

JERZY RUTECKI

**WARIACYJNA METODA W. Z. WŁASOWA W ZASTOSOWANIU
DO CIENKICH POWŁOK W KSZTAŁCIE OSTROŚŁUPA ŚCIĘTEGO**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXIV**

TOM X • ZESZYT 1 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Założenia podstawowe	5
2. Równania dla powłoki ostrosłupa ściętego słabo zbieżnego	14
3. Zginanie i skręcanie cienkościennej powłoki ostrosłupowej	17

1. Założenia podstawowe

Cienkościenne powłoki o przekroju prostokątnym z podłużnymi pasami w narożach znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach techniki, w szczególności w komunikacji i w budownictwie dźwigowym. Przekrój poprzeczny takich powłok jest zwykle zamknięty, stały na całej długości lub zmienny liniowo. Zastosowanie metody wariacyjnej W. Z. Własowa do tego rodzaju powłok, metody pozwalającej sprowadzić cząstkowe równania różniczkowe do zwykłych równań różniczkowych, jest w wielu praktycznych przypadkach nadzwyczaj celowe. Metoda ta oparta jest na zasadzie prac wirtualnych.

Zagadnienie rozpatrujemy wprowadzając dwie funkcje $u(z, s)$ i $v(z, s)$, przedstawiające podłużne (wzdłuż tworzącej) przemieszczenie dowolnego punktu $M(z, s)$ oraz styczne (w kierunku stycznym do konturów przekroju poprzecznego). Każdą z powyższych funkcji zależnych od dwóch zmiennych z i s przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których każda zależy tylko od jednej zmiennej. Takie założenie sprowadza układ równań cząstkowych do układu równań zwyczajnych. Wygodnie jest funkcje u i v przedstawić jako sumy składników będących iloczynami o przedstawionej wyżej budowie, przy czym liczba składników jest równa liczbie stopni swobody wydzielonego myślowo elementu powłoki, traktowanego jako układ prętowy. W ten sposób otrzymuje się układ zwykłych równań różniczkowych, których rozwiązanie nie nastęrcza trudności.

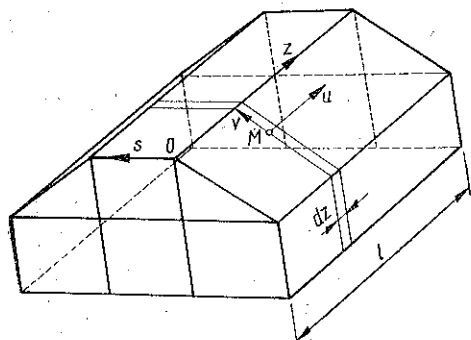
Rozpatrzmy pryzmatyczną powłokę, złożoną z pewnej liczby prostokątnych płyt, posiadającą w przekroju poprzecznym kilka zamkniętych konturów. Założmy, że poszczególne prostokątne płyty są ze sobą sztywno połączone i nie istnieje możliwość względnych przesunięć. Położenie punktu M leżącego w środkowej powierzchni powłoki będziemy określać współrzędną z liczoną wzdłuż długości i współrzędną s liczoną po konturze przekroju poprzecznego.

Przedstawmy wspomniane przemieszczenia w postaci sumy funkcji

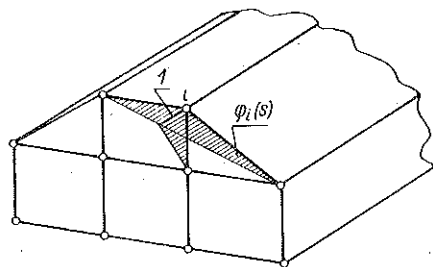
$$(1.1) \quad \begin{cases} u(z, s) = \sum_1^m U_i(z) \varphi_i(s), & i = 1, 2, 3, \dots, m, \\ v(z, s) = \sum_1^n V_k(z) \psi_k(s), & k = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

gdzie $U_i(z)$ i $V_k(z)$ są nieznanymi funkcjami z , a $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ są uprzednio dobranymi funkcjami s (uważanymi za znane).

Wydzielmy z cienkościennej powłoki element ograniczony przekrojami $z = \text{const}$ i $z + dz = \text{const}$. Umówmy się, że element ten będziemy rozpatrywać jako płaski układ ramowy, złożony z kilku zamkniętych konturów. Przyjmijmy, że poszukiwane funkcje $U_1(z)$, $U_2(z)$, ..., $U_m(z)$ określają podłużne przemieszczenia m węzłów naszego elementu (ramy) przy $V(z, s) = 0$. Zgodnie z określeniem przemieszczeń (1.1) funkcje $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_m(s)$ będą zapewniać ciągłość podłużnych przemieszczeń $u(z, s)$ na konturze przekroju poprzecznego $z = \text{const}$. Funkcja $\varphi_i(s)$ przy takim wyborze poszukiwanych wielkości ma prostą geometryczną interpretację: każda z tych funkcji różna od zera na prostoliniowych odcinkach konturu (prętach) schodzących się w węźle i ramy, na długościach każdego z prętów zmienia



Rys. 1



Rys. 2

się liniowo przyjmując w węźle i wartość równą jedności, a na drugich końcach prętów równą zero. Na wszystkich pozostałych odcinkach nie schodzących się w węźle i funkcja $\varphi_i(s) = 0$.

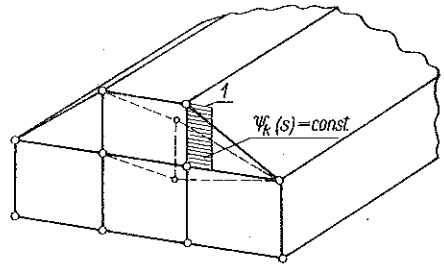
Oczywiście, postać funkcji $\varphi_i(s)$ może być różna. Przyjmijmy, że każdej sumie m niezależnych liniowo funkcji $U_i(z)$ będzie odpowiadać m liniowo niezależnych funkcji $\varphi_i(s)$, przy czym każda z nich będzie ciągła na całym konturze, a na oddzielnych odcinkach konturu będzie liniowa. Jeżeli np. chcemy w pierwszym wyrazie sumy (1.1) przedstawić podłużne przemieszczenie elementu jako belki o złożonym przekroju, opierając się na zasadzie płaskich przekrojów, to przyjmujemy dla całego przekroju $z = \text{const}$ trzy spośród m możliwych przemieszczeń $U_1(z)$, $U_2(z)$ i $U_3(z)$, określające przemieszczenia przegubowego sztywnego płaskiego układu. Będą to funkcje zmiany przemieszczeń punktów węzłowych przy rozciąganiu (ściskaniu) i zginaniu w płaszczyźnie poziomej i pionowej. Zasada płaskich przekrojów Bernoulliego wymaga specjalnego doboru funkcji $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ i $\varphi_3(s)$; każda z nich jest liniową funkcją współrzędnych prostokątnych $x = x(s)$, $y = y(s)$ punktu leżącego na konturze. Wszystkie pozostałe wyrazy sumy (1.1)₁ odpowiadają takiej postaci przemieszczenia podłużnego, przy której przekrój poprzeczny po odkształceniu nie pozostaje płaski, ale paczy się. Wobec tego spaczenie pręta cienkościennego o wielobocznym konturze w przekroju poprzecznym określa się

$m - 3$ wielkościami $U_4(z), U_5(z), \dots, U_m(z)$. Odpowiednio dobrane liniowo niezależne funkcje ciągłe $\varphi_i(s)$ określają współrzędne uogólnione odkształcenia elementu z płaszczyzny przekroju poprzecznego $z = \text{const}$. Odpowiadające tym współrzędnym funkcje $U_i(z)$, z których każda zależy tylko od z , stanowią uogólnione przemieszczenia podłużne powłoki traktowanej jako pręt cienkościenny.

Mając dane odkształcenia elementu w płaszczyźnie $z = \text{const}$ określimy inne funkcje $\psi_k(s)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) dla poprzecznego stycznego przemieszczenia $v(z, s)$ punktu $M(z, s)$ leżącego na konturze. Traktując element jako układ prętowy a pręty jako nierozciągliwe, dochodzimy do wniosku, iż przemieszczenie po konturze może być wyrażone przez przemieszczenie $V_k(z)$ w płaszczyźnie przekroju poprzecznego traktowanego jako płaski model kinematyczny. Funkcje $V_k(z)$ oznaczają przemieszczenia przegubowe układu prętowego w jego płaszczyźnie.

Liczba n nieznanymi funkcji $V_k(z)$ jest równa liczbie stopni swobody układu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego powłoki, tj. $n = 2m - c$, gdzie m jest liczbą węzłów, c liczbą prętów elementarnej ramy. Mając n funkcji $V_k(z)$ w sumie (1.1) możemy określić funkcje $\psi_k(s)$. Każda z tych funkcji będzie przedstawiać przemieszczenie po konturze punktu M przy odpowiednim elementarnym stanie $V_k = 1, V_h = 0$ ($k \neq h$). Na długości każdego pręta wydzielonej myślowo ramy wskutek przyjętej nierozciągliwości i ściśliwości prętów funkcja $\psi_k(s)$ jest stałą niezależną od s , przedstawia więc tym samym przesunięcie każdego pręta wzdłuż jego osi.

Wielkości $V_k(z)$ mogą być tak dobrane, że trzy z nich $V_1(z), V_2(z)$ i $V_3(z)$ będą się odnosić do przemieszczenia modelu złożonego z płaskiego układu prętowego nie zmieniającego postaci. Pozostałe wielkości $V_4(z), V_5(z), \dots, V_n(z)$ będą odnosić się do takich przemieszczeń układu, przy których będzie zachodzić zmiana położenia poszczególnych ogniwi układu, będzie więc zachodzić zmiana kształtu przekroju. W takim razie odkształcenie konturu powłoki będzie określone $n - 3$



Rys. 3

niezależnymi liniowo funkcjami. Funkcje $\psi_k(s)$ odpowiadające n stopniom swobody zapewniają ciągłość przemieszczeń, o ile przegubowy model w każdym z możliwych n stanów $V_k = 1$ pozostaje ciągły. Funkcje $\psi_k(s)$ przedstawiają odkształcenie elementu cienkościennego pręta w płaszczyźnie $z = \text{const}$. Natomiast odpowiadające tym funkcjom poszukiwane wielkości $V_k(z)$, z których każda zależy od współrzędnej z przedstawiają poszukiwane poprzeczne przemieszczenia cienkościennego pręta. Tak więc położenie wszystkich węzłowych punktów poprzecznego elementu cienkościennego pręta — powłoki po odkształceniu przestrzennym przy przyjętych uogólnionych współrzędnych $\varphi_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) i $\psi_k(s)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) określa się $m + n$ przemieszczeniami podłużnymi $U_i(z)$ i poprzecznymi $V_k(z)$. Po określe-

niu funkcji $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ w rozwinięciu (1.1) zagadnienie sprowadza się do określenia funkcji $U_i(z)$ i $V_k(z)$. Oznaczmy naprężenia normalne i styczne w przekroju poprzecznym powłoki $z = \text{const}$ przez $\sigma = \sigma(z, s)$ oraz $\tau = \tau(z, s)$, przyjmując równomierny ich rozkład na grubości ścianki.

Zgodnie z prawem Hooke'a mamy

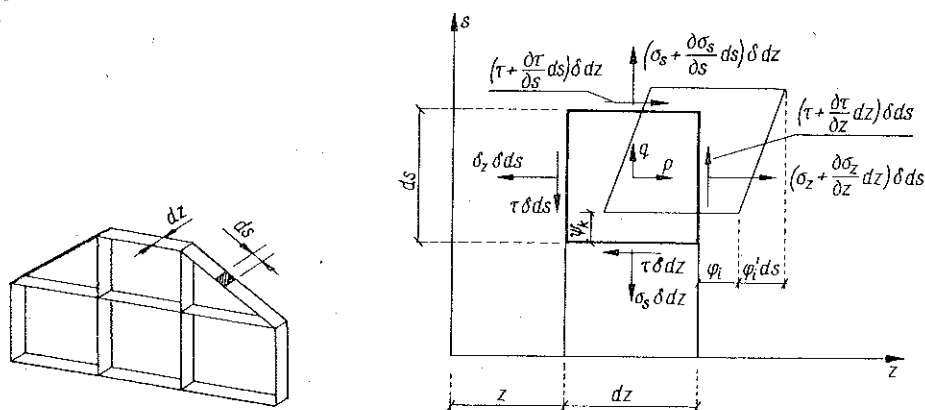
$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau = G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

Uwzględniając wzór (1.1) otrzymamy

$$(1.2) \quad \sigma(z, s) = E \sum_{i=1}^m U_i'(z) \varphi_i(s),$$

$$(1.3) \quad \tau(z, s) = G \left[\sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i'(s) + \sum_{k=1}^n V_k'(z) \psi_k(s) \right].$$

Wydzielmy z elementarnego poprzecznego pasma element $dz \times ds$. Siły działające na ten element oraz jego możliwe przemieszczenia pokazane są na rys. 4. Roz-



Rys. 4

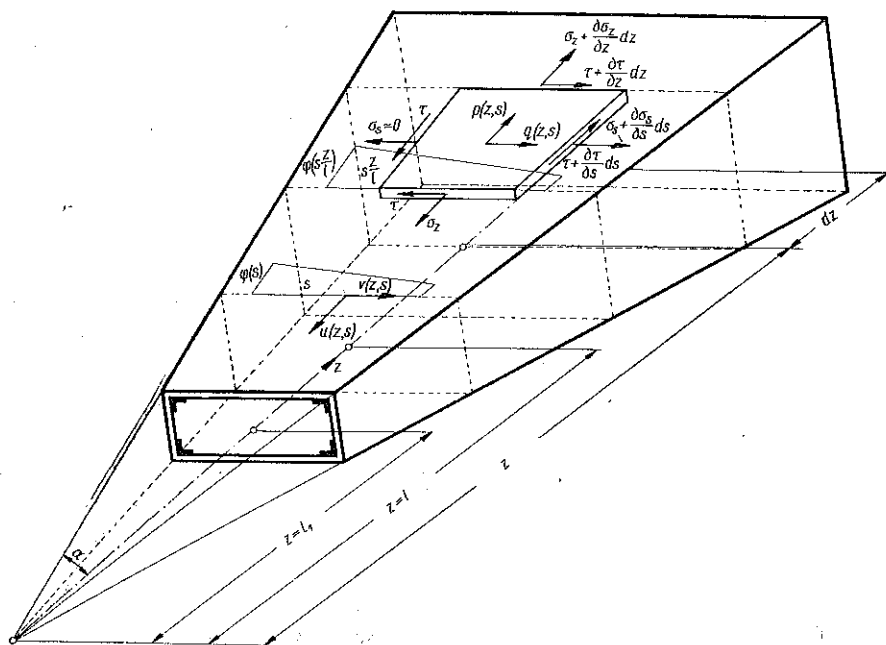
patrując równowagę elementu i przyrównując do zera sumę prac wewnętrznych i zewnętrznych sił obciążających element na jego wirtualnych przemieszczeniach, W. Z. WŁASOW otrzymał całkowite warunki równowagi elementu w postaci

$$(1.4) \quad \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi_j dA - \int_A \tau \varphi_j' dA + \int_L p \varphi_j ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$(1.5) \quad \int_A \frac{\partial \tau}{\partial z} \psi_n dA - \sum_k^n V_k \int_L \frac{M_k M_n}{EI} ds + \int_L q \psi_n ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $dA = \delta ds$ jest elementem pola powierzchni przekroju poprzecznego, $p = p(z, s)$ i $q = q(z, s)$ danym obciążeniem zewnętrznym przypadającym na jednostkę powierzchni powłoki, $M_k(s)$ i $M_h(s)$ odpowiednio momentami gnącymi poprzecznej ramy, odpowiadającymi dwom różnym stanom odkształcenia tej ramy.

Łatwo zauważyć, iż równania (1.4) są warunkami równowagi elementu $dz = 1$ w kierunku osi z . Równania (1.5) odpowiadają warunkom równowagi tegoż elementu w płaszczyźnie osi $z = \text{const}$.



Rys. 5

Jak już zaznaczyliśmy, każde z równań (1.4) i (1.5) otrzymuje się z przyrównania do zera sumy prac wszystkich zewnętrznych i wewnętrznych sił przy zmianie odkształconej postaci elementu.

Jako wirtualne przemieszczenie w równaniu (1.4) przyjęto podłużne przemieszczenie $U_i(z, s) = 1 \cdot \varphi_j(s)$ przedstawione jednym tylko wyrazem oznaczonym numerem j w (1.1) przy $U_j = 1$.

Za wirtualne przemieszczenie w równaniu (1.5) przyjęto poprzeczne konturowe przemieszczenie $V_k(z, s) = 1 \cdot \psi_h(s)$ określone również tylko jednym wyrazem o numerze h przy uogólnionej współrzędnej $V_h = 1$.

Interpretacja wyrazów równań (1.4) i (1.5) jest oczywista i nie wymaga bliższego omówienia z wyjątkiem wyrazu środkowego w równaniu (1.5). Wyraz ten przedstawia pracę sił wewnętrznych na odkształceniach pochodzących od zginania ele-

mentu odpowiadających h -temu elementarnemu stanowi przemieszczenia przegubowego kinematycznego łańcucha w jego płaszczyźnie. Dla elementu ds praca ta określa się iloczynem momentu gnącego

$$M(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) M_k(s)$$

ze znakiem ujemnym przez względny kąt obrotu $M_h(s) ds/EI$ dwóch przyległych przekrojów ograniczających ten element.

Momenty $M_k = M_k(s)$ i $M_h = M_h(s)$ odpowiadają elementarnym stanom odkształcenia wydzielonej myślowo ramy $V_k = 1$ i $V_h = 1$. Przy założeniu, że węzły ramy nie mają wewnętrznych węzłowych połączeń, momenty gnące $M_k(s)$ i $M_h(s)$ we wszystkich węzłach spełniają warunki równowagi, jeśli wziąć pod uwagę wszystkie możliwe spośród n dowolnych stanów ($k, h = 1, 2, 3, \dots, n$). Momenty te znajdujemy zwykłą metodą odkształceń wychodząc z odkształconej postaci ramy.

Wielkość $I = I(s)$ jest momentem bezwładności elementarnego paska przy szerokości $dz = 1$. Przy nieistnieniu poprzecznych wiązań, tj. gdy powłoka składa się tylko z prostokątnych płyt, moment bezwładności $I = \delta^3/12$. Przy uwzględnieniu dodatkowych dostatecznie gęsto rozłożonych poprzecznych wiązań-ram, podtrzymujących cienkościenną powłokę, moment bezwładności I powinien być obliczany jako średni moment bezwładności na jednostkę długości powłoki.

Podstawiając w (1.4) i (1.5) $\sigma(z, s)$ i $\tau(z, s)$ określone wzorami (1.2) i (1.3) otrzymamy układ $(m+n)$ liniowych równań różniczkowych względem poszukiwanych m uogólnionych podłużnych $U_i(z)$ i n poprzecznych $V_k(z)$ przemieszczeń. Powyższy układ możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(1.6) \quad \frac{E}{G} \sum_i a_{ij} U_i'' - \sum_i b_{ji} U_i - \sum_k c_{ji} V_k' + \frac{1}{G} p_j = 0,$$

$$(1.7) \quad \sum_i c_{ni} U_i' + \sum_k r_{hk} V_k'' - \frac{E}{G} \sum_k s_{hk} V_k + \frac{1}{G} q_n = 0.$$

Współczynniki równań (1.6) i (1.7) mają postać

$$(1.8) \quad \begin{cases} a_{ji} = \int_A \varphi_j(s) \varphi_i(s) dA, & c_{ni} = \int_A \psi_n(s) \varphi_i'(s) dA, \\ b_{ji} = \int_A \varphi_j'(s) \varphi_i'(s) dA, & r_{hk} = \int_A \psi_h(s) \psi_k(s) dA, \\ c_{jk} = \int_A \varphi_j'(s) \psi_k(s) dA, & s_{kh} = \frac{1}{E} \int \frac{M_h(s) M_k(s)}{EI} ds \end{cases}$$

i wszystkie one odpowiadają zasadzie wzajemności.

Korzystając z powyżej podanych wzorów, mających ogólny charakter, możemy obliczyć współczynniki równań (1.6) i (1.7) przyrównanej powłoki jako cienkościennego pręta o dowolnym konturze przekroju poprzecznego przy dowolnym sposobie aproksymacji szukanych funkcji $u(z, s)$ i $v(z, s)$ ze względu na zmienną s .

Przy wyborze funkcji $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ wyżej przedstawione całki (1.8) otrzymają dla każdego prostoliniowego odcinka bardzo prostą postać. Współczynniki równań (1.6) i (1.7) można wyznaczyć znanymi metodami teorii ram przy pomocy wykresów funkcji $\varphi_i(s)$, $\varphi_i'(s)$, $\psi_k(s)$, $\varphi_j(s)$, $\varphi_j'(s)$, $\psi_h(s)$, $M_h(s)$ oraz $M_k(s)$ sporządzonych dla całego wielobocznego konturu. Wielkości $p_j(t)$ i $q_h(z)$ wyrażają się wzorami

$$(1.9) \quad p_j = \int_L p q_j ds, \quad q_h = \int_L q \psi_h ds.$$

Zaznaczmy, że jeżeli elementy są traktowane jako rozciągliwe a nie sztywne, to pojawią się również wydłużenia prętów elementarnej rami, a współczynniki s_{hk} mają następującą postać:

$$(1.10) \quad s_{hk} = \frac{1}{E} \left[\int_L \frac{M_h(s) M_k(s)}{EI} ds + \int_L \frac{N_h(s) N_k(s)}{EA} ds \right],$$

gdzie $N_h(s)$ i $N_k(s)$ są normalnymi siłami elementarnej rami odpowiadającymi tak jak $M_h(s)$ i $M_k(s)$ dwóm różnym stanom odkształcenia $V_h = 1$ i $V_k = 1$ przy wszystkich pozostałych przemieszczeniach równych zeru. Siły te wyznaczamy również znanymi metodami teorii ram z warunków równowagi węzłów rami. Podłużna siła p_j jest określona jako praca zewnętrznej podłużnej siły powierzchniowej na podłużnych przemieszczeniach $\varphi_j(s)$ przy $U_j = 1$, a poprzeczną siłę $q_h(s)$ interpretuje się jako pracę zewnętrznych konturowych sił powierzchniowych $q(z, s)$ pojawiającą się przy przemieszczeniach konturowych elementu $\psi_h(s)$ określonych jednostkowym przemieszczeniem $V_h = 1$. Biorąc pod uwagę liniową niezależność funkcji φ_i i ψ_k i dowolność ich doboru, możemy szukane funkcje $U_i(z)$ i $V_k(z)$ tak dobrać, aby odpowiadające im funkcje $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ na całym przekroju poprzecznym $z = \text{const}$ odpowiadały warunkom ortogonalności; oznacza to, że dla każdego połączenia funkcji $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$ spełnione są warunki

$$(1.11) \quad \begin{cases} a_{ji} = \int_A \varphi_j \varphi_i dA = 0, & \text{jeśli } j \neq i; \\ r_{hk} = \int_A \psi_k \psi_h dA = 0, & \text{jeśli } h \neq k. \end{cases}$$

Uwzględniając powyższe przedstawimy równania (1.6) i (1.7) w postaci

$$(1.12) \quad \frac{E}{G} a_{jj} U_j'' - \sum_i^m b_{ji} U_i - \sum_k^n c_{jk} V_k' + \frac{1}{G} p_j = 0,$$

$$(1.13) \quad \sum_i^m c_{hi} U_i' + r_{hh} V_h'' - \frac{E}{G} \sum_k^n s_{hk} V_k + \frac{1}{G} q_h = 0.$$

Funkcje $\varphi_i(s)$ i $\psi_k(s)$, spełniające warunki ortogonalności, mogą być dobrane graficzno-analitycznymi metodami mechaniki konstrukcji.

Układ równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami (1.12) i (1.13) może być sprowadzony do jednego równania różniczkowego (metoda A. M. KRYŁOWA). Otrzymamy tu równanie rzędu $2(m+n)$. Wobec tego poszukiwane funkcje $U_i(z)$ i $V_k(z)$ spełniające równania (1.12) i (1.13) będą określone z dokładnością do $2(m+n)$ stałych dowolnych. Liczba tych stałych równa jest podwójnej ilości stopni swobody elementu $dz = 1$ w przestrzeni, co zgadza się z ilością niezależnych geometrycznych warunków, które mogą być podane na krańcowych przekrojach powłoki $z = 0, z = l$.

Mając do dyspozycji powyższe stałe dowolne, możemy otrzymać rozwiązania dla danego pręta przy różnych warunkach brzegowych w odniesieniu do podłużnych i poprzecznych przemieszczeń.

Znając $U_i(z)$ i $V_k(z)$ możemy w oparciu o wzory (1.2) i (1.3) określić naprężenia normalne i styczne w dowolnym punkcie przestrzennego układu.

Weźmy pod uwagę uogólnione podłużne i poprzeczne siły przekroju $z = \text{const}$:

$$(1.14) \quad P_j = \int_A \sigma \varphi_j(s) dA,$$

$$(1.15) \quad Q_h = \int_A \tau \psi_h(s) dA.$$

Siła P_j jest ilościowo równa pracy, wykonanej przez elementarne siły σdA , przyłożone do poprzecznego przekroju powłoki na przemieszczeniu wirtualnym $\varphi_j(s)$. Siła Q_h jest równa pracy, wykonanej przez elementarne siły σdA na przemieszczeniu wirtualnym $\psi_h(s)$.

Podstawiając do wzorów (1.14) i (1.15) odpowiednio wielkości (1.2) i (1.3) otrzymamy

$$P_j = \sum_i^m U_i'(z) \int_A \varphi_i(s) \varphi_j(s) dA$$

oraz

$$Q_h = G \left[\sum_i^m U_i(z) \int_A \psi_h(s) \varphi_i'(s) dA + \sum_k^n V_k'(z) \int_A \psi_h(s) \psi_k(s) dA \right]$$

lub

$$(1.16) \quad P_j = E \sum_i^m a_{ji} U_i'$$

$$(1.17) \quad Q_h = G \left(\sum_i^m c_{hi} U_i + \sum_k^n r_{hk} V_k' \right).$$

Jeżeli funkcję φ_i dobierzemy tak, że przy $i \neq j$ $\int \varphi_i \varphi_j dA = 0$, to wyrażenie dla $P_j(z)$ przyjmie postać

$$(1.18) \quad P_i = EU'_i(z) \int_A \varphi_i^2(s) dA = EU'_i(z) a_{ii},$$

gdzie

$$a_{ii} = \int \varphi_i^2(s) dA.$$

Związek (1.18) przedstawia zależność pomiędzy uogólnionymi siłami i uogólnionymi przemieszczeniami powłoki. Ze wzoru (1.18) wynika

$$(1.19) \quad U'_i(z) = \frac{P_i(z)}{Ea_{ii}}.$$

Podstawiając funkcję (1.19) do (1.2) otrzymamy

$$(1.20) \quad \sigma(z, s) = \sum_i^m \frac{P_i(z)}{a_{ii}} \varphi_i(s).$$

Dobierzmy pierwsze trzy funkcje $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ i $\varphi_3(s)$ tak, aby $\varphi_1(s)$ wyrażało postępowe przemieszczenie wyodrębnionej myślowo ramy w kierunku osi z , a $\varphi_2(s)$ i $\varphi_3(s)$ obroty około głównych centralnych osi x i y elementarnej ramy. W tym przypadku trzy pierwsze wyrazy wzoru (1.20) przedstawiają naprężenia odpowiadające zasadzie płaskich przekrojów. Pozostałe funkcje będą również odpowiadać rozkładowi normalnych naprężeń w przekroju poprzecznym, praca ich przy dowolnym wirtualnym przemieszczeniu równa się zeru. Naprężenia te są samozrównoważone i odpowiadają one spaczeniu przekroju poprzecznego.

Jeżeli przyjąć $\varphi_1(s) = 1$, $\varphi_2(s) = x(s)$, $\varphi_3(s) = y(s)$ i $\varphi_4 = \omega(s)$, to otrzymamy

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_1 = \int_A \sigma \cdot 1 \cdot dA = N, & a_{11} = \int_A 1^2 \cdot dA = A, \\ P_2 = \int_A \sigma x dA = -M_y, & a_{22} = \int_A x^2 dA = I_y, \\ P_3 = \int_A \sigma y dA = M_x, & a_{33} = \int_A y^2 dA = I_x, \\ P_4 = \int_A \sigma \omega dA = B, & a_{44} = \int_A \omega^2 dA = I_\omega. \end{array} \right.$$

Na podstawie powyższego widzimy, że

$$a_{ii} = \int_A \varphi_i^2 dA$$

są wycinkowymi momentami bezwładności przekroju poprzecznego, uogólnione siły P_4, P_5, \dots, P_m związane ze spaczeniem przekroju są podłużnymi bimomentami.

W podobny sposób można wyjaśnić fizyczny sens drugiej grupy sił uogólnionych Q_n . Przyjmując $\varphi_1(s) = x'(s)$, $\varphi_2(s) = y'(s)$ oraz $\varphi_3(s) = x(s)y'(s) + y(s)x'(s)$ i uwzględniając powyżej podane funkcje φ_1 , φ_2 , φ_3 i φ_4 otrzymamy na podstawie wzorów (1.17) $Q_1 = Q_x$, $Q_2 = Q_y$, $Q_3 = H$.

Po dokonaniu przeglądu ogólnej metody wariacyjnej W. Z. Własowa w zastosowaniu do powłok pryzmatycznych przechodzimy do wyprowadzenia równań dla ostrosłupa ściętego, a następnie do rozpatrzenia zagadnienia powłoki w kształcie ostrosłupa, obciążonej na końcu siłą poprzeczną Q , momentem gnącym M , skręcającym M_s oraz obciążeniem równomiernie rozłożonym wzdłuż pobocznic o natężeniu q .

2. Równania dla powłoki ostrosłupa ściętego słabo zbieżnego

Wydzielmy z powłoki przekrojami $z = \text{const}$ i $z + dz = \text{const}$ elementarną ramkę o szerokości dz , która znajduje się pod obciążeniem wewnętrznych normalnych i stycznych sił oraz zewnętrznych podłużnych $p(z, s)$ i poprzecznych $q(z, s)$ obciążeń. Ramka posiada $(m+n)$ stopni swobody.

Odpowiedni warunek dla pracy sił, działających na wydzielony element na wirtualnym przemieszczeniu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego $U_i = \varphi_i(s)$, prowadzi do równania

$$(2.1) \quad \int_{s+ds} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi_j(s) \delta ds - \int_s \tau \frac{\partial \varphi_j(s)}{\partial s} \delta ds + \int_s p(z, s) \varphi_j(s) ds = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Podobnie z warunku dla pracy sił działających na wydzielony element na wirtualnym przemieszczeniu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego $V_n = \psi_n(s)$ daje

$$(2.2) \quad \int_{s+ds} \frac{\partial \tau}{\partial z} \psi_n(s) \delta ds - \int_s \frac{M(z, s) M_n(s)}{EI} ds + \int_s q(z, s) \psi_n(s) ds = 0.$$

W otrzymanych równaniach zamieniamy zmienną całkowania s na sz/l . W wyniku takiej zamiany całki o zmiennym konturze $z = \text{const}$ w równaniach (2.1) i (2.2) przekształcą się w całki o konturze przekroju brzegowego $z = l_1$.

Przedstawmy wyrażenia podcałkowe jako funkcję nowej zmiennej sz/l . Wskutek liniowości funkcji $\varphi_i(s)$ zmiana ich wzdłuż tworzących powłoki proporcjonalnie do czynnika z/l , tj. dla każdej funkcji $\varphi_i(s)$ i jej pochodnej, odpowiadają równości

$$(2.3) \quad \varphi_i \left(s \frac{z}{l} \right) = \frac{z}{l} \varphi_i(s), \quad \varphi_i' \left(s \frac{z}{l} \right) = \varphi_i'(s).$$

Funkcja $\psi_k(s)$, stała na całym konturze, nie zmienia się wzdłuż tworzącej powłoki. Wskutek powyższego zachodzą równości

$$(2.4) \quad \psi_k \left(s \frac{z}{l} \right) = \psi_k(s).$$

Normalne i styczne naprężenia oraz ich pochodne względem z w oparciu o wzory (1.2) i (1.3) otrzymują postać

$$(2.5) \quad \sigma = E \sum_i^m U_i(z) \varphi_i \left(s \frac{z}{l} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = E \sum_i^m U_i''(z) \varphi_i \left(s \frac{z}{l} \right),$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} \tau = G \left\{ \sum_i^m U_i(z) \varphi_i'(s) + \sum_k^n \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{l} V_k(z) \right] \psi_k(s) \right\}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} = G \left\{ \sum_i^m U_i'(z) \varphi_i'(s) + \sum_k^n \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{z}{l} V_k(z) \right] \psi_k(s) \right\}. \end{cases}$$

Biezący moment gnący wzdłuż konturu powłoki od przemieszczenia $v(z, s)$ określa się za pomocą wzoru

$$(2.7) \quad M(z, s) = \sum_k^n \frac{z}{l} V_k(z) M_k(s).$$

Ponieważ przy $(z/l) V_k(z) = 1$ bieżący moment gnący po konturze wzdłuż powłoki $M_k(s)$ jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu współrzędnej s , przeto $M_k(sz/l)$ przy nowej zmiennej sz/l będzie określony za pomocą wzoru

$$(2.8) \quad M_k \left(s \frac{z}{l} \right) = \frac{l^2}{z^2} M_k(s).$$

Podstawiając funkcje (2.3)-(2.8) do równań (2.1) i (2.2), otrzymamy

$$(2.9) \quad E \left[\int_s^m \sum_i^m (U_i' + U_i'' dz) \varphi_i(s) \varphi_j(s) \delta \frac{(z+dz)^3}{l^3} ds - \int_s^m \sum_i^m U_i \varphi_i(s) \delta \frac{z^3}{l^3} ds \right] - \\ - G \int_s^m \left[\sum_i^m U_i \varphi_i'(s) + \sum_k^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) \psi_k(s) \right] \varphi_j'(s) \delta \frac{z}{l} dz ds + \\ + \int_s^m p(z, s) \varphi_j(s) dz \frac{z^2}{l^2} ds = 0,$$

$$G \int_s^m \left\{ \sum_i^m (U_i + U_i' dz) \varphi_i'(s) + \sum_k^n \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{z}{l} V_k \right) dz \right] \psi_k(s) \right\} \times \\ \times \psi_h(s) \delta \frac{z+dz}{l} ds - G \int_s^m \left[\sum_i^m U_i \varphi_i'(s) + \sum_k^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) \psi_k(s) \right] \psi_h(s) \delta \frac{z}{l} ds - \\ - \sum_k^n \frac{z}{l} V_k \int_s^m \frac{l^2}{z^2} \frac{M_k(s)}{EI} dz \frac{l^2}{z^2} M_h(s) \frac{z}{l} ds + \int_s^m q(z, s) \psi_h(s) dz \frac{z}{l} ds = 0.$$

Odrzucając wyrazy małe wyższego rzędu i skracając przez dz , otrzymamy następujące równania:

$$(2.10) \quad \frac{E}{G} \sum_i^m a_{ji} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{l^3} U_i' \right) - \sum_i^m b_{ji} \frac{z}{l} U_i - \sum_k^n c_{jk} \frac{z}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) + \frac{z^2}{l^2} \frac{p_j}{G} = 0;$$

$$(2.11) \quad \sum_i^m c_{hi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} U_i \right) + \sum_k^n r_{kh} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) \right] - \frac{E}{G} \sum_k^n s_{kh} \frac{l^2}{z^2} V_k + \frac{z}{l} \frac{q_h}{G} = 0;$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} a_{ji} = \int_s \varphi_j(s) \varphi_i(s) \delta ds, & c_{hi} = \int_s \psi_h(s) \varphi_i'(s) \delta ds, \\ b_{ji} = \int_s \varphi_j'(s) \varphi_i'(s) \delta ds, & r_{hk} = \int_s \psi_h(s) \psi_k(s) \delta ds, \\ c_{jk} = \int_s \varphi_j'(s) \psi_k(s) \delta ds, & s_{hk} = \frac{1}{E} \int_s \frac{M_h(s) M_k(s)}{EI} ds. \end{cases}$$

Stałe współczynniki określone za pomocą wzorów (2.12) w dowolnie wybranym przekroju $z = l$ spełniają warunki wzajemności:

$$a_{ji} = a_{ij}, \quad b_{ji} = b_{ij}, \quad r_{hk} = r_{kh}, \quad s_{hk} = s_{kh}, \quad c_{hi} = c_{ij}.$$

Wyrazy wolne w równaniach (2.10) i (2.11), przedstawiające pracę zewnętrznych obciążeń, otrzymują odpowiednią postać dla każdego konkretnego przypadku rozkładu powierzchniowych obciążeń $p(z, s)$ i $q(z, s)$ po konturze s : dla liniowej zmiany po konturze

$$(2.13) \quad p(z, s) = \frac{z}{l} p(z, s), \quad q(z, s) = \frac{z}{l} q(z, s);$$

dla kwadratowej zmiany

$$(2.14) \quad p(z, s) = \frac{z^2}{l^2} p(z, s), \quad q(z, s) = \frac{z^2}{l^2} q(z, s).$$

Dla powłok ze sztywnym nie zmieniającym się konturem przekroju poprzecznego $s_{hk} = 0$. W tym przypadku równania (2.10) i (2.11) upraszczają się i przyjmują postać:

$$(2.15) \quad \frac{E}{G} \sum_i^m a_{ji} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{l^3} U_i' \right) - \sum_i^m b_{ji} \frac{z}{l} U_i - \sum_k^n c_{jk} \frac{z}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) + \frac{z^2}{l^2} \frac{p_j}{G} = 0,$$

$$(2.16) \quad \sum_i^m c_{hi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} U_i \right) + \sum_k^n r_{kh} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_k \right) \right] + \frac{z}{l} \frac{q_h}{G} = 0.$$

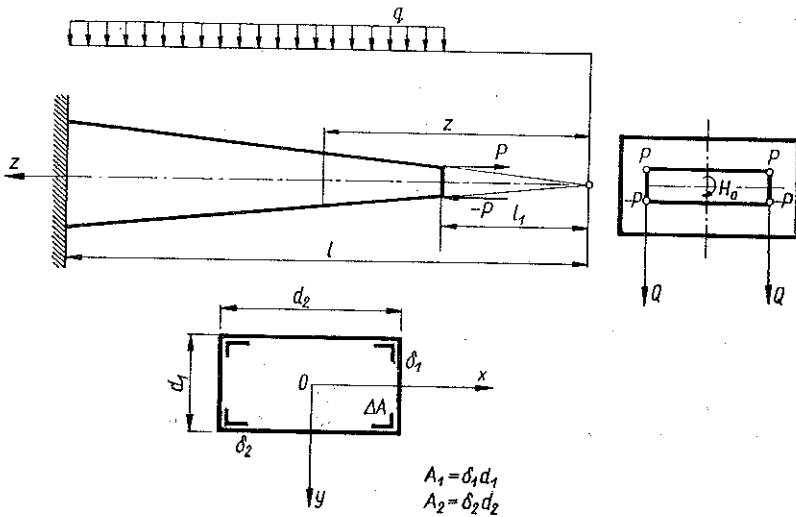
Jak z powyższego wynika, otrzymaliśmy $m+n$ równań różniczkowych ze zmiennymi współczynnikami typu Eulera względem funkcji uogólnionych przemieszczeń

$U_i(z)$ i $V_k(z)$. Poszukiwane funkcje uogólnione $U_i(z)$ i $V_k(z)$ powinny spełniać warunki brzegowe. Powyższe warunki mogą być dane w postaci geometrycznych i statycznych warunków w zależności od sposobu utwierdzenia, przy czym statyczne graniczne warunki zgodnie z przyjętą zasadą rozumiane są w sensie podłużnych i poprzecznych sił uogólnionych. Podłużne i poprzeczne siły określamy za pomocą wzorów

$$(2.17) \quad P_j(z) = \int_s \sigma \varphi_j(s) \delta ds, \quad Q_h(z) = \int_s \tau \psi_h(s) \delta ds.$$

3. Zginanie i skręcanie cienkościennej powłoki ostrosłupowej

Przechodząc obecnie do rozpatrzenia powłoki ostrosłupowej o jednokrotnie zamkniętym prostokątnym przekroju poprzecznym z podłużnymi pasami w narożach założymy nieodkształcalność konturu. Przyjmując, iż powłoka obciążona jest poprzeczną siłą zginającą Q , momentem gnącym M oraz parą skręcającą M_s ,



Rys. 6

i obciążeniem ciągłym o natężeniu q , przedstawimy przemieszczenia podłużne $u(z, s)$ i poprzeczne $v(z, s)$ punktu M powłoki w postaci następującej:

$$(3.1) \quad U(z, s) = U_1(z) \varphi_1(s) + U_2(z) \varphi_2(s) + U_3(z) \varphi_3(s),$$

$$(3.2) \quad v(z, s) = V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s),$$

gdzie U_1, U_2, U_3, V_1 i V_2 są poszukiwanymi uogólnionymi podłużnymi i poprzecznymi przemieszczeniami, a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1$ i ψ_2 odpowiednio dobranymi funkcjami. Funkcję $\varphi_1(s)$ dobieramy w postaci $\varphi_1(s) = y(s)$ tak, aby przedstawiała ona przemieszczenia punktów przekroju $z = \text{const}$, odpowiadające zasadzie płaskich prze-

krojów i obrotowi przekrojów około osi Ox . Jednakże, jak wykazały teoretyczne badania, rozkład podłużnych przemieszczeń w przekroju poprzecznym przy zginaniu obciążeniem poprzecznym różni się od rozkładu otrzymywanego według zasady płaskich przekrojów. Nierównomierność w rozkładzie przemieszczeń występuje szczególnie na górnej i dolnej powierzchni powłoki; na ściankach bocznych ze względu na znacznie mniejsze rozpiętości spaczenie jest o wiele mniej widoczne i praktycznie pomijalne, tak iż na tych ściankach możemy przyjąć rozkład zgodny z zasadą płaskich przekrojów.

Wobec powyższego, przemieszczenia przekroju górnej i dolnej płaszczyzn powłoki przy zginaniu nie pozostają w jednej płaszczyźnie, a wywołują jej paczenie. To sprawia, że przemieszczenia podłużne na szerokości tych płaszczyzn zmieniają się krzywoliniowo od środka płaszczyzn ku brzegom. W praktyce rozkład przemieszczeń i naprężeń normalnych przedstawiamy za pomocą funkcji trygonometrycznych, algebraicznych lub wykładniczych, niekiedy liniowych.

W naszym przypadku funkcję $\varphi_2(s)$ odpowiadającą spaczeniu przy zginaniu wybierzemy właśnie w postaci liniowej, tj.

$$(3.3) \quad \varphi_2(s) = \mp \left[\frac{d_2}{2} \pm x(s) \right] + c,$$

gdzie $c = d_1 d_2 A_2 / 4 J_x$ jest współczynnikiem ortogonalizacji funkcji $\varphi_1(s)$ i $\varphi_2(s)$ w przekroju $z = l_1$. Dzięki temu spełniony jest warunek ortogonalności

$$a_{12} = \int_A \varphi_1(s) \varphi_2(s) dA(s) = 0.$$

Symbol J_x oznacza moment bezwładności względem osi x oraz $A_2 = \delta_2 d_2$. Wielkości te odnoszą się również do przekroju $z = l_1$. Funkcję $\varphi_3(s)$ odpowiadającą uogólnionemu spaczeniu $U_3 = 1$ przekroju $z = \text{const}$, pojawiającemu się przy skręcaniu, przedstawimy w postaci

$$(3.4) \quad \varphi_3(s) = x(s) y(s).$$

Wykresy funkcji jak i ich pochodnych podane są na rys. 7 (*a, b, c, d, e, f, g* i *h*).

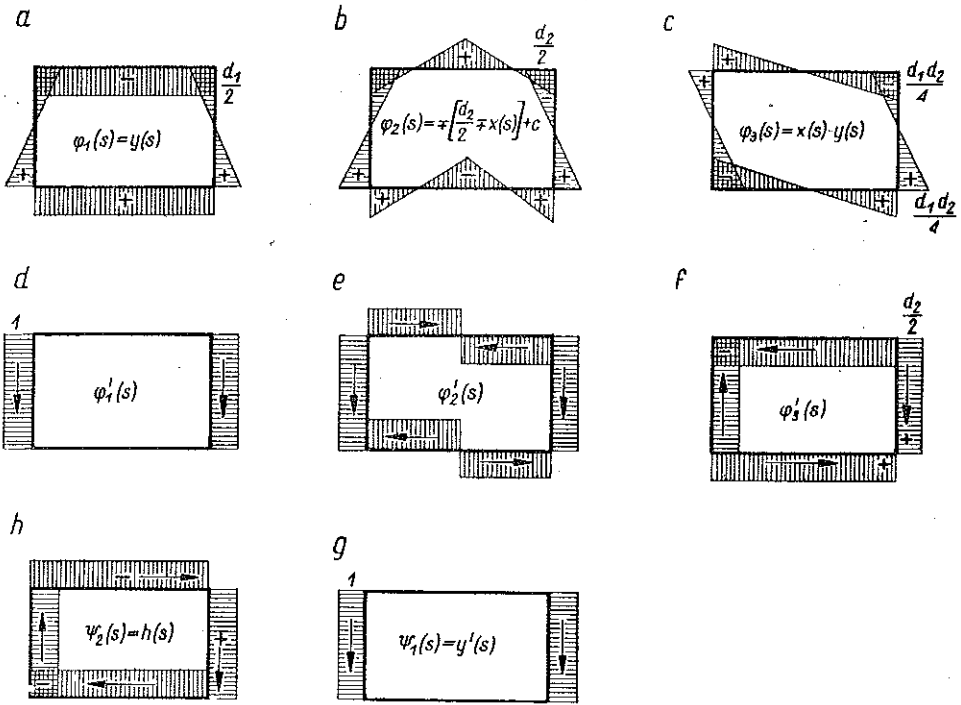
Funkcje $\psi_1(s)$ i $\psi_2(s)$ przyjmujemy w postaci

$$(3.5) \quad \psi_1(s) = y'(s), \quad \psi_2(s) = h(s),$$

gdzie $h(\vec{s})$ jest długością prostopadłej opuszczonej z początku układu współrzędnych na odpowiednią płaszczyznę konturową powłoki.

Funkcja $\psi_1(s)$ odpowiada przemieszczeniu $V_1 = 1$ elementu powłoki w kierunku pionowym pod działaniem obciążeń poprzecznych. Wykres tej funkcji podany jest na rys. 7*g*. Funkcja $\psi_2(s)$ (rys. 7*h*) przedstawia obrót przekroju poprzecznego dla $V_2 = 1$ pod działaniem momentu skręcającego M_s . W przypadku działania na powłokę wewnętrznych zginających i skręcających sił, elementarna poprzeczna ramka powłoki będzie posiadać trzy stopnie swobody w odniesieniu do prze-

mieszceń prostopadłych do płaszczyzny przekroju poprzecznego, odpowiadających trzem uogólnionym współrzędnym $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ i $\varphi_3(s)$, i dwa stopnie swobody odpowiadające funkcjom przemieszczeń $\psi_1(s)$ i $\psi_2(s)$ w płaszczyźnie przekroju poprzecznego. Dla rozpatrywanego zagadnienia przy podanych stopniach swobody



Rys. 7

($m = 3$, $n = 2$) układy równań różniczkowych (2.15) i (2.16) przyjmą następującą postać:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{E}{G} a_{11} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{\beta} U_1' \right) - \frac{z}{l} \left[b_{11} U_1 + b_{12} U_2 + c_{11} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_1 \right) \right] = 0, \\ \frac{E}{G} a_{22} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{\beta} U_2' \right) - \frac{z}{l} \left[b_{21} U_1 + b_{22} U_2 + c_{21} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_1 \right) \right] = 0, \\ \frac{E}{G} a_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{\beta} U_3' \right) - \frac{z}{l} \left[b_{33} U_3 + c_{32} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_2 \right) \right] = 0; \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \begin{cases} c_{11} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{\beta} U_1 \right) + c_{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} U_2 \right) + r_{11} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_1 \right) \right] = - \frac{q}{G} \left(\frac{z}{l} \right)^1, \\ c_{23} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} U_3 \right) + r_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l} V_2 \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Mając na względzie dobrane funkcje i przyjęte oznaczenia (por. rys. 7), określimy współczynniki wchodzące do układów równań (3.6) i (3.7) w przekroju $z = l_1$ w sposób następujący:

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = I_x = \int_{(s)} \varphi_1^2(s) dA(s) = d_1^2 \left(\frac{A_1}{6} + \frac{A_2}{2} + \Delta A \right), \\ a_{22} = I_{1\phi} = \int_{(s)} \varphi_2^2(s) dA(s) = \frac{A_2}{3} \left[\frac{d_2^2}{2} - \frac{3}{2} cd_1(d_2 - cd_1) \right] + c^2 d_1^2 \left(\frac{A_1}{6} + \Delta A \right), \\ a_{33} = I_{2\phi} = \int_{(s)} \varphi_3^2(s) dA(s) = \frac{1}{24} d_1^2 d_2^2 (A_1 + A_2 + 6\Delta A); \\ b_{11} = \int_{(s)} \varphi_1^2(s) dA(s) = 2A_1, \\ b_{12} = b_{21} = \int_{(s)} \varphi_1'(s) \varphi_2'(s) dA(s) = 2cA_1, \\ b_{22} = \int_{(s)} \varphi_2^2(s) dA(s) = 2(c^2 A_1 + A_2), \\ b_{33} = \int_{(s)} \varphi_3^2(s) dA(s) = \frac{1}{2} (d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1); \\ c_{11} = \int_{(s)} \varphi_1'(s) \psi_1(s) dA(s) = 2A_1, \\ c_{12} = c_{21} = \int_{(s)} \varphi_2'(s) \psi_1(s) dA(s) = 2cA_1, \\ c_{32} = c_{23} = \int_{(s)} \varphi_3'(s) \psi_2(s) dA(s) = \frac{1}{2} (d_2^2 A_1 - d_1^2 A_2); \\ r_{11} = \int_{(s)} \psi_1^2(s) dA(s) = 2A_1, \\ r_{33} = \int_{(s)} \psi_2^2(s) dA(s) = \frac{1}{2} (d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1). \end{array} \right.$$

We wzorach (3.8) $A_1 = d_1 \delta_1$ jest polem powierzchni przekroju poprzecznego jednej pionowej ścianki powłoki, $A_2 = d_2 \delta_2$ polem powierzchni poprzecznego przekroju jednej poziomej ścianki powłoki, ΔA powierzchnią przekroju poprzecznego wzdłużnika, I_x momentem bezwładności przekroju poprzecznego względem osi Ox , $I_{1\phi}$ bimomentem bezwładności zginania, $I_{2\phi}$ bimomentem bezwładności skręcania.

Układy równań (3.6) i (3.7) przedstawimy po uwzględnieniu współczynników (3.8) w następującej postaci:

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{z^3}{\beta^3} U_1'' + 3 \frac{z^2}{\beta^3} U_1' - \frac{z}{l} N_0 \left(U_1 + c U_2 + V_1 \frac{z}{l} + V_1 \frac{1}{l} \right) = 0, \\ \frac{z^3}{\beta^3} U_2'' + 3 \frac{z^2}{\beta^3} U_2' - \frac{z}{l} \left[N_1 U_1 + M U_2 + N_1 \left(\frac{z}{l} V_1' + \frac{1}{l} V_1 \right) \right] = 0, \\ \frac{z}{l} U_1' + \frac{1}{l} U_1 + c \left(\frac{z}{l} U_2' + \frac{1}{l} U_2 \right) + \frac{z^2}{l^2} V_1'' + 3 \frac{z}{l^2} V_1' + \frac{1}{l^2} V_1 = \frac{-ql}{2GA_1} \left(\frac{z}{l} \right), \\ N_0 = \frac{2GA_1}{EI_x}, \quad N_1 = \frac{2GA_1 c}{EI_{1\phi}}, \quad M = \frac{2G(A_2 + c^2 A_1)}{EI_{1\phi}}; \end{cases}$$

$$(3.10) \quad \begin{cases} a \left(\frac{z^3}{\beta^3} U_3'' + 3 \frac{z^2}{\beta^3} U_3' \right) - \frac{z}{l} \left[b_1 U_3 + b_2 \left(\frac{z}{l} V_2' + \frac{1}{l} V_2 \right) \right] = 0, \\ b_2 \left(\frac{z}{l} U_3' + \frac{1}{l} U_3 \right) + b_1 \left(\frac{z^2}{l^2} V_2'' + 3 \frac{z}{l^2} V_2' + \frac{1}{l^2} V_2 \right) = 0; \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} a = \frac{1}{24} E' d_1^2 d_2^2 (A_1 + A_2 + 6AA) = EI_{2\phi}, \\ b_1 = \frac{1}{2} G (d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1), \\ b_2 = \frac{1}{2} G (d_2^2 A_1 - d_1^2 A_2). \end{cases}$$

Układy (3.9) i (3.10) stanowią układy zwykłych liniowych równań różniczkowych ze zmiennymi współczynnikami typu Eulera względem $U_1(z)$, $U_2(z)$, $U_3(z)$, $V_1(z)$ i $V_2(z)$.

Zamieniając zmienną z na t według wzoru $z/l = e^t$ oraz biorąc pod uwagę, że $U_1(z) = U_1(t)$, $U_2(z) = U_2(t)$, $U_3(z) = U_3(t)$, $V_1(z) = V_1(t)$ oraz $V_2(z) = V_2(t)$, doprowadzimy po całym szeregu przekształceń układy (3.9) i (3.10) do układów zwyczajnych równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami:

$$(3.12) \quad \begin{cases} U_1''(t) + 2U_1'(t) - \Phi U_1(t) - \Phi c U_2(t) - \Phi V_1'(t) = 0, \\ U_2''(t) + 2U_2'(t) - \psi U_1(t) - \Theta U_2(t) - \psi V_1'(t) = 0, \\ U_1'(t) + U_1(t) + c [U_2'(t) + U_2(t)] + V_1''(t) + V_1'(t) = -\frac{ql^2}{2GA_1} e^t; \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} U_3''(t) + 2U_3'(t) - \frac{l^2 b_1}{a} U_3(t) - \frac{lb_2}{a} V_2'(t) = 0, \\ U_3'(t) + U_3(t) + \frac{b_1}{lb_2} [V_2''(t) + V_2'(t)] = 0. \end{cases}$$

Trzy pierwsze równania powstają przez przyrównanie do zera pracy wszystkich sił działających na element na przemieszczeniach wirtualnych w kierunku po-

dłużnym; czwarte i piąte równania zaś powstają przez przyrównanie do zera pracy sił na przemieszczeniach wirtualnych w płaszczyźnie przekroju poprzecznego. Nie trudno zauważyć, że trzy pierwsze równania stanowią oddzielny układ, odnoszący się do zginania powłoki; dwa pozostałe stanowią drugi układ, odpowiadający skręcaniu.

W rozpatrywanym przypadku mamy wyraźne rozdzielenie zginania i skręcania. Każdy z układów, a tym samym zadania zginania i skręcania powłoki, możemy rozpatrzeć oddzielnie.

Układ trzech pierwszych równań sprowadzamy do jednego równania oznaczając przez D i D^2 pierwszą i drugą pochodną zmiennej niezależnej funkcji podanej w górnym pasie tabl. 1. Następnie wprowadzamy nową funkcję $f(z)$ i przez tę funkcję wyrażamy szukane, uogólnione przemieszczenia $U_1(z)$, $U_2(z)$ i $V_1(z)$.

Tablica 1

$U_1(t)$	$U_2(t)$	$V_1'(t)$	Prawa strona
Δ_{11}	Δ_{12}	Δ_{13}	0
$D^2+2D-\Phi$	$-c\Phi$	$-\Phi$	
Δ_{21}	Δ_{22}	Δ_{23}	0
$-\psi$	$D^2+2D-\Theta$	$-\psi$	
Δ_{31}	Δ_{32}	Δ_{33}	$-\frac{ql^2}{2GA_1} e^t$
$D+1$	$c(D+1)$	$D+1$	

Dla skrócenia oznaczymy odpowiednie wyrazy w tablicy 1 przez Δ_{ij} . Stąd szukane uogólnione przemieszczenia możemy napisać w postaci wyznaczkowej

$$(3.14) \quad \begin{cases} U_1(t) = \begin{vmatrix} \Delta_{12}, \Delta_{13} \\ \Delta_{22}, \Delta_{23} \end{vmatrix} f(t), & U_1(t) = \begin{vmatrix} -c\Phi, & -\Phi \\ D^2+2D-\Theta, & -\psi \end{vmatrix} f(t), \\ U_2(t) = - \begin{vmatrix} \Delta_{11}, \Delta_{13} \\ \Delta_{21}, \Delta_{23} \end{vmatrix} f(t), & U_2(t) = - \begin{vmatrix} D^2+2D-\Phi, & -\Phi \\ -\psi, & -\psi \end{vmatrix} f(t), \\ \tilde{V}_1'(t) = \begin{vmatrix} \Delta_{11}, \Delta_{12} \\ \Delta_{21}, \Delta_{22} \end{vmatrix} f(t), & V_1'(t) = \begin{vmatrix} D^2+2D-\Phi, & c\Phi \\ -\psi, & D^2+2D-\Theta \end{vmatrix} f(t). \end{cases}$$

Rozwijając powyższe wyznaczniki, otrzymujemy wzory dla $U_1(t)$, $U_2(t)$ i $V_1'(t)$. Ogólne równanie różniczkowe względem nowej funkcji $f(t)$ przepiszemy następująco:

$$\Delta_{31}(\Delta_{12}\Delta_{23} - \Delta_{22}\Delta_{13})f(t) - \Delta_{32}(\Delta_{11}\Delta_{23} - \Delta_{21}\Delta_{13})f(t) + \Delta_{33}(\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2)f(t) = 0,$$

a w rozwiniętej postaci

$$(3.15) \quad f^V + 5f^{IV} + (8 - \lambda)f^{III} + (4 - 3\lambda)f^{II} - 2\lambda f^I = -\frac{ql^2}{2A_1 G} e^t,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{2GA_2 l^2}{EI_{1\phi}}.$$

Wobec powyższego rozwiązanie układu (3.12) sprowadza się do rozwiązania jednego niejednorodnego równania różniczkowego liniowego piątego rzędu ze stałymi współczynnikami (3.15).

Odpowiednie równanie charakterystyczne równania (3.15) jest następujące:

$$(3.16) \quad n^5 + 5n^4 + (8 - \lambda)n^3 + (4 - 3\lambda)n^2 - 2\lambda n = 0.$$

Jego pierwiastkami są liczby

$$(3.17) \quad n_1 = -1, \quad n_2 = -2, \quad n_3 = -1 - k, \quad n_4 = -1 + k, \quad n_5 = 0,$$

gdzie

$$k = \sqrt{1 + \frac{2GA_2 l^2}{EI_{1\phi}}} = \sqrt{1 + \lambda}.$$

Ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego jest funkcja

$$(3.16) \quad f^{(0)}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-(k+1)t} + C_4 e^{(k-1)t} + C_5.$$

Całka szczególna równania niejednorodnego (3.15) ma następującą postać:

$$\tilde{f}(t) = \frac{ql^2}{12A_1 G(\lambda - 3)} e^t.$$

Stąd rozwiązaniem równania (3.15) jest funkcja

$$(3.18) \quad f(t) = f^{(0)}(t) + \tilde{f}(t).$$

Korzystając ze wzorów (3.14) i (3.18) podamy funkcje $U_1(t)$, $U_2(t)$ i $V_1(t)$:

$$(3.19) \quad \begin{cases} U_1(t) = -\Phi \left[k^2 C_1 e^{-t} + \lambda C_2 e^{-2t} + \lambda C_5 + \frac{ql^2}{12A_1 G} e^t \right], \\ U_2(t) = \psi \left[-C_1 e^{-t} + \lambda C_3 e^{-(k+1)t} + \lambda C_4 e^{(k-1)t} + \frac{ql^2}{4A_1 G(\lambda - 3)} e^t \right], \\ V_1(t) = [1 + \Phi(\lambda + 1) + \Theta] C_1 e^{-t} + \Phi \lambda C_2 e^{-2t} + \lambda(\lambda - \Theta) C_3 e^{-(k+1)t} + \\ + \lambda(\lambda - \Theta) C_4 e^{(k-1)t} + \Phi \lambda C_5 + \frac{ql^2 [3(3 - \Theta) + \Phi(\lambda - 3)]}{12A_1 G(\lambda - 3)} e^t. \end{cases}$$

Przechodząc obecnie z powrotem do zmiennej z znajdziemy

$$(3.20) \quad \begin{cases} U_1(z) = -\Phi \left[k^2 C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-1} + \lambda C_2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} + \lambda C_5 + \frac{ql^2}{12A_1 G} \left(\frac{z}{l} \right) \right], \\ U_2(z) = \psi \left[-C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-1} + \lambda C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-(k+1)} + \lambda C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^{k-1} + \frac{ql^2}{4A_1 G(\lambda-3)} \left(\frac{z}{l} \right) \right], \\ V_1'(z) = [1 + \Phi(\lambda+1) + \Theta] C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-1} + \Phi \lambda C_2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} + \\ + \lambda(\lambda - \Theta) C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-(k+1)} + \lambda(\lambda - \Theta) C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^{k-1} + \\ + \Phi \lambda C_5 + \frac{ql^2 [3(3 - \Theta) + \Phi(\lambda - 3)]}{12A_1 G(\lambda - 3)} \left(\frac{z}{l} \right). \end{cases}$$

Całkując ostatecznie wyrażenie otrzymamy

$$(3.21) \quad V_1(z) = l \left\{ [1 + \Phi(\lambda+1) + \Theta] C_1 \ln \frac{z}{l} - \Phi \lambda C_2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{k} (\lambda - \Theta) C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-k} + \frac{\lambda}{k} (\lambda - \Theta) C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^k + \Phi \lambda C_5 \left(\frac{z}{l} \right)^1 + \right. \\ \left. + C_6 + \frac{ql^2 [3(3 - \Theta) + \Phi(\lambda - 3)]}{24A_1 G(\lambda - 3)} \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right\}.$$

Wracając do równań układu (3.13) po odpowiednim rugowaniu otrzymamy równanie różniczkowe trzeciego rzędu na $U_3(t)$

$$(3.22) \quad U_2'''(t) + 3U_3''(t) + \alpha U_3'(t) + \beta U_3(t) = 0,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{l^2 b_2^2 + ab_1 - b_1^2}{ab_1} = 1 + \frac{12G [l^2 (d_2^2 A_1 - d_1^2 A_2)^2 - (d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1)]^2}{Ed_1^2 d_2^2 (d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1) (A_1 + A_2 + 6\Delta A)} > 1,$$

$$\beta = \frac{(b_2^2 - b_1^2) l^2}{ab_1} = - \frac{48GA_1 A_2 l^2}{E(d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1) (A_1 + A_2 + 6\Delta A)}.$$

Równanie charakterystyczne dla (3.22) ma postać:

$$(3.23) \quad n^3 + 3n^2 + \alpha n + \beta n = 0.$$

W przypadku gdy spełniony jest warunek

$$\left(\frac{2 - \alpha + \beta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha - 3}{3} \right)^3 < 0,$$

otrzymujemy jako pierwiastki

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 2 \sqrt{-\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \\
 n_2 &= 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \\
 n_3 &= 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\cos \varphi = \frac{3q}{2p \sqrt{-\frac{p}{3}}}, \quad p = -3 + \alpha, \quad q = 2 - \alpha + \beta.$$

Stąd całką równania (3.22) jest funkcja

$$(3.24) \quad \begin{cases} U_3(t) = D_1 e^{[2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3)]t} + D_2 e^{[2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3+2\pi/3)]t} + \\ \qquad \qquad \qquad + D_3 e^{[2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3+4\pi/3)]t}, \\ U_3(z) = D_1 \left(\frac{z}{l}\right)^{2\sqrt{-p/3} \cos \varphi/3} + D_2 \left(\frac{z}{l}\right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3+2\pi/3)} + \\ \qquad \qquad \qquad + D_3 \left(\frac{z}{l}\right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3+4\pi/3)} \end{cases}$$

$$(3.25) \quad U'_3(z) = 2l \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3} D_1 \left(\frac{z}{l}\right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3)-1} + \\
 + 2l \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) D_2 \left(\frac{z}{l}\right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3+2\pi/3)-1} + \\
 + 2l \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) D_3 \left(\frac{z}{l}\right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3+4\pi/3)-1}.$$

W przypadku gdy

$$\left(\frac{2-\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-3}{3}\right)^3 = 0, \quad n_1 = -2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \quad n_2 = n_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

całka równania (3.22) ma postać

$$(3.26) \quad \begin{cases} U_3(t) = D_1 e^{-2t\sqrt[3]{q/2}} + (D_2 + D_3) e^{t\sqrt[3]{q/2}}, \\ U_3(z) = D_1 \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}} + (D_2 + D_3) \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}}, \end{cases}$$

$$(3.27) \quad U'_3(z) = -D_1 l^{-1} \cdot 2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}-1} + (D_2 + D_3) l^{-1} \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}-1}$$

Naprężenia normalne w powłoce w oparciu o wzory (2.5) i (3.1) określimy za pomocą wzorów

$$(3.28) \quad \sigma(z, s) = E \left\{ \Phi \left[\frac{k^2}{l} C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} + \frac{2\lambda}{l} C_2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-3} - \frac{ql}{12A_1 G} \right] \varphi_1(s) + \right. \\ \left. + \psi \left[\frac{1}{l} C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} - (k+1) \frac{\lambda}{l} C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-(k+2)} + (k-1) \frac{\lambda}{l} C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^{k-2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ql}{4A_1 G (\lambda-3)} \right] \varphi_2(s) + \left[D_1 2l \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right) \left(\frac{z}{l} \right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3) - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + D_2 2l \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \left(\frac{z}{l} \right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3 + 2\pi/3) - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + D_3 2l \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \left(\frac{z}{l} \right)^{2\sqrt{-p/3} \cos(\varphi/3 + 4\pi/3) - 1} \right] \varphi_3(s) \right\}$$

lub w przypadku drugim

$$(3.29) \quad \sigma(z, s) = E \left\{ \Phi \left[\frac{k^2}{l} C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} + \frac{2\lambda}{l} C_2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-3} - \frac{ql}{12A_1 G} \right] \varphi_1(s) + \right. \\ \left. + \psi \left[\frac{1}{l} C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} + (k+1) \frac{\lambda}{l} C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-(k+2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (k-1) \frac{\lambda}{l} C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^{k-2} + \frac{ql}{4A_1 G (\lambda-3)} \right] \varphi_2(s) + \right. \\ \left. + \left[-D_1 2l \sqrt{\frac{q}{2}} \left(\frac{z}{l} \right)^{-2\sqrt{q/2} - 1} + (D_2 + D_3) l \sqrt{\frac{q}{2}} \left(\frac{z}{l} \right)^{\sqrt{q/2} - 1} \right] \varphi_3(s) \right\}.$$

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym powłoki sprowadzają się do sił uogólnionych: bimomentu od zginania wyrażonego za pomocą funkcji $\varphi_2(s)$ i bimomentu od skręcania wyrażonego za pomocą funkcji $\varphi_3(s)$:

$$(3.30) \quad B(z) = - \int_{(s)} \sigma \varphi_2(s) dA = - \frac{E\psi}{l} I_{1\varphi(z)} \left[C_1 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2} - \right. \\ \left. - (k+1) \lambda C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-(k+2)} + (k-1) \lambda C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^{k-2} \right],$$

gdzie

$$I_{1\varphi(z)} = \left(\frac{z}{l} \right)^3 I_{1\varphi};$$

$$(3.31) \quad B(z)_s = - \oint_{(s)} \sigma \varphi_3(s) dA = - EI_{2\Phi(z)} \left[-D_1 2l \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}-1} + \right. \\ \left. + (D_2 + D_3) l \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}-1} \right].$$

Napężenia bimomentarne można wyrazić następująco:

$$\sigma_B = \frac{B(z)}{I_{1\Phi(z)}} \varphi_2(s), \quad \sigma_{Bs} = \frac{B(z)}{I_{2\Phi(z)}} \varphi_3(s).$$

Ostateczna postać dla strumienia natężeń stycznych jest następująca:

$$(3.32) \quad q(z, s) = \frac{E}{I_2} \left\{ \Phi \left[2\lambda C_2 \left(\frac{z}{l}\right)^{-4} + \frac{ql^2}{6A_1 G} \left(\frac{z}{l}\right)^{-1} \right] \int_0^s \varphi_1(s) \delta ds - \right. \\ \left. - \psi k \left[(k+1) \lambda C_3 \left(\frac{z}{l}\right)^{-(k+3)} + (k-1) \lambda C_4 \left(\frac{z}{l}\right)^{k-3} + \frac{ql^2}{2A_1 G(\lambda-3)k} \left(\frac{z}{l}\right)^{-1} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^s \varphi_2(s) \delta ds - \left[4D_1 \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 1\right) \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (D_2 + D_3) \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 1\right) \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}-2} \right] \int_0^s \varphi_3(s) \delta ds \right\} + q(z).$$

Przemieszczenie poprzeczne (ugięcie) określone jest na podstawie wzoru

$$V(z, s) = V_1(z) \varphi_1(s) + V_2(z) \varphi_2(s).$$

Ponieważ $V_2'(t)$ ma postać

$$V_2'(t) = \left[U_3''(t) + 2U_3'(t) - \frac{b_1 l^2}{a} U_3(t) \right] \frac{a}{b_2 l},$$

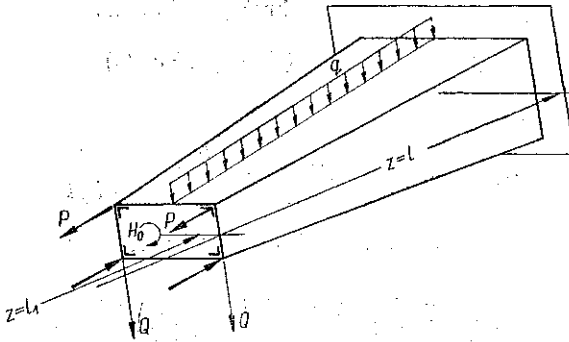
przeto po podstawieniu i wykonaniu całkowania otrzymamy

$$(3.33) \quad V_2(z) = D_1 \left[-\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}-1} + 2 \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}} - \right. \\ \left. - \frac{b_1 l}{a} \frac{1}{-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 1} \left(\frac{z}{l}\right)^{-2\sqrt[3]{q/2}+1} \right] \frac{a}{b_1 l} + (D_2 + D_3) \left[\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}-1} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}} - \frac{b_1 l}{a} \left(\frac{z}{l}\right)^{\sqrt[3]{q/2}+1} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 1} \right] \frac{a}{b_1 l}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 (3.34) \quad V(z, s) = l \left\{ [1 + \Phi(\lambda+1) + \Theta] C_1 \ln \frac{z}{l} - \Phi \lambda C_2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-1} - \right. \\
 - \frac{\lambda}{k} (\lambda - \Theta) C_3 \left(\frac{z}{l} \right)^{-k} + \frac{\lambda}{k} (\lambda - \Theta) C_4 \left(\frac{z}{l} \right)^k + \Phi \lambda C_5 \left(\frac{z}{l} \right) + \\
 \left. + C_6 + \frac{q l^2 [3(3 - \Theta) + \Phi(\lambda - 3)] \left(\frac{z}{l} \right)^2}{24 A_1 G(\lambda - 3)} \right\} \psi_1(s) + \\
 + \left\{ D_1 \left[- \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{l} \right)^{-2 \sqrt[3]{q/2} - 1} + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^{-2 \sqrt[3]{q/2}} - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{b_1 l}{a} \frac{1}{-2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 1} \left(\frac{z}{l} \right)^{-2 \sqrt[3]{q/2} + 1} \right] \frac{a}{b_1 l} + (D_2 + D_3) \left[\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{l} \right)^{\sqrt[3]{q/2} - 1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^{\sqrt[3]{q/2}} - \frac{b_1 l}{a} \left(\frac{z}{l} \right)^{\sqrt[3]{q/2} + 1} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 1} \right] \frac{a}{b_1 l} \right\} \psi_2(s).
 \end{aligned}$$

Dla dowolnego zamocowania końców powłoki możemy odpowiednio ustalić warunki brzegowe, a w oparciu o nie zbudować równania do wyznaczenia stałych całkowania.



Rys. 8

W naszym przypadku odpowiednio do rys. 8 warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

dla $z = l$ (przekrój powłoki sztywno utwierdzony)

$$U_1(z) = 0, \quad U_2(z) = 0, \quad U_3(z) = 0, \quad V_1(z) = 0, \quad V_2(z) = 0;$$

dla $z = l_1$ (przekrój swobodny może się pacyć)

$$U'_1(z) = 0, \quad U'_2(z) = 0, \quad U'_3(z) = 0, \quad G(U_1 c_{11} + U_2 c_{12} + V_1 r_{11}) = -2Q.$$

Подłużне і попрзечне сілы уогólnіоне маю наступуючю постач:

$$P_j(z) = \int \sigma \varphi_j dA, \quad Q_h(z) = \int \tau \psi_h dA,$$

$$M = \int \sigma \varphi_1 dA = EU'_1 I_x = 4P\bar{\varphi}_1,$$

$$B_1 = \int \sigma \varphi_2 dA = EU'_2 I_{1\phi} = 4P\bar{\varphi}_2,$$

$$B_2 = - \int \sigma \varphi_3 dA = -EU'_3 I_{2\phi} = 4P\bar{\varphi}_3,$$

$$\int \tau \psi_1 dA = -2Q, \quad \int \tau \psi_2 dA = H = H_0 = b_2 U_3 + b_1 V'_2,$$

$$\tau = G[U_3(z) \varphi'_3(s) + V'_2(z) \psi_2(s)],$$

гдзе $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ і $\bar{\varphi}_3$ сю вспрлрзундннмн уогólnіоннмн в мнєцсчю прнзллжєння слл.

Лнтература цнтована в тексчє

- [1] В. З. Власов, *Расчет призматических многосвязных оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 13 (1944).
- [2] В. З. Власов, *Строительная механика тонкостенных пространственных систем*, Стройиздат, 1949.
- [3] В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Техтеориздат, 1949.
- [4] A. L. LANG, R. L. BISPLINGHOFF, *Some Results of Sweepback Wing Structural Studies*, J. A. S. 11, 18 (1951).
- [5] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PWN Warszawa 1957.
- [6] И. Ф. Образцов, *Некоторые вопросы расчета на прочность тонкостенных конструкций самолета*, Труды МАИ, вып. 79, Оборонгиз, 1957.
- [7] И. Ф. Образцов, *Изгиб и кручение многозамкнутой кесонной конструкции*, Труды МАИ, вып. 86, Оборонгиз, 1957.

Рєзюмє

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В. З. ВЛАСОВА В ПРИМЕНЕНИИ К ТОНКИМ ОБОЛОЧКАМ В ФОРМЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

После рассмотрения общего вариационного метода В. З. Власова, дающего возможность свести сложные дифференциальные уравнения в частных производных, тонкостенных призматических оболочек к обыкновенным дифференциальным уравнениям в частных производных для конусной слабосходимой оболочки.

Благодаря введению функции перемещений $u(z, s)$ и $v(z, s)$ в виде суммы произведений двух функций, из которых одна является функцией одной переменной, а вторая — другой переменной, выражаются нормальное и касательное напряжения, существующие в оболочке.

Полученные две системы дифференциальных уравнений в частных производных конической оболочки, из которых одна состоит из трех уравнений, касается изгиба оболочки, а вторая состоящая из двух уравнений, определяет кручение оболочки. Эти системы сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые затем решаются для выбранной нагрузки, с соответствующим предположением краевых условий, служащих для определения постоянных интегрирования.

Summary

V. Z. VLASOV'S VARIATIONAL METHOD APPLIED TO THIN SHELLS IN THE SHAPE OF TRUNCATED PRISM

After a discussion of the general variational method of V. Z. Vlasov enabling us to reduce various complicated partial differential equations of thin-walled prismatic shells to ordinary differential equations, partial differential equations are derived for a conical shell with small taper.

By introducing the displacement functions $u(z, s)$ and $v(z, s)$ in the form of a sum of products of two functions, each of a different variable, the normal and shear stresses are determined.

Two sets of partial differential equations of conical shells are obtained, of which one, composed of three equations, concerns the bending of the shell, the second, composed of two equations, the torsion of the shell. They are reduced to ordinary differential equations and solved for a prescribed load, the boundary conditions being given for the determination of the integration constants.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dn. 30 czerwca 1961 r.
