

WPLYW SKRĘCANIA NA ROZCIĄGANIE PRĘTA PRYZMATYCZNEGO
O DOWOLNYM KSZTAŁCIE PRZEKROJU W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

MIŁOSZ WNUK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Badanie stanu naprężenia powstającego w pręcie na skutek działania złożonego układu sił zewnętrznych napotyka w zakresie sprężysto-plastycznym na znacznie większe trudności niż badanie nośności granicznej, gdy mamy do czynienia tylko ze strefą odkształceń plastycznych. Trudności te wynikają z matematycznego charakteru omawianego zjawiska: rozpatrywany obszar (przekrój poprzeczny pręta) zostaje podzielony na dwa podobszary: sprężysty i plastyczny, przy czym w każdym z nich stan naprężenia jest opisywany przez różne równania różniczkowe, podane pewnym, innym w każdej z obydwu stref, warunkom brzegowym. Dlatego też stosunkowo mało można podać przykładów efektywnego rozwiązania zagadnień sprężysto-plastycznych. Spośród znanych można wymienić prace W. W. SOKOŁOWSKIEGO, [12], P. I. PERLINA, [8], L. A. GALINA, [2], [3] i [4], przy czym dwaj pierwsi autorzy rozwiązyli przypadek skręcania w zakresie sprężysto-plastycznym metodą odwrotną (tzw. owal Sokołowskiego), a trzeci podał pewne uogólnienie tej metody i efektywne rozwiązanie postawionego zagadnienia w przypadku przekroju o kształcie wielokąta umiarowego. Należy również wspomnieć o pracach F. A. GAYDONA, [5], oraz M. ŻYCZKOWSKIEGO, [16], w których został rozwiązany problem obciążenia złożonego (M_s, N) w zakresie sprężysto-plastycznym dla przekroju kołowego. Skręcanie w zakresie sprężysto-plastycznym jest przedmiotem wielu innych prac, w których rozwiązania dla wybranych kształtów przekroju poprzecznego pręta uzyskuje się na drodze numerycznej (metody relaksacyjne): F. S. SHAW, [11], D. G. CHRISTOPHERSON, [1], R. V. SOUTHWELL, [13].

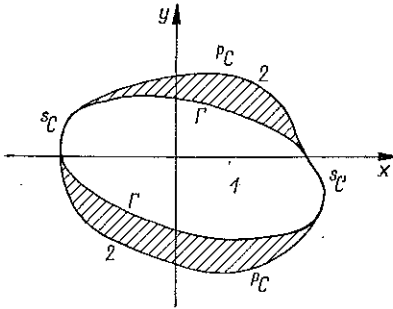
Do ciekawszych prac uwzględniających również wpływ wzmocnienia liniowego należą prace S. W. SERENSENA, (M_s, N) w zakresie sprężysto-plastycznym dla pręta o przekroju kołowym, H. JUNGA, [6], (problem cylindra grubościennego poddanego działaniu ciśnienia wewnętrznego; poza uwzględnieniem wpływu wzmocnienia H. JUNG odrzuca również założenie o nieściśliwości). W. URBANOWSKI, [14], rozpatrzył przypadek kuli obciążonej ciśnieniem wewnętrznym przy założeniu modelu $\sigma = \sigma(\epsilon)$ bardziej złożonego od przyjmowanego na ogół modelu Prandla (ciało idealnie sprężysto-plastyczne), uzyskując w ten sposób podział rozpatrywanego obszaru na trzy strefy: 1) sprężystą, 2) plastyczną bez wzmocnienia, 3) plastyczną ze wzmocnieniem.

Niniejsza praca ma na celu rozwiązanie zagadnienia jednoczesnego skręcania i rozciągania pręta o dowolnym kształcie przekroju w zakresie sprężysto-plastycznym przy zastosowaniu metody małego parametru. Podane rozwiązanie (rozkład

naprężeń, siły zewnętrzne oraz równanie granicy stref) będzie więc prawdziwe jedynie w przypadku dużych sił osiowych N (ściskających lub rozciągających) oraz niewielkiego momentu skręcającego M_s . Odpowiednie wzory zostaną podane w postaci szeregów potęgowych. W zakończeniu pracy podamy przykładowo efektywne rozwiązanie zagadnienia dla następujących kształtów przekroju poprzecznego: koła, elipsy, trójkąta równobocznego i profilu skrzydła samolotu.

2. Deplanacja przekroju

Rozpatrzmy przypadek, gdy przekrój poprzeczny pręta został podzielony granicą stref Γ na dwa podobszary: 1) jądro sprężyste, 2) strefę odkształceń plastycznych, przy czym w najogólniejszym ujęciu granica stref Γ nie musi leżeć całkowicie wewnątrz konturu C , lecz może dzielić go, tak jak pokazano na rys. 1, na część sC oraz pC , tj. część nie należącą do obszaru sprężystego (1) oraz część ograniczającą strefę plastyczną, odpowiednio. W szczególności gdy odkształcenia plastyczne nie wystąpiły, mamy $C = {}^sC$, oraz, gdy cała zewnętrzna część przekroju poprzecznego uległa uplastycznieniu, możemy napisać $C = {}^pC$.



Rys. 1

Obszar (1) jądra sprężystego. Bezwymiarowa funkcja spaczenia przekroju ${}^s\psi = {}^s\psi(x, y)$ powinna spełniać równanie (Saint-Venanta, [9])

$$(2.1) \quad \nabla^2 {}^s\psi = 0$$

oraz następujący warunek brzegowy

$$(2.2) \quad (y + {}^s\psi'_x) dy - (-x + {}^s\psi'_y) dx = 0$$

wzdłuż części konturu sC , to jest tam, gdzie nie pojawiły się odkształcenia plastyczne. Wzdłuż granicy stref $\Gamma(x, y) = 0$ funkcja ${}^s\psi$ ma być równa tożsamościowo spaczeniu przekroju ${}^p\psi$ określonego w obszarze uplastycznionym (2). Przez analogię do rozwiązania w zakresie czysto plastycznym, [15], przedstawimy poszukiwaną deplanację przekroju ${}^s\psi$ w postaci szeregu potęgowego

$$(2.3) \quad {}^s\psi = \sum_{i=0}^{\infty} {}^s\psi_i \lambda^{2i},$$

gdzie wielkość

$$(2.4) \quad \lambda = \frac{a\vartheta}{\varepsilon}$$

oraz ϑ oznacza jednostkowy kąt skręcenia, ε wydłużenie względne, a pewien dowolnie obrany wymiar liniowy charakteryzujący przekrój poprzeczny. Wielkość λ

będziemy uważać za mały parametr. Wstawiając szereg (2.3) do równania (2.1) otrzymujemy nieskończony układ równań Laplace'a

$$(2.5) \quad \nabla^2 {}^s\psi_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

z następującymi warunkami brzegowymi: dla funkcji ψ_0 pozostaje warunek niejednorodny

$$(2.6) \quad (y + {}^s\psi'_{0x}) dy - (-x + {}^s\psi'_{0y}) dx = 0$$

wzdłuż sC , a dla wszystkich następnych funkcji ψ_i ($i = 1, 2, \dots$) warunek jednorodny

$$(2.7) \quad {}^s\psi'_{ix} dy - {}^s\psi'_{iy} dx = 0$$

wzdłuż sC . Na granicy stref $\Gamma(x, y) = 0$ należy żądać spełnienia warunku zgodności

$$(2.8) \quad \sum_{i=0}^{\infty} {}^s\psi_i \lambda^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} {}^p\psi_i \lambda^{2i},$$

przy czym prawa strona równości (2.8) jest rozwinięciem funkcji spaczenia dla obszaru (2) w szereg potęgowy parametru λ . Stąd wynika związek

$$(2.9) \quad {}^s\psi_i = {}^p\psi_i \quad \text{wzdłuż } \Gamma.$$

Nie trudno sprawdzić, że w szczególnym przypadku, gdy odkształcenia plastyczne w ogóle nie wystąpią, podane wyżej równania sprowadzą się do znanej teorii Saint-Venanta, mamy bowiem:

$$(2.10) \quad {}^s\psi = {}^s\psi_0 + {}^s\psi_1 \lambda^2 + {}^s\psi_2 \lambda^4 + \dots,$$

przy czym każda z funkcji ${}^s\psi_i$ począwszy od wskaźnika $i = 1, 2, \dots$ ma spełniać równanie (jednorodne) Laplace'a z jednorodnym warunkiem brzegowym (2.7), a zatem wszystkie funkcje ${}^s\psi_1, {}^s\psi_2, \dots$ są tożsamościowo równe zero. Różna od zera jest jedynie funkcja ${}^s\psi_0$, harmoniczna i spełniająca warunek brzegowy (2.6), jest zatem funkcją rozwiązującą problem sprężystego swobodnego skręcania, zwany w teorii sprężystości problemem Saint-Venanta.

Obszar (2). Jest to obszar całkowitego uplastycznienia. Tutaj należy wziąć pod uwagę równania wyprowadzone w pracy [15], zatem bezwymiarowa funkcja spaczenia ${}^p\psi = {}^p\psi(x, y)$ ma spełniać nieliniowe równanie różniczkowe, [15]:

$$(2.11) \quad 3\nabla^2 {}^p\psi + \lambda^2 [(y + {}^p\psi'_x)^2 {}^p\psi''_{yy} + (-x + {}^p\psi'_y)^2 {}^p\psi''_{xx} - \\ - 2(y + {}^p\psi'_x)(-x + {}^p\psi'_y) {}^p\psi''_{xy}] = 0$$

oraz warunek brzegowy

$$(2.12) \quad (y + {}^p\psi'_x) dy - (-x + {}^p\psi'_y) dx = 0 \quad \text{wzdłuż } {}^pC.$$

Rozwiązania równania (2.11) szukamy w postaci szeregu potęgowego

$$(2.13) \quad {}^p\psi = \sum_{i=0}^{\infty} {}^p\psi_i \lambda^{2i},$$

przy czym, jak wykazaliśmy poprzednio, [15], pierwsza z funkcji ψ_i występujących po prawej stronie równości (2.13) jest identyczna z rozwiązaniem w zakresie sprężystym; mamy zatem

$$(2.14) \quad {}^p\psi_0 = {}^s\psi_0 \stackrel{\text{df}}{=} \psi_0.$$

Należy zaznaczyć, że równość ta jest spełniona w całym rozpatrywanym obszarze, ograniczonym konturem zewnętrznym przekroju C ; w ten sposób spełniony jest więc również warunek (2.9).

3. Granica stref

Rozwiązując nasze zagadnienie w zakresie sprężysto–plastycznym, przede wszystkim dążyć będziemy do podania równania granicy obydwu stref

$$(3.1) \quad \Gamma(x, y, c) = 0,$$

gdzie c jest pewnym parametrem określającym kształt krzywej Γ w zależności od wartości uogólnionych odkształceń ε i ϑ lub też w zależności od przyłożonych obciążeń zewnętrznych M_s i N .

Przed przystąpieniem do wyprowadzenia równania (3.1) wprowadzimy następujące bezwymiarowe parametry (por. M. ŻYCZKOWSKI, [16]):

$$(3.2) \quad e = \frac{E\varepsilon}{Q}, \quad g = \frac{Ga\sqrt{3}\vartheta}{Q}$$

proporcjonalne odpowiednio do wydłużenia względnego ε oraz jednostkowego kąta skręcania ϑ . Równanie granicy stref można określić z warunku

$$(3.3) \quad {}^s\sigma_i = Q.$$

Zdefiniowana w ten sposób krzywa Γ jest miejscem geometrycznym punktów należących do obszaru sprężystego (1), w których spełniony jest warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego (3.3).

Naprężenia w obszarze sprężystym wynoszą

$$(3.4) \quad {}^s\tau_{zx} = G\vartheta a(y + {}^s\psi'_x), \quad {}^s\tau_{zy} = G\vartheta a(-x + {}^s\psi'_y), \quad {}^s\sigma_z = E\varepsilon,$$

$$(3.5) \quad 3({}^s\tau_{zx}^2 + {}^s\tau_{zy}^2) + {}^s\sigma_z^2 = Q^2.$$

Po wstawieniu do równania (3.3) funkcji (3.4) otrzymujemy

$$(3.5.1) \quad 3\left(\frac{G\vartheta a}{Q}\right)^2 [(y + {}^s\psi'_x)^2 + (-x + {}^s\psi'_y)^2] + \left(\frac{E\varepsilon}{Q}\right)^2 = 1$$

lub po uwzględnieniu wzorów (3.2) oraz oczywistego związku

$$(3.6) \quad \lambda = \sqrt{3} \frac{g}{e}$$

otrzymujemy następujące równanie granicy stref Γ :

$$(3.7) \quad \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{\lambda^2}{3} A [{}^s\psi] = 0,$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie

$$(3.8) \quad A [{}^s\psi] = (y + {}^s\psi'_x)^2 + (-x + {}^s\psi'_y)^2.$$

Uwzględniając (2.3) wyrażenie (3.8) daje się przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$(3.9) \quad A [{}^s\psi] = A_0 [{}^s\psi_0] + \lambda^2 A_1 [{}^s\psi_0, {}^s\psi_1] + \dots,$$

gdzie

$$(3.10) \quad \begin{aligned} A_0 [{}^s\psi_0] &= (y + {}^s\psi'_{0x})^2 + (-x + {}^s\psi'_{0y})^2, \\ A_1 [{}^s\psi_0, {}^s\psi_1] &= 2[(y + {}^s\psi'_{0x}) {}^s\psi'_{1x} + (-x + {}^s\psi'_{0y}) {}^s\psi'_{1y}], \\ &\dots \end{aligned}$$

Równanie (3.7) przybierze postać

$$(3.11) \quad \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{\lambda^2}{3} A_0 [{}^s\psi_0] - \frac{\lambda^4}{3} A_1 [{}^s\psi_0, {}^s\psi_1] - \dots = 0$$

lub ostatecznie

$$(3.12) \quad \frac{1-e^2}{g^2} - A_0 [{}^s\psi_0] + \dots = 0.$$

Równanie granicy stref Γ można również otrzymać biorąc pod uwagę obszar plastyczny (2) i żądając spełnienia warunku

$$(3.13) \quad \frac{1}{2\varphi} = G,$$

gdzie $\varphi = \varphi(x, y)$ oznacza uogólniony moduł odkształceń plastycznych. Z warunku plastyczności mamy, [15],

$$(3.14) \quad \frac{1}{2\varphi} = \frac{Q}{\sqrt{3}} \frac{1}{\varepsilon} \{3 + \lambda^2 [(y + {}^p\psi'_x)^2 + (-x + {}^p\psi'_y)^2]\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Uwzględniając założenie o nieściśliwości materiału $E/G = 3$ dochodzimy więc do równania

$$(3.15) \quad \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{\lambda^2}{3} A [{}^p\psi] = 0,$$

które różni się od wyprowadzonego poprzednio równania (3.7) tylko tym, że zamiast funkcji ${}^s\psi$ występuje funkcja ${}^p\psi$. Oczywiście wzdłuż granicy Γ obydwie te funkcje na mocy warunku (2.8) przyjmują te same wartości.

Wyrażenie (3.15) po uwzględnieniu (2.13) oraz wykonaniu odpowiednich przekształceń, analogicznych do przeprowadzonych poprzednio, można zapisać w postaci

$$(3.16) \quad \frac{1-e^2}{g^2} - A_0 [\psi_0(x, y)] + \dots = 0,$$

przy czym indeks p występujący przy funkcji ψ_0 opuściliśmy mając na uwadze równość (2.14). Sprawdziliśmy w ten sposób, że równania (3.12) oraz (3.16) są identyczne. Przedstawiają one jednoparametrową rodzinę krzywych $\Gamma(x, y, c) = 0$ na płaszczyźnie xy , przy czym kształt każdej z krzywych zależy od wartości parametru

$$(3.17) \quad c = \frac{1 - e^2}{g^2},$$

który z kolei jest funkcją odkształceń spowodowanych jednoczesnym rozciąganiem oraz skręcaniem, $c = c(\varepsilon, \vartheta)$.

Dochodzimy zatem do wniosku, że aby napisać równanie granicy stref $\Gamma(x, y) = 0$, uwzględniając wpływ rozciągania na skręcanie (zakładamy, że λ jest małe), wystarczy określić funkcję spaczenia przekroju ψ_0 , znaną z licznych rozwiązań problemu de Saint-Venanta w teorii sprężystości. Równanie (3.16) odnosi się do dowolnego kształtu przekroju jedno- lub wielopójnego.

4. Rozkład naprężeń oraz siły zewnętrzne

Składowe tensora naprężeń τ_{zx} , τ_{zy} , σ_z należy obliczyć osobno w strefie sprężystej i osobno w strefie plastycznej. Naprężenia w obszarze sprężystym (1) można zapisać w postaci

$$(4.1) \quad \begin{aligned} {}^s\tau_{zx} &= \frac{Q}{\sqrt{3}} g (y + {}^s\psi'_x) = \frac{Q}{\sqrt{3}} g (y + \psi'_{0x}) + \dots, \\ {}^s\tau_{zy} &= \frac{Q}{\sqrt{3}} g (-x + {}^s\psi'_y) = \frac{Q}{\sqrt{3}} g (-x + \psi'_{0y}) + \dots, \\ {}^s\sigma_z &= E\varepsilon = Q\varepsilon. \end{aligned}$$

Naprężenia w obszarze plastycznym mogą być wyrażone przez funkcję spaczenia ${}^p\psi = {}^p\psi(x, y)$; korzystając z rezultatów rozważań przeprowadzonych w pracy [15] otrzymujemy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} {}^p\tau_{zx} &= \frac{\lambda Q (y + {}^p\psi'_x)}{\{9 + 3\lambda^2 [(y + {}^p\psi'_x)^2 + (-x + {}^p\psi'_y)^2]\}^{1/2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} g (y + \psi'_{0x}) + \dots, \\ {}^p\tau_{zy} &= \frac{\lambda Q (-x + {}^p\psi'_y)}{\{9 + 3\lambda^2 [(y + {}^p\psi'_x)^2 + (-x + {}^p\psi'_y)^2]\}^{1/2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} g (-x + \psi'_{0y}) + \dots, \\ {}^p\sigma_z &= \frac{\sqrt{3} Q}{\{3 + \lambda^2 [(y + {}^p\psi'_x)^2 + (-x + {}^p\psi'_y)^2]\}^{1/2}} = Q \left(1 - \frac{1}{2} A_0 [\psi_0] g^2 - \dots \right). \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że w szeregach potęgowych (4.1) oraz (4.2) rolę małego parametru pełni wielkość $g = Ga \sqrt{3} \vartheta / Q$, a nie jak poprzednio $\lambda = a\vartheta/\varepsilon$. Zmiana taka jest charakterystyczna przy przejściu od rozpatrywania stanu czysto plastycznego, gdzie odkształcenia ε , ϑ nie mogą być określone, a wyznacza się jedynie ich stosunek ϑ/ε , do rozważania zagadnień sprężysto-plastycznych, gdzie zarówno ϑ jak i ε są jednoznacznie określone i mogą pełnić rolę niezależnych parametrów.

Przy zmianie λ na g korzystaliśmy z relacji (3.6). Skoro uważamy g za mały parametr, wielkość e nie może być dowolna; powinna nie wiele różnić się od jedności, aby istnienie stanu sprężysto-plastycznego było w ogóle możliwe. Parametr e powinien zatem zostać wyrażony również w postaci pewnego szeregu potęgowego. Poszukiwany szereg otrzymamy stawiając warunek zgodności naprężeń na granicy stref:

$$(4.3) \quad s_{\sigma_z} = p_{\sigma_z} \quad \text{wzdłuż } \Gamma.$$

Równość (4.3) wynika ze zgodności naprężeń stycznych s_{τ} oraz p_{τ} [por. wzory (4.1) i (4.2)] oraz z równoczesnego żądania zachodzenia warunku plastyczności wzdłuż granicy stref Γ . Stąd przez porównanie wzorów (4.1) i (4.2) otrzymujemy

$$(4.4) \quad Qe = Q \left(1 - \frac{1}{2} A_0 [\psi_0] g^2 - \dots \right).$$

Wiadomo ponadto z równania (3.16), że w pierwszym przybliżeniu wzdłuż granicy stref Γ zachodzi równość [por. także wzór (3.17)]

$$(4.5) \quad A_0 [\psi_0] = c.$$

Mamy więc związek

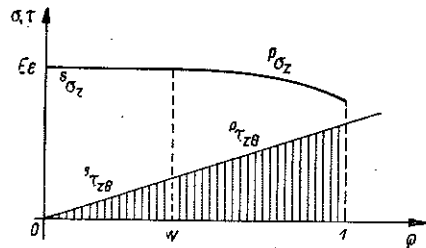
$$(4.6) \quad e = 1 - \frac{c}{2} g^2 - \dots,$$

który pozwala nam przepisać trzeci spośród wzorów (4.1) w postaci

$$(4.7) \quad s_{\sigma_z} = Q \left(1 - \frac{c}{2} g^2 - \dots \right).$$

Łatwo teraz porównać wzory (4.1) i (4.2). Okazuje się, że w pierwszym przybliżeniu naprężenia styczne τ w obydwu strefach są opisane tymi samymi równaniami, natomiast naprężenia normalne spełniają nierówność $s_{\sigma_z} \geq p_{\sigma_z}$. Szczególnie prosta interpretacja wzorów (4.1) i (4.2) może być podana w przypadku przekroju kołowego, dla którego $\psi_0 \equiv 0$. Tak więc naprężenie styczne

$$(4.8) \quad s_{\tau} = \sqrt{s_{\tau_{zx}}^2 + s_{\tau_{zy}}^2} = \\ = \frac{Q}{\sqrt{3}} g (x^2 + y^2)^{1/2} + \dots = p_{\tau}$$



Rys. 2

jest liniową funkcją bezwymiarowego promienia $\rho = r/a = (x^2 + y^2)^{1/2}$ w całym obszarze: zarówno w strefie plastycznej $w \leq \rho \leq 1$, jak i sprężystej $0 \leq \rho \leq w$. Symbol $w = r^*/a$ oznacza bezwymiarowy promień graniczny, natomiast a jest promieniem koła. Naprężenie normalne (por. rys. 2) w strefie sprężystej $s_{\sigma_z} = E\varepsilon = \text{const}$ na granicy stref określonej w bezwymiarowym układzie współrzędnych promie-

niem w spełnia warunek ${}^s\sigma_z = {}^p\sigma_z$, a następnie zmienia się tak, aby był spełniony warunek plastyczności

$$(4.9) \quad {}^p\sigma_z = Q [1 - g^2 (x^2 + y^2) + \dots]^{1/2}.$$

Aby otrzymać siły zewnętrzne (moment skracający M_s oraz siłę podłużną N), należy scałkować szeregi (4.1) i (4.2) wyraz po wyrazie według schematu

$$(4.10) \quad M_s = \int_F (\tau_{zx} \bar{y} - \tau_{zy} \bar{x}) d\bar{x} d\bar{y} = a^3 \left[\int_{f_s} ({}^s\tau_{zx} y - {}^s\tau_{zy} x) dx dy + \right. \\ \left. + \int_{f_p} ({}^p\tau_{zx} y - {}^p\tau_{zy} x) dx dy \right], \\ N = \int_F \sigma_z d\bar{x} d\bar{y} = a^2 \left[\int_{f_s} {}^s\sigma_z dx dy + \int_{f_p} {}^p\sigma_z dx dy \right],$$

przy czym bezwymiarowy obszar całkowania f rozbiliśmy na dwa podobszary: sprężysty f_s oraz plastyczny f_p . Daszki nad literami oznaczają współrzędne wymiarowe, mianowicie $\bar{x} = xa$, $\bar{y} = ya$, natomiast a jest pewnym wymiarem liniowym charakteryzującym przekrój. Po wstawieniu wyrażen (4.1) i (4.2) i po wykonaniu całkowania, otrzymujemy

$$(4.11) \quad M_s = \frac{Q}{\sqrt{3}} g a^3 \int_f [(y + \psi_{0x}) y - (-x + \psi'_{0y}) x] dx dy + \dots, \\ N = QF - \frac{Qa^2}{2} g^2 \left[\int_f A_0 [\psi_0] dx dy + \int_{f_s} (c - A_0) dx dy \right] + \dots,$$

gdzie F oznacza pole przekroju poprzecznego.

Przy obliczaniu siły podłużnej korzystaliśmy z addytywności całki oznaczonej według schematu

$$\int_{f_p} = \int_f - \int_{f_s}.$$

W pracy [15] wykazaliśmy, że całka

$$(4.12) \quad S_2 = \int_f [(y + \psi'_{0x}) y - (-x + \psi'_{0y}) x] dx dy$$

oraz całka

$$(4.13) \quad S_1 = \int_f A_0 [\psi_0] dx dy = \int_f [(y + \psi'_{0x})^2 + (-x + \psi'_{0y})^2] dx dy$$

są sobie równe; mamy więc

$$(4.14) \quad S_1 = S_2 = S$$

dla dowolnego kształtu przekroju poprzecznego. Oznaczmy ponadto

$$(4.15) \quad \int_{f_s} \{c - A_0 [\psi_0]\} dx dy = S'.$$

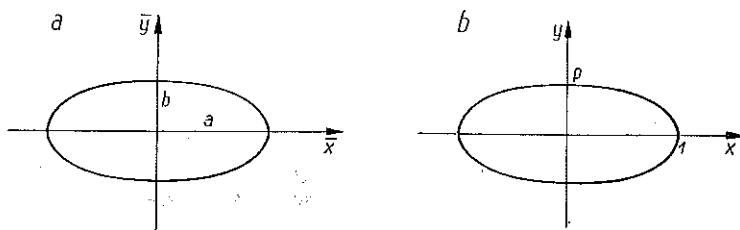
Wzory (4.11) przyjmą obecnie postać

$$(4.16) \quad \begin{aligned} M_s &= \frac{Q}{\sqrt{3}} g a^3 S + \dots, \\ N &= QF \left[1 - \frac{a^2}{2F} g^2 (S + S') + \dots \right]. \end{aligned}$$

Wzory te umożliwiają obliczenie sił zewnętrznych M_s , N dla dowolnego kształtu przekroju, jeżeli tylko znana jest 1) funkcja spaczenia $\psi_0 = \psi_0(x, y)$, 2) kształt sprężystego jądra przekroju f_s (por. granice całki S'), ograniczonego częścią konturu sC oraz krzywą Γ . Zgodnie z wnioskami podanymi poprzednio kształt obszaru sprężystego f_s jest dany przy uwzględnieniu wpływu skręcania na rozciąganie równaniem (3.16). Ostatecznie więc dla pełnego rozwiązania przypadku (M_s, N) , gdy $M_s \ll N$ w zakresie sprężysto-plastycznym wystarcza znajomość funkcji Saint-Venanta ψ_0 .

5. Przykłady zastosowań

Zajmiemy się rozwiązaniem postawionego zagadnienia dla kilku wybranych kształtów przekroju poprzecznego pręta. Będą to elipsa (koło), trójkąt równoboczny oraz profil skrzydła samolotu.



Rys. 3

Równanie elipsy o półosiach a, b (por. rys. 3a) we współrzędnych wymiarowych \bar{x}, \bar{y}

$$(5.1) \quad \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1,$$

przepiszemy w postaci bezwymiarowej (por. rys. 3b)

$$(5.2) \quad x^2 + \frac{y^2}{p^2} = 1,$$

gdzie $p = b/a$ oznacza parametr elipsy.

Funkcja deplanacji przekroju jest znana z rozwiązań teorii sprężystości i może być w postaci bezwymiarowej zapisana w sposób następujący:

$$(5.3) \quad \psi_0 = p \frac{1-p^2}{1+p^2} xy.$$

Wyznamy następnie wyrażenie

$$(5.4) \quad A_0 [\psi_0] = (y + \psi'_{0x})^2 + (-x + \psi'_{0y})^2 = \frac{4}{(1+p^2)^2} (y^2 + p^4 x^2)$$

oraz, korzystając z równania (3.16), piszemy równanie granicy stref Γ w postaci

$$(5.5) \quad \frac{x^2}{\frac{(1-e^2)(1+p^2)^2}{4g^2 p^4}} + \frac{y^2}{\frac{(1-e^2)(1+p^2)^2}{4g^2}} = 1.$$

Jest to równanie elipsy o półosiach

$$(5.6) \quad A = \frac{1+p^2}{2p^2 g} \sqrt{1-e^2}, \quad B = \frac{1+p^2}{2g} \sqrt{1-e^2},$$

przy czym, jak widać, stosunek półosi elipsy Γ jest równy kwadratowi stosunku półosi elipsy C (konturu), mianowicie

$$(5.7) \quad \frac{B}{A} = p^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

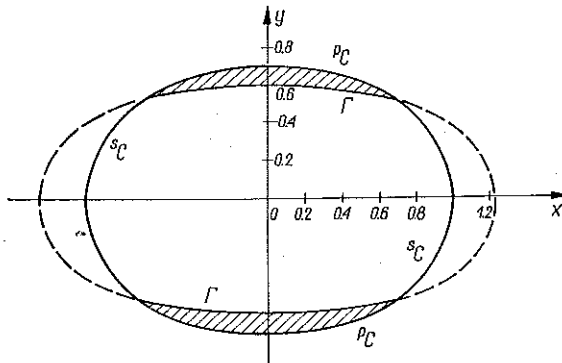
Przy ustalonym kształcie konturu p oraz danej wartości parametru $c = (1-e^2)/g^2$ granica stref Γ (5.5) może więc być łatwo narysowana. Nie trudno także zauważyć, że elipsa Γ może leżeć całkowicie wewnątrz elipsy C , i że strefa odkształceń plastycznych otacza całkowicie sprężyste jądro przekroju lub też elipsy Γ i C mogą się przecinać, tak jak to pokazano na rys. 4. Rysunek 4 został sporządzony dla następujących danych: $p = 0,7$, $c = 0,6487$. Półosie elipsy C wynoszą $a, b = 0,7 a$, natomiast półosie elipsy Γ obliczone według wzorów (5.6) wynoszą: $A = 1,2224$, $B = 0,6000$.

W przypadku szczególnym, gdy $p = b/a = 1$, równanie (5.5) przechodzi w równanie koła Γ :

$$(5.8) \quad x^2 + y^2 = \frac{1-e^2}{g^2}$$

o promieniu

$$(5.9) \quad w = \frac{\sqrt{1-e^2}}{g}.$$



Rys. 4

Wzory (5.8) oraz (5.9) są wzorami ścisłymi (por. praca M. Życzkowskiego, [16]) i pozostają słuszne dla dowolnych wartości obciążeń zewnętrznych M_s i N . Jest to zrozumiałe, jeżeli wziąć pod uwagę ścisłe równanie granicy stref (3.7) lub (3.25) i przyjąć $s_\psi \equiv \psi_\psi \equiv 0$ dla przekroju kołowego. Stąd $A [s_\psi] = A [\psi_\psi] = x^2 + y^2$, co po wstawieniu do wspomnianych równań daje (5.8).

Przystąpimy z kolei do obliczenia sił zewnętrznych, ograniczając zakres rozważań jedynie do przypadku, gdy krzywa Γ leży w całości wewnątrz krzywej C . W tym celu dogodnie będzie zapisać równanie elipsy C w postaci sparametryzowanej:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} x &= \varrho \cos t, \\ y &= p\varrho \sin t, \end{aligned} \quad f \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 0 \leq \varrho \leq 1; \end{cases}$$

analogicznie dla elipsy Γ

$$(5.11) \quad \begin{aligned} x &= A\varrho \cos t, \\ y &= B\varrho \sin t, \end{aligned} \quad f_s \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 0 \leq \varrho \leq 1. \end{cases}$$

Obliczamy całki

$$(5.12) \quad \begin{aligned} S &= \iint_f A_0 df = \frac{4}{(1+p^2)^2} \iint_f (y^2 + p^4 x^2) dx dy = \\ &= \frac{4p^2}{(1+p^2)^2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \varrho^2 (\sin^2 t + p^2 \cos^2 t) p\varrho d\varrho = \frac{\pi p^3}{1+p^2}. \end{aligned}$$

Następnie

$$(5.13) \quad \begin{aligned} S' &= \iint_{f_s} (c - A_0) df_s = f_s c - \iint_{f_s} A_0 df_s = f_s c - \\ &\quad - \frac{4}{(1+p^2)^2} \iint_{f_s} (y^2 + p^4 x^2) dx dy, \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu [por. (5.6) oraz (5.11)]

$$(5.14) \quad c = \frac{4p^4 A^2}{(1+p^2)^2}, \quad f_s = \pi A^2 p^2, \quad df_s = A^2 p^2 \varrho d\varrho dt$$

daje

$$(5.15) \quad S' = \frac{4\pi p^6 A^4}{(1+p^2)^2} - \frac{4p^6 A^4}{(1+p^2)^2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \varrho^3 d\varrho = \frac{2\pi A^4}{(1+p^2)^2}.$$

Po wstawieniu obliczonych powyżej całek S i S' do równań (4.33) otrzymujemy

$$(5.16) \quad \begin{aligned} N &= \pi Q a^2 p \left[1 - \frac{g^2}{2p(1+p^2)} \left(p^3 + \frac{2A^4}{1+p^2} \right) + \dots \right], \\ M_s &= \frac{Q}{\sqrt{3}} g a^3 \frac{\pi p^3}{1+p^2} + \dots \end{aligned}$$

W przypadku szczególnym, gdy $p = 1$ ($A = B = w$), tzn. gdy elipsa przechodzi w koło, równania (5.16) dają się przedstawić w postaci następującej:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} N &= \pi Q a^2 \left[1 - \frac{g^2}{4} (1 + w^4) + \dots \right], \\ M_s &= \frac{\pi Q a^3}{2\sqrt{3}} g + \dots \end{aligned}$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(5.18) \quad n = 1 - \frac{g^2}{4}(1 + w^4) + \dots, \quad m_s = \frac{3}{4}g + \dots$$

Związki te są ogólnie prawdziwe, ponieważ dla przekroju kołowego krzywa Γ leży zawsze wewnątrz krzywej C . Można ponadto wykazać, że wzory (5.18) są identyczne z rozwinięciem ścisłych wyrażeń dla przekroju kołowego $n = n(g, w)$ oraz $m_s = m_s(g, w)$ na szereg potęgowy w otoczeniu punktu $g = 0$ (por. M. ŻYCKOWSKI, [16]).

Parametr g daje się łatwo wyrugować i otrzymujemy związek

$$(5.19) \quad n = 1 - \frac{4}{9}(1 + w^4)m_s^2 - \dots,$$

który jest rozwinięciem ścisłego wyrażenia $n = n(w, m_s)$ na szereg potęgowy w otoczeniu punktu $m_s = 0$. Możliwa jest tu również aproksymacja typu

$$(5.20) \quad Am_s^2 + Bn^2 + Cn^3 = 1,$$

obejmująca cały obszar $0 \leq m_s \leq 1$, $0 \leq n \leq 1$. Współczynniki A, B i C dobieramy korzystając z równania (M. ŻYCKOWSKI, [16])

$$(5.21) \quad m_s = 1 - \frac{w^3}{4} \quad \text{dla} \quad n = 0$$

oraz ze znajdującego szeregu potęgowego (5.19). Otrzymujemy w ten sposób przybliżone równanie $f(m_s, n, w) = 0$:

$$(5.22) \quad \frac{16}{(4 - w^3)^2} m_s^2 + \left[3 - \frac{36}{(4 - w^3)^2 (1 + w^4)} \right] n^2 + \left[\frac{36}{(4 - w^3)^2 (1 + w^4)} - 2 \right] n^3 = 1.$$

Wzór ten umożliwia bezpośrednie obliczenie $m_s = m_s(w, n)$. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych interesująca jest ponadto zależność $w = w(m_s, n)$, równanie (5.22) nie daje się jednakże rozwikłać ze względu na wielkość w . Zadanie można natomiast rozwiązać numerycznie, szczegółowe tablice oraz wykresy sporządzone w oparciu o rozwiązanie ścisłe (dla przekroju kołowego) można znaleźć w pracy [16].

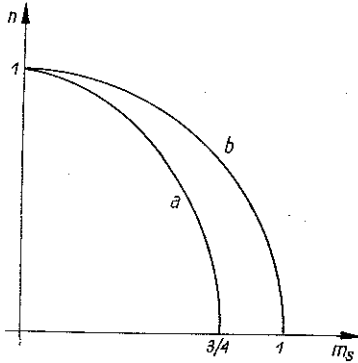
Warto zauważyć, że z równania (5.22) możemy łatwo otrzymać równanie krzywej nośności sprężystej, gdy $w = 1$:

$$(5.23) \quad \frac{16}{9} m_s^2 + n^2 = 1$$

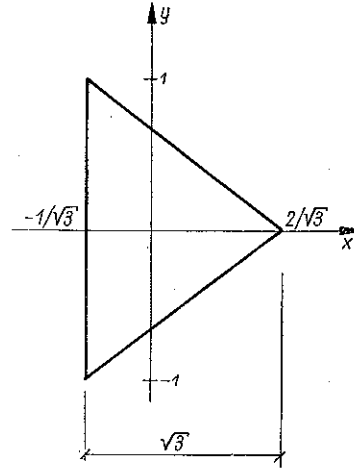
oraz równanie krzywej nośności granicznej (plastycznej), gdy $w = 0$:

$$(5.24) \quad m_s^2 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 = 1.$$

Obydwa równania (5.23) i (5.24) są ściśle. Odpowiadające im krzywe nośności sprężystej (a) oraz nośności plastycznej (b) przedstawia rys. 5.



Rys. 5



Rys. 6

Zajmiemy się obecnie wyprowadzeniem równania granicy stref I dla przekroju o kształcie trójkąta równobocznego (rys. 6). Funkcja spaczenia przekroju (Saint-Venanta) dla przyjętego bezwymiarowego układu odniesienia x, y (jak na rys. 6) wyraża się wzorem

$$(5.25) \quad \psi_0 = \frac{\sqrt{3}}{6} y (3x^2 - y^2).$$

Znajdujemy wyrażenie

$$(5.26) \quad A_0[\psi_0] = y^2(1 + 3x^2 + 2\sqrt{3}x) + x^2 + \frac{3}{4}(x^2 - y^2)^2 - x\sqrt{3}(x^2 - y^2)$$

i wstawiamy je do równania granicy stref (3.16); po wykonaniu pewnych prostych przekształceń otrzymujemy:

$$(5.27) \quad y^4 + y^2 \frac{4}{3} \left(1 + \frac{3}{2} x^2 + 3\sqrt{3}x \right) + \frac{4}{3} \left(x^2 + \frac{3}{4} x^4 - \sqrt{3}x^3 - c \right) = 0,$$

gdzie parametr $c = (1 - e^2)/g^2$. Jak widać, równanie (5.27) daje się rozwickać ze względu na y i w ten sposób współrzędne punktów krzywej I przy danej wartości parametru c mogą być obliczone.

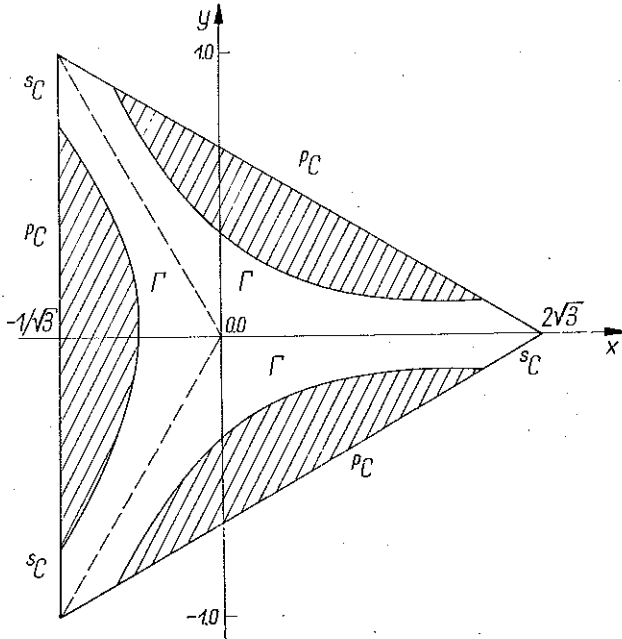
Rysunek 7 przedstawia kształt krzywej I , znalezionej przy przyjętym uprzednio

$$(5.28) \quad c = 0,1302$$

na drodze numerycznej, mianowicie

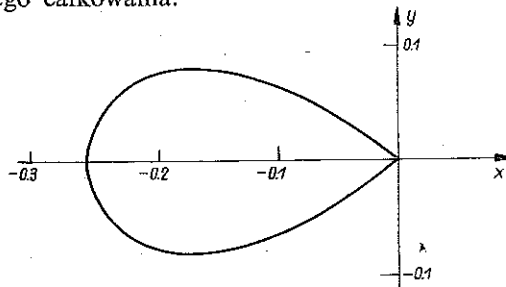
$$(5.29) \quad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & y &= \pm 0,7639, \\ x &= -\frac{\sqrt{3}}{4}, & y &= \pm 0,5501, \\ x &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}, & y &= 0,0000. \end{aligned}$$

Określona w ten sposób krzywą należy narysować symetrycznie na wszystkich trzech bokach trójkąta (rys. 7).



Rys. 7

Obliczanie całek S oraz S' , a zatem i sił zewnętrznych M_s i N , jest w omawianym przypadku dosyć pracochłonne, jednakże zawsze możliwe, chociażby przy użyciu metod numerycznego całkowania.



Rys. 8

Wspomnianych całek nie będziemy tutaj obliczać, zajmiemy się natomiast wy-
prowadzeniem równania granicy stref Γ dla profilu zbliżonego do profilu skrzydła
samolotu. Funkcja Saint Venanta jest znana z rozwiązań teorii sprężystości (por.
np. W. Krzyś i M. Życzkowski, [7]) i w bezwymiarowym układzie odniesienia przy-
jętym jak na rys. 8 wyraża się wzorem

$$(53.0) \quad \psi_0 = 3yx^2 - y^3 + \frac{3}{2}xy.$$

Znajdujemy wyrażenie

$$(53.1) \quad A_0[\psi_0] = y^2 \left(6x + \frac{5}{2} \right)^2 + 9(x^2 - y^2)^2 + \frac{1}{9}x^2 + 2x(x^2 - y^2)$$

oraz wstawiamy je do równania (3.16). Po wykonaniu pewnych prostych prze-
kształceń, otrzymujemy równanie granicy stref Γ w postaci

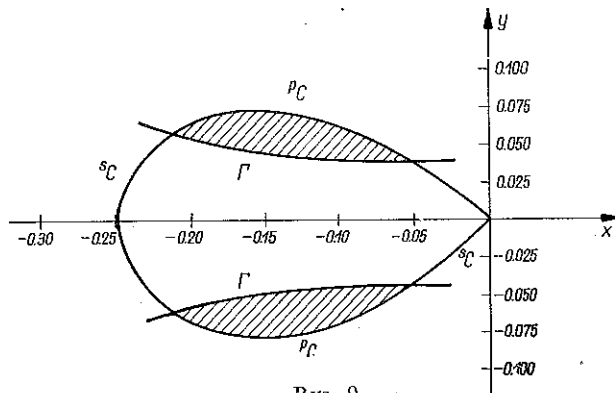
$$(53.2) \quad 9y^4 + y^2 \left(18x^2 + 28x + \frac{25}{4} \right) + 9x^4 + 2x^3 + \frac{1}{9}x^2 - c = 0.$$

Jest to równanie podobnie jak poprzednio bikwadratowe ze względu na y i daje
się łatwo rozwiązać. Wartość parametru c obieramy w ten sposób, aby krzywa Γ
przechodziła przez pewien dany z góry punkt, np. $x = -0,15$, $y = 0,05$. Przy tych
wartościach

$$(53.3) \quad c = 0,0065.$$

Obliczamy współrzędne punktów leżących na granicy stref:

$$(53.4) \quad \begin{array}{ll} x = -0,20, & y = \pm 0,0517, \\ x = -0,15, & y = \pm 0,0500, \\ x = -0,10, & y = \pm 0,0310, \\ x = -0,05, & y = \pm 0,0316, \\ x = 0,00, & y = \pm 0,0400. \end{array}$$



Rys. 9

Znalezione w ten sposób punkty umożliwiają narysowanie krzywej Γ (por. rys. 9);
obszar uplastyczniony leżący pomiędzy krzywą Γ a konturem Γ został zakreskowany.

Literatura cytowana w tekście

- [1] D. G. CHRISTOPHERSON, *A theoretical investigation of plastic torsion in an I-beam*, J. Appl. Mech., 1-4, 7 (1940).
- [2] Л. А. Галин, *О существовании решения упруго-пластической задачи кручения призматических стержней*, Прикл. Мат. Мех., 6, 13 (1949).
- [3] Л. А. Галин, *Упруго-пластическое кручение призматических стержней*, Прикл. Мат. Мех., 3, 13 (1949).
- [4] Л. А. Галин, *Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения*, Прикл. Мат. Мех., 4, 8 (1944).
- [5] F. A. GAYDON, *On the combined torsion and tension of a partly plastic circular cylinder*, Quart. J. Mech. Math., 1, 5 (1952).
- [6] H. JUNG, *Über eine anwendung der Hillschen Minimalbedingung in der Plastizität Theorie*, Ing. Arch., 1, 23 (1955), 61-68.
- [7] W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność — wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
- [8] П. И. Перлин, *Упруго-пластическое кручение стержней овального поперечного сечения*, Инж. Сборник, 31 (1961), 202—205.
- [9] DE SAINT VENANT, *Mémoire sur la torsion des prismes* (w języku rosyjskim) Gosizdat, Fiz.-Mat. lit., Moskwa 1961.
- [10] С. В. Серенсен и другие, *Несущая способность и расчеты деталей машин*, Машгиз, Москва 1954.
- [11] F. S. SHAW, *The torsion of solid and hollow prisms in elastic and plastic range by relaxation methods*, Australian Council for Aeronautics, Rep. ACA-11 (1944).
- [12] В. В. Соколовский, *О задаче упруго-пластического кручения*, Прикл. Мат. Мех., 6 (1942), 241-246.
- [13] R. W. SOUTHWELL, *Relaxation methods in theoretical physics*, Oxford University Press, 1946.
- [14] W. URBANOWSKI, *Elasto-plastyczne odkształcenie kuli grubościennej poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego*, Arch. Mech. Stos., 4, 7 (1955).
- [15] M. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcanego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., 4, 10 1962.
- [16] M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955).

Резюме

ВЛИЯНИЕ КРУЧЕНИЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ
ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается задача одновременного кручения с растяжением в упруго-пластической области. Использовалась теория пластических деформаций Генки-Ильюшина. Принимается модель Прандтля идеально-пластического несжимаемого материала. Применяя метод малого параметра получено приближенное решение, обязывающее только в области больших N и малых M_s (N — продольная сила, M_s — крутящий момент). Найдены формулы для составляющих тензора напряжений, внешних сил и границы зон $\Gamma(x, y) = 0$, даются в виде степенных рядов. Эти формулы обязывают для сечений произвольной формы. Приводится эффективное решение задачи для четырех случаев: круг, эллипс, равносторонний треугольник, профиль крыла самолета.

S u m m a r y

THE INFLUENCE OF TORSION ON THE TENSION OF A PRISMATIC BAR OF ANY PROFILE IN THE ELASTIC-PLASTIC RANGE

The problem under consideration is that of combined tension and torsion in the elastic-plastic range. The Hencky-Ilyushin plastic strain theory is used assuming a Prandtl body that is a perfectly plastic, incompressible body. Making use of the perturbation method an approximate solution is obtained valid for large N and small M_s only (N — longitudinal force, M_s — torque). The equations found for the stress components, the loads and the frontier between the two regions $T(x, y) = 0$ are given in the form of power series.

They are valid for any cross-section. Effective solution of the problem is obtained in four cases concerning a circle, an ellipse, a regular triangle, and an airfoil.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
KATEDRA FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dn. 22 października 1962 r.
