

**KAZIMIERZ SZPUNAR**

**UGIĘCIE BELKI NA PODŁOŻU REOLOGICZNYM PRAGERA**

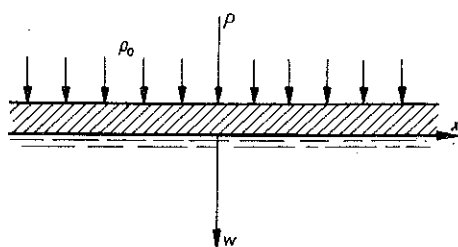
**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXXI**

**TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962**

Autor w pracy [1] rozpatrywał uginanie się belki spoczywającej na ciągłym podłożu jako proces reologiczny, uważając zarówno belkę jak i podłoże za ciała sprężysto-lepkie, czyli ciała Kelvina.

W pracy niniejszej zajmiemy się zagadnieniem analogicznym z tą tylko różnicą, że belkę oraz podłoże będziemy uważali za ciała Pragera. Ugięcie belki określimy w ten sposób jako funkcję nie tylko położenia, lecz również i czasu podobnie jak w pracy [1].

Przyjmujemy, że na nieskończenie długą belkę spoczywającą na ciągłym podłożu działa obciążenie równomierne  $p_0$  [kG/cm] oraz siła skupiona  $P$  [kG] przyłożona w środku belki (rys. 1).



Rys. 1

Przyjmujemy nadto, że belka jest złączona z podłożem w ten sposób, że reakcja podłoża może być skierowana zarówno do góry, jak i na dół.

Zgodnie z określeniem ciała Pragera pomiędzy naprężeniem  $\sigma$  a wydłużeniem względnym  $\epsilon$  rozciąganego elementu liniowego oraz szybkościami zmian tych wielkości  $\dot{\sigma}$  i  $\dot{\epsilon}$  zachodzi zależność liniowa

$$(1) \quad \sigma + a\dot{\sigma} = E\epsilon + \lambda\dot{\epsilon}.$$

Zakładamy przy tym, że stałe  $a$ ,  $E$  i  $\lambda$  są dodatnie. Z (1) wynika, że jeżeli wielkości  $\sigma$  i  $\epsilon$  zdążają asymptotycznie z czasem do pewnych wartości granicznych  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\epsilon}$ , to pomiędzy  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\epsilon}$  zachodzi związek

$$(2) \quad \bar{\sigma} = E\bar{\epsilon}$$

charakteryzujący ciało sprężyste ( $\dot{\sigma} \rightarrow 0$  oraz  $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ ).

Z rozważań tych wynika, że jeżeli stan naprężeń i odkształceń ciała Pragera zdąża asymptotycznie z czasem do stanu granicznego, to stan graniczny odpowiada sprężystemu modelowi ciała.

Przy przyjętym na rys. 1 układzie współrzędnych siła skupiona działa w punkcie  $x=0$  i prosta  $x=0$  jest w każdej chwili czasu osią symetrii linii ugięcia  $w(x, t)$  i wystarczy określić jej przebieg dla  $x \geq 0$  i czasu  $t \geq 0$ .

Z (1) możemy wyrazić  $\sigma$  za pomocą  $\varepsilon$  i  $\dot{\varepsilon}$

$$(3) \quad \sigma = e^{-\frac{t}{a}} \left[ \sigma_0 + \frac{1}{a} \int_0^t (E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau \right].$$

Przy zginaniu belki mamy

$$(4) \quad \varepsilon = \bar{z}/\rho,$$

gdzie  $\bar{z}$  oznacza odległość włókna od osi obojętnej, a  $\rho$  jest promieniem krzywizny tej osi.

Różniczkując (4) otrzymujemy

$$(5) \quad \dot{\varepsilon} = \bar{z} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right).$$

Uwzględniając (3)—(5) możemy moment  $M$  sił wewnętrznych względem osi obojętnej wyrazić wzorem

$$(6) \quad M = \int_F \sigma \bar{z} dF = \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left[ \frac{E}{\rho} + \lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] e^{\frac{\tau}{a}} d\tau.$$

We wzorze powyższym  $F$  oznacza pole przekroju belki, a przez  $I$  oznaczyliśmy moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej. Jeżeli uwzględnimy przybliżony wzór na krzywiznę przy małych kątach ugięcia

$$(7) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

to wzór (6) przyjmie postać

$$(8) \quad M = \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left( E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau.$$

Różniczkując dwukrotnie względem  $x$  ostatni wzór otrzymujemy

$$(9) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left( E \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \lambda \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = q(x, t),$$

gdzie  $q(x, t)$  przedstawia obciążenie jednostkowe podłoża.

Jeżeli przez  $R(x, t)$  oznaczymy reakcję podłoża, to

$$(10) \quad q(x, t) = p_0 - R(x, t).$$

Ponieważ podłoże, jak założyliśmy, jest ciałem Pragera, więc  $R(x, t)$  spełnia równanie

$$(11) \quad R + AR = Dw + C\dot{w}$$

analogiczne do równania (1), a stałe  $A$ ,  $D$  i  $C$  są dodatnie.

Z (11) otrzymujemy wzór określający  $R$  w zależności od  $w$  i  $\dot{w}$ :

$$(12) \quad R(x, t) = e^{-\frac{t}{A}} \left[ R_0 + \frac{1}{A} \int_0^t \left( Dw + C \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \right].$$

Przyjmujemy  $R_0 = p_0$ , gdyż jak wynika z (9) dla  $t = 0$  musi być  $q = 0$ , czyli  $R = p_0$ .

Z (9), (10) i (12) wynika, że  $w(x, t)$ , spełnia równanie całkowe

$$(13) \quad \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left( E \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \lambda \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = p_0 - e^{-\frac{t}{A}} \times \\ \times \left[ p_0 + \frac{1}{A} \int_0^t \left( Dw + C \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \right].$$

Dokonując prostych przekształceń możemy powyższe równanie napisać w postaci:

$$(14) \quad \frac{I}{a} \left( E - \frac{\lambda}{a} \right) e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} e^{\frac{\tau}{a}} d\tau + \frac{1}{A} \left( D - \frac{C}{A} \right) e^{-\frac{t}{A}} \int_0^t w e^{\frac{\tau}{A}} d\tau + \frac{I\lambda}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ + \frac{C}{A} w = \frac{I\lambda}{a} e^{-\frac{t}{a}} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{t=0} + \frac{C}{A} e^{-\frac{t}{A}} w(x, 0) + p_0 (1 - e^{-\frac{t}{A}}).$$

Podamy obecnie dalsze warunki, jakie musi spełniać linia ugięcia  $w(x, t)$ . Z warunku symetrii wynika, że

$$(15) \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0.$$

Przyjmujemy również, że w chwili początkowej  $t = 0$  ugięcie belki jest wywołane jedynie obciążeniem równomiernym i wynosi

$$(16) \quad w(x, 0) = \frac{p_0}{D},$$

siła zaś skupiona  $P$ , przyłożona w momencie początkowym, wpływa na wielkość ugięcia dla  $t > 0$ .

Podobnie przyjmujemy, że wpływ siły skupionej zanika dla  $x \rightarrow \infty$ , a to prowadzi do warunku

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = \frac{p_0}{D}.$$

Siła zaś poprzeczna  $T$  dla  $x \rightarrow 0^+$  zdąża do wartości  $-P/2$ , a ponieważ

$$(18) \quad T = -\frac{\partial M}{\partial x},$$

więc zgodnie z (8) musi być spełniony warunek

$$(19) \quad \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left[ E \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \tau} \right]_{x=0} e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{P}{2}.$$

Stąd wynika, że dla  $t = 0$ , musi być  $P = 0$ .

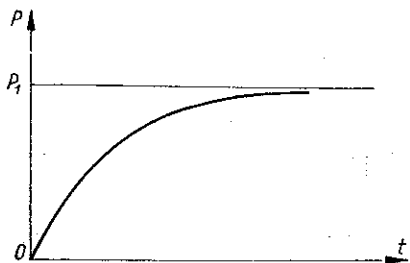
Z (19) łatwo dochodzimy do wniosku, że siła skupiona nie może być stała, lecz musi zmieniając się z czasem wzrastać od zera. Wniosek ten jest konsekwencją rozpatrywania belki i podłoża jako ciała Pragera przy nieuwzględnianiu sił bezwładności.

Przyjmujemy obecnie, że  $P$  zmienia się z czasem według wzoru

$$(20) \quad P = P_1 (1 - e^{-at}).$$

Przy tym założeniu

$$(21) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P = P_1.$$



Rys. 2

Rysunek 2 przedstawia zależność  $P$  od  $t$  określoną za pomocą wzoru (20). Z (19) i (20) wynika, że linia ugięcia musi w każdej chwili czasu spełniać warunek brzegowy

$$(22) \quad \left[ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda I \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} \right]_{x=0} = \frac{P_1}{2} [(aa - 1) e^{-at} + 1].$$

Linia ugięcia  $w(x, t)$  musi zatem spełniać równanie (14) oraz warunki (15), (16), (17) i (22).

Z dotychczasowych rozważań wynika, że jeżeli istnieje

$$(23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = \bar{w}(x),$$

to zgodnie z (14), (15), (17) i (22) krzywa  $\bar{w}(x)$  spełnia równanie

$$(24) \quad EI \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + D \bar{w} = p_0$$

oraz warunki

$$(25) \quad \left[ \frac{d\bar{w}}{dx} \right]_{x=0} = 0,$$

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{w}(x) = \frac{P_0}{D},$$

$$(27) \quad EI \left[ \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} \right]_{x=0} = \frac{P_1}{2}.$$

Jak to wykazano w pracy [2],  $\bar{w}(x)$  określa wzór

$$(28) \quad \bar{w}(x) = \frac{P_1}{8\varphi^3 EI} e^{-\varphi x} (\cos \varphi x + \sin \varphi x) + \frac{P_0}{D},$$

gdzie

$$(29) \quad \varphi = \left( \frac{D}{4EI} \right)^{1/4}.$$

Funkcja  $\bar{w}(x)$  jest znanym rozwiązaniem określającym ugięcie belki sprężystej, spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera.

Stosując metodę przekształcenia Laplace'a, równanie (14) mnożymy przez  $e^{-zt}$ , gdzie  $z = \xi + i\eta$  jest parametrem zespolonym, i całkujemy obie jego strony względem  $t$  w przedziale  $(0, \infty)$ .

Uwzględniając (16) możemy napisać

$$(30) \quad \frac{I}{a} \left( E - \frac{\lambda}{a} \right) \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} e^{\frac{\tau}{a}} d\tau \right) e^{-zt} dt + \frac{1}{A} \left( D - \frac{C}{A} \right) \int_0^{\infty} \times \\ \times \left( e^{-\frac{t}{A}} \int_0^t w e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \right) e^{-zt} dt + \frac{I\lambda}{a} \int_0^{\infty} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} e^{-zt} dt + \frac{C}{A} \int_0^{\infty} w e^{-zt} dt = \\ = \int_0^{\infty} \left[ \frac{C}{A} \frac{p_0}{D} e^{-\frac{t}{A}} + p_0 (1 - e^{-\frac{t}{A}}) \right] e^{-zt} dt.$$

Jeśli oznaczymy

$$(31) \quad \int_0^{\infty} \left( w - \frac{p_0}{D} \right) e^{-zt} dt = u(x, z),$$

to wtedy łatwo wykazać słuszność wzorów

$$(32) \quad \int_0^{\infty} w e^{-zt} dt = u(x, z) + \frac{p_0}{D} \frac{1}{z}$$

oraz

$$(33) \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} e^{-zt} dt = \frac{d^4 u}{dx^4}.$$

Całkując zaś przez części otrzymujemy

$$(34) \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{t}{A}} \int_0^t w e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \right) e^{-zt} dt = \left[ - \int_0^t w e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \frac{e^{-t(z+\frac{1}{A})}}{z+\frac{1}{A}} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{z+\frac{1}{A}} \int_0^{\infty} w e^{-zt} dt.$$

Łatwo wykazać, że jeżeli dla  $\operatorname{Re}(z) > 0$  spełniony jest warunek

$$(35) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w}{e^{zt}} = 0,$$

to jest wtedy

$$(36) \left[ \int_0^t w e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \frac{e^{-t(z+\frac{1}{A})}}{z+\frac{1}{A}} \right]_0^{\infty} = 0.$$

Wzór (34) przyjmuje po uwzględnieniu (32) postać

$$(37) \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{t}{A}} \int_0^t w e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \right) e^{-zt} dt = \frac{1}{z+\frac{1}{A}} \left( u + \frac{p_0}{D} \frac{1}{z} \right).$$

Zupełnie podobnie można wykazać, że jeżeli spełniony jest warunek (35) to jest słuszny wzór

$$(38) \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} e^{\frac{\tau}{a}} d\tau \right) e^{-zt} dt = \frac{1}{z+\frac{1}{a}} \frac{d^4 u}{dx^4}.$$

Jest również

$$(39) \int_0^{\infty} \left[ \frac{C}{A} \frac{p_0}{D} e^{-\frac{t}{A}} + p_0 (1 - e^{-\frac{t}{A}}) \right] e^{-zt} dt = \frac{C}{A} \frac{p_0}{D} \frac{1}{z+\frac{1}{A}} + p_0 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+\frac{1}{A}} \right).$$

Jeżeli we wzorze (30) uwzględnimy (31), (32), (33), (37), (38) i (39), to otrzymamy równanie, które spełnia funkcja  $u(x, z)$

$$(40) IA \left( z + \frac{1}{A} \right) (E + \lambda z) \frac{d^4 u}{dx^4} + a \left( z + \frac{1}{a} \right) (D + Cz) u = 0.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$(41) u = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx} + C_3 e^{irx} + C_4 e^{-irx},$$

gdzie  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  są stałe względem  $x$ , przy czym

$$(42) \quad r = \left[ -\frac{a \left( z + \frac{1}{a} \right) (D + Cz)}{IA \left( z + \frac{1}{A} \right) (E + \lambda z)} \right]^{1/4}$$

Ażeby  $r$  było jednoznacznie określone przyjmujemy, że spełnia ono nadto warunki

$$(43) \quad \operatorname{Re}(r) > 0, \quad \operatorname{Im}(r) > 0.$$

Z podstawienia (31) wynika, że funkcja  $u(x, z)$  musi również spełniać następujące warunki, odpowiadające kolejno warunkom (15), (17) i (22):

$$(44) \quad \left[ \frac{du}{dx} \right]_{x=0} = 0,$$

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, z) = 0,$$

$$(46) \quad \left[ \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x=0} = \frac{P_1 a (az + 1)}{2Iz (E + \lambda z) (a + z)}.$$

Ostatni warunek łatwo wykazać przy założeniu  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Istotnie z (22) otrzymujemy

$$(47) \quad \int_0^{\infty} \left[ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda I \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} \right]_{x=0} e^{-zt} dt = I(E + \lambda z) \left[ \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x=0} = \\ = \frac{P_1}{2} \int_0^{\infty} [(a\alpha - 1) e^{-at} + 1] e^{-zt} dt = \frac{P_1}{2} \left[ (a\alpha - 1) \frac{1}{a+z} + \frac{1}{z} \right].$$

Stąd wynika (46).

Z (41), (43) i (45) łatwo wynika, że musi być

$$(48) \quad C_1 = C_4 = 0.$$

Z (44) i (46) dochodzimy natomiast do układu równań jakie muszą spełniać  $C_2$  i  $C_3$ :

$$(49) \quad -C_2 + iC_3 = 0, \\ C_2 + iC_3 = \frac{P_1 a}{2I} \frac{az + 1}{r^3 z (E + \lambda z) (a + z)}.$$

Stąd otrzymujemy

$$(50) \quad C_2 = -\frac{P_1 a}{4I} \frac{az + 1}{r^3 z (E + \lambda z) (a + z)},$$

$$(51) \quad C_3 = +\frac{P_1 ia}{4I} \frac{az + 1}{r^3 z (E + \lambda z) (a + z)}.$$



Rozwiązanie (41) po uwzględnieniu (48), (50) i (51) przyjmuje postać

$$(52) \quad u = \frac{P_1 a}{4I} \frac{az+1}{r^3 z (E+\lambda z) (\alpha+z)} (ie^{trx} - e^{-rx}).$$

Wzór powyższy podaje rozwiązanie równania (40) spełniające warunki (44)-(46).

Zgodnie z twierdzeniem o przekształceniu odwrotnym względem przekształcenia Laplace'a rozwiązanie równania (14) spełniające warunki (15)-(17) i (22) ma postać

$$(53) \quad w(x, t) = \frac{P_1 a}{4I} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{az+1}{r^3 z (E+\lambda z) (\alpha+z)} (ie^{trx} - e^{-rx}) e^{zt} dz + \frac{p_0}{D},$$

gdzie  $\xi$  jest dowolną liczbą spełniającą warunek

$$(54) \quad \xi \geq \xi_0 + \delta, \quad \delta > 0;$$

określenie  $\xi_0$  zostanie podane w dalszym ciągu.

Aby obliczyć całkę ze wzoru (53) skorzystamy z twierdzenia o mnożeniu operatorów. W tym celu określamy funkcje

$$(55) \quad H(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{az+1}{z(E+\lambda z) (\alpha+z)} e^{zt} dz,$$

$$(56) \quad \psi(x, t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{1}{zr^3} (ie^{trx} - e^{-rx}) e^{zt} dz.$$

Łatwo można wykazać, że

$$(57) \quad H(t) = B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda}t} + B_3 e^{-at},$$

gdzie dla  $a \neq E/\lambda$

$$(58) \quad B_1 = \frac{1}{Ea},$$

$$(59) \quad B_2 = \frac{\lambda - Ea}{E(E - a\lambda)},$$

$$(60) \quad B_3 = \frac{a\alpha - 1}{\alpha(E - a\lambda)}.$$

Funkcję  $\psi(x, t)$  po rozwinięciu w szereg funkcji wykładniczych  $e^{trx}$   $e^{-rx}$  można przedstawić w postaci

$$(61) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-t\infty}^{\xi+t\infty} \frac{1}{zr^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-rx)^n}{n!} [i(-i)^n - 1] e^{zt} dz = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} (-1)^{\frac{n-3}{4}} [i(-i)^n - 1] \varphi_n(t),$$

gdzie

$$(62) \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-t\infty}^{\xi+t\infty} \frac{1}{z} \left[ \frac{a\left(z + \frac{1}{a}\right)(D+Cz)}{IA\left(z + \frac{1}{A}\right)(E+\lambda z)} \right]^{\frac{n-3}{4}} e^{zt} dz.$$

Łatwo również można wykazać słuszność wzoru

$$(63) \quad (-1)^{\frac{n-3}{4}} [i(-i)^n - 1] = 2 \cos \frac{\pi}{4} (n+1),$$

co uwzględniamy w (61), pisząc

$$(64) \quad \psi(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4} (n+1) \varphi_n(t).$$

Przystępując obecnie do obliczenia  $\varphi_n(t)$  dokonamy najpierw pewnych przekształceń; i tak możemy przy założeniu  $E/\lambda \neq 1/A$  napisać

$$(65) \quad \frac{a\left(z + \frac{1}{a}\right)(D+Cz)}{JA\left(z + \frac{1}{A}\right)(E+\lambda z)} = B \left( 1 + \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} + \frac{D_2}{z + \frac{E}{\lambda}} \right),$$

gdzie

$$(66) \quad B = \frac{aC}{AI\lambda},$$

$$(67) \quad D_1 = \frac{\left(\frac{D}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{A}\right)}{\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A}},$$

$$(68) \quad D_2 = \frac{\left(\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{D}{C} - \frac{E}{\lambda}\right)}{\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A}}.$$

Jeżeli spełniony jest warunek

$$(69) \quad \left| \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} + \frac{D_2}{z + \frac{E}{\lambda}} \right| < 1,$$

to na podstawie (62) i (65) możemy napisać

$$(70) \quad \varphi_n(t) = B^{\frac{n-3}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-3}{k} \psi_k(t),$$

gdzie

$$(71) \quad \psi_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{1}{z} \left( \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} + \frac{D_2}{z + \frac{E}{\lambda}} \right)^k e^{zt} dz.$$

Warunek (69) jest na pewno spełniony, jeżeli

$$(72) \quad |z| > \xi_0 = \max \left( 2|D_1| + \frac{1}{A}; 2|D_2| + \frac{E}{\lambda}; \frac{1}{A} + \left| \frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A} \right| \right),$$

a to założyliśmy przyjmując, że  $\xi$  spełnia nierówność (54). Z (72) wynika również, że

$$(73) \quad \left| \frac{\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A}}{z + \frac{1}{A}} \right| < 1.$$

Możemy więc napisać

$$(74) \quad \left( \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} + \frac{D_2}{z + \frac{E}{\lambda}} \right)^k = \left( \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} \right)^k \left( 1 + \frac{\frac{D_2}{z + \frac{E}{\lambda}}}{\frac{D_1}{z + \frac{1}{A}}} \right)^k =$$

$$= \left( \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} \right)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^s \left( 1 + \frac{\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A}}{z + \frac{1}{A}} \right)^{-s} = \left( \frac{D_1}{z + \frac{1}{A}} \right)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^s \times$$

$$\times \left[ 1 + \binom{-s}{1} \frac{\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A}}{z + \frac{1}{A}} + \binom{-s}{2} \left( \frac{\frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A}}{z + \frac{1}{A}} \right)^2 + \dots \right] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_{kp}}{\left( z + \frac{1}{A} \right)^{p+k}},$$

gdzie

$$(75) \quad A_{kp} = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \binom{-s}{p} \left( \frac{E}{\lambda} - \frac{1}{A} \right)^p D_2^s D_1^{k-s}.$$

Korzystając z twierdzenia o residuach oraz ze wzoru Duhamela, łatwo wykazać związek

$$(76) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{1}{z \left( z + \frac{1}{A} \right)^{k+p}} e^{zt} dz = \int_0^t \frac{\tau^{k+p-1}}{(k+p-1)!} e^{-\frac{\tau}{A}} d\tau, \quad t > 0,$$

gdzie  $k+p = 1, 2, \dots$ .

Z (71), (74), (76) łatwo wynika wzór na  $\psi_k(t)$ :

$$(77) \quad \psi_k(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{kp} \int_0^t \frac{\tau^{k+p-1}}{(k+p-1)!} e^{-\frac{\tau}{A}} d\tau, \quad t > 0$$

śuszny dla  $k = 1, 2, \dots$ .

Z (71) wynika wprost, że

$$(78) \quad \psi_0(t) = 1, \quad t > 0.$$

Na podstawie twierdzenia o mnożeniu operatorów oraz zgodnie z (55), (56), (57), (64), (70), (77) i (78) mamy

$$(79) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{az+1}{r^3 z(E+\lambda z)(a+z)} (ie^{trx} - e^{-rx}) e^{zt} dz = \\ & = \frac{d}{dt} \int_0^t H(\tau) \psi(x, t-\tau) d\tau = H(t) \psi(x, 0) + \int_0^t H(\tau) \psi'_t(x, t-\tau) d\tau = \\ & = (B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda}t} + B_3 e^{-at}) \frac{2}{\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4} (n+1) + \\ & \quad + \frac{2}{\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4} (n+1) \Phi_n(t), \end{aligned}$$

gdzie

$$(80) \quad \beta = B^{1/4} = \left( \frac{aC}{A\lambda} \right)^{1/4},$$

$$(81) \quad \Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n-3}{4} \binom{n-3}{k} \int_0^t H(\tau) \psi'_k(t-\tau) d\tau.$$

Korzystając z (57) i (77) możemy ostatni wzór rozpisać bardziej szczegółowo

$$(82) \quad \Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n-3}{k} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} A_{kp} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k+p-1}}{(k+p-1)!} e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times (B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda}\tau} + B_3 e^{-a\tau}) d\tau \right].$$

Na podstawie (53) i (79) możemy napisać

$$(83) \quad w(x, t) = \frac{P_1 a}{2I\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4}(n+1) \Phi_n(t) + \\ + \frac{P_1 a}{2I\beta^3} (B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda}t} + B_3 e^{-at}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4}(n+1) + \frac{p_0}{D}.$$

Wzór powyższy podaje rozwiązanie równania (14) spełniające warunki (15), (16), (17) i (22).

Rozwiązanie (83) będziemy uważali za linię ugięcia belki w każdej chwili  $t$ , jeżeli istnieje

$$(84) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t).$$

Z (75) i (82) wynika, że granica ta na pewno istnieje, jeżeli są spełnione następujące warunki

$$(85) \quad \frac{EA}{\lambda} < 2,$$

$$(86) \quad \frac{AD\lambda}{aCE} \leq 2,$$

gdź wówczas istnieje

$$(87) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_n = \frac{1}{Ea} \left[ \left( \frac{AD\lambda}{aCE} \right)^{\frac{n-3}{4}} - 1 \right].$$

Skąd wynika, że istnieje

$$(88) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = \frac{P_1}{2EI\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4}(n+1) \left[ \left( \frac{AD\lambda}{aCE} \right)^{\frac{n-3}{4}} - 1 \right] + \\ + \frac{P_1}{2EI\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^n}{n!} \cos \frac{\pi}{4}(n+1) + \frac{p_0}{D} = \\ = \frac{P_1}{8EI(\beta\varepsilon)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta\varepsilon x)^n}{n!} 2^{\frac{n+1}{2}} \cos \frac{\pi}{4}(n+1) + \frac{p_0}{D},$$

gdzie

$$(89) \quad \varepsilon = \left( \frac{AD\lambda}{4aCE} \right)^{1/4}.$$

Mamy wówczas

$$(90) \quad \beta\varepsilon = \left(\frac{aC}{AI\lambda}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{AD\lambda}{4aCE}\right)^{1/4} = \left(\frac{D}{4EI}\right)^{1/4} = \varphi.$$

Łatwo również wykazać, że

$$(91) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varphi x)^n}{n!} 2^{\frac{n+1}{2}} \cos \frac{\pi}{4}(n+1) = (\cos \varphi x + \sin \varphi x) e^{-\varphi x}.$$

Jeżeli we wzorze (88) uwzględnimy (90) i (91), to otrzymamy ostatecznie

$$(92) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = \frac{P_1}{8\varphi^3 EI} (\cos \varphi x + \sin \varphi x) e^{-\varphi x} + \frac{P_0}{D} = \bar{w}(x).$$

Krzywa  $\bar{w}(x)$  określa ugięcie belki po czasie nieskończenie długim, stanowiąc jednocześnie znane rozwiązanie określające ugięcie belki sprężystej na podłożu sprężystym Winklera.

Jeżeli zatem spełnione są nierówności (85) i (86), to mamy do czynienia ze zjawiskiem opóźnienia sprężystego. W przypadku zaś gdy nierówności te nie są spełnione i  $A_{kp} \neq 0$ , to można wykazać, że  $w(x, t)$  określone za pomocą wzoru (83) dąży z czasem do nieskończoności.

Należy jednak podkreślić, że przy ustawianiu równania (14) korzystaliśmy z (7), co odpowiada założeniu, że  $\partial w / \partial x$  jest małe i dlatego równanie (14) opisuje uginanie się belki tylko w zakresie małych ugięć również dla  $t \rightarrow \infty$ . Ugięcie takie spełnia na pewno warunek (35). Przy większych ugięciach równanie (14) nie określa linii ugięcia i wniosku  $w \rightarrow \infty$  nie można uważać za wynikający z równania (14).

Jeżeli nierówności (85) i (86) nie są spełnione przy  $A_{kp} \neq 0$ , to można się spodziewać występowania większych ugięć, których przebieg w czasie nie opisuje jednak równanie (14).

Niedoskonałość ujęcia rozpatrywanego problemu wynika nie tylko z pominięcia sił bezwładności i przyjęcia przybliżenia (7), lecz głównie jej źródło tkwi w niedoskonałym modelu, jakim dla ciała rzeczywistego jest ciało Pragera.

Przyjmując  $x = 0$  we wzorze (83) otrzymujemy ugięcie w przekroju działania siły skupionej

$$(93) \quad w(0, t) = \frac{P_1 a \sqrt{2}}{4I\beta^3} (\Phi_0 + B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda}t} + B_3 e^{-at}) + \frac{P_0}{D}.$$

Jeżeli spełnione są warunki (85) i (86), to ugięcie to zdąży asymptotycznie z czasem do wartości granicznej określonej za pomocą wzoru

$$(94) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(0, t) = \frac{P}{8\varphi^3 EI} + \frac{P_0}{D} = \bar{w}(0).$$

Podobnie można wykazać, że szybkość uginania się belki w chwili  $t = 0$  określa funkcja

$$(95) \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \right]_{t=0} = \frac{P_1 a a}{8I\gamma^3 \lambda} (\cos \gamma x + \sin \gamma x) e^{-\gamma x},$$

gdzie

$$(96) \quad \gamma = \left( \frac{aC}{4AI\lambda} \right)^{1/4}.$$

Ze wzoru (95) wynika, że rozkład szybkości w chwili  $t = 0$  charakteryzuje linia falowa zanikająca dla  $x \rightarrow \infty$ .

Długość fali

$$(97) \quad L = 2\pi \left( \frac{4AI\lambda}{aC} \right)^{1/4}$$

zależy od  $I$  oraz od współczynników szybkości zmian naprężeń i odkształceń występujących w równaniach reologicznych belki i podłoża. Podobne uwagi dotyczą amplitudy fali, a iloczyn  $P_1 a$  jest szybkością zmiany siły skupionej w chwili  $t = 0$ .

Jeżeli istnieje  $\lim_{t \rightarrow \infty} w = \bar{w}$ , to długość fali  $\bar{w}$  określa wzór:

$$(98) \quad \bar{L} = 2\pi \left( \frac{4EI}{D} \right)^{1/4}.$$

Wielkość  $\bar{L}$  zależy od  $I$ , ale w przeciwieństwie do  $L$ , nie zależy od współczynników szybkości zmian naprężeń i odkształceń występujących w równaniach reologicznych (1) i (11).

Przypadki szczególne. Ze wzorów (67) i (68) wynika, że jeżeli pomiędzy stałymi występującymi w równaniach reologicznych belki i podłoża zachodzą związki

$$(99) \quad A = a \quad \text{i} \quad \frac{D}{C} = \frac{E}{\lambda}$$

lub

$$(100) \quad \frac{D}{C} = \frac{1}{A} \quad \text{i} \quad \frac{E}{\lambda} = \frac{1}{a},$$

to

$$(101) \quad D_1 = D_2 = 0$$

oraz

$$(102) \quad A_{kp} = 0.$$

W rozważanych przypadkach jest zatem

$$(103) \quad \Phi_n(t) = 0,$$

a rozwiązanie przyjmuje postać

$$(104) \quad w = \frac{P_1 a}{8I\varphi^3} (B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda} t} + B_3 e^{-at}) (\cos \varphi x + \sin \varphi x) e^{-\varphi x} + \frac{p_0}{D} = \\ = E a (B_1 + B_2 e^{-\frac{E}{\lambda} t} + B_3 e^{-at}) \left( \frac{w}{E} - \frac{p_0}{D} \right) + \frac{p_0}{D}$$

i ugięcie belki można rozpatrywać jako sumę ugięcia sprężystego oraz ugięć zależnych od czasu, a zdążających do zera dla  $t \rightarrow \infty$ .

Zatem mamy

$$(105) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w = \bar{w},$$

a punkty

$$(106) \quad x = \frac{\pi}{4\varphi} (4n - 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

są w każdej chwili punktami węzłowymi linii ugięcia belki. Rozpatrywanie innych przypadków szczególnych (np.  $E/\lambda = 1/A$ ) zostaje w pracy pominięte.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] K. SZPUNAR, *Ugięcie belki na podłożu sprężysto-lepkim*, Zeszyty Naukowe AGH, Górnictwo; z. 7, 1960.  
 [2] M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, Warszawa 1951.  
 [3] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, Kraków 1950.  
 [4] M. REINER, *Reologia teoretyczna*, Warszawa 1958.  
 [5] W. POGORZELSKI, *Rachunek operatorowy i przekształcenia Laplace'a*, Warszawa 1950.  
 [6] W. K. WAGNER, *Operatorenrechnung*, Leipzig 1950.

#### Резюме

#### ПРОГИБ БАЛКИ НА РЕОЛОГИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ ТИПА ПРАГЕРА

Рассматривается балка и основание — как тела Прагера, т.е. принимается, что зависимость между напряжением и относительным удлинением, растягиваемого линейного элемента и скоростями изменений этих величин является линейной.

В работе доказывается, что линия прогиба балки  $w(x, t)$ , подверженной действию равномерной нагрузки  $p_0$  кг/см и сосредоточенной силы  $P$  кг, покоящейся на сплошном основании типа Прагера, удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$(1) \quad \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left( E \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \lambda \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \tau} \right) e^{\frac{x}{a}} d\tau = p_0 - e^{-\frac{t}{A}} \left[ p_0 + \frac{1}{A} \int_0^t \left( D w + C \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) e^{\frac{x}{A}} d\tau \right]$$



и условиям, обеспечивающим однозначность решения

$$(2) \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0,$$

$$(3) \quad w(x, 0) = p_0/D,$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = p_0/D,$$

$$(5) \quad \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left[ E \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \tau} \right]_{x=0} e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{P}{2},$$

где сила  $P$  определяется формулой:

$$(6) \quad P = P_1 (1 - e^{-at}), \quad a > 0.$$

Дается решение так поставленной задачи и доказывается, что скорость прогиба балки в момент  $t = 0$ , характеризует волнообразная линия уменьшающаяся по мере отдаления от сечения, в котором действует сила  $P$ . Длина волны и ее амплитуда зависит только от коэффициентов скорости в реологических уравнениях балки и основания, а также от величин, характеризующих балку и силу  $P$ .

Если между коэффициентами реологических уравнений балки и основания существуют неравенства  $EA/\lambda < 2$  и  $AD\lambda/aCE \leq 2$ , тогда прогиб балки стремится асимптотически со временем, к прогибу, который проявляет упругая балка на упругом винклеровом основании.

### Summary

#### DEFLECTION OF A BEAM RESTING ON A PRAGER RHEOLOGIC FOUNDATION

The beam and the foundation are considered to be Prager's bodies, that is, it is assumed that the relation between the stress and the strain of a linear element subject to tension and the rates of change of these quantities is linear.

It is shown that the deflection line  $w(x, t)$  of the beam acted on by a uniform load  $p_0$  kg/cm and a concentrated force  $P$  kg and resting on a continuous Prager foundation satisfies the integral equation

$$(1) \quad \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left( E \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \lambda \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = p_0 - e^{-\frac{t}{A}} \left[ p_0 + \frac{1}{A} \int_0^t \left( Dw + C \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) e^{\frac{\tau}{A}} d\tau \right]$$

and the following conditions warranting the uniqueness

$$(2) \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0,$$

$$(3) \quad w(x, 0) = p_0/D,$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = p_0/D,$$

$$(5) \quad \frac{I}{a} e^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \left[ E \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \tau} \right]_{x=0} e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{P}{2},$$

where the force  $P$  is

$$(6) \quad P = P_1 (1 - e^{-at}), \quad a > 0.$$

The problem thus stated is solved. It is shown that the deflection rate of the beam at the time  $t = 0$  is expressed by a wave line dying out as the distance from the section where  $P$  acts increases. The wave length and amplitude depend only on the coefficients of rate in the rheologic equations of the beam and the foundation and the quantities characterizing the beam and the force  $P$ .

If the coefficients of the rheologic equations of the beam and the foundation satisfy the inequalities  $EA/\lambda < 2$  and  $AD\lambda/aCE \leq 2$ , the deflection of the beam tends asymptotically, with increasing time, to the deflection of an elastic beam on a Winklerian foundation.

AKADEMIA GÓRNICZO HUTNICZA  
KATEDRA MATEMATYKI I  
WYDZIAŁ GEODEZJI GÓRNICZEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 kwietnia 1961 r.*

---