ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, 11 (1963)

PLASTYCZNE WYCZERPANIE NOŚNOŚCI USTROJÓW PŁYTOWO-ŻEBROWYCH
CZ. 2. ROZWIĄZANIA STATYCZNE

MAREK KWIECIŃSKI (WARSZAWA)

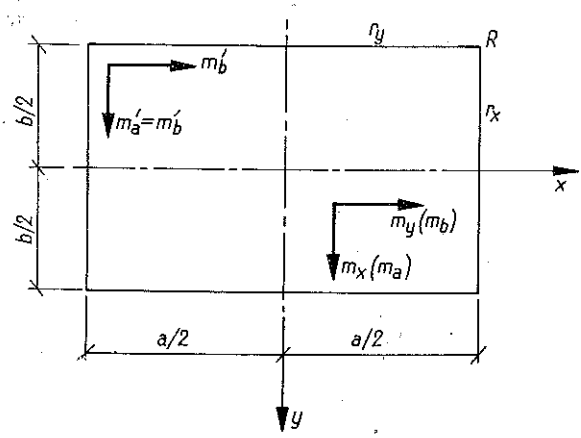
1. Podział konstrukcji żebrami na *nk* równych prostokątów

Podstawy metody statycznej określania nośności granicznej zostały omówione w pracy [1]. Przypomnimy tylko, że rozwiązywanie zagadnień na tej drodze wymaga spełnienia równań równowagi wewnętrznej, osiągnięcia w dostatecznie dużym obszarze uplastycznienia materiału oraz spełnienia warunków brzegowych w naprężeniach. Znane równanie równowagi elementu płytowego we współrzędnych prostokątnych posiada postać

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p. \tag{1.1}$$

Wyznaczenie obciążeń łamiących dla płyt ustroju wymaga rozwiązania równania różniczkowego (1.1) przy wykorzystaniu warunku plastyczności (por. wzór (2.2) w [1]). Dla żeber podpierających należy uwzględnić warunki (2.5), przy czym równanie (1.1) przechodzi w równanie, w którym występuje druga pochodna funkcji (jednej zmiennej) momentu zginającego i obciążenie zewnętrzne.

Na początku rozwiążemy zagadnienie podstawowe, mianowicie określimy dolną (statyczną) granicę obciążenia łamiącego dla płyty prostokątnej (rys. 1), której 4 żebra podpierające uważamy za sztywne na tyle, że w procesie wyczerpania nośności płyty mogą być uważane za przegubowe, nie posiadające podparcia (por. praca [2]). Współczynnik ortotropii oznaczamy $\varkappa = m_a/m_b$, współczynniki warstwowości struktury, grające rolę w pobliżu naroży płyty, przez $\nu = m_b'/m_b$ i $\lambda = m_a'/m_b$. Ograniczamy się od razu do warstwowości izotropowej ($\nu = \lambda$). Aby zorientować się, wśród jakich funkcji należy poszukiwać statycznie możliwego rozkładu sił wewnętrznych dla płyty prostokątnej,



Rys. 1

zajmiemy się najpierw płytą izotropową o rzucie kwadratowym. Przyjmiemy (za pracą [3]) następujące prawo dystrybucji momentów zginających, wynikające z warunków symetrii:

$$m_x = f'(x)\, g'(y), \qquad m_y = f'(y)\, g'(x).$$

Mając na uwadze równanie (1.1) znajdujemy

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = f'''(x)\, g'(y), \qquad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = f'''(y)\, g'(x)$$

i możemy napisać

$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{2}[p + f'''(x)\, g'(y) + f'''(y)\, g'(x)].$$

Następnie mamy

$$m_{xy} = -\frac{1}{2}[pxy + f''(x)\, g(y) + f''(y)\, g(x)].$$

Z warunku $[m_{xy}]_{x=0,\, y=0} = 0$ wynika $f''(0)\, g(0) = 0$.

Moment skręcający wzdłuż przekątnych płyty wynosi

$$[m_{xy}]_{x=y} = -\frac{px^2}{2} - f''(x)\, g(x),$$

a momenty zginające

$$m_x = m_y = f'(x)\, g'(x).$$

Największy moment główny można teraz określić jako

$$[m_1]_{x=y} = m_x - m_{xy} = f'(x)\, g'(x) + \frac{px^2}{2} + f''(x)\, g(x).$$

Wprowadzając warunek $m_1 = m_0$ i całkując stronami otrzymujemy

$$f'(x)\, g(x) + \frac{px^3}{6} = m_0\, x,$$

czyli

$$f'(x)\, g(x) = m_0\, x \left(1 - \frac{px^2}{6m_0}\right).$$

Ponieważ $f''(0)\, g(0) = 0$, to

$$f'(x) = 1 - \frac{px^2}{6m_0}, \qquad g'(x) = m_0.$$

Stąd

$$m_x = m_0 - \frac{px^2}{6}, \qquad m_y = m_0 - \frac{py^2}{6}, \qquad m_{xy} = -\frac{pxy}{6}.$$

Z warunków brzegowych płyty wynika, że $m_0 = pa^2/24$. Wzory powyższe określają wykresy momentów według rozkładu parabolicznego. Z tego względu przyjmujemy, że dla płyty prostokątnej (i ortotropowej) można analogicznie wyrazić statycznie możliwy rozkład sił wewnętrznych:

$$m_x = \varkappa m_b - Ax^2, \quad m_y = m_b - By^2, \quad m_{xy} = Cxy. \tag{1.2}$$

Przyjęcie takie zapewnia spełnienie warunków plastyczności w miejscach największych momentów zginających w płycie. Stałe A, B i C wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} &m_x = 0 && \text{dla} \quad x = \pm\frac{a}{2}, \\ &m_y = 0 && \text{dla} \quad y = \pm\frac{b}{2}, \\ &m_{xy} = -\nu m_b && \text{dla} \quad \left(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{b}{2}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Po ich znalezieniu (rachunki opuszczamy) wykorzystujemy równanie (1.1) przez podstawienie do niego funkcji (1.2), określających rozkład sił wewnętrznych w płycie w stanie wyczerpania jej nośności. Znaleziona wartość obciążenia granicznego wynosi

$$p = \frac{8m_b}{b^2}(\varkappa\beta^2 + \nu\beta + 1). \tag{1.4}$$

Obciążenia przypadające na podpory (żebra podpierające) znajdujemy ze znanych związków między momentami a siłami poprzecznymi, uwzględniając konieczną w tym przypadku zmianę znaków:

$$\begin{aligned} r_x &= -\frac{\partial m_x}{\partial x} - 2\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \frac{4m_b}{b}(\varkappa\beta + \nu), \\ r_y &= -\frac{\partial m_y}{\partial y} - 2\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = \frac{4m_b}{b}(\nu\beta + 1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dodatkowe siły skupione w miejscach skrzyżowania żeber (skierowane ku górze) wynoszą

$$R = 2m_{xy} = -2\nu m_b. \tag{1.6}$$

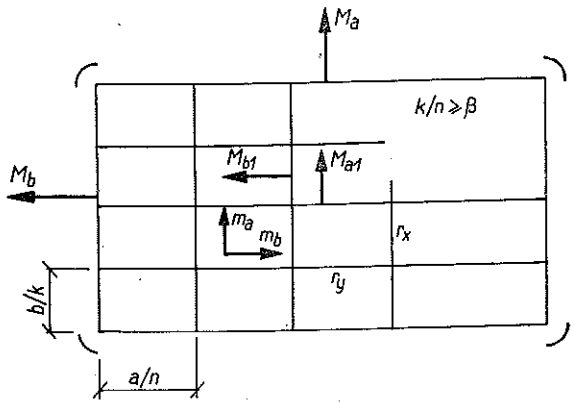
Oczywiście związki (1.5) i (1.6) spełniają warunek równowagi dla całego układu

$$2r_x b + 2r_y a + 4R = pab.$$

Przejdźmy teraz do rozpatrzenia ustroju, którego rzut na płaszczyznę jest prostokątem podzielonym na nk części (prostokątnych). Konstrukcja ta (rys. 2) została zanalizowana metodą kinematyczną w rozdziale 4 pracy [1]. Oznaczając stosunek boków części płyty symbolem $\overline{\beta} = \beta n/k \leqslant 1$, możemy określić ortotropię ekono-

miczną przez $\varkappa = \overline{\beta}^2/(3 - 2\overline{\beta}^2)$. Warstwowej struktury płyt nie będziemy uwzględniać ($\nu = 0$). Wprowadzimy następujące wskaźniki plastyczne:

$$(1.7)\qquad \varphi = \frac{M_b}{m_b a}, \qquad \omega = \frac{M_a}{M_b}, \qquad \alpha_1 = \frac{(k-1)\,M_{a1}}{M_a}, \qquad \alpha_2 = \frac{(n-1)\,M_{b1}}{M_b}.$$



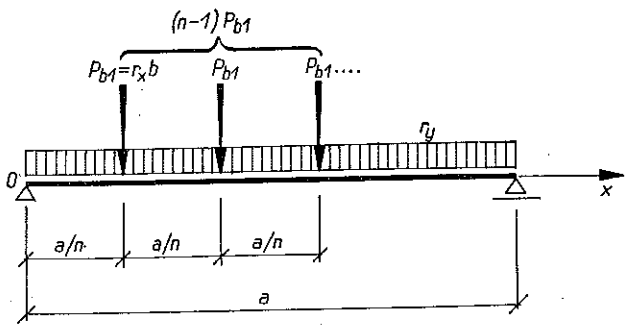
Rys. 2

Wielkość obciążenia łamiącego obliczona za pomocą wzoru (1.4) wynosi

$$(1.8)\qquad p = \frac{8m_b}{b^2}(\varkappa\beta^2 n^2 + k^2).$$

W celu określenia wskaźników (1.7) musimy wyznaczyć statycznie możliwy rozkład sił wewnętrznych (momentów zginających) w żebrach ustroju. Zakładamy, że w związku z równomiernym rozkładem obciążeń krawędziowych, przenoszących się z płyt na żebra [na co wskazują wzory (1.5)], w stanie granicznym nie występują siły poprzeczne w przegubach, utworzonych w miejscach skrzyżowań żeber pośrednich.

Na rysunku 3 przedstawiliśmy schemat żebra skrajnego dłuższego. Obliczymy największy moment zginający, który określa nośność plastyczną żebra na zginanie.



Rys. 3

Przy tej okazji pojawia się zagadnienie określenia $M^P(a/2)$ dla dowolnej liczby podziału n. Musimy tu odróżnić dwa przypadki: n jest parzyste i n jest nieparzyste.

Dla n parzystego

$$(1.9)\qquad M^P(a/2) = \frac{n-1}{2}P\frac{a}{2} - P\left[\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{n}\right) + \left(\frac{a}{2} - 2\frac{a}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{a}{2} - \frac{n-2}{2}\frac{a}{n}\right)\right] = \frac{Pan}{8}.$$

Dla n nieparzystego

$$(1.10)\quad M^P(a/2) = \frac{n-1}{2} P\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2n}\right) - P\left[\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2n} - \frac{a}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2n} - 2\frac{a}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2n} - \frac{n-3}{2}\frac{a}{n}\right)\right] = \frac{Pa}{8}\frac{n^2-1}{n}.$$

Widzimy, że zamiana równomiernie rozstawionych sił skupionych na obciążenie ciągłe całej belki $q = Pn/a$ daje dla n parzystego wynik ścisły na maksymalny moment zginający, natomiast dla n nieparzystego wynik ten jest przybliżony. Określa on wartość $M_{\max}$ z nadmiarem równym $100/(n^2-1)$ procent. Zgodnie z rys. 3 oraz w oparciu o wzory (1.5), (1.9) i (1.10) możemy obliczyć moment graniczny w dłuższym żebrze skrajnym:

$$M_a = \frac{m_b b}{2\beta^2}(\varkappa\beta^2 n^2 + k) \qquad \text{dla } n \text{ parzystego},$$

$$M_a = \frac{m_b b}{2\beta^2}[\varkappa\beta^2 (n^2-1) + k] \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego}.$$

Dla żebra pośredniego dłuższego zgodnie z założeniem mamy

$$M_{a1} = \frac{2r_y a^2}{8} = \frac{kb}{\beta^2} m_b.$$

Podobnie można otrzymać wzory dla żeber krótszych, skrajnego i pośredniego, rozróżniając w tym przypadku k parzyste i nieparzyste. Nie przytaczając tych wzorów podamy od razu wielkości wskaźników plastycznych (1.7), gdy n i k są parzyste:

$$(1.11)\quad \varphi = \frac{\varkappa\beta^2 n + k^2}{2}, \qquad \omega = \frac{\varkappa\beta^2 n^2 + k}{\beta(\varkappa\beta^2 n + k^2)},$$
$$\alpha_1 = \frac{2k(k-1)}{\varkappa\beta^2 n^2 + k}, \qquad \alpha_2 = \frac{2n(n-1)\varkappa\beta^2}{\varkappa\beta^2 n + k^2}.$$

W przypadku gdy n lub k są nieparzyste, to w powyższych wzorach należy zastąpić n^2 przez n^2-1 lub k^2 przez k^2-1.

2. Podział konstrukcji na dziewięć nierównych prostokątów

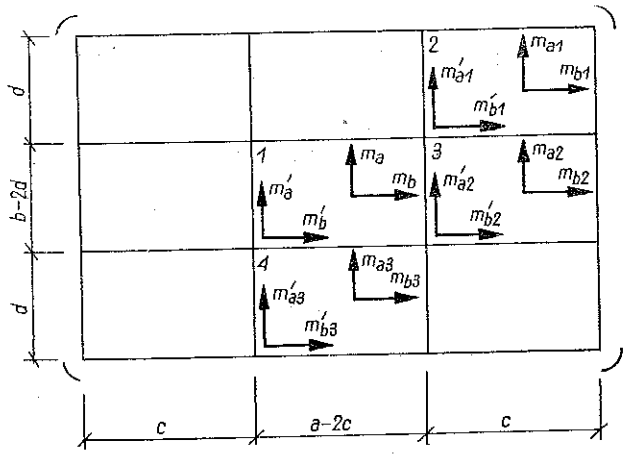
Rozwiązania kinematyczne dla tego typu ustroju płytowo-żebrowego podano w rozdziale 6 pracy [1].

Przyjmujemy następujące (rys. 4) oznaczenia współczynników plastycznych:

$$\varkappa_i = m_{ai}/m_{bi}, \qquad \nu_i = m'_{bi}/m_{bi}, \qquad \lambda_i = m'_{ai}/m_{bi}.$$

Oznaczenia współczynników natury geometrycznej β, δ i ξ nie ulegają zmianie (por. [1]). Biorąc pod uwagę warunek $\nu_i = \lambda_i$ $(m'_{ai} = m'_{bi} \leqslant m_{ai})$ oznaczający przyjęcie warstwowości izotropowej, redukujemy ilość niezależnych plastycznych

modułów płytowych z 16 do 12. Po założeniu $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, co odpowiada praktycznie uzasadnionemu żądaniu, aby wszystkie płyty składowe ustroju niszczyły się równocześnie, mamy do czynienia z 9 niezależnymi modułami płytowymi lub



Rys. 4

z 1 modułem (np. m_b) i 8 wskaźnikami ($\varkappa_i$ oraz ν_i). Nie wprowadzamy na razie ortotropii ekonomicznej w celu sformułowania jak najogólniejszych rozwiązań. Po wprowadzeniu pomocniczych współczynników ϑ_i, związanych z poprzednimi za pomocą związków

$$\vartheta = \varkappa\beta^2 + \nu\beta + 1, \qquad \vartheta_1 = \varkappa_1\beta^2 + \nu_1\beta + 1,$$

$$\vartheta_2 = \varkappa_2\frac{\beta^2}{\xi} + \nu_2\frac{\beta}{\sqrt{\xi}} + 1, \qquad \vartheta_3 = \varkappa_3\beta^2\xi + \nu_3\beta\sqrt{\xi} + 1, \tag{2.1}$$

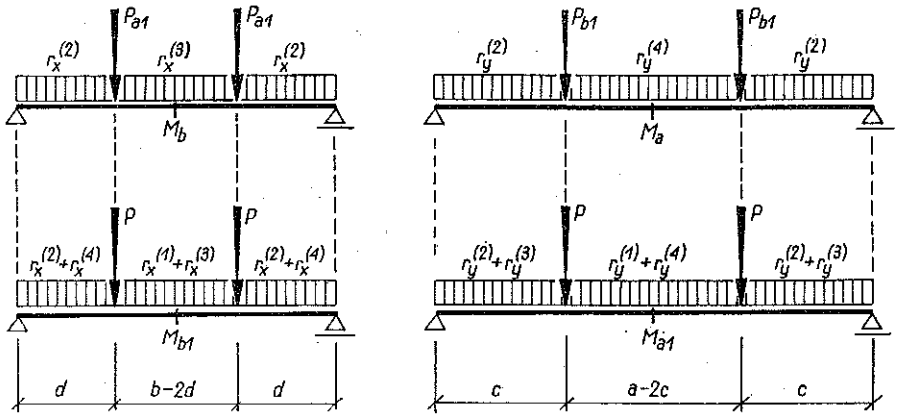
można następująco przedstawić wszystkie potrzebne do zwymiarowania płyt ustroju moduły:

$$\begin{aligned}
&m_b, && m_a = \varkappa m_b, && m'_b = m'_a = \nu m_b,\\
&m_{b1} = \xi\frac{\vartheta}{\vartheta_1}m_b, && m_{a1} = \varkappa_1\xi\frac{\vartheta}{\vartheta_1}m_b, && m'_{b1} = m'_{a1} = \nu_1\xi\frac{\vartheta}{\vartheta_1}m_b,\\
&m_{b2} = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}m_b, && m_{a2} = \varkappa_2\frac{\vartheta}{\vartheta_2}m_b, && m'_{b2} = m'_{a2} = \nu_2\frac{\vartheta}{\vartheta_2}m_b,\\
&m_{b3} = \xi\frac{\vartheta}{\vartheta_3}m_b, && m_{a3} = \varkappa_3\xi\frac{\vartheta}{\vartheta_3}m_b, && m'_{b3} = m'_{a3} = \nu_3\xi\frac{\vartheta}{\vartheta_3}m_b.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Obciążenie graniczne konstrukcji, obliczone metodą statyczną, wynosi zgodnie ze wzorem (1.4)

$$p = \frac{8m_b}{b^2}\frac{\vartheta\xi}{\delta^2}. \tag{2.3}$$

Z kolei musimy określić moce plastyczne żeber w ten sposób, aby pod obciążeniami określonymi ze wzorów (1.5) i (1.6) były w nich osiągnięte jednocześnie warunki plastyczności, określone w pracy [1] wzorem (2.5). Na rysunku 5 przedstawiono obciążenia żeber, przy których pojawiają się w nich w miejscach największych momentów zginających, przekroje uplastycznione, sygnalizujące stan wyczer-



Rys. 5

pania nośności na zginanie. Zajmiemy się bliżej dłuższym skrajnym żebrem. Zakładamy, że w stanie granicznym układu żeber jest przenoszona przez każde z nich połowa sumy sił narożnych na przecięciu żeber pośrednich. Założenie to jest ścisłe dla ustroju o rzucie kwadratowym w zakresie zarówno sprężystym jak i plastycznym, dla $\beta < 1$ jest ono przybliżone. Przy tym założeniu mamy

$$P_{b1} = (r_x^{(2)} + r_x^{(4)})\, d + (r_x^{(1)} + r_x^{(3)}) \frac{b-2d}{2} + \frac{3}{2}(R_2 + R_4) + \frac{1}{2}(R_1 + R_3),$$

$$R_r = r_y^{(2)}\, c + r_y^{(4)} \frac{a-2c}{2},$$

$$M_a = R_r \frac{a}{2} - r_y^{(2)}\, c\, \frac{a-c}{2} - r_y^{(4)} \frac{(a-2c)^2}{8} + P_{b1}\, c.$$

Po przeprowadzeniu podstawień (1.5) i (1.6) otrzymujemy wielkość momentu granicznego w żebrze skrajnym dłuższym

$$(2.4) \qquad M_a = m_b b \frac{\delta}{\beta} \left\{ 2\varkappa\beta + \nu + \vartheta \left[\frac{\xi}{\vartheta_1} \left(4\varkappa_1 \beta + 3\nu_1 + \frac{2}{\beta} \right) + \frac{1}{\vartheta_2} \left(\frac{2\varkappa_2 \beta}{\sqrt{\xi}} + \nu_2 \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\xi}{\vartheta_3} \left(4\varkappa_3 \beta \sqrt{\xi} + \nu_3 \frac{1+4\delta}{2\delta} + \frac{1-4\delta^2}{2\delta^2 \beta} \right) \right] \right\}.$$

Podobnie dla pozostałych żeber:

$$M_{a1} = \frac{m_b b}{\beta^2}\left\{\frac{\nu\beta + 1 + 2\delta}{2} + \vartheta\xi\left[\frac{(\nu_1\beta + 2)\,\delta}{\vartheta_1} + \frac{\nu_2\beta\delta/\xi + 2(1-2\delta)}{\vartheta_2} + \frac{\nu_3\beta + (1-4\delta^2)/\delta}{2\vartheta_3}\right]\right\},$$

$$M_b = m_b b\frac{\delta}{\beta}\left\{\nu\beta + 2 + \xi\frac{\vartheta}{\vartheta_1}(2\varkappa_1\beta^2 + 3\nu_1\beta + 4) + \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\left[\varkappa_2\beta^2\frac{1-4\delta^2}{2\delta^2} + \nu_2\beta\frac{1+4\delta}{2\delta} + 4\sqrt{\xi}\right] + \xi\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\left(\nu_3\beta + \frac{2}{\sqrt{\xi}}\right)\right\}, \tag{2.5}$$

$$M_{b1} = m_b b\left\{\frac{\varkappa\beta(1+2\delta) + \nu}{2} + \frac{\vartheta}{2\vartheta_2}\left[\frac{\varkappa_2\beta}{\sqrt{\xi}}(1+2\delta) + \nu_2\right] + \xi\vartheta\delta\left[\frac{2\varkappa_1\beta + \nu_1}{\vartheta_1} + \frac{2\varkappa_3\beta\sqrt{\xi} + \nu_3}{\vartheta_3}\right]\right\}.$$

Wzory (2.3) i (2.5) wyprowadzone są w założeniu, że dla danej płyty składowej współczynnik warstwowości nie przewyższa wartości współczynnika ortotropii ($0 < \nu_i < \vartheta_i$).

Wzory dla praktycznie ważnych przypadków skrajnych $\nu_i = 0$ (płyty nie posiadają zdolności przenoszenia momentów ujemnych przy narożach) i $\nu_i = \varkappa_i$ (zdolność ta jest wykorzystana w maksymalnym stopniu) łatwo otrzymać z (2.3)-(2.5).

Jeżeli chcemy zastosować ortotropię ekonomiczną dla wszystkich składowych płyt ustroju płytowo-żebrowego, to musimy rozróżnić, podobnie jak przy rozwiązaniach kinematycznych, trzy przypadki ze względu na liczbę podziału δ:
przypadek $1/(2+\beta) \leqslant \delta \leqslant 1/2$, $(1/\beta^2 \leqslant \xi \leqslant \infty)$

$$\varkappa_e = \varkappa_{e1} = \frac{\beta^2}{3-2\beta^2}, \quad \varkappa_{e2} = \frac{\beta^2}{3\xi - 2\beta^2}, \quad \varkappa_{e3} = 3\beta^2\xi - 2; \tag{2.6}$$

przypadek $1/(2+1/\beta) \leqslant \delta \leqslant 1/(2+\beta)$, $(\beta^2 \leqslant \xi \leqslant 1/\beta^2)$

$$\varkappa_e = \varkappa_{e1} = \frac{\beta^2}{3-2\beta^2}, \quad \varkappa_{e2} = \frac{\beta^2}{3\xi - 2\beta^2}, \quad \varkappa_{e3} = \frac{\beta^2}{3/\xi - 2\beta^2}; \tag{2.7}$$

przypadek $0 \leqslant \delta \leqslant 1/(2+1/\beta)$, $(0 \leqslant \xi \leqslant \beta^2)$

$$\varkappa_e = \varkappa_{e1} = \frac{\beta^2}{3-2\beta^2}, \quad \varkappa_{e2} = \frac{3\beta^2}{\xi} - 2, \quad \varkappa_{e3} = \frac{\beta^2}{3/\xi - 2\beta^2}. \tag{2.8}$$

3. Podział na cztery równe prostokąty

Wzory do wymiarowania powyższej konstrukcji według metody statycznej w teorii nośności granicznej otrzymujemy z rozwiązań rozdziału 2 przyjmując $\delta = 1/2$, $(\xi = \infty)$.

Wprowadzamy podobnie jak przy analizie kinematycznej, [1], następujące współczynniki plastyczne:

$$\varphi = \frac{M_b}{m_{b1}\, a}, \qquad \omega = \frac{M_a}{M_b}, \qquad a_1 = \frac{M_{a1}}{M_a}, \qquad a_2 = \frac{M_{b1}}{M_b}.$$

Dochodzimy w ten sposób do następujących wzorów:

$$p = \frac{32 m_{b1}}{b^2}(\varkappa_1 \beta^2 + \nu_1 \beta + 1), \qquad \varphi = \varkappa_1 \beta^2 + 1{,}5\,\nu_1 \beta + 2,$$

$$\omega = \frac{2\varkappa_1 \beta^2 + 1{,}5\,\nu_1 \beta + 1}{\beta(\varkappa_1 \beta^2 + 1{,}5\,\nu_1 \beta + 2)}, \qquad a_1 = \frac{\nu_1 \beta + 2}{2\varkappa_1 \beta^2 + 1{,}5\,\nu_1 \beta + 1}, \tag{3.1}$$

$$a_2 = \frac{(2\varkappa_1 \beta + \nu_1)\beta}{\varkappa_1 \beta^2 + 1{,}5\,\nu_1 \beta + 2}.$$

Dla $\nu_1 = 0$ wzory te przyjmują postać

$$p = \frac{32 m_{b1}}{b^2}(\varkappa_1 \beta^2 + 1), \qquad \varphi = \varkappa_1 \beta^2 + 2,$$

$$\omega = \frac{2\varkappa_1 \beta^2 + 1}{\beta(\varkappa_1 \beta^2 + 2)}, \qquad a_1 = \frac{2}{2\varkappa_1 \beta^2 + 1}, \qquad a_2 = \frac{2\varkappa_1 \beta^2}{\varkappa_1 \beta^2 + 2}. \tag{3.2}$$

Dla $\nu_1 = \varkappa_1$ otrzymujemy

$$p = \frac{32 m_{b1}}{b^2}[\varkappa_1 \beta(1+\beta) + 1], \qquad \varphi = \varkappa_1 \beta(1{,}5 + \beta) + 2,$$

$$\omega = \frac{\varkappa_1 \beta^2 (2 + 1{,}5/\beta) + 1}{\beta[\varkappa_1 \beta(1{,}5 + \beta) + 2]}, \qquad a_1 = \frac{\varkappa_1 \beta + 2}{\varkappa_1 \beta^2 (2 + 1{,}5/\beta) + 1}, \tag{3.3}$$

$$a_2 = \frac{\varkappa_1 \beta(1 + 2\beta)}{\varkappa_1 \beta(1{,}5 + \beta) + 2}.$$

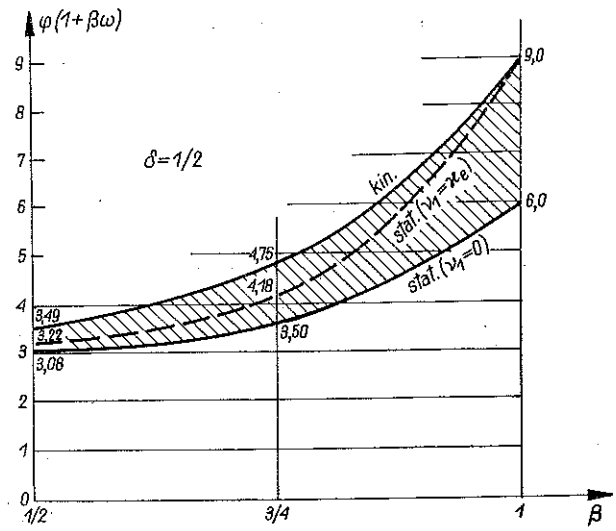
Idzie nam teraz o porównanie powyższych wyników z rozwiązaniami uzyskanymi metodą kinematyczną, [1], p. 7. Weźmiemy pod uwagę wzory (7.3) i wzory (3.2) z pracy niniejszej. Do tych ostatnich podstawimy $\varkappa_1 = \varkappa_e = \beta^2/(3 - 2\beta^2)$ i obliczymy

$$\varphi(1 + \beta\omega) = \frac{3(\beta^4 + 3 - 2\beta^2)}{3 - 2\beta^2}. \tag{3.4}$$

Wynik ten należy porównać z $(7.3)_2$. Podobnie można postąpić ze wzorami $(3.3)_2$ i $(3.3)_3$, co daje

$$\varphi(1 + \beta\omega) = \frac{3(\beta^4 + \beta^3 + 3 - 2\beta^2)}{3 - 2\beta^2}. \tag{3.5}$$

Funkcje $(7.3)_2$ z [1], (3.4) i (3.5) przedstawione są na rys. 6. Podobne porównanie przeprowadzimy dla współczynników α. Współczynnik ten według metody kinematycznej określony jest wzorem $(7.3)_1$ w [1]. W rozwiązaniu statycznym rolę tego współczynnika spełniają dwa współczynniki α_1 i α_2, które przy uwzględnieniu ortotropii ekonomicznej odpowiednio wynoszą:



Rys. 6

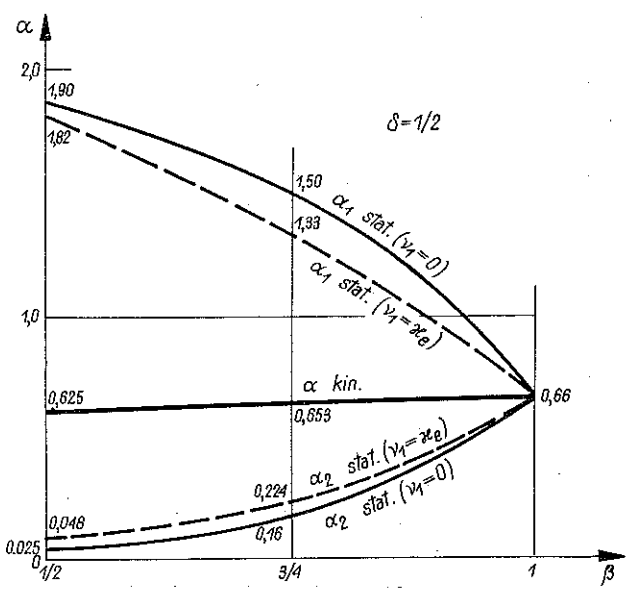
dla $\nu_1 = 0$

$$\alpha_1 = \frac{2(3-2\beta^2)}{2\beta^4+3-2\beta^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{2\beta^4}{\beta^4+6-4\beta^2}; \tag{3.6}$$

dla $\nu_1 = \varkappa_e$

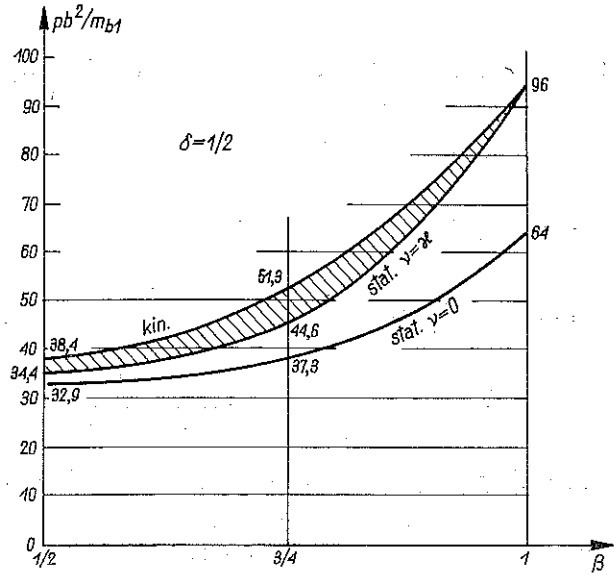
$$\alpha_1 = \frac{\beta^3+2(3-2\beta^2)}{2\beta^4+1{,}5\beta^3+3-2\beta^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\beta^3(1+2\beta)}{\beta^3(1{,}5+\beta)+2(3-2\beta^2)}. \tag{3.7}$$

Wykres tych zależności przedstawiony jest na rys. 7. Warto zauważyć, że dla ustroju o rzucie kwadratowym ($\beta = 1$) współczynniki α osiągają stałą wartość 2/3,



Rys. 7

niezależnie od metody i rodzaju warstwowości. Na rysunku 8 podano oparty na wzorach $(7.3)_3$, $(3.2)_1$ i $(3.3)_1$ wykres dolnej i górnej granicy rzeczywistego obciążenia dla omawianej konstrukcji w przypadku ekonomicznego zbrojenia płyt. Obszar,



Rys. 8

w którym musi być zawarte rzeczywiste obciążenie niszczące w przypadku maksymalnego wykorzystania struktury warstwowej (zakreskowany na rys. 8), można przedstawić w sposób następujący:

$$(3.8)\qquad p=\frac{p_k+p_{st}}{2}\pm\frac{p_k-p_{st}}{2}=\frac{16\,m_{b1}}{b^2(3-2\beta^2)}[6-\beta^2(2-\beta-\beta^2)\pm \pm\beta^2(2-\beta-\beta^2)].$$

Błąd przy oszacowaniu nośności na podstawie tylko pierwszego wyrazu wyrażenia (3.8) wynosi nie więcej niż 6,7%.

4. Podział na dziewięć równych prostokątów

Z rozwiązania w p. 2, gdy $\delta=1/3$ $(\xi=1)$, otrzymamy wzory dla konstrukcji płytowo-żebrowej, podzielonej na dziewięć prostokątów. Wprowadzimy oznaczenia

$$\varphi=M_b/m_b\,a,\qquad \omega=M_a/M_b,\qquad \alpha_1=2M_{a1}/M_a,\qquad \alpha_2=2M_{b1}/M_b.$$

Odpowiednie wzory mają postać następującą:

$$(4.1)\qquad p=\frac{72\,m_b}{b^2}(\varkappa\beta^2+\nu\beta+1),$$

$$\omega=\frac{8\varkappa\beta^2+5{,}67\,\nu\beta+3}{\beta(3\varkappa\beta^2+5{,}67\,\nu\beta+8)},\qquad \alpha_1=\frac{6{,}67\,\nu\beta+12}{8\varkappa\beta^2+5{,}67\,\nu\beta+3},$$

$$\varphi=1{,}5\,\varkappa\beta^2+2{,}84\,\nu\beta+4,\qquad \alpha_2=\frac{12\,\varkappa\beta^2+6{,}67\,\nu\beta}{3\,\varkappa\beta^2+5{,}67\,\nu\beta+8}.$$

Przy braku warstwowości ($\nu = 0$) przyjmują one postać

$$p = \frac{72 m_b}{b^2}(\varkappa\beta^2+1), \quad \varphi = 1{,}5\,\varkappa\beta^2+4,$$

$$\omega = \frac{8\varkappa\beta^2+3}{\beta(3\varkappa\beta^2+8)}, \quad \alpha_1 = \frac{12}{8\varkappa\beta^2+3}, \quad \alpha_2 = \frac{12\varkappa\beta^2}{3\varkappa\beta^2+8}. \tag{4.2}$$

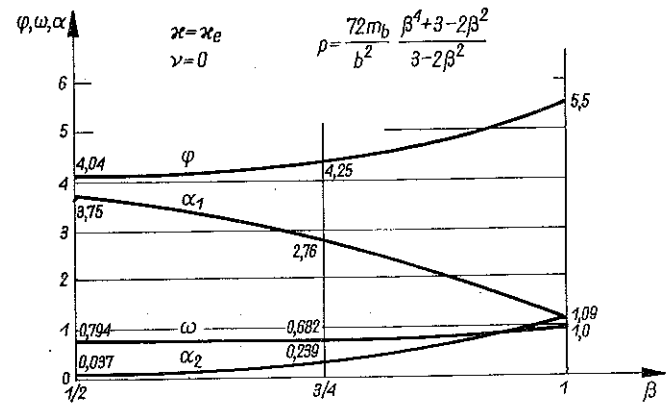
W przypadku maksymalnej warstwowości ($\nu = \varkappa$) mamy

$$p = \frac{72 m_b}{b^2}[\varkappa\beta(1+\beta)+1],$$

$$\omega = \frac{\varkappa\beta(8\beta+5{,}67)+3}{\beta[\varkappa\beta(3\beta+5{,}67)+8]}, \quad \alpha_1 = \frac{6{,}67\,\varkappa\beta+12}{\varkappa\beta(8\beta+5{,}67)+3}, \tag{4.3}$$

$$\varphi = \varkappa\beta(1{,}5\beta+2{,}84)+4, \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa\beta(12\beta+6{,}67)}{\varkappa\beta(3\beta+5{,}67)+8}.$$

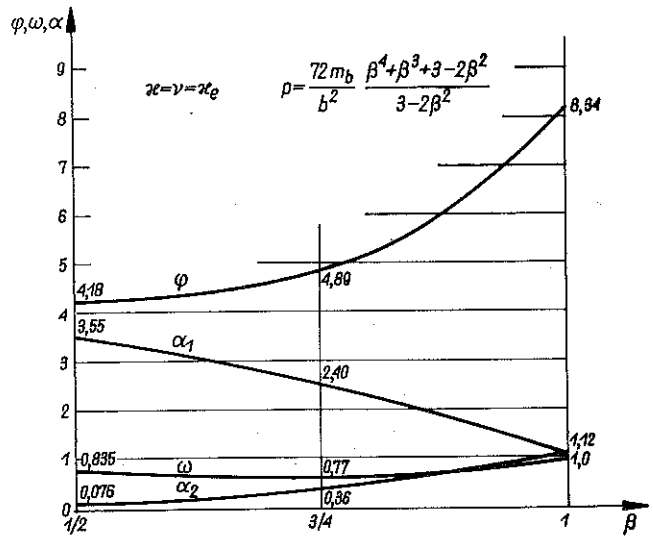
Wykresy funkcji $(4.2)_2$-$(4.2)_5$, służące do dobierania odpowiednich wartości wskaźników plastycznych żeber, przedstawione są na rys. 9 ($\varkappa = \varkappa_e = \beta^2/(3-2\beta^2)$). Podobne wykresy dotyczące rozwiązań na drodze kinematycznej pokazane są na rys. 17 i 18 w pracy [1]. Na rysunku 10 przedstawiono wykresy funkcji $(4.3)_2$-$(4.3)_5$ dla $\varkappa = \nu = \varkappa_e$. W celu graficznego przedstawienia obszaru, w którym zawiera



Rys. 9

się rzeczywiste obciążenie łamiące, należy oprzeć się na wzorach $(8.1)_5$ z [1] oraz $(4.2)_1$ i $(4.3)_1$. Wykres obrazujący wielkość obciążeń granicznych ze względu na obie metody posiada ten sam charakter co wykres na rys. 8 dotyczący ustroju przy podziale na cztery równe prostokąty. Łatwo zauważyć porównując wzory na obciążenia graniczne wyprowadzone w tym punkcie ze wzorami p. 3, że wystarczy rzędne wykresu na rys. 8 pomnożyć przez 2,25, aby otrzymać wykres dla ustroju złożonego z dziewięciu równych prostokątów. Podobnie wzór określający obszar, w którym

zawiera się rzeczywiste obciążenie łamiące, otrzymujemy korzystając ze wzoru (3.8) z uwzględnieniem tegoż czynnika.



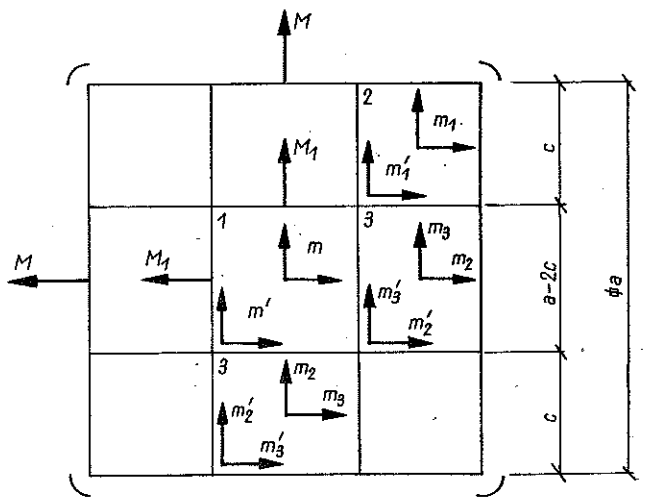
Rys. 10

Otrzymujemy

$$p=\frac{36m_b}{b^2(3-2\beta^2)}[6-\beta^2(2-\beta-\beta^2)\pm\beta^2(2-\beta-\beta^2)]. \tag{4.4}$$

5. Ustrój płytowo-żebrowy o rzucie kwadratowym

W rozdziale niniejszym wyprowadzimy wykorzystując rozwiązania p. 2 wzory do określania sił wewnętrznych w chwili osiągnięcia stanu granicznego dla konstrukcji



Rys. 11

płytowo-żebrowej, często stosowanej w praktyce inżynierskiej, mianowicie ustroju o rzucie kwadratowym. Posłużymy się metodą statyczną, która określi dolną granicę rzeczywistego obciążenia łamiącego. Ustrój przedstawiony na rys. 11 charakteryzuje się ogólnie ośmioma niezależnymi płytowymi modułami plastycznymi: $m, m_1, m_2, m_3, m', m_1', m_2'$ i m_3'. (Zakładamy od razu, że kwadratowe płyty składowe 1 i 2 posiadają budowę izotropową, tzn. $\varkappa = \varkappa_1 = 1$). Jeżeli przyjąć, że warstwowość płyt prostokątnych 3 jest izotropowa ($\nu_3 = \nu_2/\varkappa_2$) oraz że wszystkie płyty składowe przenosić powinny tę samą wielkość obciążenia granicznego ($p_1 = p_2 = p_3$), to ilość niezależnych modułów redukuje się do pięciu, co można też ująć w postaci jednego modułu podstawowego m i czterech wskaźników: $\varkappa_2$, ν, ν_1 i ν_2. Jednocześnie zachodzi związek $\varkappa_3 = 1/\varkappa_2$.

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\delta = \frac{c}{a}, \quad \xi = \frac{\delta^2}{(1-2\delta)^2}, \quad \vartheta = 2+\nu, \quad \vartheta_1 = 2+\nu_1,$$
$$\vartheta_2 = \frac{\varkappa_2}{\xi} + \frac{\nu_2}{\sqrt{\xi}} + 1, \quad \vartheta_3 = \frac{\xi}{\varkappa_2}\vartheta_2 \tag{5.1}$$

można przedstawić wszystkie moduły, potrzebne do wymiarowania płyt ustroju, w sposób następujący:

$$m_1 = \xi\frac{\vartheta}{\vartheta_1}m, \quad m_2 = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}m, \quad m_3 = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\varkappa_2 m,$$
$$m' = \nu m, \quad m_1' = \nu_1\xi\frac{\vartheta}{\vartheta_1}m, \quad m_2' = m_3' = \nu_2\frac{\vartheta}{\vartheta_2}m. \tag{5.2}$$

Obciążenie graniczne wynosi wtedy

$$p = \frac{8m}{a^2}\frac{(2+\nu)}{(1-2\delta)^2}. \tag{5.3}$$

Związane z tym obciążeniem momenty graniczne w żebrze skrajnym i pośrednim są określone wzorami:

$$M = ma\delta\vartheta\left\{1+3\xi+\frac{1}{\vartheta_2}\left[\frac{1+6\delta}{2\delta}\left(\frac{\varkappa_2}{\sqrt{\xi}}+\nu_2\right)+4\sqrt{\xi}\right]\right\},$$
$$M_1 = ma\left\{\frac{\nu+1+2\delta}{2}+\vartheta\left[\xi\delta+\frac{1+2\delta}{2\vartheta_2}\left(\frac{\varkappa_2}{\sqrt{\xi}}+\nu_2\right)+\frac{2\delta^2}{\nu_2(1-2\delta)}\right]\right\}. \tag{5.4}$$

Wszystkie podane wyżej wzory są słuszne dla $0 \leqslant \nu_i \leqslant \varkappa_i$. Jeżeli chcemy zastosować ortotropię ekonomiczną dla płyt składowych 3, to musimy rozróżnić dwa przypadki ustroju ze względu na współczynnik podziału δ:

przypadek $1/3 \leqslant \delta \leqslant 1/2$

$$\varkappa_{e2} = \frac{1}{3\xi-2}, \quad \varkappa_{e3} = 3\xi-2; \tag{5.5}$$

przypadek $0 \leqslant \delta \leqslant 1/3$

$$\varkappa_{e2} = \frac{3}{\xi} - 2, \qquad \varkappa_{e3} = \frac{1}{3/\xi - 2}. \tag{5.6}$$

Przejdziemy teraz do przypadków szczególnych.

Przypadek $\delta = 0$ ($\xi = 0$). Jest to ustrój złożony z jednej izotropowej płyty i 4 jednakowych żeber skrajnych. Charakteryzuje się on trzema wskaźnikami plastycznymi

$$\varkappa = 1, \quad \nu = \frac{m'}{m} \quad \text{i} \quad \varphi = \frac{M}{ma}.$$

Obciążenie graniczne wynosi

$$p = \frac{8m}{a^2}(2+\nu), \tag{5.7}$$

wskaźnik zaś sztywności plastycznej żeber osiąga wartość

$$\varphi = \frac{1+\nu}{2}. \tag{5.8}$$

Gdy $\nu = 0$, to

$$p = \frac{16m}{a^2}, \quad \varphi = \frac{1}{2}. \tag{5.9}$$

Gdy $\nu = \varkappa = 1$, to

$$p = \frac{24m}{a^2}, \quad \varphi = 1. \tag{5.10}$$

Porównując te ostatnie wzory ze wzorem (11.10) uzyskanym w [1] należy stwierdzić, że dla omawianego ustroju określiliśmy w ten sposób rozwiązanie pełne. Dolna granica obciążenia łamiącego (statyczna) i górna (kinematyczna) są identyczne, ponadto takie same są w obu przypadkach wskaźniki φ.

Przypadek $\delta = 1/2$ ($\xi = \infty$). Jest to konstrukcja złożona z czterech takich samych płyt składowych, czterech żeber skrajnych i dwóch żeber pośrednich. Wskaźniki plastyczne oznaczamy

$$\varkappa_1 = 1, \quad \nu_1 = m_1'/m_1, \quad \varphi = M/ma, \quad \alpha = M_1/M.$$

Otrzymujemy wzory

$$p = \frac{32m_1}{a^2}(2+\nu_1), \quad \varphi = 3+1{,}5\,\nu_1, \quad \alpha = \frac{2}{3}. \tag{5.11}$$

Przy braku warstwowości ($\nu_1 = 0$) mamy

$$p = \frac{64m_1}{a^2}, \quad \varphi = 3, \quad \alpha = \frac{2}{3}. \tag{5.12}$$

Dla maksymalnej warstwowości w obszarach naroży płyt ($\nu_1 = 1$) znajdziemy

$$p = \frac{96m_1}{a^2}, \quad \varphi = 4{,}5, \quad \alpha = \frac{2}{3}. \tag{5.13}$$

Wzory (5.13) są identyczne ze wzorami (11.8) i (11.9) w pracy [1], co pozwala rozwiązanie problemu nośności granicznej uznać w tym przypadku za kompletne.

Przypadek $\delta = 1/3$ ($\xi = 1$). Jest to przypadek ustroju przy podziale na dziewięć równych kwadratów, rozwiązany kinematycznie w p. 12 w [1]. Oznaczamy

$$\varkappa_i = 1, \quad \nu = \nu_1 = \nu_2 = \frac{m'}{m}, \quad \varphi = \frac{M}{ma}, \quad \alpha = \frac{2M_1}{M}.$$

Wzory przedstawiają się teraz następująco:

$$p = \frac{72m}{a^2}(2+\nu), \quad \varphi = 5{,}5+2{,}84\,\nu, \quad \alpha = \frac{6{,}67\,\nu+12}{5{,}67\,\nu+11}. \tag{5.14}$$

Dla $\nu = 0$ mamy

$$p = \frac{144m}{a^2}, \quad \varphi = 5{,}5, \quad \alpha = 1{,}09, \tag{5.15}$$

a dla $\nu = 1$

$$p = \frac{216m}{a^2}, \quad \varphi = 8{,}34, \quad \alpha = 1{,}12. \tag{5.16}$$

I w tym przypadku zachodzi zgodność wzorów (5.16) z rozwiązaniem, uzyskanym na drodze kinematycznej, [1], wzór $(12.1)_4$. Łatwo się przekonać, że φ i α z (5.16) spełniają dokładnie równanie hiperboli (12.8) z [1]. Metoda statyczna pozwoliła nam w tym przypadku sprecyzować ściśle wartości φ i α, gdy tymczasem metoda kinematyczna umożliwiła jedynie określenie zakresu zmienności tych wielkości. Te ściśle określone wartości wskaźników plastycznych reprezentuje na rys. 29, praca [1], punkt oznaczony na łuku AB. Zagadnienie nośności granicznej ustroju złożonego z 2^2, 3^2 i 4^2 równych kwadratów omawiano w pracach [5] i [6]. Nie przyjmowano tam jednak, że obciążenie przenosi się na żebra za pośrednictwem płyt, lecz że układ krzyżujących się belek jest bezpośrednio obciążony w węzłach jednakowymi siłami skupionymi. Ponadto zakładano, że żebra skrajne są idealnie sztywne, tzn. spełniają jedynie rolę stałych podparć przegubowych.

6. Podział na n równych prostokątów

Konstrukcja ta przedstawiona w pracy [1] na rys. 32 została tam opisana w p. 13. Nie narzucamy tutaj z góry warunku ekonomiczności na współczynnik ortotropii $\varkappa = m_b/m_a$. Zakładamy ponadto, że struktura płyt składowych jest warstwowa, a więc że

$$\nu = \frac{m'_a}{m_a}, \quad \lambda = \frac{m'_b}{m_a}, \quad \left(\mu = \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{m'_b}{m_b}\right).$$

Do obliczeń przyjmujemy $\nu = \lambda$. Statycznie możliwy rozkład momentów wewnętrznych określony jest za pomocą następujących funkcji:

$$m_x = m_a\left[1 - \frac{4n^2}{a^2}\left(x - \frac{a}{2n}\right)^2\right], \qquad m_y = \varkappa m_a\left[1 - \frac{4}{b^2}\left(y - \frac{b}{2}\right)^2\right],$$

$$m_{xy} = -\frac{4n\nu}{ab} m_a \left(x - \frac{a}{2n}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right).$$

Wykorzystanie równania równowagi (1.1) pozwala na obliczenie obciążenia łamiącego dla omawianej «panwi»:

$$p = \frac{8m_b}{b^2}\left(\frac{n^2\beta + n\beta\nu}{\varkappa} + 1\right). \tag{6.1}$$

Pozostaje określić wskaźniki plastyczne podane w [1], wzór (13.1). W tym celu ustalamy obciążenia, przenoszone z płyt na żebra stosownie do wzorów (1.5) i (1.6). Otrzymujemy obciążenia liniowe

$$r_x = \frac{4m_a}{b}(n\beta + \nu), \qquad r_y = \frac{4m_a}{b}(\varkappa + n\beta\nu)$$

oraz siły unoszące w narożach $R = -2\nu\, m_a$. Moment graniczny w żebrach pośrednich wynosi

$$M_{b1} = \frac{m_b b}{\varkappa}(n\beta + \nu).$$

Moment graniczny w żebrach skrajnych wynosi

dla n parzystego, (1.9),

$$M_a = \frac{r_y a^2}{8} + (r_x b + 2R)\cdot\frac{an}{8} = \frac{m_b b}{2\beta^2}\left(\frac{n^2\beta^2 + n\beta\nu}{\varkappa} + 1\right);$$

dla n nieparzystego, (1.10),

$$M_a = \frac{r_y a^2}{8} + (r_x b + 2R)\cdot\frac{a}{8}\,\frac{(n^2-1)}{n} = \frac{m_b b}{2\beta^2}\left[\frac{(n^2-1)\beta^2 + n\beta\nu}{\varkappa} + 1\right].$$

Zgodnie z oznaczeniem (13.1) otrzymujemy

$$\varphi = \frac{(n\beta + \nu)(n-1)\beta}{\varkappa} \tag{6.2}$$

oraz

$$\omega = \frac{n^2\beta^2 + n\beta\nu + \varkappa}{(n\beta+\nu)(n-1)\beta^2} \quad \text{dla } n \text{ parzystego,}$$

$$\omega = \frac{(n^2-1)\beta^2 + n\beta\nu + \varkappa}{(n\beta+\nu)(n-1)\beta^2} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystego.} \tag{6.3}$$

Rozważymy teraz praktycznie ważny przypadek ortotropii ekonomicznej. Dla płyty o strukturze warstwowej zgodnie z pracą [4] wskaźnik ortotropii ekonomicznej wynosi przy naszych oznaczeniach

$$\varkappa_e = \frac{m_b}{m_a} = \varrho \frac{1}{3n^2\beta^2 - 2},$$

gdzie

$$\varrho = \frac{1+\nu}{1+\mu} = \frac{1+\nu}{1+\nu/\varkappa_e}.$$

Te zależności doprowadzają do wzoru

$$\varkappa_e = \frac{1+\nu}{3n^2\beta^2 - 2} - \nu. \tag{6.4}$$

Znaleziona funkcja może być podstawiona do (6.1)-(6.3) na miejsce $\varkappa$.

Porównamy otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi metodą kinematyczną. Ograniczymy się przy tym do uwzględnienia warstwowej struktury płyt jedynie w pobliżu ich naroży. Oznacza to, że liczymy na podwyższenie nośności ustroju przez zaprojektowanie warstwowej płyty tylko w takim zakresie, na jaki pozwala uwzględnienie warunku plastyczności dla ujemnych momentów głównych w narożach bez zmiany warunków podparcia płyty składowej (brak zamocowania krawędzi). Wtedy możemy w przybliżeniu pominąć wpływ ϱ na wskaźnik ortotropii ekonomicznej i przyjąć

$$\varkappa_e = \frac{1}{3n^2\beta^2 - 2}. \tag{6.5}$$

Wprowadzenie (6.5) na miejsce $\varkappa$ do wzorów (6.1)-(6.3) daje

$$\begin{aligned} p &= \frac{8m_b}{b^2}[n\beta(n\beta+\nu)(3n^2\beta^2-2)+1], \\ \varphi &= (n\beta+\nu)(n-1)(3n^2\beta^2-2)\beta, \\ \omega &= \frac{n\beta(n\beta+\nu)(3n^2\beta^2-2)+1}{\beta\varphi} \quad \text{dla } n \text{ parzystego}, \\ \omega &= \frac{[(n^2-1)\beta+n\nu](3n^2\beta^2-2)\beta+1}{\beta\varphi} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystego}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Przy braku warstwowej struktury płyt ($\nu = 0$) mamy

$$\begin{aligned} p &= \frac{8m_b}{b^2}[n^2\beta^2(3n^2\beta^2-2)+1], \quad \varphi = n(n-1)(3n^2\beta^2-2)\beta^2, \\ \omega &= \frac{n^2\beta^2(3n^2\beta^2-2)+1}{\beta\varphi} \quad \text{dla } n \text{ parzystego}, \\ \omega &= \frac{(n^2-1)(3n^2\beta^2-2)\beta^2+1}{\beta\varphi} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystego}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Przy istnieniu struktury warstwowej maksymalnie przy narożach płyt wykorzystanej ($\nu = \varkappa_e$) otrzymujemy wzory:

$$p = \frac{8m_b}{b^2}\left[n^2\beta^2(3n^2\beta^2-2)+n\beta+1\right],$$

$$\varphi = \left[n\beta(3n^2\beta^2-2)+1\right](n-1)\beta,$$

(6.8)
$$\omega = \frac{n^2\beta^2(3n^2\beta^2-2)+n\beta+1}{\beta\varphi} \qquad \text{dla } n \text{ parzystego},$$

$$\omega = \frac{(n^2-1)(3n^2\beta^2-2)\beta^2+n\beta+1}{\beta\varphi} \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego}.$$

Podamy teraz wzory dla przypadku szczególnego konstrukcji panwiowej, mianowicie dla płyt składowych o rzucie kwadratowym ($n\beta = 1$). W wyniku tego przyjmiemy dla potrzeb inżynierskich $\varkappa_e = 1$. Uwzględniając wzory (6.1)-(6.3) otrzymujemy

$$p = \frac{8m}{b^2}(2+\nu), \qquad \varphi = (1+\nu)\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

(6.9)
$$\omega = \frac{(2+\nu)n^2}{(1+\nu)(n-1)} \qquad \text{dla } n \text{ parzystego},$$

$$\omega = \frac{(2+\nu)n^2-1}{(1+\nu)(n-1)} \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego}.$$

Dla $\nu = 0$ znajdziemy

$$p = \frac{16m}{b^2}, \qquad \varphi = 1-\frac{1}{n},$$

(6.10)
$$\omega = \frac{2n^2}{n-1} \qquad \text{dla } n \text{ parzystego},$$

$$\omega = \frac{2n^2-1}{n-1} \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego}.$$

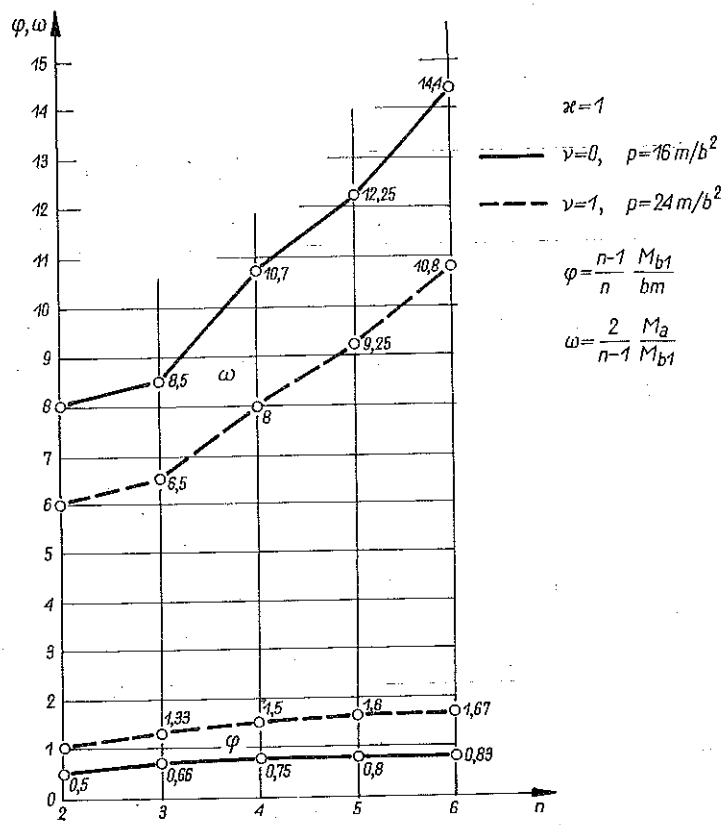
Dla $\nu = 1$

$$p = \frac{24m}{b^2}, \qquad \varphi = 2-\frac{2}{n},$$

(6.11)
$$\omega = \frac{3n^2}{2(n-1)} \qquad \text{dla } n \text{ parzystego},$$

$$\omega = \frac{3n^2-1}{2(n-1)} \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego}.$$

Wykres zależności (6.10) i (6.11) przedstawiono na rys. 12. Na rys. 34 w pracy [1] pokazano wykresy wskaźników plastycznych φ i ω dla metody kinematycznej. Widać z tych wykresów, że wskaźniki te dla metody kinematycznej i dla metody



Rys. 12

statycznej przy uwzględnieniu istnienia warstwowej struktury płyt przy narożach ($\nu = 1$) niewiele się różnią. Fakt ten może być podstawą do opracowania jednolitych wytycznych dobierania wielkości φ i ω przy projektowaniu ustroju bez potrzeby przeprowadzania dwukrotnej analizy.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. KWIECIŃSKI, *Plastyczne wyczerpanie nośności ustrojów płytowo–żebrowych. Rozwiązania kinematyczne*, Rozpr. Inżyn., 2, **11** (1963).

[2] A. SAWCZUK, M. KWIECIŃSKI, *Nośność graniczna ustrojów płytowo–żebrowych*, Arch. Inżyn. Lądow., 3, **3** (1957).

[3] R. H. WOOD, *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*, Thames and Hudson, London 1961.

[4] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Théorie de la capacité portante des constructions non-homogènes et orthotropes*, Annales de l'Institut Techn. du Bat. et des Trav. Publ., **149** (Mai 1960).

[5] J. HEYMAN, *The plastic design of grillages*, Engineering, **176** (1953).

[6] P. G. HODGE, Jr., *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw–Hill Book Company, New York–Toronto 1959.

Р е з ю м е

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ИСЧЕРПАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИНЧАТО-РЕБЕРНЫХ СИСТЕМ. Ч. 2. СТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Настоящая работа является второй частью статьи, первая часть которой была опубликована в предыдущем номере этого же квартальника. Там приводится анализ исчерпания несущей способности реберных систем подверженных изгибу, ввиду кинематически возможного поля приращения деформации, и определяется верхний предел действительной разрушающей нагрузки для десяти типов конструкций подкрепленных ребрами.

В настоящей же работе определяется нижний предел разрушающей нагрузки для таких же самых систем, принимая во внимание статически возможное поле внутренних сил и вводя так называемое «прямоугольное» условие пластичности. Учитывается пластическая ортотропия и слоистость структуры пластинок.

Решение, полученное с помощью статического метода, сравнивается с результатами, полученными кинематическим методом. С инженерной точки зрения результаты обоих методов в небольшой степени разнятся между собой и этот факт может быть основанием для разработки критериев, обеспечивающих одинаковую прочность во всех составных элементах пластинчато-реберной системы.

S u m m a r y

PLASTIC EXHAUSTION OF THE LOAD-CARRYING CAPACITY OF RIBBED PLATE STRUCTURES. PART 2. STATIC SOLUTIONS

This is the second part of a work of which the first part appeared in *Rozprawy Inżynierskie* No 2, **11** (1963), where the problem of exhaustion of the load carrying capacity of a bent ribbed plate structures was analysed for a kinematically admissible field of strain increments. The upper bound of the real collapse load was found for ten types of ribbed structures.

In the present paper the lower bound of the collapse load is found, bearing in mind the statically admissible field of internal forces and introducing the so–called rectangular yield condition. Plastic orthotropy and the layered character of the structure is taken into consideration.

Solutions obtained by the static method are compared with those obtained by the kinematic approach. From the engineering view point the results of both methods differ but little. This fact may furnish a basis for the establishment of uniform criteria assuring uniform strength in all the elements of a ribbed plate structure.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 marca 1962 r.