzystaniem oznaczenia (34) dla G . Mamy więc

$$(51) \quad Q_0^r T(\tau_1^r)_0 G = Q_0^r T(\tau_1^r)_0 \begin{pmatrix} G^a & & & & \\ & G^b & & & \\ & & G^c & & \\ & & & G^d & \\ & & & & G^e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^a T_{11} G^a & -Q^b(T_{11}-T_{12}) G^a & -Q^c(T_{12}-T_{13}) G^a \\ -Q^a(T_{11}-T_{21}) G^b & Q^b(T_{11}-T_{12}-T_{21}+T_{22}) G^b & Q^c(T_{12}-T_{13}-T_{22}+T_{23}) G^b \\ -Q^a(T_{21}-T_{31}) G^c & Q^b(T_{21}-T_{22}-T_{31}+T_{32}) G^c & Q^c(T_{22}-T_{23}-T_{32}+T_{33}) G^c \\ -Q^a(T_{31}-T_{41}) G^d & Q^b(T_{31}-T_{32}-T_{41}+T_{42}) G^d & Q^c(T_{32}-T_{33}-T_{42}+T_{43}) G^d \\ -Q^a T_{41} G^e & Q^b(T_{41}-T_{42}) G^e & Q^c(T_{42}-T_{43}) G^e \\ & -Q^d(T_{13}-T_{14}) G^a & -Q^e T_{14} G^a \\ & Q^d(T_{13}-T_{14}-T_{23}+T_{24}) G^b & Q^e(T_{14}-T_{24}) G^b \\ & Q^d(T_{23}-T_{24}-T_{33}+T_{34}) G^c & Q^e(T_{24}-T_{34}) G^c \\ & Q^d(T_{33}-T_{34}-T_{43}+T_{44}) G^d & Q^e(T_{34}-T_{44}) G^d \\ & Q^d(T_{43}-T_{44}) G^e & Q^e T_{44} G^e \end{pmatrix}.$$

Na podstawie wzorów (44), (49) i (51) możemy dla równania (43) na ugięcia Y zestawić grupę równań w postaci ogólnej i szczegółowej, przydatnej do bezpośredniego zastosowania

Wyniki zestawienia przedstawia wzór

$$Y(\tau - \eta G_0^r) = Y^P H_0^r,$$

albo

$$Y\{\tau - \eta[G_0 - Q_0^r T(\tau_1)_0 G]\} = Y^P[\tau - Q_0^r T(\tau_1)_0],$$

albo też

$$(52) \quad Y \left[\tau - \eta \begin{pmatrix} G_0^a \\ G_0^b \\ G_0^c \\ G_0^d \\ G_0^e \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} Q^a T_{11} G^a & -Q^b(T_{11} - T_{12}) G^a & -Q^c(T_{12} - T_{13}) G^a \\ -Q^a(T_{11} - T_{21}) G^b & Q^b(T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22}) G^b & Q^c(T_{12} - T_{13} - T_{22} + T_{23}) G^b \\ -Q^a(T_{21} - T_{31}) G^c & Q^b(T_{21} - T_{22} - T_{31} + T_{32}) G^c & Q^c(T_{22} - T_{23} - T_{32} + T_{33}) G^c \\ -Q^a(T_{31} - T_{41}) G^d & Q^b(T_{31} - T_{32} - T_{41} + T_{42}) G^d & Q^c(T_{32} - T_{33} - T_{42} + T_{43}) G^d \\ -Q^a T_{41} G^e & Q^b(T_{41} - T_{42}) G^e & Q^c(T_{42} - T_{43}) G^e \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -Q^d(T_{13} - T_{14}) G^a & -Q^e T_{14} G^a \\ Q^d(T_{13} - T_{14} - T_{23} + T_{24}) G^b & Q^e(T_{14} - T_{24}) G^b \\ Q^d(T_{23} - T_{24} - T_{33} + T_{34}) G^c & Q^e(T_{24} - T_{34}) G^c \\ Q^d(T_{33} - T_{34} - T_{43} + T_{44}) G^d & Q^e(T_{34} - T_{44}) G^d \\ Q^d(T_{43} - T_{44}) G^e & Q^e T_{44} G^e \end{pmatrix} =$$

$$= Y^P \left[\tau - \begin{pmatrix} Q^a T_{11} & -Q^b(T_{11} - T_{12}) & -Q^c(T_{12} - T_{13}) \\ -Q^a(T_{11} - T_{21}) & Q^b(T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22}) & Q^c(T_{12} - T_{13} - T_{22} + T_{23}) \\ -Q^a(T_{21} - T_{31}) & Q^b(T_{21} - T_{22} - T_{31} + T_{32}) & Q^c(T_{22} - T_{23} - T_{32} + T_{33}) \\ -Q^a(T_{31} - T_{41}) & Q^b(T_{31} - T_{32} - T_{41} - T_{42}) & Q^c(T_{32} - T_{33} - T_{42} + T_{43}) \\ -Q^a T_{41} & Q^b(T_{41} - T_{42}) & Q^c(T_{42} - T_{43}) \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -Q^d(T_{13} - T_{14}) & -Q^e T_{14} \\ Q^d(T_{13} - T_{14} - T_{23} + T_{24}) & Q^e(T_{14} - T_{24}) \\ Q^d(T_{23} - T_{24} - T_{33} + T_{34}) & Q^e(T_{24} - T_{34}) \\ Q^d(T_{33} - T_{34} - T_{43} + T_{44}) & Q^e(T_{34} - T_{44}) \\ Q^d(T_{43} - T_{44}) & Q^e T_{44} \end{pmatrix} \right]$$

Celowe jest uporządkowanie kolejności postępowania przy wypisywaniu równania (52) dla ugięć Y .

Procedura postępowania, którą stanowi pewien algorytm, jest następująca:

1) Ustalenie krakowianów podstawowych L_0, A, B, C_0, Q, D i G_0 dla każdego z prętów jednoprzęsłowych zamocowanych, traktowanych jako układ samodzielny bez połączenia poprzeczkami; krakowiany Q^a, Q^b, \dots obliczamy na podstawie krakowianów ciężarów sprężystych typu A , tj. na podstawie wzorów $Q = LAL$.

2) Ustalenie krakowianu rozmieszczenia poprzeczek, tj. selektora τ_1 .

3) Zestawienie krakowianu blokowego Q_0^{rr} na podstawie wzoru (46); krakowian ten należy traktować jako wyjściowy do dalszych działań.

4) Znalezienie krakowianu T_0 dla krakowianu Q_0^{rr} według wzoru (48), co dalej zostanie wyjaśnione na przykładach.

5) Zestawienie postaci rozwiniętej równania ugięć Y według wzoru (52).

Analiza budowy wzoru (52), zestawionego dla układu z pięciu prętów, oraz wzoru (46) dla krakowianu Q_0^{rr} pozwala ustalić w pełni automatyczny sposób ich zestawienia w przypadkach ustrojów, złożonych z dowolnej ilości prętów zamocowanych, połączonych przegubowo dowolnym układem poprzeczek.

Należy przy tym odróżnić tryb postępowania przy ilości prętów zamocowanych większej od pięciu, i przy ilości mniejszej od pięciu.

Wzór (46) dla Q_0^{rr} ma budowę blokowo-trójwyrazową. Prostota i prawidłowość układu wskaźników przy poszczególnych wyrazach pozwalają na automatyczne zestawienie tego wzoru dla dowolnej, większej od pięciu liczby prętów zamocowanych, przez proste dodawanie pośrednich trójwyrazowych wierszy.

Prawe krakowiany blokowe obydwóch stron równania (52) nie posiadają elementów zerowych. Również i w tym wzorze prawidłowość tworzenia poszczególnych elementów pozwala na automatyczne zestawianie tego równania dla dowolnej, większej od pięciu, liczby prętów.

Automatyczne zestawianie wzorów dla układów złożonych z dwóch, trzech i czterech prętów wyjaśnimy na przykładzie układu złożonego z dwóch prętów zamocowanych.

Z krakowianu wyjściowego (46) dla pięciu prętów, a więc 25 elementów, wydzielamy górną lewą część złożoną z czterech elementów, tj.

$$(53) \quad Q_0^{rr} = \begin{Bmatrix} \tau_1^I (Q^a + Q^b) \tau_1^I & -\tau_1^{II} Q^b \tau_1^I \\ -\tau_1^I Q^b \tau_1^{II} & \tau_1^{II} (Q^a + Q^b) \tau_1^{II} \end{Bmatrix},$$

która, wobec tego że $\tau_1^{II} = \{0\}$, przyjmuje postać

$$(54) \quad Q_0^{rr} = \begin{Bmatrix} \tau_1^I (Q^a + Q^b) \tau_1^I \\ \cdot \end{Bmatrix}.$$

Krakowian T_0 dla krakowianu (54) ma postać

$$(55) \quad T = T_0 = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ \cdot \end{Bmatrix}.$$

Postać T_0 według wzoru (55) pozwala na automatyczne określenie krakowianów występujących we wzorze (52). Wystarczy wydzielenie z górnej lewej części tego wzoru krakowianów zbudowanych z czterech elementów i przyjęcie, że wszystkie T_{ik} z wyjątkiem T_{11} są zgodnie ze wzorem (55) równe zeru.

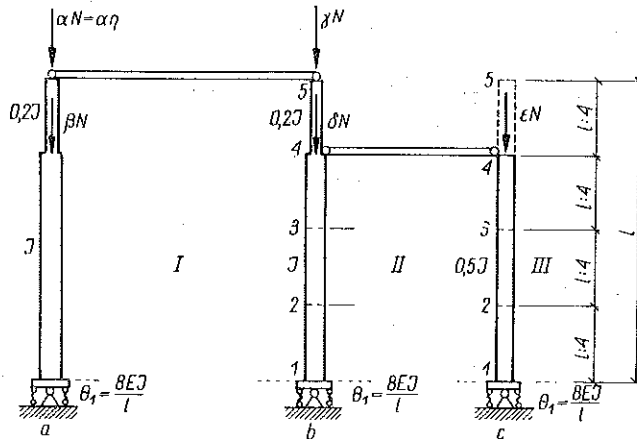
Otrzymujemy wtedy łatwo wynik w postaci wzoru

$$(56) \quad Y \left[\tau - \eta \left[\left[\begin{array}{c} G_0^a \\ G_0^a \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} Q^a T_{11} G^a & -Q^b T_{11} G^a \\ -Q^a T_{11} G^b & Q^b T_{11} G^b \end{array} \right] \right] \right] = \\ = Y^P \left[\tau - \left[\begin{array}{cc} Q^a T_{11} & -Q^b T_{11} \\ -Q^a T_{11} & Q^b T_{11} \end{array} \right] \right]$$

Analogicznie można otrzymać na podstawie wzorów (46), (48) i (52) równania rozwinięte dla ustrojów złożonych z trzech lub czterech prętów.

6. Siły krytyczne dla ramy złożonej z trzech zamocowanych prętów połączonych przegubowo poprzeczkami

Przebieg postępowania przy rozwiązaniu zadania za pomocą algorytmu krakowianowego zilustrujemy na przykładzie ramy przedstawionej na rys. 12 składającej się z prętów o różnych długościach, o przekrojach zmiennych schodkowo lub stałych, zamocowanych na podporach sprężysto i obciążonych w danym przypadku przez pięć sił osiowych. Parametrem krytycznym jest tu siła $N = \eta$.



Rys. 12

Dla uzyskania wszystkich krakowianów jednakowego stopnia (w danym przypadku piątego stopnia) słup niższy *c* został uzupełniony odcinkiem 4-5, który może być tylko wprowadzany myślowo lub może rzeczywiście istnieć (bez obciążenia).

Zadanie rozwiążemy posługując się krakowianem ciężarów sprężystych typu *A* i przy podziale prętów na 4 jednakowe odcinki.

Krakowiany podstawowe prętów a, b i c podajemy we wzorach następujących:

$$(57) \quad L^a = L^b = L^c = \frac{l}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix};$$

$$(58) \quad A^a = A^b = \frac{l}{24EJ} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 12 & 5 & \\ & & & 5 & 10 & \end{pmatrix}, \quad A^c = \frac{l}{24E \cdot 0,5J} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & \end{pmatrix};$$

$$(59) \quad C_0^a = C_0^b = L^a A^a = \frac{l^2}{96EJ} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 6 & 12 & 18 \\ & 1 & 6 & 12 \\ & & 1 & 14 \\ & & & 5 \end{pmatrix},$$

$$C_0^c = L^c A^c = \frac{l^2}{96E \cdot 0,5J} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 6 & 12 & 18 \\ & 1 & 6 & 12 \\ & & 1 & 6 \\ & & & 1 \end{pmatrix};$$

$$(60) \quad (C_0^a)^s = (C_0^b)^s = \frac{l^2}{96EJ} \begin{pmatrix} 2 + \frac{24}{m} & 5 + \frac{48}{m} & 8 + \frac{72}{m} & 11 + \frac{96}{m} \\ 1 & 6 & 12 & 18 \\ & 1 & 6 & 12 \\ & & 1 & 14 \\ & & & 5 \end{pmatrix},$$

$$(C_0^c)^s = \frac{l^2}{96E \cdot 0,5J} \begin{pmatrix} 2 + \frac{24}{m} & 5 + \frac{48}{m} & 8 + \frac{72}{m} & 11 + \frac{96}{m} \\ 1 & 6 & 12 & 18 \\ & 1 & 6 & 12 \\ & & 1 & 6 \\ & & & 1 \end{pmatrix};$$

$$(61) \quad D_0^a = \begin{pmatrix} & & \beta & \alpha \\ -a - \beta & & \beta & \alpha \\ & -a - \beta & \beta & \alpha \\ & & -a & \alpha \end{pmatrix}, \quad D_0^b = \begin{pmatrix} & & \delta & \gamma \\ -\gamma - \delta & & \delta & \gamma \\ & -\gamma - \delta & \delta & \gamma \\ & & -\gamma & \gamma \end{pmatrix},$$

$$D_0^c = \begin{pmatrix} & & \varepsilon & \\ -\varepsilon & & \varepsilon & \\ & -\varepsilon & \varepsilon & \end{pmatrix}.$$

Przy uwzględnieniu we wzorze (60), zgodnie z rys. 12, że współczynnik $m = 8$, otrzymamy dalsze krakowiany podstawowe:

$$(62) \quad Q^a = Q^b = (C_0^a)^s L^a = \frac{l^3}{384EJ} \begin{Bmatrix} 5 & 11 & 17 & 23 \\ 11 & 28 & 46 & 64 \\ 17 & 46 & 81 & 117 \\ 23 & 64 & 117 & 184 \end{Bmatrix};$$

$$(63) \quad Q^c = (C_0^c)^s L^c = \frac{l^3}{192EJ} \begin{Bmatrix} 5 & 11 & 17 & 23 \\ 11 & 28 & 46 & 64 \\ 17 & 46 & 81 & 117 \\ 23 & 64 & 117 & 176 \end{Bmatrix};$$

$$(64) \quad G_0^a = (C_0^a)^s D_0^a = \frac{l^2}{96EJ} \begin{Bmatrix} -a-\beta & -6a-6\beta & -12a-12\beta & -18a-18\beta \\ & -a-\beta & -6a-6\beta & -12a-12\beta \\ 6\beta & 18\beta & 35\beta-a & 53\beta-14a \\ 6a & 18a & 36a & 67a \end{Bmatrix};$$

$$G_0^b = (C_0^b)^s D_0^b = \frac{l^2}{96EJ} \begin{Bmatrix} -\gamma-\delta & -6\gamma-6\delta & -12\gamma-12\delta & -18\gamma-18\delta \\ & -\gamma-\delta & -6\gamma-6\delta & -12\gamma-12\delta \\ 6\delta & 18\delta & 35\delta-\gamma & 53\delta-14\gamma \\ 6\gamma & 18\gamma & 36\gamma & 67\gamma \end{Bmatrix};$$

$$(65) \quad G_0^c = (C_0^c)^s D_0^c = \frac{l^2}{48EJ} \begin{Bmatrix} -\varepsilon & -6\varepsilon & -12\varepsilon & -18\varepsilon \\ & -\varepsilon & -6\varepsilon & -12\varepsilon \\ 6\varepsilon & 18\varepsilon & 35\varepsilon & 53\varepsilon \end{Bmatrix};$$

Selektor rozmieszczenia w badanej ramie poprzeczek przedstawia się w formie

$$(66) \quad \tau_1 = \begin{Bmatrix} \tau_1^I \\ \tau_1^{II} \\ \tau_1^{III} \end{Bmatrix},$$

przy czym jego poszczególne bloki mają postać

$$(67) \quad \tau_1^I = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \tau_1^{II} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \tau_1^{III} = \{0\}.$$

Tablica 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	24 867 (α+β)	-174 474 (α+β)	-397 062 (α+β)	538 414 (α+β)	-64 800 (α+β)	-183 060 (α+β)	-341 172 (α+β)	-558 414 (α+β)	
	67 068 (α+β)	110 889 (α+β)	-113 238 (α+β)	-372 276 (α+β)	-43 200 (α+β)	-122 040 (α+β)	-227 448 (α+β)	-312 276 (α+β)	
	158 193 β+	533 974 β+	1 143 882 β+	1 644 219 β	190 800 β	539 010 β	1 004 562 β	1 644 219 β	
	78 246 α	217 728 α	322 899 α	-434 322 α	-50 400 α	-12 380 α	-265 356 α	-434 322 α	
	79 947 α	321 246 α	821 538 α	2 078 541 α	241 200 α	681 390 α	1 269 918 α	2 078 541 α	
	-68 310 (γ+δ)	-190 080 (γ+δ)	-347 490 (γ+δ)	-546 480 (γ+δ)	31 845 (γ+δ)	-158 070 (γ+δ)	-374 220 (γ+δ)	-546 480 (γ+δ)	
	-50 922 (γ+δ)	-141 696 (γ+δ)	-259 038 (γ+δ)	-407 376 (γ+δ)	64 540 (γ+δ)	102 945 (γ+δ)	-130 248 (γ+δ)	-407 376 (γ+δ)	
	202 032 δ	562 176 δ	1 027 728 δ	1 616 256 δ	138 835 δ+	493 820 δ+	1 081 988 δ+	1 616 256 δ	
	-75 555 γ	-210 240 γ	-384 345 γ	-604 440 γ	+53 965 γ	151 820 γ	205 740 γ	-604 440 γ	
	277 587 γ	772 416 γ	1 412 013 γ	2 220 696 γ	84 870 γ	342 000 γ	876 258 γ	2 220 696 γ	
	-64 584 ε	-179 712 ε	-328 536 ε	-516 672 ε	-85 560 ε	-226 560 ε	-386 886 ε	-576 672 ε	
	-32 292 ε	-89 856 ε	-164 268 ε	-258 336 ε	-42 780 ε	-113 280 ε	-193 428 ε	-258 336 ε	
	188 310 ε	524 160 ε	958 320 ε	1 506 960 ε	249 550 ε	660 800 ε	1 128 330 ε	1 506 960 ε	

c. d. Tablice 1

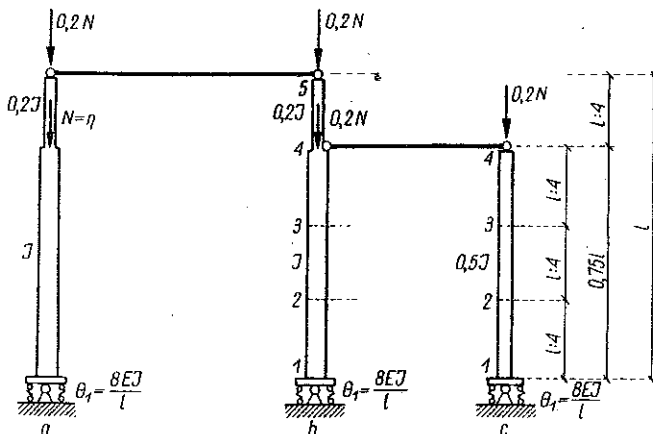
11	12	13	14	15
	-71 604 (α+β)	-193 752 (α+β)	-341 172 (α+β)	-492 804 (α+β)
	-47 736 (α+β)	-129 168 (α+β)	-227 448 (α+β)	-328 536 (α+β)
	210 834 β	570 492 β	1 004 562 β	1 451 034 β
	-55 692 α	-150 696 α	-265 356 α	-383 292 α
	266 526 α	721 188 α	1 269 918 α	1 834 326 α
	-78 540 (γ+δ)	-212 520 (γ+δ)	-374 220 (γ+δ)	-540 540 (γ+δ)
	-27 836 (γ+δ)	-73 968 (γ+δ)	-130 248 (γ+δ)	-188 136 (γ+δ)
	227 086 δ+	619 468 δ+	1 081 998 δ+	1 562 886 δ+
	43 180 γ	416 840 γ	205 740 γ	297 190 γ
	183 906 γ	497 628 γ	876 258 γ	1 265 706 γ
	148 817 ε	-96 276 ε	-386 856 ε	-659 772 ε
	150 144 ε	254 802 ε	-193 428 ε	-784 296 ε
	32 980 ε	356 540 ε	1 128 330 ε	2 000 070 ε

Wszystkie krakowiany występujące we wzorze (70) zostały już obliczone. Po wykonaniu działań przewidzianych w tym wzorze krakowian G_0^r przedstawia się w postaci

$$(76) \quad G_0^r = \frac{l^2}{96 \cdot 75735 EJ} \tilde{G}_0^r,$$

gdzie G_0^r jest krakowianem, którego elementy są zestawione w tabelicy 1.

We wzorze (76) kolumny 5 i 10, jak również 9 i 14 są identyczne, co odpowiada jednakowym przesunięciom punktów 5 prętów a i b oraz punktów 4 prętów b i c układu według rys. 12. W przypadku braku odcinka 4-5 pręta c kolumna 15 wzoru (76) jest zbędna. Kolumna ta określałaby postać przesunięcia pomyślanego lub rzeczywistego wierzchołka piątego pręta.



Rys. 13

Krakowian G_0^r według wzoru (76) stanowi podstawę do obliczenia parametru krytycznego ramy typu przedstawionego na rys. 12 przy dowolnych współczynnikach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i ϵ .

Rozpatrzmy przypadek szczególny obciążenia badanej ramy siłami osiowymi uwidocznionymi na rys. 13.

Układ sił osiowych odpowiada założeniu

$$(77) \quad \beta = 1, \quad \alpha = \gamma = \delta = \epsilon = 0,2.$$

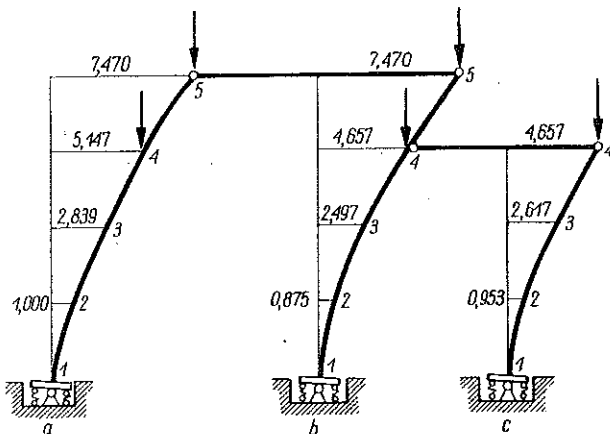
Wzór (76) przyjmuje przy tych założeniach postać przedstawioną we wzorze (78). Zgodnie z wyżej podanymi uwagami wyrazy ostatniej kolumny wzoru (76) zostały tu przyjęte jako równe zero

$$(78) \quad G_0^r = \frac{l^2}{72 \cdot 705,60 EJ} \tilde{G}_0^r.$$

Elementy krakowianu \tilde{G}_0^r zestawiliśmy w tabelicy 2.

Wielkość parametru krytycznego obliczamy drogą iteracji. W jej wyniku otrzymuje się wektor odpowiadający największemu pierwiastkowi

$$U_1 = \tau \{0; 1; 2,839; 5,147; 7,470; 0; 0,875; 2,497; 4,657; 7,470; 0; 0,953; 2,617; 4,657\}$$



Rys. 14

oraz najmniejszą wartość parametru krytycznego

$$q = 18\,744,77$$

$$(79) \quad N_{min} = (72\,705,60 : 18\,744,77) EJ : l^2 = 3,8787 EJ : l^2.$$

Postać linii ugięcia układu obciążonego jak na rys. 13 odpowiadająca wektorowi U_1 przedstawiona jest rys. 14.

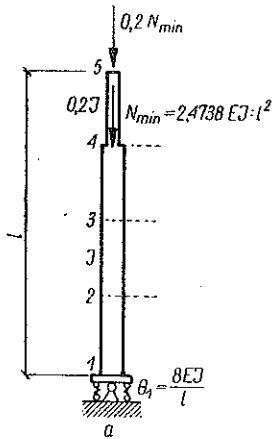
Tablica 2

298	-2094	-4765	-6706	-778	-2171	-4094	-6705	-859	-2325	-4094
805	1331	-1359	-4467	-518	-7465	-2729	-4467	-513	-1550	-2729
1738	5825	12083	15574	1807	5105	9515	75574	1997	5404	9515
160	642	1643	4157	482	1363	2540	4151	533	7442	2540
-273	-760	-1390	-2186	127	-632	-1491	-2186	-314	-850	-1497
-204	-567	-1036	-1630	258	412	-524	-1630	-109	-296	-521
253	704	1287	2024	386	1291	2575	2024	541	1468	2575
555	1545	2824	4441	170	684	1753	4441	368	995	1753
-129	-359	-657	-1033	-171	-453	-774	-1033	298	-793	-774
-65	-180	-389	-517	-86	-227	-387	-577	300	510	-387
377	1048	1916	3014	499	1322	2257	3014	66	713	2257

Wskazane jest zaznaczyć, że w przypadku pręta pojedynczego o kształcie pręta α (rys. 15) najmniejsza wartość parametru krytycznego (której obliczenia nie podajemy) wynosi

$$(80) \quad N_{min} = 2,4738 EJ : l^2.$$

Wartość według wzoru (79) jest 1,56 razy większa, aniżeli według wzoru (80). Z porównań tych wielkości można wnioskować, jak wielki i korzystny wpływ na zwiększenie wartości parametru krytycznego ma niejednoczesne maksymalne obciążenie prętów połączonych w jeden układ ramowy. Zagadnienie to autor omawia w osobnej rozprawie.



Rys. 15

7. Zastosowanie metody odkształceń do ram z poprzeczkami przegubowymi

Podany w p. 5 sposób postępowania przy rozwiązywaniu zagadnień stateczności ustrojów ramowych, składających się z prętów o dowolnym kształcie i połączonych przegubowo poprzeczkami, został oparty na metodzie sił. Wskazane więc jest rozważenie, czy i w jakich przypadkach w ustrojach tego typu może być przydatna metoda odkształceń. Zaznaczymy przy tym, że powyższe zagadnienie zasługuje na odrębne opracowanie; w tym miejscu ograniczymy się jedynie do ogólnych uwag.

W metodzie odkształceń występują w prętach ściskanych (przy uwzględnieniu wpływu sił osiowych na momenty i siły poprzeczne) pewne poprawkowe współczynniki. W przypadkach prętów o stałym momencie bezwładności J współczynniki te mają postać rozmaitych funkcji parametru

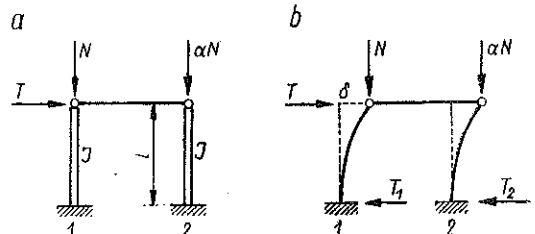
$$v = l \sqrt{N/EJ}.$$

Wartości tych funkcji podawane są w różnych publikacjach, jak np. [4] i [6], w postaci gotowych tablic. Wyprowadzenie tych współczynników dla prętów o zmiennym J związane jest z nadmiernymi

trudnościami, w związku z czym zastosowanie metody odkształceń ogranicza się praktycznie do ustrojów z prętami o stałym J .

Niezależnie od powyższego w metodzie odkształceń występują specyficzne trudności, zwiększające się szybko w miarę wzrostu liczby równań i prętów. Wyjaśnimy to na konkretnych prostych przykładach.

Znajdziemy metodą odkształceń najmniejszy parametr krytyczny w układzie ramowym przedstawionym na rys. 16.



Rys. 16

W ustroju tym występuje jedna niewiadoma, którą jest przesunięcie poziome δ . Opiaramy się na oznaczeniach, wzorach i tablicach podanych przez A. F. SMIRNOWA, [6]. Mamy więc

$$(81) \quad \begin{cases} v = l \sqrt{N/EJ} & \text{dla pręta 1,} \\ v' = l \sqrt{\alpha N/EJ} = \sqrt{\alpha} v & \text{dla pręta 2.} \end{cases}$$

Siły tnące przy uwzględnieniu współczynników poprawkowych w postaci funkcji typu η_1 są równe

$$(82) \quad T_1 = \delta \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v), \quad T_2 = \delta \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(\sqrt{\alpha}v).$$

Równanie piętra ma postać

$$(83) \quad \delta \frac{3EJ}{l^3} [\eta_1(v) + \eta_1(v\sqrt{\alpha})] = T.$$

Najmniejszą siłę krytyczną znajdziemy przez przyrównanie wyrazu w nawiasach kwadratowych do zera:

$$(84) \quad \eta_1(v) + \eta_1(v\sqrt{\alpha}) = 0.$$

Rozpatrzmy przykład liczbowy przy $\alpha = 0,25$ przy którym równanie (84) przyjmuje postać

$$(85) \quad \eta_1(v) + \eta_1(0,5v) = 0.$$

Drogą prób i za pomocą interpolacji odpowiednich wierszy dla funkcji η_1 tablic SMIRNOWA otrzymujemy pierwiastki tego równania $v = 1,98$, $0,5v = 0,99$.

Otrzymujemy więc

$$v = l \sqrt{N_{min}/EJ} = 1,98,$$

skąd

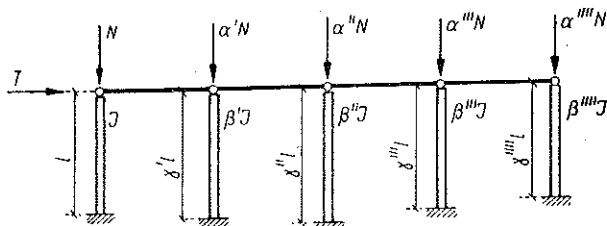
$$(86) \quad N_{min} = 3,920 \frac{EJ}{l^2}.$$

W przypadku ramy nieco bardziej skomplikowanej, jak np. według rys. 17, mielibyśmy

$$(87) \quad \begin{cases} v = l \sqrt{\frac{N}{EJ}}, & v' = \gamma' l \sqrt{\frac{\alpha' N}{E\beta' J}} = \gamma' \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'}} v, \\ v'' = \gamma'' \sqrt{\frac{\alpha''}{\beta''}} v, & v''' = \gamma''' \sqrt{\frac{\alpha'''}{\beta'''}} v, & v'''' = \gamma'''' \sqrt{\frac{\alpha''''}{\beta''''}} v. \end{cases}$$

Równanie piętra ma tu postać

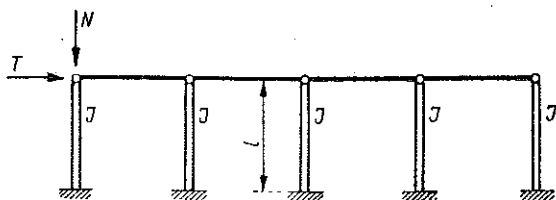
$$(88) \quad \delta \frac{3EJ}{l^3} \left[\eta_1(v) + \frac{\beta'}{(\gamma')^3} \eta_1 \left(\gamma' \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'}} v \right) + \frac{\beta''}{(\gamma'')^3} \eta_1 \left(\gamma'' \sqrt{\frac{\alpha''}{\beta''}} v \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta'''}{(\gamma''')^3} \eta_1 \left(\gamma''' \sqrt{\frac{\alpha'''}{\beta'''}} v \right) + \frac{\beta''''}{(\gamma'''')^3} \eta_1 \left(\gamma'''' \sqrt{\frac{\alpha''''}{\beta''''}} v \right) \right] = T.$$



Rys. 17

Jest oczywiste, że poszukiwanie w danym przypadku (w którym występuje tylko jedno równanie i jedna niewiadoma) takiej wartości v , przy której wyraz w nawiasach kwadratowych staje się równy zero, związane jest z wykonaniem szeregu bardzo pracochłonnych prób, pomimo że mamy tu do czynienia tylko z jednym równaniem i jedną niewiadomą.

W układach, w których występuje nie jedno, lecz większa liczba równań i niewiadomych, trudności te oczywiście jeszcze bardziej wzrastają, gdyż w tych przypadkach próby należy przeprowadzać przez wstawianie próbnych wartości różnego rodzaju funkcji v do przyrównanych do zera wyznaczników.



Rys. 18

Niezależnie od powyższych trudności ujemną stroną metody odkształceń jest brak pewności, czy uzyskuje się siły krytyczne o poszukiwanej wartości najmniejszej.

W prostych przypadkach metoda odkształceń może być jednak bardzo przydatna. Takim

przypadkiem jest np. rama przedstawiona na rys. 16. Bardzo proste rozwiązanie otrzymuje się również dla układu z rys. 18, który możemy potraktować jako szczególny przypadek układu przedstawionego na rys. 17.

Współczynniki uwidocznione na rys. 17 przyjmują w danym przypadku wartości

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \alpha'''' = 0, \\ \beta' = \beta'' = \beta''' = \beta'''' = 1, \\ \gamma' = \gamma'' = \gamma''' = \gamma'''' = 1.$$

Wobec powyższego

$$v' = v'' = v''' = v'''' = 0$$

oraz zgodnie z tablicami Smirnowa

$$\eta_1(v') = \eta_1(v'') = \eta_1(v''') = \eta_1(v'''') = 1.$$

Przyrównany do zera wyraz ujęty w nawiasy kwadratowe w równaniu (88) przyjmuje tu postać

$$(89) \quad \eta_1(v) + 4 = 0.$$

Z tablic otrzymujemy

$$v = l \sqrt{N_{min}/EJ} = 3,352,$$

wobec czego

$$(90) \quad N_{min} = 11,21 \frac{EJ}{l^2}.$$

Liczne przykłady na zastosowanie metody odkształceń przy rozwiązywaniu zagadnień stateczności podane są w pracy W. Nowackiego, [5].

8. Uwagi końcowe

Jak było już zaznaczone w p. 1, rozpatrzone tu ustroje składające się ze słupów o zmiennych przekrojach połączonych przegubowo poprzeczkami spotykane są w budownictwie w skali masowej. W praktyce inżynierskiej zagadnienie możliwości utraty stateczności tego rodzaju układów jest na ogół uwzględniana przez przyjęcie przybliżonych zastępczych wielkości momentów bezwładności i swobodnych długości wybočeníowych, nie odzwierciedlających w sposób dostatecznie uzasadniony ani rzeczywistego przebiegu zmienności przekrojów prętów, ani wpływu licznych pozostałych prętów ustroju, połączonych z prętem rozpatrywanym w jedną całość konstrukcyjną. Praktyka ta prowadzi do przyjmowania zbyt ostrożnych, a zatem nieekonomicznych założeń.

Istnieje więc potrzeba opracowania szeregu nomogramów dla różnych grup najczęściej spotykanych ustrojów i rodzajów obciążeń. Podany tu algorytm krakowianowy może służyć jako wygodne narzędzie do sporządzenia tego rodzaju nomogramów, albo też do bezpośredniego zastosowania w konkretnych przypadkach.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. DOWGIRD, *Prefabrykacja w budownictwie przemysłowym*, Warszawa 1957 Arkady.
- [2] Z. DOWGIRD, *Krakowiany i ich zastosowanie w mechanice budowli*, Warszawa 1956 PWN.
- [3] Z. DOWGIRD, R. DOWGIRD, *Algebra liniowa w zagadnieniach statycznej niewyznaczalności i stateczności* (w druku).
- [4] S. BŁASZKOWIAK, Z. KAĆZKOWSKI, *Metoda Crossa*, Warszawa 1959 PWN.
- [5] W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, Warszawa 1960 PWN.
- [6] А. Ф. Смирнов, *Статическая и динамическая устойчивость сооружений*, Москва 1947.

УСТОЙЧИВОСТЬ СБОРНЫХ И СТАЛЬНЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ В ПРОМЫШЛЕННОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

В работе рассматривается устойчивость сооружений, особенно часто встречающихся в современном промышленном строительстве. Этими системами являются рамные, сборные или стальные конструкции, составленные из колонн, соединенных шарнирно балками (ригелями).

На рис. 1 и 2 показаны статические схемы самых простых, конкретных примеров такого рода сооружений. Разнообразие возможных систем иллюстрирует рис. 3, который следует понимать, как теоретическую схему, в которой на одном рисунке собраны всевозможные варианты рамных систем, не встречаемых в общем, одновременно в одной конструкции. Рамы состоят из упруго (или жестко) закрепленных колонн, с любым законом изменения моментов инерции, соединенных между собой, опирающимися на них шарнирно балками, или плитами *тнст*. Нагрузка колонн может состоять из любых, постоянных и временных, вертикальных и горизонтальных нагрузок, приложенных к колоннам непосредственно или же передаваемых через горизонтальные балки.

Пространственная схема (рис. 3) сводится к плоским схемам, показанным на рис. 4. Задача состоит в исследовании устойчивости плоских рамных систем типа показанного на рис. 4.

Задача решается с помощью матричного исчисления. Автор пользуется краковияновым вариантом этого исчисления, который в конкретных задачах математической физики (в данном случае — строительной механики), является гораздо более выгодным математическим аппаратом.

В работе приводится единый метод исследования критических параметров плоских рамных сооружений (рис. 4), названный краковияновым алгоритмом, [3].

В качестве исходной, основной схемы принимаются статически определимые, упруго или жестко закрепленные стержни (колонны) с переменными (непрерывными или уступчатыми) сечениями (рис. 5). Для всех колонн рамы следует составить так наз. основные краковияны [2] и [3]: краковияны влияния моментов L , краковияны упругих грузов типа A (для поперечных грузов) или типа B (для продольных грузов), краковияны распределения продольных грузов D , а также произведения краковиянов: $C_0 = LA$ (или $C_0 = LB$), $Q = LAL$ и так наз. краковияны устойчивости стержня $G_0 = C_0 D_0$.

Решение вопроса устойчивости рам с любым числом колонн и балок проводится на основании примера рамы с пятью колоннами (рис. 10). Результат представлен в замкнутом виде в краковияновой блочной формуле (52). Решение задачи состоит в приравнении к нулю детерминанта краковияны устойчивости целой рамной системы G_0^r формулы (52).

В главе 6 рассматривается численный пример применения краковиянового алгоритма к исследованию устойчивости рамы, показанной на рис. 12.

Решение задачи основывается на методе сил. Из рассуждений приведенных в главе 7 видно, что применение к рамам, согласно рис. 4, метод деформаций приводит к очень трудоемким вычислениям.

S u m m a r y

STABILITY OF PREFABRICATED AND STEEL FRAME STRUCTURES OF INDUSTRIAL BUILDINGS

The object of the present paper is the stability of a structure often met with in modern industrial building and made in reinforced concrete, prefabricated or steel version. Structures of the type in question may be called frames with hinged transverse members.

Figures 1 and 2 represent some simplest layouts. The variety of the layouts possible is illustrated by Fig. 3 the purpose of which is to show in one figure many variants not applied simultaneously in general. We are concerned with columns with variable (continuously or in a jump-like manner) profile, elastically or rigidly clamped at the bottom and linked at various levels by means of transverse members on hinged (but not movable) joints. They may also be linked by (*mnsr*)-type roof plates on hinged joints. The loads acting on these columns may be composed of any systems of constant, variable and moving, transverse and axial forces acting on the columns directly or by means of the transverse members.

The three-dimensional layout of Fig. 3 is represented in the form of a number of plane systems as illustrated by Fig. 4. Our problem is to establish a method for determining the critical parameters of plane frames of the type of Fig. 4.

This problem is solved by applying the matricial calculus. The notation is that of the Cracovian version, much more useful in problems of theoretical physics (and structural mechanics) than the traditional version.

A uniform method for determining the critical parameters is proposed for frames of the type of Fig. 4. It is called the Cracovian algorithm, [3].

The fundamental system, constituting our point of departure, are the single columns with variable section, according to Fig. 3. For each bar of the frame basic Cracovians are determined. These are the Cracovian of moment L , the Cracovian of elastic weight of the type A or B , the Cracovian of configuration of the longitudinal forces D and products of these Cracovians, that is $C_0 = LA$ or $C_0 = LB$, $Q = LAL$ and the so-called stability Cracovian $G_0 = C_0D_0$. The significance of these Cracovians and a simple method for obtaining them are discussed in [2] and [3].

The Cracovian algorithm procedure, for frames with any number of columns and transverse members, is derived for a five column frame of Fig. 10. The result is represented in a finite form shown in the Cracovian equation (52). This equation involves the stability Cracovian of the entire frame structure G_0^r . The determinant of this Cracovian set equal to zero yields the solution of the problem.

A numerical example is solved. It concerns the computation of a critical parameter of the frame of Fig. 12. The force method is used. It is shown (Sec. 7) that the strain method is much more troublesome in frames of this type.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 grudnia 1961 r.