

ZENON WASZCZYSZYN

**PRZYBLIŻONE OBLICZANIE DUŻYCH UGIĘĆ SPRĘŻYSTYCH  
BELKI NA PODPORACH NIEPRZESUWNYCH**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXVII**

**TOM X • ZESZYT 1 • ROK 1962**

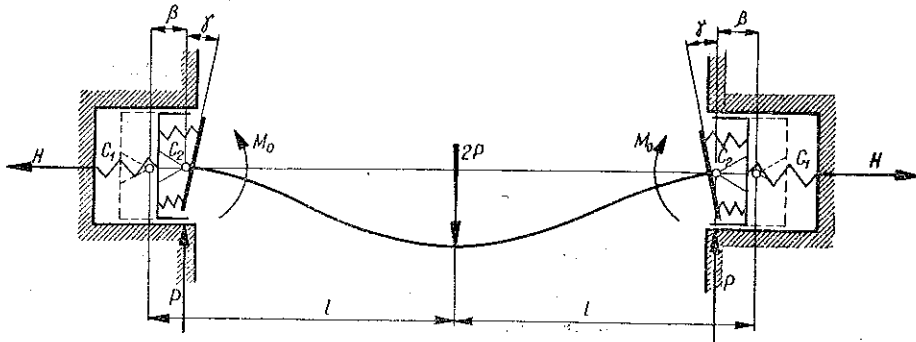
## SPIS TREŚCI

1. Wstęp	97
2. Równania wyjściowe	98
3. Wyznaczenie kąta $\varphi$	101
4. Wyznaczenie współrzędnej $y$ belki ugiętej	104
5. Wyznaczenie współrzędnej $x$ belki ugiętej	105
6. Wyznaczenie ugięcia dla belki na nieprzesuwanych podporach	107

## 1. Wstęp

Przypomnimy w skrócie problem naświetlony bardziej szczegółowo w pracy [5].

Przy rozpatrywaniu belek zginanych zakłada się zazwyczaj podpory doskonale przesuwne, przegubowe lub doskonale utwierdzone. W rzeczywistości mamy do czynienia z przypadkami pośrednimi, gdyż zarówno przesuwność podpór jak i obrót przekroju przypodporowego są z reguły skrępowane. Z chwilą ugięcia się belki powstanie zarówno reakcja pozioma  $H$  jako funkcja przesunięcia  $\beta$ , jak i moment  $M_0$  jako funkcja obrotu przekroju przypodporowego  $\gamma$  (por. rys. 1).



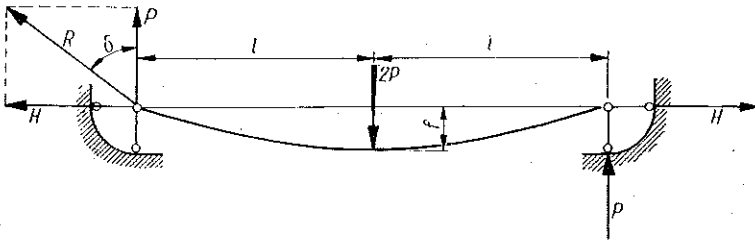
Rys. 1

Przypadek skrępowanego (sprężystego) utwierdzenia został szczegółowo opracowany na gruncie teorii małych ugięć.

Chcąc określić wpływ skrępowanej przesuwności podpór musimy się oprzeć na teorii nieliniowej, gdyż w teorii małych ugięć przesuwność podpór nie wpływa na ugięcia i siły wewnętrzne w belce. Jako dwa szczególne przypadki mogą wystąpić: zagadnienie belki na podporach doskonale przesuwnych, dobrze opracowane w literaturze, oraz zagadnienie belki na podporach nieprzesuwnych, rozwiązane w pracy [5]. Jednak wzory z [5] otrzymane dla tego drugiego przypadku mają skomplikowaną postać i wymagają żmudnego rozwiązywania układu równań przestępnych, wskutek czego nie nadają się do szczegółowej analizy pracy belki ani do zastosowań praktycznych.

W obecnej pracy zastosujemy sposób przybliżony przez wprowadzenie szeregów potęgowych do rozwiązania wyjściowych równań ugięcia.

Równania wyjściowe zostały wyprowadzone przy uwzględnieniu rozciągłości osi, gdyż ugięcie belki na nieprzesuwnych podporach jest możliwe tylko przy rozciągłej belce. Wpływ ten, jak wykazuje analiza (por. np. A. PFLÜGER, [1]) jest w większości innych przypadków bardzo mały, a pominięcie go znacznie upraszcza ostateczne wzory.



Rys. 2

W naszej pracy zajmiemy się szczegółowo przypadkiem belki opartej na nieprzesuwnych, przegubowych podporach (rys. 2), przy czym oprzemy się na założeniach identycznych z założeniami Eulera. Założymy mianowicie, że

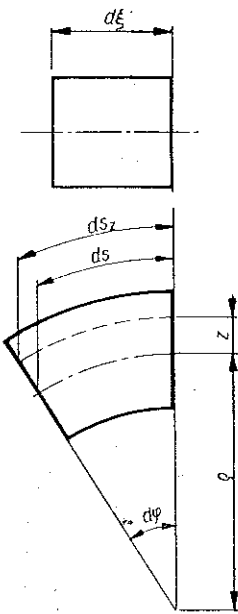
- belka jest idealnie sprężysta, wykonana z jednego materiału o module Younga  $E$ ;
- przekroje płaskie pozostają płaskimi podczas odkształcenia;
- belka jest pryzmatyczna o polu przekroju  $F$  i momencie bezwładności  $I$ ;
- belka jest nieważka, zginana w jednej z płaszczyzn głównych siłą skupioną;
- pomijamy wpływ siły poprzecznej na ugięcie belki.

Jedyną różnicą w stosunku do założeń Eulera polegać więc będzie na uwzględnieniu rozciągłości osi belki.

## 2. Równania wyjściowe

Równania wyjściowe dla ugięć skończonych przyjmiemy takie same jak w pracy [5]. Przypomnimy w skrócie wyprowadzenie równań wyjściowych.

Jako zmienną niezależną przyjmiemy cechę identyczności punktu  $\xi$ . Podobnie jak w pracy [4] cechę identyczności punktu  $\xi$  zdefiniujemy w następujący sposób: belkę w stanie naturalnym (nieodkształconą) przykładamy do osi liczbowej i każdemu punktowi belki przypisujemy odciętą  $\xi$  na osi.



Rys. 3

W belce poddanej działaniu momentu  $M$  i siły podłużnej  $N$  zachodzą następujące związki (por. [5]):

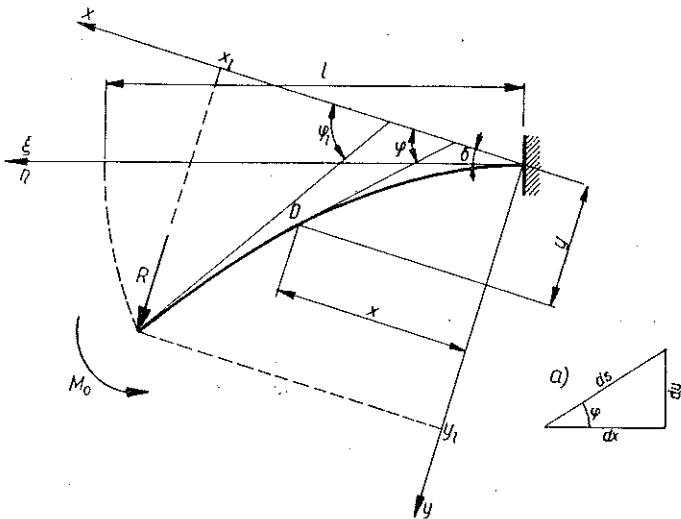
$$(2.1) \quad N = EF \left( \varrho \frac{d\varphi}{d\xi} - 1 \right),$$

$$(2.2) \quad M = EI \frac{d\varphi}{d\xi}$$

przy przyjęciu oznaczeń z rys. 3. Możemy też zapisać wzór uwzględniający wydłużalność osi w postaci

$$(2.3) \quad ds = \left( 1 + \frac{N}{EF} \right) d\xi.$$

Równania wyjściowe określające kąt  $\varphi$  oraz współrzędne  $x, y$  ugiętej belki wyprowadzimy przy wprowadzeniu układu ortogonalnych osi, skróconego o kąt  $\delta$  (rys. 4), tak aby oś  $y$  była równoległa do kierunku działania siły  $R$ . Taki układ



Rys. 4

współrzędnych, przyjmowany zresztą przez szereg autorów (np. E. P. POPOW, [2]), pozwoli nam przedstawić moment w dowolnym punkcie osi belki  $D$  w zwartej postaci

$$(2.4) \quad M = R(x_l - x) + M_0 = R \int_x^{x_l} dx + M_0.$$

Wprowadzimy bezwymiarową cechę identyczności punktu

$$(2.5) \quad \eta = \frac{\xi}{l},$$

oraz związek wynikający z rys. 4a

$$(2.6) \quad dx = ds \cos \varphi$$

do równania (2.4); wtedy przyjmie ono postać

$$(2.7) \quad M = RI \int_0^1 \left( 1 + \frac{N}{EF} \right) \cos \varphi d\eta + M_0.$$

Siła podłużna  $N$  zgodnie z rys. 4 będzie wynosić

$$(2.8) \quad N = R \sin \varphi.$$

Równanie (2.7) możemy zróżniczkować, a po uwzględnieniu związku (2.2) i wprowadzeniu bezwymiarowych oznaczeń

$$(2.9) \quad \frac{RI^2}{EI} = \zeta, \quad \frac{R}{EF} = p$$

otrzymamy równanie dla wyznaczenia kąta  $\varphi$  wyprowadzone w pracy [5]:

$$(2.10) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = -\zeta \cos \varphi - \zeta p \sin \varphi \cos \varphi.$$

Równanie to nieco przekształcimy. Wprowadzimy smukłość  $\lambda$ :

$$(2.11) \quad \lambda = \frac{2l}{i},$$

gdzie  $i$  jest promieniem bezwładności przekroju. Wtedy siła bezwymiarowa  $p$  będzie równa

$$(2.12) \quad p = \frac{R}{EF} = \frac{RI^2}{EI} \frac{I}{I^2} = \frac{4\zeta}{\lambda^2}.$$

Po wprowadzeniu (2.12) do (2.10) pierwsze równanie wyjściowe dla wyznaczenia kąta  $\varphi$  przyjmie ostateczną postać

$$(2.13) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = -\zeta \cos \varphi - \frac{2}{\lambda^2} \zeta^2 \sin 2\varphi.$$

Drugie równanie wyjściowe otrzymamy ze związku (rys. 4a)

$$(2.14) \quad dy = ds \sin \varphi,$$

a po podstawieniu (2.3) przy bezwymiarowej cesze identyczności (2.5)

$$(2.15) \quad \frac{1}{l} \frac{dy}{d\eta} = \sin \varphi + p \sin^2 \varphi.$$

Weźmy pod uwagę związek (2.12) i po uwzględnieniu, że  $\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$ , otrzymamy drugie równanie wyjściowe dla współrzędnej  $y$  punktu  $D$

$$(2.16) \quad \frac{1}{l} \frac{dy}{d\eta} = \sin \varphi + \frac{2}{\lambda^2} \zeta - \frac{2}{\lambda^2} \zeta \cos 2\varphi.$$

Podobnie ze związku (2.6) otrzymamy trzecie równanie wyjściowe dla współrzędnej  $x$  punktu  $D$ :

$$(2.17) \quad \frac{1}{l} \frac{dx}{d\eta} = \cos \varphi + \frac{2}{\lambda^2} \zeta \sin 2\varphi.$$

Równania (2.16) i (2.17) określające linię ugięcia belki wymagają uprzedniej znajomości kąta  $\varphi$ . Kąt ten przy ustalonej smukłości  $\lambda$  oraz sile bezwymiarowej  $\zeta$  wyznaczymy z równania (2.13) jako funkcję bezwymiarowej cechy identyczności punktu  $\eta$ . Zastosujemy przy tym do rozwiązania równań wyjściowych szeregi potęgowe. Jako mały parametr przyjmiemy, podobnie jak to uczynił T. PÖSCHL, [3], bezwymiarową siłę  $\zeta$ . O ile ograniczymy się do kilku początkowych wyrazów szeregu, to po rozwiązaniu otrzymamy stosunkowo proste, wielomianowe wzory, nadające się do analizy o wiele lepiej niż ścisłe wzory z [5].

Ograniczymy się przy tym do przypadku obciążenia belki z rys. 4 tylko siłą skupioną  $R$ , gdyż wprowadzenie momentu  $M_0$  zaciemnia i komplikuje ostateczne wzory dla współrzędnych  $x$  i  $y$ .

### 3. Wyznaczenie kąta $\varphi$ .

Przyjmiemy kąt  $\varphi$  w postaci szeregu potęgowego

$$(3.1) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \zeta + \varphi_2 \zeta^2 + \varphi_3 \zeta^3 + \dots,$$

w którym siła bezwymiarowa  $\zeta$  będzie małym parametrem, a  $\varphi_i = \varphi_i(\eta, \lambda)$ .

Po rozwinięciu funkcji  $\sin \varphi$  i  $\cos \varphi$  w otoczeniu  $\varphi_0$  zgodnie ze wzorem Taylora otrzymamy

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sin \varphi = \sin \varphi_0 + \zeta \varphi_1 \cos \varphi_0 - \zeta^2 \left( \frac{\varphi_1^2}{2} \sin \varphi_0 - \varphi_2 \cos \varphi_0 \right) - \\ \quad - \zeta^3 \left( \frac{\varphi_1^3}{6} \cos \varphi_0 + \varphi_1 \varphi_2 \sin \varphi_0 - \varphi_3 \cos \varphi_0 \right) + \dots, \\ \cos \varphi = \cos \varphi_0 - \zeta \varphi_1 \sin \varphi_0 - \zeta^2 \left( \frac{\varphi_1^2}{2} \cos \varphi_0 + \varphi_2 \sin \varphi_0 \right) + \\ \quad + \zeta^3 \left( \frac{\varphi_1^3}{6} \sin \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_2 \cos \varphi_0 - \varphi_3 \sin \varphi_0 \right) + \dots \end{cases}$$

Wzory (3.2) możemy łatwo stosować dla kątów wielokrotnych podstawiając zamiast  $\varphi$  odpowiednie wielokrotności.

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu szeregu (3.1) wyraz po wyrazie, wprowadzeniu (3.2) i uporządkowaniu względem potęg  $\zeta$  możemy napisać równanie (2.13) w postaci

$$(3.3) \quad \frac{d^2 \varphi_0}{d\eta^2} + \frac{d^2 \varphi_1}{d\eta^2} \zeta + \frac{d^2 \varphi_2}{d\eta^2} \zeta^2 + \frac{d^2 \varphi_3}{d\eta^2} \zeta^3 + \dots = \\ = -\zeta \cos \varphi_0 + \zeta^2 \left( \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{2}{\lambda^2} \sin 2\varphi_0 \right) + \\ + \zeta^3 \left( \frac{\varphi_1^2}{2} \cos \varphi_0 + \varphi_2 \sin \varphi_0 - \frac{4}{\lambda^2} \varphi_1 \cos 2\varphi_0 \right) + \dots$$

Do równania (3.3) dołączymy dwa warunki brzegowe

$$(3.4) \quad \begin{cases} \eta = 0, & \varphi = \delta; \\ \eta = 1, & \frac{d\varphi}{d\eta} = 0. \end{cases}$$

Mamy więc

$$(3.5) \quad \begin{cases} \eta = 0, & \varphi_0 = \delta, & \varphi_i = 0 & \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, \\ \eta = 1, & \frac{d\varphi_i}{d\eta} = 0, & & \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

W równaniu (3.3) możemy porównać współczynniki przy jednakowych potęgach  $\zeta$  i w ten sposób otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych liniowych, z których przez elementarne całkowanie będziemy mogli kolejno wyznaczyć dowolną funkcję  $\varphi_i$ .

Skalkujemy pierwsze równanie, wynikające z porównania współczynników przy  $\zeta^0 = 1$ , mianowicie

$$(3.6) \quad \frac{d^2 \varphi_0}{d\eta^2} = 0$$

otrzymamy

$$(3.7) \quad \varphi_0 = C_0 \eta + D_0,$$

a po wykorzystaniu warunków brzegowych (3.5) znajdziemy  $C_0 = 0$ ,  $D_0 = \delta$ , skąd

$$(3.8) \quad \varphi_0 = \delta.$$

Drugie z równań

$$(3.9) \quad \frac{d^2 \varphi_1}{d\eta^2} = -\cos \varphi_0$$



po uwzględnieniu (3.8) i scałkowaniu przyjmie postać

$$(3.10) \quad \varphi_1 = C_1 \eta - \frac{\eta^2}{2} \cos \delta + D_1.$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych (3.5) znajdziemy  $C_1 = \cos \delta$ ,  $D_1 = 0$  i funkcję  $\varphi_1$  określimy w następujący sposób:

$$(3.11) \quad \varphi_1 = \left( \eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \cos \delta.$$

Podobnie możemy obliczyć pozostałe  $\varphi_i$ , przy czym stałe  $D_i = 0$  ze względu na występowanie  $\eta$  po pierwszym całkowaniu. Dla wyznaczenia stałych  $C_i$  będziemy korzystać z drugiego warunku brzegowego (3.5).

Dwie dalsze funkcje  $\varphi_i$  mają postać

$$(3.12) \quad \begin{cases} \varphi_2 = - \left( 2\eta - \eta^3 + \frac{1}{4} \eta^4 \right) \frac{\sin 2\delta}{12} + \frac{2}{\lambda^2} \left( \eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \sin 2\delta, \\ \varphi_3 = - \left( \frac{2}{15} \eta - \frac{1}{12} \eta^4 + \frac{1}{20} \eta^5 - \frac{1}{120} \eta^6 \right) \frac{\cos^3 \delta}{2} + \\ + \left( \frac{4}{5} \eta - \frac{1}{3} \eta^3 + \frac{1}{20} \eta^5 - \frac{1}{120} \eta^6 \right) \frac{\sin 2\delta \sin \delta}{12} - \\ - \frac{2}{3\lambda^2} \left( 2\eta - \eta^3 + \frac{\eta^4}{4} \right) (2 \cos \delta - 3 \cos^3 \delta). \end{cases}$$

W ten sposób przy ustalonych  $\zeta$  i  $\lambda$  możemy w obszarze zbieżności szeregu (3.1) obliczyć kąt ugięcia  $\varphi$  w dowolnym punkcie  $D$  osi belki z żadaną dokładnością. Aby wyliczyć kąt na końcu belki podstawimy  $\eta = 1$  i wtedy

$$(3.13) \quad \varphi_l = \delta + \zeta \frac{\cos \delta}{2} - \zeta^2 \left( \frac{5}{48} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \sin 2\delta - \\ - \zeta^3 \left[ \frac{47}{360} \cos^2 \delta - \frac{61}{720} + \frac{5}{6\lambda^2} (2 - 3 \cos^2 \delta) \right] \cos \delta + \dots$$

Ze wzoru (3.13) bardzo łatwo możemy przejść do ugięcia belki nierozciągliwej. Wtedy  $EF \rightarrow \infty$ , a przy skończonym  $\zeta$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  zgodnie z (2.12); możemy więc przyjąć  $1/\lambda^2 = 0$ . Gdy w dodatku belka będzie obciążona siłą prostopadłą do osi belki (nieokształconej), to  $\delta = 0$  i otrzymamy wzór

$$(3.14) \quad \varphi_l = \frac{\zeta}{2} - \frac{11}{240} \zeta^3 + \dots$$

Ze wzoru (3.14) po ograniczeniu się do pierwszego wyrazu szeregu otrzymujemy znany z teorii małych ugięć, elementarny wzór na kąt ugięcia belki wspornikowej.

#### 4. Wyznaczenie współrzędnej $y$ belki ugiętej

Po wyznaczeniu kąta  $\varphi$  rozwiązanie drugiego równania wyjściowego nie przedstawia już większych trudności.

Przyjmijmy współrzędną  $y(\eta; \zeta, \lambda)$  w postaci szeregu

$$(4.1) \quad y = y_0 + y_1 \zeta + y_2 \zeta^2 + y_3 \zeta^3 + \dots$$

Po zróżniczkowaniu szeregu względem  $\eta$ , podstawieniu (3.2) oraz uporządkowaniu względem  $\zeta$  możemy napisać równanie (2.16) w następującej postaci:

$$(4.2) \quad \frac{dy_0}{d\eta} + \frac{dy_1}{d\eta} \zeta + \frac{dy_2}{d\eta} \zeta^2 + \frac{dy_3}{d\eta} \zeta^3 + \dots = \\ = l \left\{ \sin \varphi_0 + \zeta \left[ \frac{2}{\lambda^2} (1 - \cos 2\varphi_0) - \frac{\varphi_1^2}{2} \sin \varphi_0 \right] - \right. \\ - \zeta^2 \left( \frac{\varphi_1^2}{2} \sin \varphi_0 - \frac{4}{\lambda^2} \varphi_1 \sin 2\varphi_0 - \varphi_2 \cos \varphi_0 \right) - \\ - \zeta^3 \left[ \frac{\varphi_1^3}{2} \cos \varphi_0 + \varphi_1 \varphi_2 \sin \varphi_0 - \varphi_3 \cos \varphi_0 - \right. \\ \left. - \frac{4}{\lambda^2} (\varphi_1^2 \cos 2\varphi_0 + \varphi_2 \sin 2\varphi_0) \right] + \dots \left. \right\}$$

Do równania (4.2) dołączymy warunek brzegowy

$$(4.3) \quad \eta = 0, \quad y = 0,$$

a więc zgodnie z rozwinięciem (4.1)

$$(4.4) \quad \eta = 0, \quad y_i = 0 \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Porównując w równaniu (4.2) współczynniki przy  $\zeta$  otrzymamy podobnie jak przy wyznaczeniu kąta  $\varphi$  układ równań różniczkowych, liniowych, do których możemy podstawić wcześniej obliczone wartości  $\varphi_i$ .

Pierwsze z równań przyjmie postać

$$(4.5) \quad \frac{dy_0}{d\eta} = l \sin \varphi_0 \equiv l \sin \delta,$$

a, po scałkowaniu

$$(4.6) \quad \frac{y_0}{l} = \eta \sin \delta + C_0.$$

Z warunku brzegowego (4.4) mamy  $C_0 = 0$  i ostatecznie

$$(4.7) \quad \frac{y_0}{l} = \eta \sin \delta.$$

Podobnie wyznaczmy pozostałe  $y_i$ . Wypiszemy kilka dalszych, wyznaczonych funkcji  $y_i$ :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{y_1}{l} = \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \right) \frac{\cos^2 \delta}{2} + \frac{4}{\lambda^2} \eta \sin^2 \delta, \\ \frac{y_2}{l} = - \left( \eta^2 + \eta^3 - \eta^4 + \frac{1}{5} \eta^5 \right) \frac{\sin 2\delta \cos \delta}{12} + \frac{3\eta^2 - \eta^3}{\lambda^2} \sin 2\delta \cos \delta, \\ \frac{y_3}{l} = - \left( \frac{1}{15} \eta^2 + \frac{1}{12} \eta^4 - \frac{7}{60} \eta^5 + \frac{1}{20} \eta^6 - \frac{1}{140} \eta^7 \right) \frac{\cos^4 \delta}{2} + \\ + \left( \frac{2}{5} \eta^2 + \frac{2}{3} \eta^3 - \frac{1}{3} \eta^4 - \frac{1}{5} \eta^5 + \frac{2}{15} \eta^6 - \frac{2}{105} \eta^7 \right) \frac{\sin^2 \delta \cos^2 \delta}{6} - \\ - \left( \frac{2}{3} \eta^2 + \frac{2}{3} \eta^3 - \frac{2}{3} \eta^4 + \frac{2}{15} \eta^5 \right) \frac{4}{\lambda^2} \sin^2 \delta \cos^2 \delta + \\ + \left( \frac{1}{6} \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 - \frac{7}{24} \eta^4 + \frac{7}{120} \eta^5 \right) \frac{4}{\lambda^2} \cos^4 \delta + \\ + \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \right) \frac{16}{\lambda^4} \sin^2 \delta \cos^2 \delta. \end{cases}$$

Podstawiając  $\eta = 1$  możemy wyznaczyć współrzędną  $y_l$  końca belki:

$$(4.9) \quad \frac{y_l}{l} = \sin \delta + \zeta \left( \frac{\cos^2 \delta}{3} + \frac{4}{\lambda^2} \sin^2 \delta \right) - \zeta^2 \left( \frac{1}{5} \sin \delta \cos^2 \delta - \frac{4}{\lambda^2} \sin \delta \cos^2 \delta \right) - \zeta^3 \left[ \frac{4}{105} \cos^4 \delta - \frac{34}{315} \sin^2 \delta \cos^2 \delta + \frac{16}{15\lambda^2} (3 \sin^2 \delta \cos^2 \delta - \cos^4 \delta) - \frac{32}{3\lambda^4} \sin^2 \delta \cos^2 \delta \right] + \dots$$

Dla belki nierozciągliwej obciążonej siłą prostopadłą do osi belki (przed odkształceniem) podstawimy  $1/\lambda^2 = 0$  i  $\delta = 0$ , skąd

$$(4.10) \quad \frac{y_l}{l} = \frac{\zeta}{3} - \frac{4}{105} \zeta^3 + \dots$$

Gdy ograniczymy się do pierwszego wyrazu szeregu (4.10), to otrzymamy znany z teorii małych ugięć elementarny wzór na ugięcie belki wspornikowej.

### 5. Wyznaczenie współrzędnej $x$ belki ugiętej

Rozwiążemy teraz trzecie równanie wyjściowe (2.17). Przyjmijemy współrzędną  $x(\eta; \zeta, \lambda)$  w postaci szeregu

$$(5.1) \quad x = x_0 + x_1 \zeta + x_2 \zeta^2 + x_3 \zeta^3 + \dots$$

Zróżniczkujemy szereg (5.1) wyraz po wyrazie i podstawimy do równania wyjściowego (2.18). Po podstawieniu zamiast  $\cos \varphi$  i  $\sin 2\varphi$  szeregów (3.2) i po uporządkowaniu wyrazów względem  $\zeta$  otrzymamy

$$(5.2) \quad \frac{dx_0}{d\eta} + \frac{dx_1}{d\eta} \zeta + \frac{dx_2}{d\eta} \zeta^2 + \frac{dx_3}{d\eta} \zeta^3 + \dots = \\ = l \left\{ \cos \varphi_0 - \zeta \left( \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{2}{\lambda^2} \sin 2\varphi_0 \right) - \right. \\ - \zeta^2 \left( \frac{\varphi_1^2}{2} \cos \varphi_0 + \varphi_2 \sin \varphi_0 - \frac{4}{\lambda^2} \varphi_1 \cos 2\varphi_0 \right) + \\ + \zeta^3 \left[ \frac{\varphi_1^3}{6} \sin \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_2 \cos \varphi_0 - \varphi_3 \sin \varphi_0 - \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{\lambda^2} (\varphi_1^2 \sin 2\varphi_0 - \varphi_2 \cos 2\varphi_0) \right] + \dots \right\}.$$

Do równania (5.2) dołączmy warunek brzegowy

$$(5.3) \quad \eta = 0, \quad x = 0,$$

a więc

$$(5.4) \quad \eta = 0, \quad x_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Po przyrównaniu współczynników przy  $\zeta^i$  otrzymujemy układ równań liniowych, z których, podobnie jak w poprzednich paragrafach, drogą całkowania każdego z otrzymanych równań możemy otrzymać funkcje  $x_i$ . Aby wykonać całkowanie, skorzystamy z wyznaczonych wcześniej (w p. 3) funkcji  $\varphi_i$  oraz z warunku brzegowego (5.4); otrzymamy

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_0}{l} = \eta \cos \delta, \\ \frac{x_1}{l} = - \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \right) \frac{\sin 2\delta}{4} + \frac{2}{\lambda^2} \eta \sin 2\delta, \\ \frac{x_2}{l} = - \left( \frac{1}{3} \eta^3 - \frac{1}{4} \eta^4 + \frac{1}{20} \eta^5 \right) \frac{\cos^3 \delta}{2} + \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4 + \frac{1}{20} \eta^5 \right) \times \\ \quad \times \frac{\sin 2\delta \sin \delta}{12} - \frac{1}{\lambda^2} \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \right) (\sin 2\delta \sin \delta - 2 \cos 2\delta \cos \delta), \\ \frac{x_3}{l} = \left( \frac{1}{15} \eta^2 + \frac{2}{9} \eta^3 - \frac{11}{60} \eta^5 + \frac{11}{120} \eta^6 - \frac{11}{840} \eta^7 \right) \frac{\cos^3 \delta \sin \delta}{2} - \\ - \left( \frac{2}{5} \eta^2 - \frac{1}{12} \eta^4 + \frac{1}{120} \eta^6 - \frac{1}{840} \eta^7 \right) \frac{\sin^3 \delta \cos \delta}{6} - \\ - \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{1}{3} \eta^2 + \eta^3 - \frac{5}{6} \eta^4 + \frac{1}{6} \eta^5 \right) \sin \delta \cos^3 \delta + \end{array} \right.$$

$$+ \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{8} \eta^4 + \frac{1}{40} \eta^5 \right) \sin^3 \delta \cos \delta +$$

$$+ \frac{4}{\lambda^4} \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \right) \sin 2\delta \cos 2\delta,$$

Współrzedną  $x_l$  końca belki otrzymamy podstawiając  $\eta = 1$ :

$$(5.6) \quad \frac{x_l}{l} = \cos \delta - \zeta \left( \frac{1}{6} - \frac{2}{\lambda^2} \right) \sin 2\delta - \zeta^2 \left[ \frac{\cos^3 \delta}{15} - \frac{2}{15} \sin^2 \delta \cos \delta + \right.$$

$$+ \left. \frac{4}{3\lambda^2} (2 \sin^2 \delta \cos \delta - \cos^3 \delta) \right] + \zeta^3 \left[ \frac{29}{315} \cos^3 \delta \sin \delta - \frac{17}{315} \sin^3 \delta \cos \delta - \right.$$

$$\left. - \frac{8}{15\lambda^2} (5 \sin \delta \cos^3 \delta - 3 \sin 3\delta \cos \delta) + \frac{8}{3\lambda^4} \sin 2\delta \cos 2\delta \right] + \dots$$

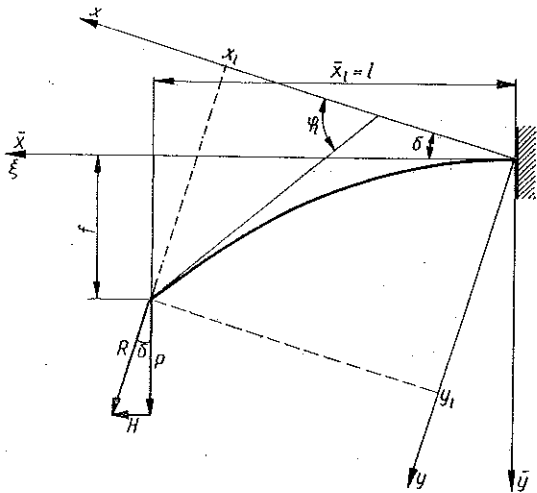
### 6. Wyznaczenie ugięcia dla belki na nieprzesuwnych podporach

Wzory na współrzędne  $x, y$  belki obciążonej siłą skupioną  $R$  pozwalają na rozwiązanie belki opartej przegubowo na nieprzesuwnych podporach. Zauważmy, że belkę z rys. 2 możemy zastąpić dwoma belkami wspornikowymi, obciążonymi reakcjami  $R$  (por. rys. 5). Ponieważ siła  $R$  jest funkcją nieznanego na razie kąta  $\delta$ , to wprowadzimy podobnie jak w pracy [5] nową, bezwymiarową wielkość  $\theta$  zależną liniowo od znanej siły  $P$ , mianowicie

$$(6.1) \quad \theta = \frac{Pl^2}{EI}$$

Wtedy będzie zachodzić związek

$$(6.2) \quad \zeta = \frac{\theta}{\cos \delta}$$



Rys. 5

Po podstawieniu (6.2) do wzorów (4.9) i (5.6) na współrzędne  $y_l$  i  $x_l$  końca belki przyjmą one nową, prostszą postać

$$(6.3) \quad \frac{y_l}{l} = \sin \delta + \theta \cos \delta \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{\lambda^2} \operatorname{tg}^2 \delta \right) - \theta^2 \sin \delta \left( \frac{1}{5} - \frac{4}{\lambda^2} \right) -$$

$$- \theta^3 \cos \delta \left[ \frac{4}{105} - \frac{34}{315} \operatorname{tg}^2 \delta + \frac{16}{15\lambda^2} (3 \operatorname{tg}^2 \delta - 1) - \frac{32}{3\lambda^4} \operatorname{tg}^2 \delta \right] + \dots,$$

$$(6.4) \quad \frac{x_l}{l} = \cos \delta - \theta \sin \delta \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{\lambda^2} \right) - \theta^2 \cos \delta \left[ \frac{1}{15} - \frac{2}{15} \operatorname{tg}^2 \delta + \frac{4}{3\lambda^2} (2 \operatorname{tg}^2 \delta - 1) \right] + \theta^3 \sin \delta \left[ \frac{29}{315} - \frac{17}{315} \operatorname{tg}^2 \delta - \frac{8}{15\lambda^2} (5 - 3 \operatorname{tg}^2 \delta) + \frac{16}{3\lambda^4} (1 - \operatorname{tg}^2 \delta) \right] + \dots$$

Przyjmijmy nowy układ współrzędnych (por. rys. 5) tak, aby oś  $\bar{x}$  pokrywała się z osią cechy tożsamości  $\xi$  (belką nieodkształconą). Współrzędna  $\bar{x}$  będzie określona za pomocą wzoru

$$(6.5) \quad \bar{x} = y \sin \delta + x \cos \delta.$$

Wprowadzimy teraz warunek nieprzesuwności podpór. Warunek ten dla belki z rys. 5 będzie oznaczał, że rzut przemieszczenia końca belki na oś  $\bar{x}$  ma być równy  $l$ . Wynika stąd, że

$$(6.6) \quad \frac{\bar{x}_l}{l} = 1,$$

a po podstawieniu (6.5) otrzymamy równanie

$$(6.7) \quad \frac{y_l}{l} \sin \delta + \frac{x_l}{l} \cos \delta = 1.$$

Po podstawieniu za  $y_l/l$  i  $x_l/l$  wyrażeń (6.3) i (6.4) przy ograniczeniu się do czterech wyrazów szeregu otrzymamy równanie w postaci

$$(6.8) \quad \frac{4}{\lambda^2} \theta \sin \delta - \left( \frac{1}{15} - \frac{4}{3\lambda^2} \right) \theta^2 \cos \delta + \left( \frac{17}{315} - \frac{24}{15\lambda^2} + \frac{16}{3\lambda^4} \right) \theta^3 \sin \delta = 0.$$

Po odrzuceniu trywialnego rozwiązania  $\theta = 0$  oraz przemnożeniu całego równania przez  $\lambda^4/4 \cos \delta$  otrzymamy równanie

$$(6.9) \quad \operatorname{tg} \delta - a\theta + b\theta^2 \operatorname{tg} \delta = 0,$$

gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają wielkości zależne tylko od  $\lambda$ :

$$(6.10) \quad \begin{cases} a = \frac{\lambda^2 - 20}{60}, \\ b = \frac{1}{60} \left( \frac{17}{21} \lambda^2 - 24 + \frac{80}{\lambda^2} \right). \end{cases}$$

Otrzymamy stąd przybliżoną wartość kąta  $\delta$  (właściwie  $\operatorname{tg} \delta$ ) jako funkcji  $\theta$  i  $\lambda$ :

$$(6.11) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{a\theta}{1 + b\theta^2}.$$

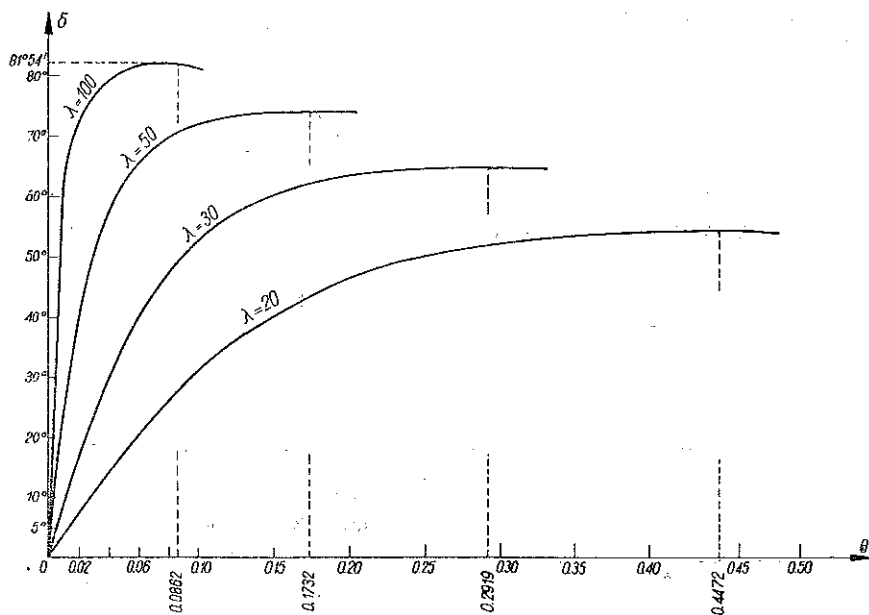
Na rysunku 6 przedstawiono krzywe zależności  $\delta$  od  $\theta$ , wykreślone dla różnych smukłości  $\lambda$ , przy czym przy wartościach bezwymiarowej siły  $\theta$  równej

$$(6.12) \quad \theta_g = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

wystąpią ekstremalne (maksymalne) wartości kąta  $\delta$ , a mianowicie

$$(6.13) \quad \operatorname{tg} \delta_g = \frac{a}{2\sqrt{b}}$$

Np. gdy  $\lambda = 100$ ,  $\theta_g = 0,0862$  i  $\delta_g = 81^\circ 54'$ .



Rys. 6

Otrzymane wyniki możemy porównać z wynikami otrzymanymi w pracy [5]. Będziemy mieć przy tym zadanie ułatwione, gdyż do iteracyjnego rozwiązania równań przestępnych (6.6) i (6.7) z pracy [5] jako pierwsze przybliżenie możemy przyjąć kąty  $\delta$  i  $\varphi_l$  obliczone ze wzorów (6.11) i (3.13). Okazuje się przy tym, że tak przyjęte pierwsze przybliżenia przy  $\theta$  mniejszych od  $\theta_g$  bardzo niewiele odbiegają od wyników ścisłych.

Zapiszmy układ równań przestępnych z pracy [5] w następującej postaci:

$$(6.14.1) \quad \frac{u_0}{F(\vartheta_0, k)} = 1,$$

$$(6.14.2) \quad 1 = (1 + pv_l) v_0 + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left\{ \sqrt{(v_l - v_0) [2 + p(v_l + v_0)]} \left( \sqrt{1 - v_0^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + v_0 \sqrt{\frac{1 + v_0}{1 - v_0}} \right) - 2v_0 \sqrt{1 + pv_l} E(\vartheta_0, k) - 2 \sqrt{1 - v_0^2} [2 + p(1 + v_l)] \times \right. \\ \left. \times \arcsin \left[ \frac{\alpha}{k^2} \sqrt{\frac{k^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 \sin^2 u_0}} (1 - \operatorname{dn} u_0) \right] \right\},$$

gdzie  $F(\vartheta_0, k)$  i  $E(\vartheta_0, k)$  są to niepełne całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju,

$$\vartheta_0 = \arcsin \sqrt{\frac{2(v_l - v_0)}{(1 + v_l)(1 - v_0)}}$$

oznacza amplitudę całek eliptycznych,

$$k = \sqrt{\frac{(1 + pv_l) [2 + p(1 + v_l)]}{4(1 + pv_l)}}$$

moduł całek i funkcji eliptycznych,  $\operatorname{sn} u_0$ ,  $\operatorname{dn} u_0$  funkcje eliptyczne Jacobiego oraz

$$u_0 = \sqrt{\xi(1 + pv_l)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1 + v_l}{2}},$$

$$v_l = \sin \varphi_l, \quad v_0 = \sin \delta.$$

O ile obliczymy wartości ekstremalne  $\theta_g$  i  $\delta_g$  według wzorów (6.12) i (6.13), to możemy obliczyć  $\xi$  i  $p$  ze związków (6.2) i (2.12), a następnie kąt  $\varphi_l$  z (3.13). Obliczone wartości podstawimy do równań (6.14) i okaże się, że zamiast 1 po prawej stronie otrzymamy dla różnych  $\lambda$  wartości podane w tabelcy 1. Na podstawie osiągniętej dokładności można przypuszczać, że i na pewnym obszarze poza  $\theta_g$  wyniki będą dostatecznie przybliżone.

Tablica 1

Smukłość $\lambda$	Równanie	
	(6.14.1)	(6.14.2)
20	1,0006	0,9988
50	1,0078	0,9993
100	1,0086	0,9994

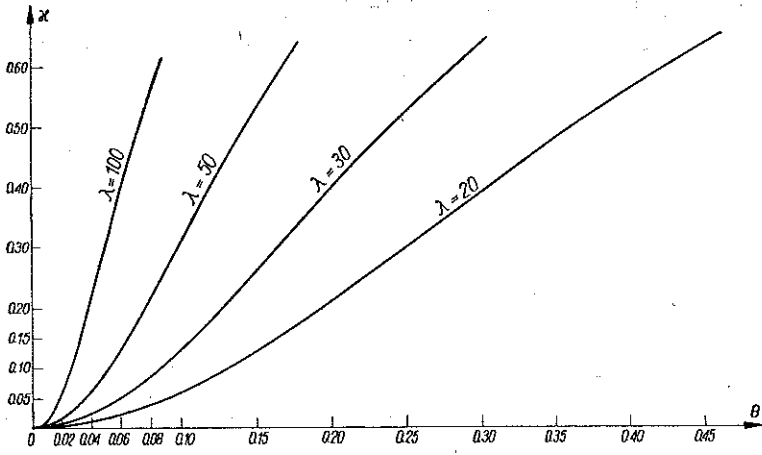
Znając kąt  $\delta$  możemy wyznaczyć przybliżoną wartość reakcji poziomej jako funkcje  $\lambda$  i  $\theta$ :

$$(6.15) \quad \chi = \theta \operatorname{tg} \delta = \frac{a \theta^2}{1 + b \theta^2},$$

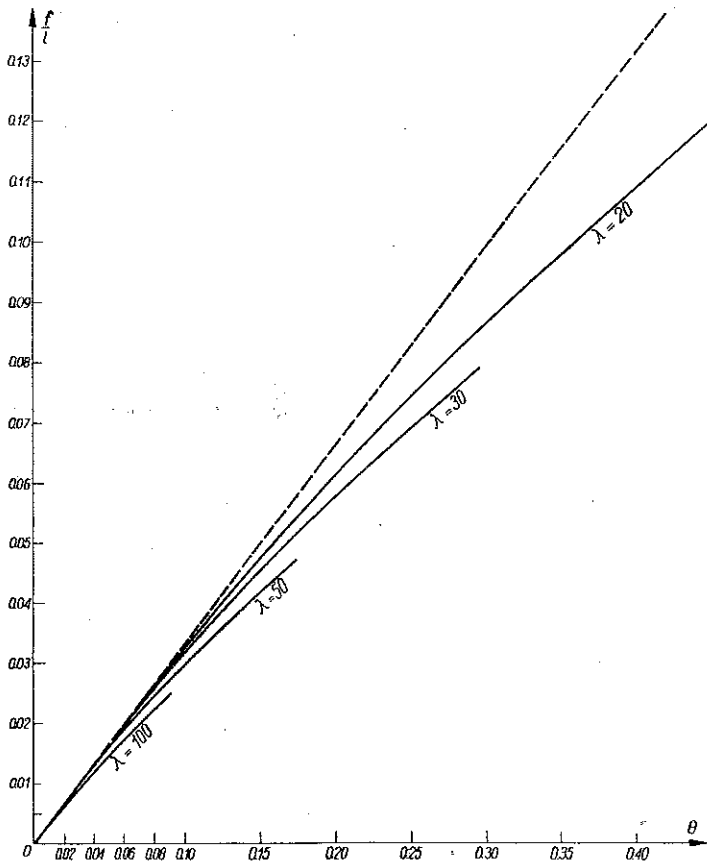
przy czym  $\chi$  oznacza bezwymiarową reakcję poziomą:

$$(6.16) \quad \chi = \frac{HP^2}{EI}.$$





Rys. 7



Rys. 8

Na rysunku 7 pokazano przebieg zależności reakcji  $\chi$  od siły bezwymiarowej  $\theta$  przy różnych smukłościach  $\lambda$ . Z wykresu wynika, że przy belkach krępych początkowo reakcja rośnie powoli, więc jej pomijanie przy niedużych  $\theta$  może być usprawiedliwione. Inaczej jest przy belkach smukłych. Tutaj krzywa jest bardziej stroma, nawet przy niewielkich  $\theta$  reakcja osiąga duże wartości; belka przy dużych smukłościach zbliża się do wiotkiego ciągu.

Ugięcie belki, równoznaczne z przemieszczeniem się belki wzdłuż osi  $\bar{y}$ , obliczymy ze związku (rys. 5):

$$(6.17) \quad \bar{y} = \frac{y}{l} \cos \delta - \frac{x}{l} \sin \delta.$$

Maksymalne ugięcie (strzałkę ugięcia) belki na nieprzesuwanych podporach znajdziemy przez podstawienie do (6.17) wzorów na  $y_i/l$  i  $x_i/l$ . Otrzymamy wzór

$$(6.18) \quad \frac{f}{l} = \frac{\theta}{3} - 2\theta^2 \operatorname{tg} \delta \left( \frac{1}{15} - \frac{4}{3\lambda^2} \right) - \theta^3 \left[ \frac{4}{105} - \frac{17}{315} \operatorname{tg}^2 \delta - \frac{8}{15\lambda^2} (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \delta) - \frac{16}{3\lambda^4} \operatorname{tg}^2 \delta \right] + \dots$$

W przypadku belki na podporach przesuwanych podstawimy do (6.18)  $\delta = 0$  i otrzymamy

$$(6.19) \quad \frac{f}{l} = \frac{\theta}{3} - \theta^3 \left( \frac{4}{105} - \frac{16}{15\lambda^2} \right) + \dots$$

Strzałki ugięcia belek o różnej smukłości pokazano na rys. 8. Linia kreskowaną zaznaczono ugięcia belek na podporach przesuwanych. Z porównania ugięć wynika, że przy  $\theta = \theta_g$  ugięcia belek na podporach przesuwanych są około 23% większe od ugięć takich samych belek na podporach nieprzesuwanych.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
- [2] Е. П. Попов, *Нелинейные задачи статики тонких стержней*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1948.
- [3] T. PÖSCHL, *Über eine Methode zur angenäherten Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung der Durchbiegung bei der Knickung gerader Stäbe*, Ing.-Archiv, 1, 9 (1938), 34-41.
- [4] J. SZARSKI, T. WAŻEWSKI, *Uwagi o równaniu struny drgającej*, Zeszyty Nauk. UJ, Mat. Fiz. Chem., nr 1, Kraków 1955.
- [5] Z. WASZCZYŹYŃ, M. ŻYCZKOWSKI, *Finite Elastic Deflections of Stretchable Beam on Undisplaceable Supports*, Arch. Mech. Stos., 1, 14 (1962).

## Резюме

### ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ПРОГИБОВ БАЛКИ НА НЕПОДВИЖНЫХ ОПОРАХ

Приводится попытка приближенного решения задачи, решенной точно в статье [5]. Однако полученные там формулы требуют предыдущего решения систем трансцендентных уравнений для определения углов прогиба, как функции нагрузки. Решение этих уравнений напр. путем итерации очень кропотливо и значительно усложняет анализ работы балки.

В настоящей работе применение степенных рядов к решению трансцендентных уравнений привело к приближенным, но компактным формулам для угла прогиба  $\delta$ , для горизонтальной реакции  $\chi$  и для стрелки прогиба  $f$ . Это позволило составить диаграммы для  $\delta$ ,  $\chi$  и  $f$  как функции внешней нагрузки  $\theta$ , при различной гибкости  $\lambda$ .

Из диаграммы следует, что пренебрежение влиянием горизонтальной реакции при малых прогибах балки на подвижных опорах оправдывается при толстых и коротких балках. В случае же балок с большой гибкостью даже при не очень больших прогибах всегда возникают большие горизонтальные реакции, а сам прогиб значительно уменьшается.

## Summary

### APPROXIMATE COMPUTATION OF LARGE ELASTIC DEFLECTIONS OF A BEAM ON UNDISPLACEABLE SUPPORTS

This is an approximate solution of the problem treated in a rigorous manner in Ref. [5]. The equations obtained in that reference require, however, previous solution of a set of transcendental equations in order to obtain the deflection angles in function of the load. The solution of these equations by iteration, for instance, is very toilsome and complicates considerably the analysis.

In the present paper, the application of power series to the solution of transcendental equations has led to approximate equations expressing in a closed form the deflection angle  $\delta$ , the horizontal reaction force  $\chi$  and the deflection angle  $f$ . This enables us to plot diagrams of  $\delta$ ,  $\chi$  and  $f$  in function of the external load  $\theta$ , for beams of various slenderness  $\lambda$ .

From the graphs it follows that the rejection of the influence of the horizontal reaction with small deflections is justified for beams of small slenderness. For slender ones, even with relatively small deflections, great horizontal reactions appear and the deflection itself undergoes considerable reduction.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1961 r.*