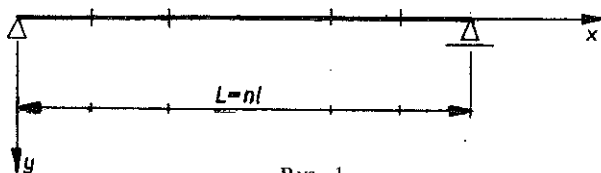


DRGANIA BELEK SKŁADANYCH Z NIELINIOWYMI EFEKTAMI  
LUZÓW W ZŁĄCZACH

WOJCIECH KRZYSZTOF NOWACKI i STANISŁAW WOROZYŁ (WARSZAWA)

1. Wstęp

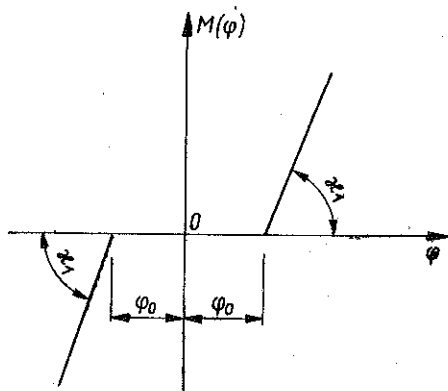
W pracy zostało rozważone zagadnienie drgań wymuszonych belki składanej w ten sposób, że w złączach występują siły sprężyste, zmieniające się nieliniowo. Zagadnienie to zostało rozważone metodą przybliżoną przy wykorzystaniu metody Rayleigha. Rozważono dwa przypadki: przypadek postaci drgań określonej nieliniowo oraz postaci drgań określonej liniowo. Podano równania, które spełniają współczynniki dynamiczne dla obu przypadków.



Rys. 1

Weźmy pod uwagę belkę składającą się z  $n$  elementów o stałej sztywności. Długość każdego elementu wynosi  $l$  (rys. 1). Zależność momentu zginającego w połączeniach elementów belki od kąta jest przedstawiona na rys. 2. Charakterystyka taka, [1] i [2], odpowiada połączeniu elementów belki na sworznie lub śruby, jeśli połączeniom tym towarzyszy pewien luz  $\varphi_0$ .

Tak postawione zagadnienie dla belki o nieskończonej ilości stopni swobody prowadzi do nieliniowych warunków zgodności w punktach połączeń elementów, [3], i ściśle jego rozwiązanie nie nadawałoby się do celów praktycznych. Dlatego też w pracy tej, jak już nadmieniliśmy, zastosujemy metodę przybliżoną Rayleigha, [4], przy czym rozważymy dwa przypadki sprecyzowane we wstępie.

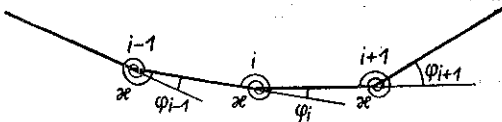


Rys. 2

Układ o nieskończonej ilości stopni swobody (układ rzeczywisty) zastępujemy układem o skończonej ilości stopni swobody z odpowiednio określonymi zastępczymi współczynnikami sprężystości. W przypadku pierwszym, gdy mamy nieliniową postać drgań, uwzględniamy fakt, że przyjęta postać drgań zmienia się wraz z amplitudą. W przypadku drugim, kiedy rozpatrujemy postać drgań określoną liniowo, założyliśmy, że jest ona stała i nie zależy od amplitudy. Ustalenie postaci drgań pozwoliło sprowadzić rozwiązanie układu zastępczego o skończonej ilości stopni swobody do rozwiązania zagadnienia drgań układu o jednym stopniu swobody. W efekcie dla obu przypadków otrzymamy nieliniowe równania różniczkowe ruchu lub nieliniowe równania określające współczynnik dynamiczny belki. Dokładność przytoczonej metody rośnie wraz ze wzrostem ilości elementów belki, na które jest ona podzielona.

### 2. Przypadek nieliniowej zależności postaci drgań od amplitudy

Jak już nadmieniliśmy, układ rzeczywisty sprowadzamy do układu o skończonej ilości stopni swobody. W tym celu zakładamy, że elementy belki są doskonale sztywne, a zjawiska sprężyste występują w punktach połączeń elementów. Zastępcze współczynniki sprężystości belki obliczymy z przyrównania energii potencjalnej układu rzeczywistego do energii potencjalnej układu zastępczego. Układ zastępczy przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3

Energia potencjalna układu zastępczego wynosi

$$(2.1) \quad V_z = \frac{1}{2} \kappa \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2,$$

gdzie  $\kappa$  oznacza współczynnik sprężystości układu zastępczego. Energia potencjalna układu rzeczywistego wynosi

$$(2.2) \quad V = \frac{1}{2} EI \int_0^{nl} [y''(x)]^2 dx,$$

gdzie  $y(x)$  jest funkcją ugięcia statycznego belki, [5], od obciążenia stałego. Funkcja ta wyraża się wzorem

$$(2.3) \quad y(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3 x).$$

Dla linii ugięcia określonej równaniem (2.3) wielkość amplitud w punktach

$$x_i = i \frac{L}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

jest odpowiednio równa

$$(2.4) \quad y_i = \frac{qL^4}{24EI} \left[ \left( \frac{i}{n} \right)^4 - 2 \left( \frac{i}{n} \right)^3 + \frac{i}{n} \right] = \frac{qL^4}{24EI} Y_i,$$

gdzie przez  $Y_i$  oznaczyliśmy wyrażenie w nawiasie kwadratowym występującym w powyższym wzorze. Natomiast kąty względne  $\varphi_i$  określone są za pomocą wzoru

$$(2.5) \quad \varphi_i = \frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{l} = \frac{ql^3}{24EI} (12in - 12i^2 - 2) = \frac{ql^3}{24EI} \Phi_i,$$

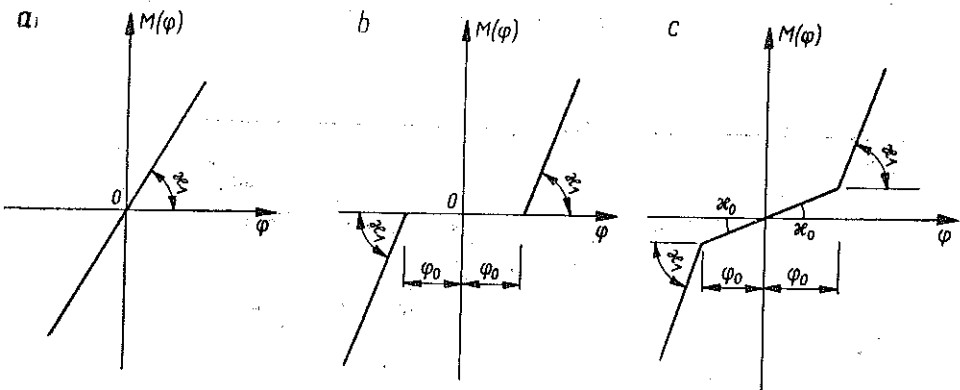
$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

gdzie w podobny sposób określiliśmy wyrażenie  $\Phi_i$ .

Porównując energię potencjalną obu układów otrzymamy

$$(2.6) \quad \kappa_1 = \frac{4,8 EI}{l} \frac{n^5}{\sum_{i=1}^n \Phi_i^2}$$

Charakterystykę odpowiadającą sztywności  $\kappa_1$  przedstawiamy na rys. 4a. Ponieważ w rzeczywistości układ posiada luzy w połączeniach elementów, to charakterystyka po wprowadzeniu luzu  $\varphi_0$  jest typu przedstawionego na rys. 4b.



Rys. 4

Przykładem takich konstrukcji są mosty składające się z gotowych elementów stalowych, połączonych ze sobą za pomocą śrub lub sworzni, wszelkiego typu konstrukcje dźwigowe i inne.

Stawiając zagadnienie bardziej ogólnie zakładamy, że występują pewne zjawiska sprężyste na odcinku luzu, stąd charakterystyka przyjęta do dalszych rozważań będzie mieć postać przedstawioną na rys. 4c. Układ natomiast podamy na rys. 5.

Napiżemy równania ruchu układu złożonego z  $n$  elementów wykorzystując równania Lagrange'a.

Energia potencjalna

$$(2.7) \quad V = \sum_{i=1}^{n-1} 1/2 \cdot [\alpha_0 \varphi_i^2 + (\kappa_1 - \alpha_0) (\varphi_i - \varphi_0)^2 H(\varphi_i - \varphi_0)],$$

gdzie  $H(\varphi_i - \varphi_0)$  jest funkcją jednostkową Heaviside'a.

Energia kinetyczna

$$(2.8) \quad T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\dot{y}_{i-1} + \dot{y}_i}{2} \right)^2 + \frac{I_{sc}}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\dot{y}_{i-1} - \dot{y}_i}{l} \right)^2,$$

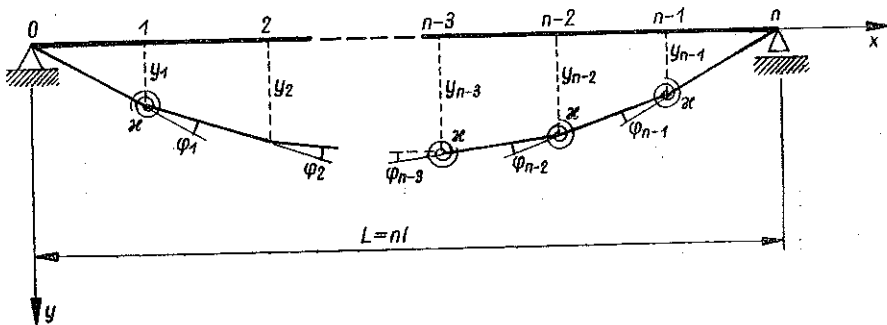
gdzie  $m$  oznacza masę elementu,  $I_{sc}$  moment bezwładności elementu względem jego środka ciężkości,

$$I_{sc} = \frac{1}{12} ml^2.$$

Stąd

$$(2.9) \quad T = \frac{m}{2} \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\dot{y}_{i-1} + \dot{y}_i)^2 + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (\dot{y}_{i-1} - \dot{y}_i)^2 \right].$$

Jeżeli postać drgań odpowiada pierwszej częstości drgań własnych, to we wzorze (2.9) możemy pominąć drugą sumę ze względu na minimalną różnicę prędkości  $\dot{y}_{i-1} - \dot{y}_i$  dwóch sąsiednich połączeń  $i-1$  oraz  $i$ . Wynikający stąd błąd jest rzędu  $\approx 1\%$ , co stwierdziliśmy na przykładzie liczbowym.



Rys. 5

Określmy teraz postać drgań. Jeżeli belka jest obciążona w sposób ciągły obciążeniem stałym, to pierwszym połączeniem, w którym kąt nachylenia sąsiednich elementów belki osiągnie kąt  $\varphi_0$ , będzie połączenie o numerze  $(n \mp \beta)/2$ , gdzie

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste;} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Innymi słowy pierwszym takim połączeniem będzie połączenie środkowe lub dwa połączenia najbliższe środkowi belki. Można to prosto wykazać na podstawie statycznej linii ugięcia [wzory (2.3) i (2.5)].

Ze wzrostem ugięcia belki kąty względne sąsiednich elementów belki osiągają wartość  $\varphi_0$  w połączeniach symetrycznych względem połączenia środkowego lub

środku belki. Po przekroczeniu kątów  $\varphi_0$  sztywność połączeń zmienia się skokowo (rys. 4c), w wyniku czego przyjęta postać drgań [wzory (2.3) i (2.4)] na odcinku zawierającym te połączenia będzie uwarunkowana większą sztywnością  $EI$  (odpowiadającą  $\kappa_1$ ).

Wynika stąd, że postać drgań zmienia się wraz z ugięciem. Zakładamy, że jest ona stała w przedziałach czasu między chwilami odpowiadającymi przejściu połączenia  $k$ -tego i  $(k-1)$ -szego przez punkt załamania charakterystyki  $\varphi_0$ .

Dla  $\varphi_i \leq \varphi_0$  amplitudy określone są wzorami

$$(2.10) \quad y_{i1}^{(1)} = 0,2 \frac{q l^3}{\kappa_0} n^9 \frac{Y_i}{\sum_{m=1}^{n-1} \Phi_m^2},$$

który otrzymamy ze statycznej linii ugięcia (2.4), jeśli  $EI$  określimy przez  $\kappa_0$  na podstawie wzoru (2.6).

Jeżeli w  $k$ -tym połączeniu (gdzie  $k = (n - \beta)/2 - (j - 1)$ ) kąt pomiędzy sąsiednimi elementami osiągnie wartość  $\varphi_0$ , to odpowiednia  $j$ -ta postać drgań określona jest wzorem

$$(2.11) \quad y_{ij}^{(1)} = \frac{\varphi_0 l Y_i}{2Y_k - Y_{k-1} - Y_{k+1}},$$

dla  $i \leq (n - \beta)/2 - (j - 1)$  oraz dla  $i \geq (n + \beta)/2 + (j - 1)$ . Natomiast dla

$$(n - \beta)/2 - (j - 1) \leq i \leq (n + \beta)/2 + (j - 1)$$

$j$ -ta postać wynosi

$$(2.12) \quad y_{ij}^{(2)} = y_{k,j}^{(1)} + \frac{q [2(j-1) + \beta]^4 l^4}{24 EI} \left[ \left( \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \right)^4 - 2 \left( \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \right)^3 + \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \right] + \frac{\varphi_0 l [2(j-1) + \beta]^2}{2} \left[ \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} - \frac{(i-k)^2}{[2(j-1) + \beta]^2} \right],$$

gdzie

$$q = \frac{\varphi_0 l \kappa_0 \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k^2}{0,2 l^3 n^9 (2Y_k - Y_{k-1} - Y_{k+1})}.$$

Ostatecznie można napisać, że  $j$ -ta postać drgań wyrazi się wzorami dla

$$i \leq (n - \beta)/2 - (j - 1) \text{ oraz } i \geq (n + \beta)/2 + (j - 1)$$

$$(2.13) \quad y_{ij}^{(1)} = \frac{\varphi_0 l Y_i}{2Y_{\frac{n-\beta}{2} - (j-1)} - Y_{\frac{n-\beta}{2} - j} - Y_{\frac{n-\beta}{2} - (j-2)}},$$

natomiast dla  $(n - \beta)/2 - (j - 1) \leq i \leq (n + \beta)/2 + (j - 1)$

$$(2.14) \quad y_{ij}^{(2)} = \frac{\varphi_0 l Y_{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)}}{2 Y_{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} - Y_{\frac{n-\beta}{2}-j} - Y_{\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}} + \frac{\varphi_0 l [2(j-1) + \beta]^2}{2} \times \\ \times \left[ \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \frac{(i-k)^2}{[2(j-1) + \beta]^2} \right] + \frac{q [2(j-1) + \beta]^4 l^4}{24 EI} \left[ \left( \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \right)^4 - \right. \\ \left. - 2 \left( \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \right)^3 + \frac{i-k}{2(j-1) + \beta} \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots, (n + \beta)/2 + 1.$$

Ze względu na założone postacie drgań i przyjęte założenia równanie drgań układu będzie odcinkami liniowe. Jeżeli zgodnie z metodą Rayleigha wprowadzimy jedną współzrzedną niezależną określającą ruch układu jako

$$(2.15) \quad a(t) = \frac{y_{\frac{n-\beta}{2}}(t)}{y_{\frac{n-\beta}{2},st}}$$

gdzie  $y_{\frac{n-\beta}{2},st}$  jest zgięciem statycznym belki składanej zależnym od obciążenia statycznego stałego.

Energię kinetyczną i potencjalną, odpowiadającą każdej kolejnej postaci drgań, można określić w sposób następujący:

Energia potencjalna wynosi

$$V_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_0 \varphi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (\kappa_1 - \kappa_0) (\varphi_i - \varphi_0)^2,$$

gdzie  $\sum_p^q = 0$  dla  $q < p$ .

Podstawiając (2.5) do (2.7) otrzymamy

$$(2.16) \quad V_j = \frac{1}{2} \frac{\kappa_0}{l^2} \sum_{i=1}^{n-1} (2y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i+1,j})^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{l^2} \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (2y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i+1,j} - \varphi_0 l)^2, \quad j = 1, 2, \dots, (n - \beta)/2 + 1$$

lub uwzględniając (2.15)

$$(2.17) \quad V_j = \frac{1}{2} \frac{\kappa_0}{l^2} y_{\frac{n-\beta}{2}}^2 a^2(t) \left[ 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} (2a_{i,j}^{(1)} - a_{i-1,j}^{(1)} - a_{i+1,j}^{(1)})^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (2a_{i,j}^{(2)} - a_{i-1,j}^{(2)} - a_{i+1,j}^{(2)})^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{l^2} \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} [y_{n-\beta} \frac{\alpha(t)}{2} (2a_{i,j}^{(2)} - a_{i-1,j}^{(2)} - a_{i+1,j}^{(2)}) - \varphi_0 l]^2,$$

gdzie również  $\sum_p^q = 0$  dla  $q < p$  oraz

$$(2.18) \quad a_{rj}^{(1)} = \frac{y_{rj}^{(1)}}{y_{n-\beta}^{(1)} \frac{1}{2}}, \quad a_{rj}^{(2)} = \frac{y_{rj}^{(2)}}{y_{n-\beta}^{(2)} \frac{1}{2}}$$

Energia kinetyczna

$$(2.19) \quad T_j = \frac{1}{2} m [y_{n-\beta} \frac{\dot{\alpha}(t)}{2}]^2 B_j, \quad j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1,$$

gdzie

$$(2.20) \quad B_j = \frac{1}{4} \left[ 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} (a_{i-1,j}^{(1)} + a_{i,j}^{(1)})^2 + \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (a_{i-1,j}^{(2)} + a_{i,j}^{(2)})^2 \right] + \\ + \frac{1}{12} \left[ 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} (a_{i-1,j}^{(1)} - a_{i,j}^{(1)})^2 + \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (a_{i-1,j}^{(2)} - a_{i,j}^{(2)})^2 \right],$$

przy czym  $\sum_p^q = 0$  dla  $q < p$ .

Wartości  $a_{rj}^{(1)}$  i  $a_{rj}^{(2)}$  są podane w (2.18).

Korzystając z równania Lagrange'a

$$(2.21) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T_j}{\partial (y_{n-\beta} \frac{\alpha(t)}{2})'} \right] + \frac{\partial V_j}{\partial (y_{n-\beta} \frac{\alpha(t)}{2})} = P_{jzr}(t), \\ j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1$$

i ze wzorów (2.17) oraz (2.19), możemy napisać równanie różniczkowe na współczynnik dynamiczny belki

$$(2.22) \quad \ddot{\alpha}(t) + \alpha(t) \frac{A_j}{mB_j} = \frac{D_j}{mB_j y_{n-\beta} \frac{1}{2}} + \frac{P_{jzr}(t)}{mB_j y_{n-\beta} \frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, (n-\beta)/2+1,$$

gdzie

$$(2.23) \quad A_j = \frac{\kappa_1}{l} \left\{ \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \left[ 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} (2a_{i,j}^{(1)} - a_{i-1,j}^{(1)} - a_{i+1,j}^{(1)})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (2a_{i,j}^{(2)} - a_{i-1,j}^{(2)} - a_{i+1,j}^{(2)})^2 \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(1 + \frac{\kappa_0}{\kappa_1}\right) \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} (2a_{i,j}^{(2)} - a_{i-1,j}^{(2)} - a_{i+1,j}^{(2)})^2, \\
 (2.24) \quad D_j &= \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{l^2} \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} \varphi_0 l (2a_{i,j}^{(2)} - a_{i-1,j}^{(2)} - a_{i+1,j}^{(2)}),
 \end{aligned}$$

przy czym  $\sum_p^q = 0$  dla  $p > q$ .

Wartość siły wymuszającej w przekroju  $\frac{n-\beta}{2}, j$  określimy z zasady prac przygotowanych.

Praca układu na wszystkich współrzędnych równa się

$$(2.25) \quad L_I = P(t) \left[ 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} \delta y_{ij}^{(1)} + \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} \delta y_{ij}^{(2)} \right],$$

gdzie  $P(t) = p(t)l$  oraz  $p(t)$  oznacza obciążenie jednostkowe belki.

Praca układu na współrzędnej  $y_{\frac{n-\beta}{2},j}^{(2)}$  równa się

$$(2.26) \quad L_{II} = P_{jzr}(t) \delta y_{\frac{n-\beta}{2},j}^{(2)}.$$

Ponieważ jednak  $\delta y_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} \delta y_{\frac{n-\beta}{2},j}^{(1)}$  oraz  $\delta y_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} \delta y_{\frac{n-\beta}{2},j}^{(2)}$ , to z warunku  $L_I = L_{II}$  wynika

$$(2.27) \quad P_{jzr}(t) = p(t) C_j, \quad j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1,$$

gdzie

$$(2.28) \quad C_j = 2l \sum_{i=1}^{\frac{n-\beta}{2}-(j-1)} a_{ij}^{(1)} + l \sum_{i=\frac{n-\beta}{2}-(j-2)}^{\frac{n+\beta}{2}+(j-2)} a_{ij}^{(2)},$$

przy czym  $\sum_p^q = 0$  dla  $q < p$ . Stąd równanie (2.22) na współczynnik dynamiczny można napisać w postaci

$$(2.29) \quad \ddot{\alpha}(t) + \frac{A_j}{mB_j} \alpha(t) = \frac{D_j}{mB_j y_{\frac{n-\beta}{2},st}} + \frac{C_j}{mB_j y_{\frac{n-\beta}{2},st}} p(t),$$

$$j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1.$$



Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{A_j}{B_j} = k_j, \quad \frac{A_j}{mB_j} = \omega_j^2, \quad \frac{D_j}{mB_j y_{\frac{n-\beta}{2},st}} = E_j, \quad \frac{C_j}{mB_j y_{\frac{n-\beta}{2},st}} = F_j,$$

równanie (2.29) można przepisać w formie prostej

$$(2.30) \quad \ddot{a}(t) + \omega_j^2 a(t) = E_j + F_j p(t).$$

Równanie (2.30) odnoszące się do poszczególnych odcinków belki jest liniowe. Warunki początkowe dla odpowiedniego przedziału są następujące:

wartość współczynnika dynamicznego

$$(2.31) \quad a_{j-1}^* = \frac{y_{\frac{n-\beta}{2},j-1}^{(2)}}{y_{\frac{n-\beta}{2},st}}, \quad j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1;$$

wartość pierwszej pochodnej współczynnika dynamicznego na granicy  $j$ -tego przedziału określa się z rozwiązania  $a(t)$  w  $(j-1)$ -szym przedziale.

W ten sposób postawione zagadnienie ma jednoznaczne rozwiązanie. Zajmiemy się określeniem współczynnika dynamicznego dla obciążenia  $p(t) = p_0 H(t)$ .

Przyjmując warunki początkowe jednorodne dla  $t = 0$ , rozwiązanie w przedziale  $a_{j-1}^* \leq a(t) \leq a_j^*$  można przedstawić w postaci:

$$(2.32) \quad a_j(t) = M_j \cos \omega_j t + N_j \sin \omega_j t + \frac{E_j + F_j p_0}{\omega_j} \int_{t_{j-1}}^t \sin \omega_j (t - \tau) d\tau.$$

$$j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1,$$

gdzie

$$(2.33) \quad M_j = a_{j-1}^* \cos \omega_j t_{j-1} - \frac{\dot{a}_{j-1}(t_{j-1})}{\omega_j} \sin \omega_j t_{j-1},$$

$$N_j = a_{j-1}^* \sin \omega_j t_{j-1} + \frac{\dot{a}_{j-1}(t_{j-1})}{\omega_j} \cos \omega_j t_{j-1}.$$

Natomiast czas  $t_{j-1}$  wyznaczamy z warunku, że

$$(2.34) \quad a_{j-1}^* = a_{j-1}(t_{j-1}),$$

czyli z równania

$$(2.35) \quad a_{j-1}^* = M_{j-1} \cos \omega_{j-1} t_{j-1} + N_{j-1} \sin \omega_{j-1} t_{j-1} +$$

$$+ \frac{E_{j-1} + F_{j-1} p_0}{k_{j-1}} [1 - \cos \omega_{j-1} (t_{j-1} - t_{j-2})].$$

W ten sposób rozwiązując równania (2.30) w poszczególnych przedziałach możemy wyznaczyć interesujący nas maksymalny współczynnik dynamiczny belki  $a_{\max}$  dla różnych wartości luzów  $\varphi_0$ , który przy danym obciążeniu będzie jednocześnie

max max współczynnika dynamicznego. Natomiast dla obciążeń dowolnie zmieniających się w czasie otrzymamy lokalne max współczynnika dynamicznego i w celu określenia max max należałoby dokonać odpowiedniego przejścia asymptotycznego.

### 3. Przypadek liniowej zależności postaci drgań od amplitudy

Omówiony w poprzednim p. sposób rozwiązania naszego zagadnienia jest skomplikowany ze względów rachunkowych. W celu uproszczenia zagadnienia przyjmujemy, że postać drgań jest określona liniowo, tzn. że jest ona określona wzorem (2.3). Zastępcze współczynniki sprężystości będą takie same jak w p. 2, wzór (2.6).

Równanie ruchu otrzymamy z równania Lagrange'a,

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{n-\beta}} \right) + \frac{\partial V}{\partial y_{n-\beta}} = P_{zr}(t),$$

gdzie energia potencjalna i kinetyczna układu jest określona za pomocą wzorów (2.7) i (2.9). Obciążenie zewnętrzne — jak poprzednio — tzn:

$$(3.2) \quad P_{zr}(t) = P(t) \sum_{i=1}^{n-1} a_i, \quad a_i = \frac{y_i}{y_{n-\beta}}, \quad a_{\frac{n-\beta}{2}} = 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $y_i$  obliczamy ze wzorów (2.4).

Podstawiając odpowiednie wielkości (2.18) do wzorów (2.7) i (2.9) znajdujemy

$$(3.3) \quad V = \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^{n-1} \{ \kappa_0 (2a_i - a_{i-1} - a_{i+1})^2 y_{\frac{n-\beta}{2}, st}^2 \alpha^2(t) + \\ + (\kappa_1 - \kappa_0) [(2a_i - a_{i-1} - a_{i+1}) y_{\frac{n-\beta}{2}} \alpha(t) - \varphi_0 l]^2 H(\varphi_i(t) - \varphi_0) \}, \\ T = \frac{1}{6} m \dot{y}_{\frac{n-\beta}{2}, st}^2 \alpha^2(t) \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2),$$

gdzie  $\alpha(t) = y_{\frac{n-\beta}{2}}(t) / y_{\frac{n-\beta}{2}, st}$ .

Wobec tego mamy następujące równanie różniczkowe na współczynnik dynamiczny belki

$$(3.4) \quad \ddot{\alpha}(t) + \omega^2(\alpha) \alpha(t) = FP(t) + E(\alpha),$$

gdzie

$$(3.5) \quad \omega^2(\alpha) = \frac{3 \left[ \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_0 (2a_i - a_{i-1} - a_{i+1})^2 + (\kappa_1 - \kappa_0) (2a_i - a_{i-1} - a_{i+1})^2 H(\varphi_i(t) - \varphi_0) \right]}{m \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2)}$$

$$(3.5) \quad E(a) = \frac{3 \varphi_0 (\alpha_1 - \alpha_0) \sum_{i=1}^{n-1} (2a_i - a_{i-1} - a_{i+1}) H(\varphi_i(t) - \varphi_0)}{mly_{\frac{n-\beta}{2}, st} \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2)}$$

$$F = \frac{3 \sum_{i=1}^{n-1} a_i}{mly_{\frac{n-\beta}{2}, st} \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2)}$$

Ponieważ  $\omega(a)$  jest funkcją «schodkową», przeto analogicznie jak w p. 2 poszukujemy rozwiązania kolejno dla przedziałów  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$  ..., gdzie  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, (n-\beta)/2+1$ ) odpowiada chwili osiągnięcia kąta  $\varphi_0$  w połączeniach  $(n-\beta)/2 \mp (j-1)$ . Równanie (3.4) jest liniowe o stałych współczynnikach. Obliczenia są więc znacznie prostsze w porównaniu z metodą przedstawioną w p. 2.

#### 4. Przykłady

*Przykład 1.* Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy belka składająca się z  $n$  elementów jest podparta swobodnie oraz obciążona na końcach momentami  $M(t)$  (rys. 6). Charakterystyka sprężysta w połączeniach elementów jest przedstawiona na rys. 4c. Linia ugięcia statycznego dla danego schematu obciążenia będzie okrąg o promieniu  $r = EI/M_0$ . Linia ugięcia statycznego wyrazi się zatem wzorem

$$(4.1) \quad y = \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4} - x^2 + xL} - \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}}$$

Rozwijając tę funkcję w szereg potęgowy i biorąc dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, (tzn. dokonując identycznego uproszczenia jak w teorii belek zginanych o małym ugięciu w stosunku do rozpiętości), otrzymamy

$$(4.2) \quad y \approx \frac{1}{2r} (Lx - x^2)$$

lub też po wprowadzeniu oznaczeń  $\xi = x/L$  oraz  $\xi' = (L-x)/L$  linia ugięcia statycznego będzie

$$(4.3) \quad y \approx \frac{L^2}{2r} \xi \xi'$$

Przy tak obranej linii ugięcia statycznego w każdym połączeniu elementów belki w ustalonej chwili czasu pojawiają się w przybliżeniu te same kąty względne między sąsiednimi sztywnymi elementami. W związku z tym wszystkie współczynniki sprężystości będą jednocześnie zmieniały wartość  $\alpha_0$  na  $\alpha_1$ .

Zastępcze współczynniki sprężystości w połączeniach elementów obliczamy z przyrównania funkcji (2.1) i (2.2). Wstawiając do wzoru (2.2) za  $y(x)$ , funkcję określoną wzorem (2.4), otrzymamy

$$(4.4) \quad \alpha_1 = \frac{EJnl}{0,4 r^2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2}.$$

Wprowadzając punkt redukcji układu (punkt 1 połączenia pierwszego i drugiego skrajnego elementu) oraz wprowadzając oznaczenia analogiczne jak w paragrafach poprzednich

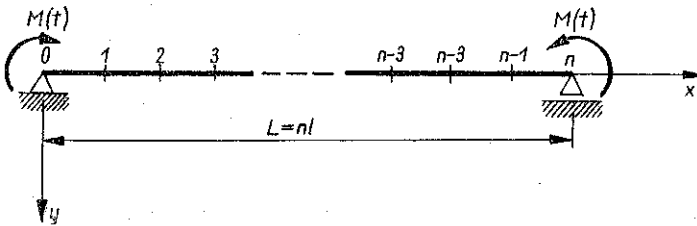
$$(4.5) \quad a_i = \frac{y_i}{y_1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

znajdziemy równanie ruchu

$$(4.6) \quad \ddot{y}_1(t) + \omega^2 [y_1(t)] y_1(t) = \frac{3P_{zr}(t)}{m \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2)} + E(y_1(t)),$$

gdzie  $\omega(y_1(t))$  jest określone wzorem (3.5), natomiast

$$E(y_1(t)) = \frac{3\varphi_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sum_{i=1}^{n-1} (2a_i - a_{i-1} - a_{i+1}) H(\varphi_i(t) - \varphi_0)}{ml \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2)}$$



Rys. 6

Zastępczą siłę  $P_{zr}(t)$  obliczamy z przyrównania prac układu zastępczego i układu podstawowego:

$$L_I = 2M(t) \delta \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l}, \quad L_{II} = P_{zr}(t) \delta y_1,$$

gdzie

$$\delta \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l} = \frac{n}{n-1} \frac{1}{l} \delta y_1.$$

Z warunku  $L_I = L_{II}$  mamy

$$(4.7) \quad P_{zr}(t) = \frac{n}{n-1} \frac{1}{l} M(t).$$

Równanie (4.6) po uwzględnieniu (4.7) należy rozwiązać w dwóch przedziałach.

1. Rozwiązanie w pierwszym przedziale  $0 \leq y_1(t) \leq y_1^*$ , gdzie  $y_1^*$  wyznaczamy

ze wzoru (2.5) podstawiając  $\varphi_i = \varphi_0$ . Zakładamy, że wymuszenie  $M(t) = M_0 \sin pt$ . Warunki początkowe są jednorodne dla  $t = 0$

$$y_1(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - p^2} \left( \sin pt - \frac{p}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right),$$

gdzie

$$F_0 = \frac{\frac{3n}{n-1} M_0}{l \sum_{i=1}^n (a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_i + a_i^2)}$$

Uwzględniając charakterystykę przedstawioną na rys. 4b, czyli  $\kappa_0 \rightarrow 0$ , znajdziemy następujące rozwiązanie dla tego przedziału:

$$y_1(t) = \frac{F_0}{mp^2} (pt - \sin pt).$$

Ze wzoru tego wyznaczmy  $t_1$  przyjmując  $y_1(t_1) = y_1^*$ .

2. Rozwiązaniem równania ruchu w drugim przedziale  $y_1(t) \geq y_1^*$  (przy warunkach początkowych: gdy  $t = t_1$ , to  $y(t_1) = y_1^*$ ,  $\dot{y}(t_1) = \dot{y}_1^*$ ) jest funkcja

$$\begin{aligned} y_1(t) = & y_1^* \cos \omega(t - t_1) + \frac{\dot{y}_1^*}{\omega} \sin \omega(t - t_1) + \\ & + \frac{2F_0}{m(\omega^2 - p^2)} \left[ \cos \frac{p(t+t_1)}{2} \sin \frac{p(t-t_1)}{2} - \frac{p}{\omega} \cos \frac{\omega(t+t_1)}{2} \sin \frac{\omega(t-t_1)}{2} \right] + \\ & + \frac{E}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t - t_1)]. \end{aligned}$$

We wzorach na  $E$  i  $\omega$  należy przyjąć  $H(\varphi_i(t) - \varphi_0) = 1$ .

Współczynnik dynamiczny obliczamy ze wzoru  $a = y_{\max}(t)/y_{1st}$ , przy czym  $y_{1st}$  oznacza ugięcie statyczne belki  $y_{1st} = y_0 + P_0/\kappa_1$  przy założeniu, że  $\kappa_0 = 0$ .

*Przykład liczbowy.* Przyjmijmy następujące dane:  $L = 10 l = 1000$  cm,  $A = 213$  cm<sup>2</sup>,  $I = 99180$  cm<sup>4</sup>,  $M_0 = 5000$  T cm,  $m = 0,17$  kG sek<sup>2</sup> cm<sup>-1</sup>,  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kG cm<sup>-2</sup>,  $p = 180$  sek<sup>-1</sup>.

Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości  $\varphi_0$ .

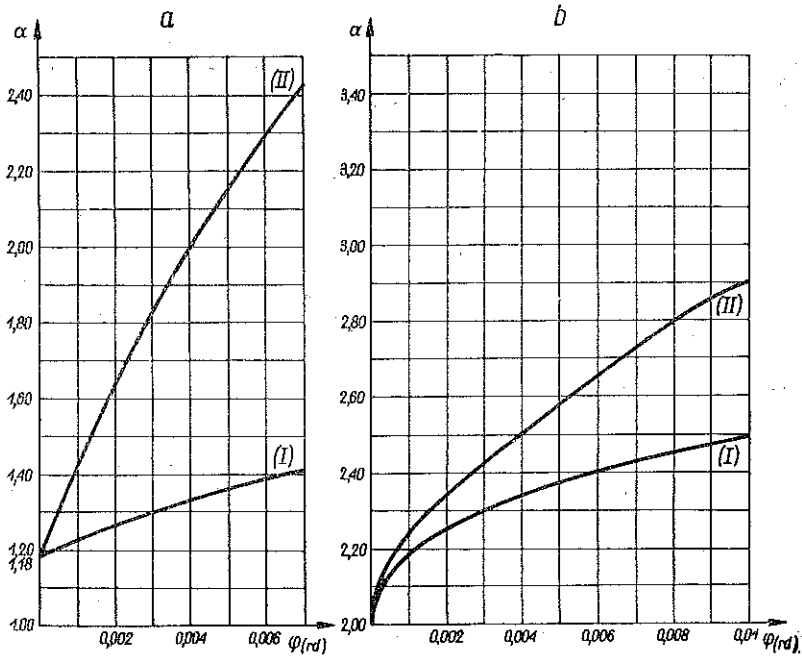
Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów (rys. 7a) (I). Wykonano również wykres stosunku ugięcia dynamicznego z luzami do statycznego ugięcia bez luzów (II).

Dla porównania otrzymanych wyników metodą podaną w niniejszej pracy, uwzględniającej luzy w połączeniach elementów, przeprowadzono obliczenie współczynnika dynamicznego przy tych samych danych dla belki o nieskończonej ilości stopni swobody bez luzów. Współczynnik dynamiczny wynosi 1.18. Wynika stąd, że współczynnik dynamiczny dla belki z luzami jest większy i rośnie wraz z wielkością luzów.

Przykład 2. Obliczono współczynnik dynamiczny metodą podaną w p. 3 dla belki składanej z liniowo określoną postacią drgań, przy wymuszeniu stałym wzdłuż długości belki. Zmianę obciążenia w zależności od czasu określała funkcja  $p(t) = p_0 H(t)$ . Przyjęto następujące dane:

$$n = 8, \quad l = 500 \text{ cm}, \quad I = 9,9 \cdot 10^4 \text{ cm}^4, \quad n = 0,17 \text{ kG sek}^2 \text{ cm}^{-1},$$

$$\frac{p_0}{q} = 10, \quad \frac{\kappa_0}{\kappa_1} = 10^{-4}, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG cm}^{-2}, \quad q = 1,67 \text{ kG cm}^{-1}.$$



Rys. 7

Na podstawie obliczeń sporządzono wykres (rys. 7b) zależności współczynnika dynamicznego  $\alpha$  od wartości luzów  $\varphi_0$ .

### 5. Zakończenie

W pracy wykazany został wpływ luzów w połączeniach elementów belki na wartość współczynnika dynamicznego.

Z przytoczonych przykładów widać, że ze wzrostem luzów rośnie współczynnik dynamiczny. Należy jednakże zwrócić uwagę na fakt, że otrzymane wyniki mają charakter przybliżony ze względu na daleko idące uproszczenia (zastosowanie metody energetycznej Rayleigha).

Wydaje się, że byłoby celowe zastosowanie metody Galerkin'a do niniejszego problemu.

Zagadnienie to można rozwiązać redukując układ o nieskończonej ilości stopni swobody do skończonej, a następnie zastosować metodę małego parametru, [6], traktując luzy jako małe zaburzenie.

Metodę przedstawioną w pracy można rozszerzyć na belki wieloprzęsłowe.

Przedstawiona metoda pozwala określić drgania belek obciążonych dowolnie.

W tym ogólniejszym przypadku ulegnie zmianie postać statycznej linii ugięcia oraz może ulec zmianie kolejność przekraczania wartości  $\varphi_0$  w poszczególnych połączonych odcinków belki. Jednak ogólna metoda przejścia od równania belki z luzami do układu równań dla belki o  $n$  stopniach swobody i przybliżonego rozwiązania tego układu pozostaje słuszna.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] А. Н. Лурье, А. Н. Чекмарев, *Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой составленной из двух прямолинейных отрезков*. Прикл. Мат. Мех., 3, 1 (1938).  
 [2] S. TIMOSHENKO, *Vibration problems in engineering*, New York 1955.  
 [3] Н. В. Григорьев, *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений*, Москва 1961.  
 [4] Я. А. Протусевич, *Вариационные методы в строительной механике*, Огиз-гостехиздат, Москва 1948.  
 [5] Н. В. Анарьев, *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем*, Гостехиздат., Москва 1946.  
 [6] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, Москва 1958.

#### Резюме

#### КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНЫХ БАЛОК С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭФФЕКТАМИ

Рассматривается задача, касающаяся вынужденных колебаний балки с учетом упругих нелинейных эффектов, появляющихся в соединениях в виде зазоров. Эта задача решена, основываясь на методе Релейя с линейно определенным видом колебаний. Задача приводит к дифференциальному линейному уравнению движения с переменными коэффициентами. Приводится уравнение для определения коэффициента для обоих случаев т.е. с линейно и нелинейно-определенным и видами колебаний.

В примерах показано влияние зазоров на динамический коэффициент балки.

#### S u m m a r y

#### VIBRATION OF COMPOUND BEAMS WITH NONLINEAR EFFECTS

The problem under consideration is that of forced vibration taking into consideration the nonlinear effects due to the clearances appearing in the joints. This problem is solved by the Rayleigh method, the vibration mode being determined on the grounds of the linear and nonlinear theory. This problem leads to a differential equation of motion which is linear with variable coefficients. Equation is given for the two cases under consideration that is with linearly and nonlinearly determined vibration mode. In the examples is shown the influence of the clearances on the dynamic coefficient of the beam.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 czerwca 1962 r.