

PLASTYCZNE WYCZERPANIE NOŚNOŚCI USTROJÓW PŁYTOWO-ŻEBROWYCH.
Cz. 1. ROZWIĄZANIA KINEMATYCZNE

MAREK KWIECIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Projektowanie ustrojów nośnych, złożonych z płyt i belek, opiera się jak dotąd na myślowym oddzieleniu poszczególnych elementów, określeniu ich sił wewnętrznych w zakresie «sprężystym» zgodnie z przypadającymi na nie obciążeniami oraz wymiarowaniu przekrojów. Taki sztuczny podział ustroju nośnego na elementy jedno i dwuwymiarowe powoduje, że realny współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji jako całości jest na ogół inny (przeważnie większy) niż przewidywany według obliczeń prowadzonych metodami klasycznymi. Zwiększenie bezpieczeństwa może być tak wydatne, że dotychczasowe metody obliczeń stają w sprzeczności z wymaganiami racjonalnego, a więc ekonomicznego projektowania. Jest więc jasne, że jedynie kompleksowe rozpatrywanie ustrojów złożonych może doprowadzić do wyrobienia poglądu na bardziej zbliżone do rzeczywistości warunki pracy konstrukcji.

W opracowaniu naszym zajmiemy się układami najbardziej rozpowszechnionymi w budownictwie, mianowicie ustrojami złożonymi z płyt oraz z żeber podpierających te płyty. Przy analizie tych konstrukcji wyróżnia się, jak zwykle, dwie fazy pracy statycznej: fazę użytkową i stan zniszczenia. Dla fazy użytkowej istnieje szereg rozwiązań opartych na założeniach teorii sprężystości.

Interesować nas będzie analiza stanu zniszczenia ustrojów płytowo-żebrowych. Doprowadzi to do określenia wielkości sił wewnętrznych w chwili równowagi granicznej, co z kolei pozwoli na ustalenie stopnia bezpieczeństwa układu jako całości i da możliwości racjonalnego podejścia do zagadnień projektowania. Przez stan zniszczenia będziemy określać taki stan konstrukcji, w którym staje się możliwy proces niepowstrzymany narastania odkształceń plastycznych (uwarunkowany przyjętym modelem własności mechanicznych materiału) przy stałej wielkości sił obciążających układ. Obciążenia te uważać będziemy za graniczne, inaczej mówiąc za niszczące lub łamiące.

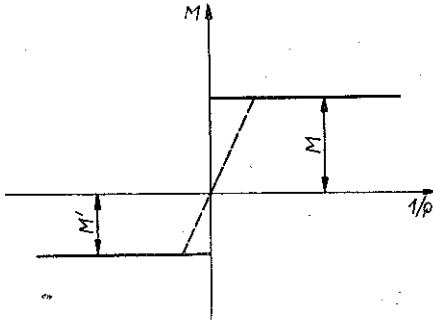
Zajmować się będziemy ustrojami płytowo-żebrowymi o ortogonalnym układzie żeber, a więc płyty w rzucie prostokątnym do ich płaszczyzny będą posiadać kształt prostokątny lub kwadratowy. Będziemy uwzględniać w schemacie wyjściowym ich ortotropię i warstwowość, co usuwa dotychczasową niekonsekwencję, wynikającą z przyjmowania modelu ciała izotropowego i jednorodnego; realizować więc będzie-

my konstrukcję faktycznie «warstwowo» ortotropową przy dobieraniu przekrojów. Oprócz czterech żeber skrajnych, podpartych bądź punktowo w narożach, bądź przegubowo wzdłuż ich osi geometrycznej, wprowadzamy dwie pary żeber pośrednich, dzielących boki ustroju w określonym stosunku lub dwie ich grupy, dzielące boki na n i k jednakowych części. Dzięki temu opracowana zostanie dość szeroka klasa praktycznie ważnych dwuwymiarowych konstrukcji zginanych. Będziemy rozważać obciążenie równomiernie rozłożone na górnej powierzchni płyty.

Ustrój płytowo-żebrowy nie wyposażony w żebra pośrednie jest tematem pracy [1]. Podobne zagadnienie zostało rozpatrzone w pracy [2] i [15], lecz bez uwzględnienia anizotropii i warstwowości układu. Oba zagadnienia omawiane są w tej pracy jako przypadek szczególny.

2. Założenia i oznaczenia

Zakładamy, że ustroje płytowo-żebrowe zbudowane są z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, przy czym odkształcenia w fazie sprężystej uważamy za małe w porównaniu do odkształceń plastycznych. Ograniczamy się więc do przyjęcia zależności $\sigma = \sigma(\epsilon)$ wynikającej z pominięcia wpływu wzmocnienia, obserwowanego w czasie badania próbek np. stali na rozciąganie. Rozpatrywane ustroje mogą też być zbudowane z zespołu materiałów, jak np. stal-beton, przy czym o nośności przekroju zginanego decyduje plastyczne zachowanie się materiału ciągliwego na rozciąganie, zaś materiał kruchy przenosi naprężenia ściskające. Dla interesującego nas przypadku elementów zginanych zależność między krzywizną



Rys. 1

a momentem zginającym, wynikająca ze wspomnianej relacji $\sigma = \sigma(\epsilon)$, przedstawiona jest na rys. 1. Linia prosta przerywana reprezentuje funkcję $M = f(\rho)$ dla fazy zginania sprężystego, prosta pełna dla ciała idealnie sztywno-plastycznego. Doświadczenia przytoczone w pracy [3] i zilustrowane tam wykresem na rys. 18 potwierdzają słuszność założenia, że wartość momentu od chwili osiągnięcia pewnej wielkości jest stała i niezależna od krzywizny. Momenty M i M' można więc trak-

tować jako momenty graniczne, określone zdolnością materiału do przejmowania odkształceń plastycznych, jeśli znajduje się on w warstwach położonych odpowiednio poniżej lub powyżej osi zginania plastycznego.

Należy dodać, że z naszego stanowiska nie będziemy interesować się wpływem zjawisk reologicznych na wielkość momentu «sprężystego» i «sprężysto-plastycznego», a przyjmować, że moment «plastyczny» nie jest od tych efektów uzależniony (nie odgrywa więc roli historia zależności między momentem zginającym a krzy-

wizną, poprzedzająca stan graniczny) oraz że $M(t) = M_0 = \text{const.}$, tzn. że wielkość momentu granicznego nie zależy od czasu. Doprowadza to do stwierdzenia, że nośność graniczna konstrukcji jest taka sama zarówno ze względu na sprężysto-plastyczny, jak i sztywno-plastyczny model odkształceń, byleby tylko momenty graniczne, związane ze strukturą przekrojów, były dla obu modeli takie same.

Ponadto przyjmujemy założenie, że dla sztywno-plastycznego schematu zniszczenia ustroju odkształcenia plastyczne są małe. Pozwala to na stosowanie podczas całego procesu odkształcania znanej zasady zeszywnienia, umożliwiającej zapisywanie warunków równowagi dla układu nieodkształconego oraz uwalnia od konieczności uwzględniania stanu błonowego.

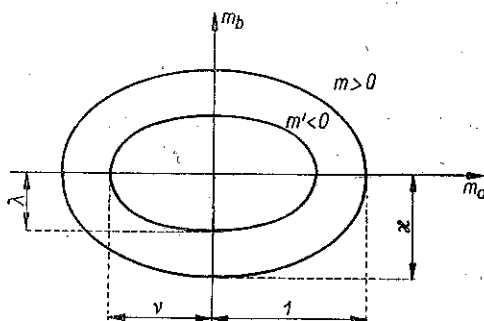
Stan naprężeń w płytach traktujemy jako płaski, tzn. pomijamy wpływ naprężeń normalnych, skierowanych wzdłuż linii działania obciążeń zewnętrznych na powstanie i rozwój procesu plastycznego płynięcia. Pomijamy ponadto wpływ naprężeń stycznych wywołanych działaniem sił poprzecznych. Ze względu na małe odkształcenia nie bierzemy również pod uwagę możliwości uplastycznienia żeber przez działanie momentów skręcających.

Płyty połączone są z żebrami wzdłuż osi zebra, przy czym osie belek leżą w środkowej powierzchni płyty w trakcie całego procesu odkształceń. Oznacza to m.in., że nie może nastąpić tzw. unoszenie naroży płyt.

Własności plastyczne płyt uważamy za zależne od kierunku; osiągają one wartości ekstremalne w dwu kierunkach wzajemnie prostopadłych, a ponadto mogą być inne dla momentów dodatnich oraz inne dla momentów ujemnych (rys. 2).

Założenie to ma ważne znaczenie praktyczne, ponieważ prowadzi do modelu płyty żelbetowej, krzyżowo zbrojonej, która jest ciałem warstwowo-ortotropowym. Płyta taka, szeroko znana w budownictwie, posiada na ogół cztery różne charakterystyki odnoszące się do mocy zbrojenia (przy założeniu równomiernego rozkładu zbrojenia w ramach każdego typu oraz w przypadku symetrii układu i obciążenia względem obu osi geometrycznych płyty). Zatem płytę taką, przy jej stałej grubości, rozpatrywać można jako jednorodną.

Warto zaznaczyć, że postulat równomiernego rozłożenia zbrojenia nie czyni ze stanowiska teorii nośności granicznej płyt założenia zawiązującego zagadnienie, ponieważ o nośności płyty nie decyduje sposób rozłożenia wkładek danego kierunku, lecz wielkość całkowita, mianowicie wypadkowy moment graniczny dla całkowitej długości przekroju poprzecznego elementu (por. np. [4]). Należy tylko zapewnić warunek, aby funkcja rozkładu zbrojenia nie zmieniała się szybko, tzn. jej pochodna nie zmierzała do nieskończoności (odpowiadałoby to utworzeniu tzw. belki ukrytej odpowiadającej dodatkowej podporze, zmieniającej warunki kinematyczne ustroju).

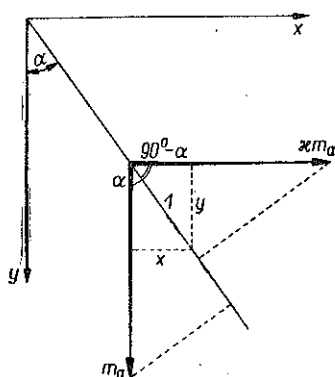


Rys. 2

Zakładamy, że w żebrach ustroju panuje zginanie proste, a więc charakteryzują się one pewnymi granicznymi momentami zginającymi. Warunki brzegowe formułować będziemy albo w naprężeniach, albo w szybkościach przemieszczeń. Zależy to od tego, czy problem rozwiązywać będziemy metodą statyczną czy kinematyczną. Odmienność obydwu metod omówiona będzie niżej.

Dla interesującej nas struktury warstwowo-ortotropowej stosować będziemy następujący warunek plastyczności, tzn. warunek przejścia elementu w stan plastyczny:

$$(2.1) \quad F = \max \left(\frac{m_1}{m_a}, \frac{m_2}{\kappa m_a}, -\frac{m_1}{\nu m_a}, -\frac{m_2}{\lambda m_a} \right) = 1.$$



Rys. 3

Należy zaznaczyć, że rozpatrywać będziemy jedynie przypadki obciążenia jednoparametrowego, wzrastającego proporcjonalnie np. do czasu lub swej wartości początkowej.

Postulat (2.1) można przedstawić zgodnie z rys. 3 w następującej postaci analitycznej

$$(2.2) \quad -(\lambda \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha) \leq \frac{m_{1,2}}{m_a} \leq \kappa \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

gdzie główne momenty zginające wyrażają się znanymi wzorami:

$$(2.3) \quad m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}.$$

Stosujemy umowę, że $m_1 \geq m_2$.

Dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 90^\circ$ nierówności (2.2) można zapisać w postaci:

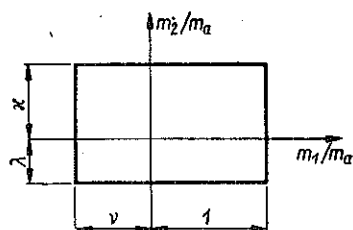
$$(2.4) \quad \begin{aligned} -\nu &\leq \frac{m_1}{m_a} \leq 1, \\ -\lambda &\leq \frac{m_2}{m_a} \leq \kappa. \end{aligned}$$

Graficzne przedstawienie omawianego warunku plastyczności w płaszczyźnie głównych momentów podaje rys. 4.

Jeżeli przyjąć, z czego będziemy dalej korzystać, że warstwowość płyty ma charakter izotropowy (tzn. zbrojenie górne jest jednakowe w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach), to należy przyjąć $\nu = \lambda$ i wtedy wewnętrzna elipsa na rys. 2 staje się kołem, natomiast figura, znajdująca się w trzeciej ćwiartce układu na rys. 4, przechodzi w kwadrat.

Dla żeber, w związku z naszymi założeniami, warunki plastyczności należy zapisać:

$$(2.5) \quad M_x \leq M_a, \quad M_y \leq M_b.$$



Rys. 4

W pracy stosujemy następujące ważniejsze oznaczenia:

x, y	współrzędne układu płaszczyzny środkowej płyt i żeber;
a	dłuższy bok ustroju; długość żebra podłużnego między osiami słupów podpierających;
b	krótszy bok ustroju; długość żebra poprzecznego między osiami słupów podpierających;
$\beta = b/a \leq 1$	stosunek długości boków ustroju;
c, d	odpowiednie długości boków płyt narożnych;
$\delta = c/a = d/b$	geometryczny wskaźnik podziału ustroju na poszczególne płyty;
$\xi = \delta^2/(1 - 2\delta)^2$	pomocniczy wskaźnik geometryczny;
p	obciążenie ustroju płytowo-żebrowego na jednostkę powierzchni;
m_x, m_y	jednostkowe momenty zginające w płycie o wektorach prostopadłych do osi x, y ;
m_{xy}	jednostkowy moment skręcający w płycie;
m_1, m_2	momenty główne w płycie;
m_a, m_b	jednostkowe momenty graniczne (dodatnie) o wektorach prostopadłych do osi x, y ;
m'_a, m'_b	jednostkowe momenty graniczne (ujemne) o wektorach prostopadłych do osi x, y ;
q_x, q_y	jednostkowe siły poprzeczne w przekrojach prostopadłych do osi x, y ;
r_x, r_y	jednostkowe reakcje płyty na żebro w przekrojach prostopadłych do osi x, y ;
R	siła występująca w narożu płyty, wywołana działaniem momentów skręcających;
M_a, M_b	momenty graniczne skrajnych żeber (dłuższego i krótszego);
M_{a1}, M_{b1}	momenty graniczne pośrednich żeber (dłuższego i krótszego);
$\kappa = m_b/m_a$	współczynnik ortotropii plastycznej;
κ_e	współczynnik ortotropii ekonomicznej, związany z minimalnym zużyciem materiału plastycznego;
$\nu = m'_a/m_a, \lambda = m'_b/m_b$	współczynniki warstwowości struktury płyty;
$\mu = m'_b/m_b = \lambda/\kappa$	pomocniczy współczynnik warstwowości (w pewnych przypadkach współczynniki κ, ν, λ i μ będą zdefiniowane inaczej, mianowicie przez zamianę indeksów a na b , i b na a);
ω	stosunek momentów granicznych żeber skrajnych (wzajemnie prostopadłych);

- a, a_1, a_2 stosunki momentów granicznych żeber pośrednich do skrajnych (wzajemnie równoległych);
- φ wskaźnik sztywności plastycznej żeber skrajnych; stosunek momentu granicznego żebra skrajnego do momentu pasma płytowego;
- δL przyrost pracy sił zewnętrznych na przesunięciach przygotowanych;
- δD przyrost pracy sił wewnętrznych na przesunięciach przygotowanych.

3. Dwie metody w teorii nośności granicznej

Przy rozpatrywaniu zagadnień nośności granicznej odróżnić należy dwie metody pozwalające na ocenę granic przedziału, w którym zawarta jest rzeczywista wielkość obciążenia łamiącego. Metody te oparte są na dwu podstawowych twierdzeniach teorii nośności granicznej (por. [5]-[9]), które dla górnej i dolnej granicy przedstawiają się następująco:

1. Konstrukcja ulega zniszczeniu pod działaniem obciążenia P_k , jeżeli istnieje takie kinematycznie możliwe, spełniające kinematyczne warunki brzegowe pole przyrostów przemieszczeń \dot{u}_k (i związane z nim pole przyrostów odkształceń plastycznych $\dot{\varepsilon}_{ij}$), dla którego przyrost pracy wykonywanej przez obciążenia zewnętrzne $\delta L = \sum P_k \dot{u}_k$ jest nie mniejszy od przyrostu energii $\delta D = \int_V d(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV$, rozpraszanej przez siły wewnętrzne w obszarze ciała V .

2. Konstrukcja nie ulega zniszczeniu lub znajduje się w stadium równowagi granicznej, jeśli istnieje statycznie dopuszczalne pole naprężeń σ_{ij} , tzn. będące w równowadze z działającymi obciążeniami P_s , spełniające warunki równowagi wewnętrznej i naprężeniowe warunki brzegowe oraz nie przekraczające w żadnym punkcie ciała przyjętego warunku plastyczności.

Zastosowanie pierwszego twierdzenia wiąże się ze znalezieniem tzw. mechanizmu zniszczenia. Analizujemy wówczas to stadium pracy konstrukcji, w którym przekształca się ona z ustroju statycznego w ruchomy mechanizm, a więc uzyskuje dzięki powstaniu odpowiedniej ilości przegubów i zawiasów plastycznych taką liczbę stopni swobody, aby móc się niepowstrzymanie odkształcać. Wykorzystanie drugiego twierdzenia wymaga całkowania odpowiednich różniczkowych równań równowagi elementu przy jednoczesnym wykorzystaniu warunku plastyczności.

Jeśli rozwiązanie problemu czyni zadość jednocześnie obu twierdzeniom, mamy wówczas do czynienia z rozwiązaniem kompletnym. Wtedy pole przyrostów odkształceń i pole sił wewnętrznych związane są prawem plastycznego płynięcia w postaci $\dot{\varepsilon}_{ij} = c(\partial F / \partial \sigma_{ij})$, gdzie c jest współczynnikiem funkcyjnym, a górna i dolna granica są identyczne.

Jeśli ścisłe rozwiązanie problemu nie jest możliwe, twierdzenia podstawowe, jak już powiedziano, umożliwiają oszacowanie przedziału rzeczywistego obciążenia łamiącego:

(3.1)

$$P_s \leq P_{rz} \leq P_k.$$

W niniejszej pracy ograniczymy się do rozpatrywania kinematycznie możliwych pól przemieszczeń¹. Okaze się jednak, że wielkość obciążenia łamiącego dla ustroju płytowo-żebrowego w małym stopniu zależy od tego, która metoda została zastosowana; granice przedziału są bliskie sobie.

Warto jeszcze dodać, że rozpatrując zjawiska przy założeniu idealnej plastyczności nie uwzględniamy efektu wzmocnienia stali, a tym samym pomijamy pewien wzrost nośności ustroju. Skłania to do wniosku, że rzeczywiste obciążenie niszczące będzie się mieścić w tej części przedziału (3.1), która przylega do granicy kinematycznej.

4. Podział konstrukcji żebrami na nk równych prostokątów

Metoda kinematyczna opiera się na pierwszym twierdzeniu podstawowym, omówionym w rozdziale 3. Z tego względu będziemy mogli określać związki między momentami łamiącymi a obciążeniem łamiącym, wykorzystując zasadę prac przygotowanych.

Zapiszemy ją w postaci

$$(4.1) \quad \delta L = \delta D.$$

Zasada ta mówi, że dla ciała będącego w równowadze przy jego przesunięciu przygotowanym, połączonym z odkształceniem, przyrost pracy obciążeń zewnętrznych zużytkowany zostaje całkowicie w procesie plastycznego płynięcia.

Jeśli za odkształcenia obierzemy wzajemne obroty kątowe poszczególnych płatów ustroju, sztywnych z założenia, to przyrost pracy sił wewnętrznych wyrażony będzie zawsze przez iloczyn, utworzony z kąta obrotu $\delta\varphi$ płata około odpowiedniej osi obrotu oraz rzutu wypadkowej momentu łamiącego na kierunek tej osi.

Wektor $\delta\varphi$ przedstawić można w postaci pewnego przemieszczenia przygotowanego δw , podzielonego przez odległość punktu, któremu przypisujemy to przemieszczenie, od osi obrotu.

Przyrost pracy sił zewnętrznych przy działaniu obciążenia ciągłego o intensywności $p(x, y)$ można przedstawić tak:

$$(4.2) \quad \delta L = \iint p(x, y) \delta w(x, y) dx dy,$$

gdzie $\delta w(x, y)$ oznacza odpowiadające punktowi (x, y) przemieszczenie związane z przemieszczeniem wirtualnym δw . Ostatecznie otrzymujemy równanie, z którego przy znanej siatce zniszczenia (odpowiednio obranym ruchomym mechanizmie) wyznaczyć możemy wielkość obciążenia granicznego.

Jeżeli będziemy znali kształt siatki zniszczenia, ale nie będziemy mogli z góry ustalić długości jej poszczególnych odcinków, wtedy siatkę załomów należy scharakteryzować pewną ilością nie znanych parametrów x_1, x_2, \dots, x_l .

Wyrażenie na obciążenie graniczne będzie również funkcją tychże parametrów:

$$(4.3) \quad p = f(M, x_1, x_2, \dots, x_l).$$

¹ Statycznie możliwe rozkłady momentów będą rozpatrywane w pracy, która ukaże się w następnym zeszycie *ROZPRAW INŻYNIERSKICH*.

Aby wyznaczyć to obciążenie i odpowiadające mu wymiary siatki, należy posłużyć się znaną zasadą (por. [10], [11] i [12]), która mówi, że ze wszystkich geometrycznie możliwych układów linii załomów miarodajną jest ta siatka, której odpowiada najmniejsza wartość obciążenia. Dla rodziny mechanizmów zniszczenia muszą więc być spełnione warunki:

$$(4.4) \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = \dots, \frac{\partial p}{\partial x_l} = 0.$$

Otrzymujemy l równań, pozwalających na ogół wyznaczyć l niezależnych parametrów x , a następnie ze wzoru (4.3) określamy obciążenie łamiące.

Zdarza się często, że musimy postulować istnienie szeregu możliwych, różnych jakościowo mechanizmów zniszczenia. Po rozważeniu każdego z nich zgodnie z warunkiem (4.4) wybieramy taki, który daje najmniejsze obciążenie łamiące.

Sformułujemy równanie (4.1) dla ustroju płytowo-żebrowego o kształcie dowolnego wieloboku dowolnie podpartego, obciążonego równomiernie na całej swej powierzchni. Biorąc pod uwagę (4.2) mamy

$$\delta L = p_k \int \int \delta w(x, y) dx dy.$$

Całka podwójna, występująca po prawej stronie, ma prostą interpretację geometryczną: jej wielkość jest równa objętości bryły przyrostów przemieszczeń δw . Objętość tę możemy obliczyć ze wzoru

$$V(\delta w) = \frac{1}{3} \sum_i h_i F_i,$$

tzn. jako sumę algebraiczną objętości ostrosłupów ze wspólnym, dowolnie wybranym wierzchołkiem i podstawami, stanowiącymi ściany wielościanu przemieszczeń. F_i jest polem powierzchni i -tego płata mechanizmu zniszczenia, h_i jest odległością od wspólnego wierzchołka do płaszczyzny i -tego płata. Jeżeli wierzchołek wybrano od tej strony i -tej ściany, która nie zawiera jej zewnętrznej normalnej, to liczbę h_i uważamy za dodatnią, w przeciwnym wypadku przyjmujemy ją jako ujemną. Możemy napisać, że powierzchnia i -tego płata F_i związana jest z jej rzutem F_{ip} na podstawę wielościanu przemieszczeń (za którą będziemy uważać płaszczyznę ustroju przed odkształceniem) wzorem

$$F_i = \frac{F_{ip}}{\cos \delta \varphi_i},$$

gdzie $\delta \varphi_i$ jest kątem obrotu płata względem podstawy; ponadto można napisać, że

$$h_i = A_i \sin \delta \varphi_i,$$

gdzie A_i jest odległością od wspólnego wierzchołka ostrosłupów składowych do krawędzi kąta dwuściennego $\delta \varphi_i$ (przyjmując, że wierzchołek leży na płaszczyźnie podstawy wielościanu). Objętość bryły przyrostów przemieszczeń wynosi zatem

$$V(\delta w) = \frac{1}{3} \sum_i F_{ip} A_i \operatorname{tg} \delta \varphi_i.$$

Z założenia, że odkształcenia plastyczne są małe, wynika

$$V(\delta w) = \frac{1}{3} \sum_i F_{ip} A_i \delta\varphi_i.$$

Należy zaznaczyć, że powyższy wzór jest słuszny dla takiego mechanizmu zniszczenia, w którym osie obrotów płyt pokrywają się z krawędziami (żebami skrajnymi) ustroju. W przeciwnym przypadku objętość wielościanu przemieszczeń ulega zwiększeniu o wartość $\frac{1}{3} \sum_j F_j B_j$ i wynosi (rys. 5)

$$V(\delta w) = \frac{1}{3} \left(\sum_i F_{ip} A_i \delta\varphi_i + \sum_j F_j B_j \right).$$

W tym wzorze F_j oznacza pole ściany wielościanu przemieszczeń, prostopadłej do płaszczyzny podstawy (ściany takie znajdują się w miejscach, gdzie krawędź ustroju nie pokrywa się z osią obrotu płyty, zawierającego tę krawędź); B_j jest odległością od wspólnego wierzchołka ostrosłupów do ściany F_j . Należy dodać, że powierzchnie F_i utworzone są przez istniejące płyty, na które dzieli się ustrój, natomiast powierzchnie F_j mają charakter myślowy.

Przejdziemy teraz do sformułowania pracy dysypowanej w procesie plastycznego płynięcia ustroju płytowo-żebrowego. Możemy ją określić jako

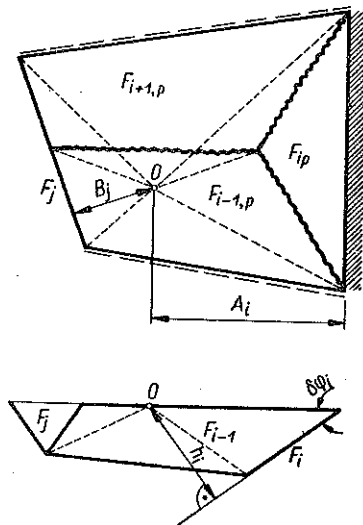
$$\delta D = \iint M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta} dx dy + \sum_i M_{wi} \delta\varphi_i,$$

gdzie pierwszy wyraz odpowiada ciąglemu polu przyrostów krzywizn $\delta K_{\alpha\beta}$, zaś drugi odpowiada nieciągłości pochodnej pola przyrostów przemieszczeń δw w kierunku prostopadłym do linii nieciągłości krzywizn.

Ze względu na nasze założenie o prostoliniowości pól przyrostów przemieszczeń pierwszy wyraz w tym wzorze jest równy zeru i przyrost pracy sił wewnętrznych określa suma

$$\delta D = \sum_i M_{wi} \delta\varphi_i,$$

gdzie M_{wi} oznacza rzut wektora wypadkowego momentu granicznego, związanego z i -tym płatem, na kierunek jego osi obrotu; dla układu płytowo-żebrowego może być on określony jako $m_{wi} + \sum_k M_{ok}$, gdzie m_{wi} pochodzi od modułów płytowych, a $\sum_k M_{ok}$ reprezentuje sumę momentów granicznych k żebrowych, biorących udział w pracy plastycznej, wywołanej obrotem płyty i . Symbol $\delta\varphi_i$ oznacza, jak poprzednio, kąt obrotu płyty względem podstawy.



Rys. 5

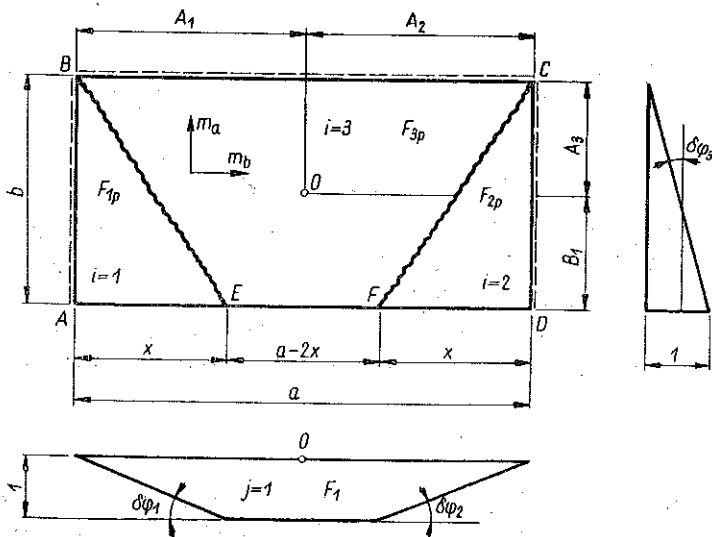
Z równania (4.1) określamy więc górną granicę obciążenia łamiącego:

$$(4.5) \quad p_k = \frac{3 \sum_i M_{wi} \delta\varphi_i}{\sum_i F_{ip} A_i \delta\varphi_i + \sum_j F_j B_j}$$

Zastosowanie warunku (4.4) doprowadza do układu l równań (w przypadku l -parametrowego mechanizmu zniszczenia):

$$(4.5.1) \quad \frac{\sum_i M_{wi} \frac{\partial \delta\varphi_i}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial M_{wi}}{\partial x_i} \delta\varphi_i}{\sum_i M_{wi} \delta\varphi_i} = \frac{\sum_i A_i \frac{\partial F_{ip}}{\partial x_i} \delta\varphi_i + \sum_i A_i F_{ip} \frac{\partial \delta\varphi_i}{\partial x_i} + \sum_j B_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}}{\sum_i F_{ip} A_i \delta\varphi_i + \sum_j F_j B_j}$$

Z równań tych można określić parametry x_i podstawiając wielkości, które określają geometryczne cechy mechanizmu zniszczenia bez potrzeby formułowania przyrostów prac. W równaniu (4.5) założono, że A_i nie jest funkcją x_i , co zachodzi w większości przypadków praktycznych; w przeciwnym przypadku należy licznik prawej strony równania różniczkowego (4.5.1) odpowiednio zmienić.



Rys. 6

Dla przykładu zanalizujemy jednoparametrowy mechanizm zniszczenia płyty przedstawionej na rys. 6. Płyta posiada ortotropię o współczynniku $\kappa = m_a/m_b$. Krawędzie AB , BC i CD są swobodnie podparte, krawędź AD swobodna. Odcinek

EF krawędzi AD poddajemy przemieszczeniu $\delta w = 1$. Wspólny wierzchołek ostrosłupów składowych obieramy na płaszczyźnie $ABCD$ dowolnie, np. w punkcie O .

! Potrzebne wielkości geometryczne wynoszą:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \frac{1}{x}, & \quad \delta\varphi_3 = \frac{1}{b}, \\ F_{1p} = F_{2p} = \frac{bx}{2}, & \quad F_{3p} = b(a-x), \\ A_1 = A_2 = \frac{a}{2}, & \quad A_3 = \frac{b}{2}, \\ F_1 = a-x, & \quad B_1 = \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$M_{w1} = M_{w2} = \kappa m_b b, \quad M_{w3} = 2m_b x.$$

Podstawienie ich do równania (4.5.1) doprowadza do wyniku

$$3x^2 + 4\kappa\beta bx - 3\kappa b^2 = 0.$$

Parametr mechanizmu zniszczenia wynosi ostatecznie

$$x = \frac{\kappa\beta}{3} (\sqrt{4 + 9/\kappa\beta^2} - 2) b.$$

Mechanizm, przedstawiony na rys. 6, odnosi się do przypadku $x \leq a/2$, tzn. dla stosunku boków płyty $\beta = b/a \leq \sqrt{3}/2 \sqrt{\kappa} \approx 0,865/\sqrt{\kappa}$. Obciążenie graniczne, obliczone ze wzoru (4.5) wynosi wtedy

$$p_k = \frac{12m_b}{b^2} \frac{\kappa b^2 + x^2}{x(3a - 2x)}$$

lub

$$p_k = \frac{12m_b}{b^2} \frac{9 + \kappa\beta^2 \eta^2}{\eta(9 - 2\kappa\beta^2 \eta^2)},$$

gdzie $\eta = \sqrt{4 + 9/\kappa\beta^2} - 2$.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na pewien przypadek szczególny. Jeżeli dla ustroju o rzucie wielobocznym wielościan przemieszczeń przybiera kształt ostrosłupa (tzn. nie posiada kalenicy), to istnieje związek $A_i \delta\varphi_i = 1$ i objętość wynosi

$$V(\delta w) = \frac{1}{3} \left(\bar{F}_{\text{podst}} + \sum_j F_j B_j \right).$$

Obciążenie graniczne wynosi wtedy

$$(4.6) \quad p_k = \frac{3 \sum_i \frac{M_{wi}}{A_i}}{F_{\text{podst}} + \sum_j F_j B_j},$$

przy czym punkt, od którego liczy się odległość A_i , stanowi prostopadły rzut wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy wielościanu. Gdy ponadto układ osi obrotów płatów tworzy wielobok, opisany na kole o promieniu R_0 , a wierzchołek ostrosłupa przemieszczeń leży nad środkiem koła wpisanego, to

$$(4.6.1) \quad p_k = \frac{3 \sum_i M_{wi}}{R_0 \left(F_{\text{podst}} + \sum_j F_j B_j \right)}$$

Dla ustroju izotropowego licznik wzoru (4.6.1) przyjmuje wartość $3 m_0 \sum_i l_{0i} = 3 m_0 L_0$, gdzie L_0 jest sumą rzutów długości linii załomów, związanych z poszczególnymi płatami na kierunki ich osi obrotów. Obciążenie graniczne obliczamy według wzoru:

$$(4.6.2) \quad p_k = \frac{3 m_0 L_0}{R_0 \left(F_{\text{podst}} + \sum_j F_j B_j \right)}$$

Wróćmy jeszcze do ustroju o budowie niejednorodnej, lecz podpartego w ten sposób, że osie obrotów płatów pokrywają się z krawędziami ustroju, zaś układ krawędzi tworzy wielobok, w który można wpisać koło o promieniu R_k . W tym przypadku obciążenie graniczne wynosi

$$(4.6.3) \quad p_k = \frac{3 \sum_i M_{wi}}{R_k F_{\text{podst}}}$$

Gdy ponadto mamy do czynienia z izotropią ustroju, to

$$3 \sum_i M_{wi} = 3 m_0 \sum_i l_{ki} = 3 m_0 L_k,$$

gdzie L_k jest sumą długości krawędzi ustroju.

Obciążenie posiada wartość

$$p_k = \frac{3 m_0 L_k}{R_k F_{\text{podst}}}$$

Biorąc pod uwagę związek geometryczny $F_{\text{podst}} = R_k L_k / 2$, możemy napisać (por. [17])

$$(4.6.4) \quad p_k = \frac{6 m_0}{R_k^2}$$

Ze wzoru (4.6.4) wypływa następujący wniosek: nośność graniczna ustroju izotropowego o rzucie wieloboku opisanego na kole i podpartego tak, że osie obrotów płatów pokrywają się z jego krawędziami, nie zależy ani od ilości boków, ani od ich długości. (Trzeba tu zastrzec, że nie rozpatrujemy w pracy problemu «rozwidłania się» linii załomów w pobliżu naroży ustroju, uwarunkowanego m.in. wielkością kątów wewnętrznych wieloboku, por. [15]).

Należy dodać, że izotropię wprowadzoną do powyższych sformułowań, rozumiemy jako pewną, nieco ogólniejszą niż zwykle, cechę ustroju. Chodzi mianowicie jedynie o to, aby rzut M_{wi} wektora wypadkowego momentu granicznego, związanego z i -tym płatem, na kierunek jego osi obrotu był proporcjonalny do rzutu l_i długości linii załomów płata na tę samą oś obrotu. Tak np. nośność ustroju związaną z mechanizmem według rys. 7 można określić za pomocą wzoru (4.6.4), a nośność wynikającą z przyjęcia mechanizmu według rys. 6 przy pomocy wzoru (4.6.2) mimo, że ustrój ten nie jest izotropowy (w ścisłym znaczeniu), ale skokowo niejednorodny.

Po powyższych ogólnych sformułowaniach, dotyczących obliczania górnej granicy obciążenia łamiącego, zajmiemy się ustrojem płytowo-żebrowym określonym w tytule niniejszego rozdziału.

Ustrój ten wyposażony jest w cztery żebra skrajne oraz w $n-1$ żeber pośrednich krótszych i $k-1$ żeber pośrednich dłuższych, prostopadłych do poprzednich. Płyty składowe ustroju o wymiarach $a/n \times b/k$ traktujemy od razu jako ekonomicznie ortotropowe (por. [12] i [13]). Nie pracują one w sposób warstwowy, natomiast przyjmujemy, że na podporach pośrednich przekroje ich są zbudowane tak, jak w przęsłach (zbrojenie ciągle dołem). Rozpatrujemy przypadek $k/n \geq \beta$, co oznacza, że dłuższe boki płyt składowych są równoległe do dłuższego boku całego ustroju. Ustrój podparty jest punktowo w czterech narożach.

Moduły plastyczne płyty wynoszą m_b i

$$m_a = \frac{\beta^2 n^2 / k^2}{3 - 2 \beta^2 n^2 / k^2} m_b.$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$\varphi = \frac{M_b}{m_b a}, \quad \alpha = \frac{(n-1) M_{b1}}{M_b} = \frac{(k-1) M_{a1}}{M_a}, \quad \omega = \frac{M_a}{M_b}.$$

Wymiary ustroju, momenty łamiące oraz podstawowe kinematycznie możliwe mechanizmy zniszczenia omawianej konstrukcji wskazane są na rys. 7. Jeśli idzie o schemat I (przedstawiony w powiększeniu dla jednej ćwiartki ustroju), to przyjmujemy, że jego kształt zależy od dwu parametrów r i s . Oznacza to, że przegub plastyczny w dłuższym żebrze skrajnym tworzy się w r -tym skrzyżowaniu z żebrem pośrednim, licząc od najbliższego naroża ustroju, natomiast przegub w krótszym żebrze skrajnym pojawia się w s -tym skrzyżowaniu z żebrem pośrednim.

W oparciu o zasadę prac przygotowanych możemy następująco sformułować obciążenie graniczne, związane z mechanizmem I:

$$(4.7) \quad p_I = \frac{12m_b}{b^2} \frac{1}{3 - 2 \frac{rs}{nk}} \left\{ \frac{rk}{ns} + \frac{sn^3}{rk^3} \frac{\beta^4}{\left(3 - 2 \beta^2 \frac{n^2}{k^2}\right)} + \right. \\ \left. + \varphi \left(\frac{k}{s} + \beta \omega \frac{n}{r} \right) + \varphi \alpha \left[\frac{(r-1)k}{(n-1)s} + \beta \omega \frac{(s-1)n}{(k-1)r} \right] \right\}.$$

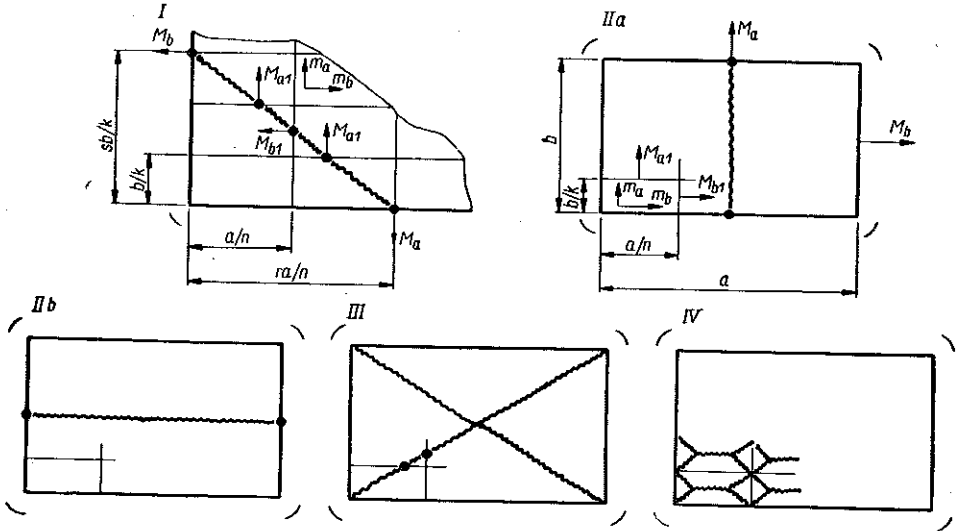
Liczby podziału r i s (całkowite) muszą spełniać warunki

$$(4.8.1.) \quad 1 \leq r \leq \frac{n}{2}, \quad 1 \leq s \leq \frac{k}{s}$$

i muszą być tak dobrane, aby zgodnie z twierdzeniem ekstremalnym

$$(4.8.2.) \quad p_I(r, s) = \min p_I.$$

Określenie odpowiednich r i s najprościej wykonać bezpośrednio metodą prób (szczególnie, jeżeli liczby n i k są niewielkie).



Rys. 7

Dla następujących mechanizmów zniszczenia otrzymujemy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} p_{IIa} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[\frac{n^2}{k^2} \frac{\beta^4}{\left(3 - 2\beta^2 \frac{n^2}{k^2}\right)} + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \right], \\ p_{IIb} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[1 + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \right], \\ p_{III} &= \frac{12m_b}{b^2} \left[1 + \frac{n^2}{k^2} \frac{\beta^4}{\left(3 - 2\beta^2 \frac{n^2}{k^2}\right)} + \varphi\alpha (1 + \beta\omega) \right], \\ p_{IV} &= \frac{24m_b}{b^2} \frac{k^2}{3 - 2\beta^2 \frac{n^2}{k^2}}. \end{aligned}$$

Poszukiwanie stref stosowalności poszczególnych wzorów przed przyjęciem konkretnych liczb podziału n i k jest ze względu na dużą ilość zmiennych parametrów zbyt trudne.

Dla celów praktycznych należy wykonywać podstawienia do wzorów (4.7) i (4.9) i wybierać min p .

Podamy jeszcze rozwiązania dla ustroju podpartego przegubowo na 4 krawędziach. Oznaczmy

$$\varphi_1 = \frac{(n-1) M_{b1}}{m_b a} \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{(k-1) M_{a1}}{(n-1) M_{b1}}.$$

Dla geometrycznie możliwych mechanizmów zniszczenia III i IV (rys. 7) otrzymujemy

$$(4.10) \quad p_{III} = \frac{12m_b}{b^2} \left[1 + \frac{n^2}{k^2} \frac{\beta^4}{\left(3 - 2\beta^2 \frac{n^2}{k^2}\right)} + \varphi_1 (1 + \beta\omega) \right],$$

zaś p_{IV} identyczne z (4.9)₄.

Jednoczesne zniszczenie płyt i żeber nastąpi dla

$$(4.11) \quad \varphi_1 (1 + \beta\omega) = \frac{k^2 (2k^2 - 3) + n^2 \beta^2 (2 - \beta^2)}{3k^2 - 2\beta^2 n^2}.$$

5. Podział konstrukcji na n^2 równych prostokątów

Konstrukcja ta jest szczególnym przypadkiem ($n = k$) omawianej w poprzednim rozdziale.

Współczynnik ortotropii płyt składowych wynosi tutaj $\kappa_e = m_a/m_b = \beta^2/(3 - 2\beta^2)$. Oznaczamy

$$\varphi = \frac{M_b}{m_b a}, \quad \alpha = \frac{(n-1) M_{b1}}{M_b} = \frac{(n-1) M_{a1}}{M_a}, \quad \omega = \frac{M_a}{M_b}.$$

Obciążenia łamiące wynoszą

$$(5.1) \quad \begin{aligned} p_I &= \frac{12m_b}{b^2} \frac{1}{3 - 2\frac{rs}{n^2}} \left[\frac{r}{s} + \frac{s}{r} \frac{\beta^4}{(3 - 2\beta^2)} + n\varphi \left(\frac{1}{s} + \beta\omega \frac{1}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{n-1} \varphi \alpha \left(\frac{r-1}{s} + \beta\omega \frac{s-1}{r} \right) \right], \\ p_{IIa} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{IIb} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[1 + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{III} &= \frac{12m_b}{b^2} \left[1 + \frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + \varphi \alpha (1 + \beta\omega) \right], \\ p_{IV} &= \frac{24m_b}{b^2} \frac{n^2}{3 - 2\beta^2}. \end{aligned}$$

Odnośnie wzoru (5.1)₁ muszą być spełnione, jak poprzednio, warunki (4.8).

Wyboru odpowiedniego schematu zniszczenia można dokonywać metodą prób. Zapišemy jeszcze wyniki dotyczące ustroju składającego się z n^2 płyt, podpartego swobodnie na wszystkich krawędziach. Oznaczamy

$$\varphi_1 = \frac{(n-1) M_{b1}}{m_b a} \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{M_{a1}}{M_{b1}}.$$

Wielkości obciążeń granicznych wynoszą

$$(5.2) \quad p_{\text{III}} = \frac{12m_b}{b^2} \left[1 + \frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + \varphi_1 (1 + \beta\omega) \right],$$

zaś p_{IV} zgodnie ze wzorem (5.1)₅.

Równanie $p_{\text{III}} = p_{\text{IV}}$ doprowadza do znalezienia warunku (istotnego przy prawidłowym zaprojektowaniu ustroju)

$$(5.3) \quad \varphi_1 (1 + \beta\omega) = \frac{2n^2 - 3 + \beta^2 (2 - \beta^2)}{3 - 2\beta^2}.$$

6. Podział na 9 nierównych prostokątów

Ustrój ten przedstawiony jest na rys. 8. Wskaźnik podziału ustroju na podstawowe płyty prostokątne wynosi $\delta = c/a = d/b$ oraz współczynnik pomocniczy

$$\xi = \frac{c^2}{(a-2c)^2} = \frac{d^2}{(b-2d)^2} = \frac{\delta^2}{(1-2\delta)^2}.$$

Płyty ustroju traktujemy jako plastycznie ortotropowe wprowadzając od razu ortotropię ekonomiczną oraz zakładając, że ich nośność graniczna jest jednakowa (z uwagi na podstawowy «płytyowy» mechanizm zniszczenia). Dzięki temu 8 niezależnych modułów płytowych redukuje się do jednego (przez wykorzystanie 7 związków: 4 wzorów na ortotropię ekonomiczną i 3 równości obciążeń granicznych).

Odróżniamy od razu trzy przypadki ze względu na wskaźnik podziału δ :

$$(6.1) \quad \frac{1}{2+\beta} \leq \delta \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\beta^2} \leq \xi < \infty,$$

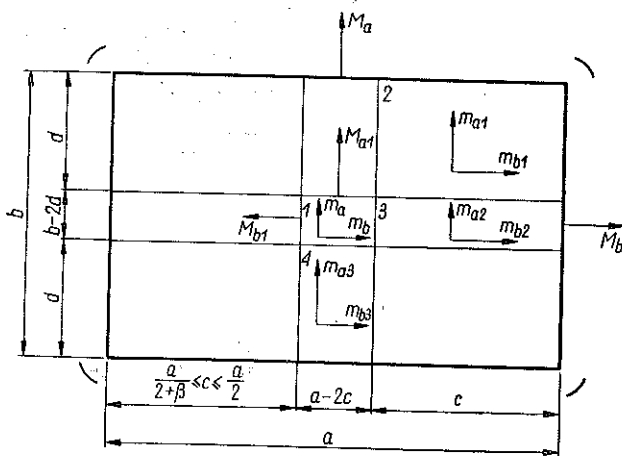
$$(6.2) \quad \frac{1}{2+1/\beta} \leq \delta \leq \frac{1}{2+\beta}, \quad \beta^2 \leq \xi \leq \frac{1}{\beta^2},$$

$$(6.3) \quad 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2+1/\beta}, \quad 0 \leq \xi \leq \beta^2.$$

Rozpatrujemy je kolejno.

Przypadek 6.1 (rys. 8). Jest to taki przypadek ustroju, przy którym kalenice daszków zniszczenia mają kierunek boku a dla płyt 1, 2 i 3, kierunek zaś prostopadły dla płyt 4. Jak wspomiano wyżej, wykorzystanie wzorów na κ_e i równań typu $p_i = p_{i+1}$, gdzie $i = 1, 2, 3$, doprowadza do określenia wszystkich modułów płytowych w zależności od jednego, np. m_{b1} :

$$(6.4) \quad \begin{aligned} m_a &= \frac{\beta^2}{(3 - 2\beta^2)\xi} m_{b1}, & m_b &= \frac{1}{\xi} m_{b1}, \\ m_{a1} &= \frac{\beta^2}{3 - 2\beta^2} m_{b1}, \\ m_{a2} &= \frac{\beta^2}{(3 - 2\beta^2)\xi^2} m_{b1}, & m_{b2} &= \frac{3\xi - 2\beta^2}{(3 - 2\beta^2)\xi^2} m_{b1}, \\ m_{a3} &= \frac{3\beta^2\xi - 2}{(3 - 2\beta^2)\xi^2\beta^4} m_{b1}, & m_{b3} &= \frac{1}{(3 - 2\beta^2)\xi^2\beta^4} m_{b1}. \end{aligned}$$



Rys. 8

Wprowadzamy wskaźniki plastyczne

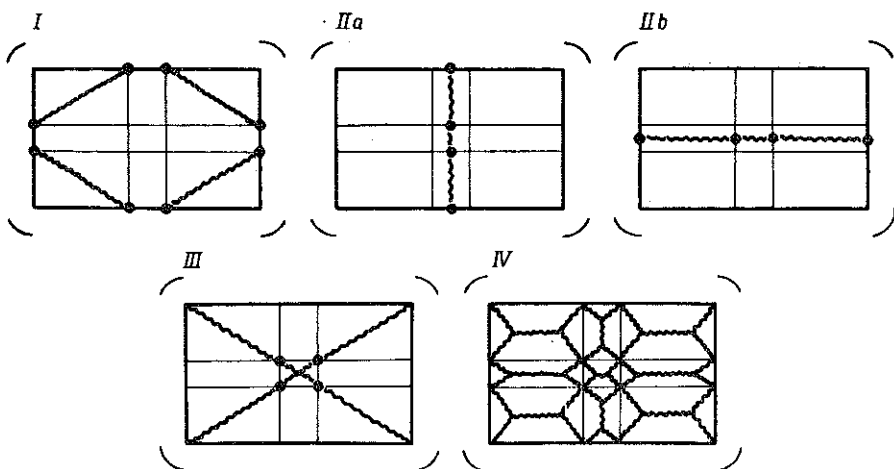
$$(6.5) \quad \varphi = \frac{M_b}{m_{b1}a}, \quad \alpha = \frac{2M_{a1}}{M_a} = \frac{2M_{b1}}{M_b}, \quad \omega = \frac{M_a}{M_b}$$

i rozpatrujemy pięć podstawowych, kinematycznie możliwych schematów zniszczenia, które przedstawione są na rys. 9.

Wielkości obciążeń granicznych, odpowiadających tym mechanizmom, są:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} p_I &= \frac{4m_{b1}}{b^2 \left(1 - \frac{2}{3}\delta^2\right)} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 + \frac{\varphi}{\delta} (1 + \beta\omega) \right], \\ p_{IIa} &= \frac{8m_{b1}}{b^2} \left[\frac{(1 - 2\delta)^2}{\delta^3} - \frac{\delta^2(2\beta^6 - 6\beta^2 + 16) + \delta(\beta^6 + 16) - 4}{\beta^2(3 - 2\beta^2)} + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{a}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$(6.6) \quad \begin{aligned} p_{\text{IIb}} &= \frac{8m_{b1}}{b^2} \left[\frac{(1-2\delta)^2}{\delta^3} \frac{12\beta^2\delta^2 + \delta(14\beta^2 + 3) - 4\beta^2}{3 - 2\beta^2} + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{\text{III}} &= \frac{12m_{b1}}{b^2} \left\{ \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 \right] \left[\frac{(1-2\delta)^3}{\delta^2} + 2\delta \right] + \varphi\alpha(1 + \beta\omega) \right\}, \\ p_{\text{IV}} &= \frac{24m_{b1}}{b^2} \frac{1}{(3 - 2\beta^2)\delta^2}. \end{aligned}$$



Rys. 9

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku granicznym $\delta = 1/2$, tzn. gdy płyty 1, 3 i 4 degenerują się, wzory (6.6)₂ i (6.6)₃ należy zastąpić wzorami

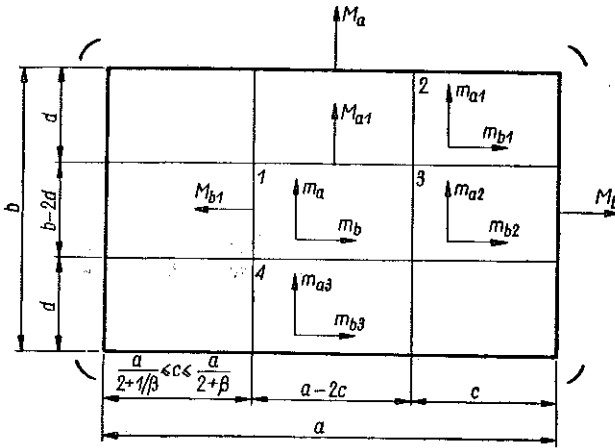
$$(6.7) \quad \begin{aligned} p_{\text{IIa}} &= \frac{8m_{b1}}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{\text{IIb}} &= \frac{8m_{b1}}{b^2} \left[1 + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Przypadek 6.2 (rys. 10). W tym przypadku kalenice daszków zniszczenia tworzą się we wszystkich płytach równoległe do dłuższego boku ustroju a . Jednostkowe momenty graniczne w płytach uzależniamy teraz od momentu m_b :

$$(6.8) \quad \begin{aligned} m_a &= \frac{\beta^2}{3 - 2\beta^2} m_b, \\ m_{a1} &= \frac{\beta^2 \xi}{3 - 2\beta^2} m_b, & m_{b1} &= \xi m_b, \\ m_{a2} &= \frac{\beta^2}{(3 - 2\beta^2) \xi} m_b, & m_{b2} &= \frac{3\xi - 2\beta^2}{(3 - 2\beta^2) \xi} m_b, \\ m_{a3} &= \frac{\beta^2 \xi^2}{3 - 2\beta^2} m_b, & m_{b3} &= \frac{(3 - 2\beta^2 \xi) \xi}{3 - 2\beta^2} m_b. \end{aligned}$$

Wskaźnik sztywności żeber skrajnych definiujemy jako $\varphi = M_b/m_b a$, dwa pozostałe a i ω zgodnie z zapisem (6.5). Obciążenia graniczne dla schematów zniszczenia podobnych do przedstawionych na rys. 9 wynoszą zgodnie z zasadą prac przygotowanych:

$$\begin{aligned}
 P_I &= \frac{4m_b}{b^2(1-\frac{2}{3}\delta^2)} \left[\frac{\delta^2}{(1-2\delta)^2} \left(\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 \right) + \frac{\varphi}{\delta} (1+\beta\omega) \right], \\
 P_{IIa} &= \frac{8m_b}{b^2} \left\{ \frac{\beta^4}{3-2\beta^2} \left[\frac{2\delta^5}{(1-2\delta)^4} + 1 - 2\delta \right] + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right\}, \\
 (6.9) \quad P_{IIb} &= \frac{8m_b}{b^2} \left\{ \frac{2[3\delta^2 - 2\beta^2(1-2\delta)^2]}{\delta(3-2\beta^2)} + 1 - 2\delta + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right\}, \\
 P_{III} &= \frac{12m_b}{b^2} \left\{ \left(\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 \right) \left[\frac{2\delta^3}{(1-2\delta)^2} + 1 - 2\delta \right] + \varphi a (1+\beta\omega) \right\}, \\
 P_{IV} &= \frac{24m_b}{b^2} \frac{1}{(3-2\beta^2)(1-2\delta)^2}.
 \end{aligned}$$



Rys. 10

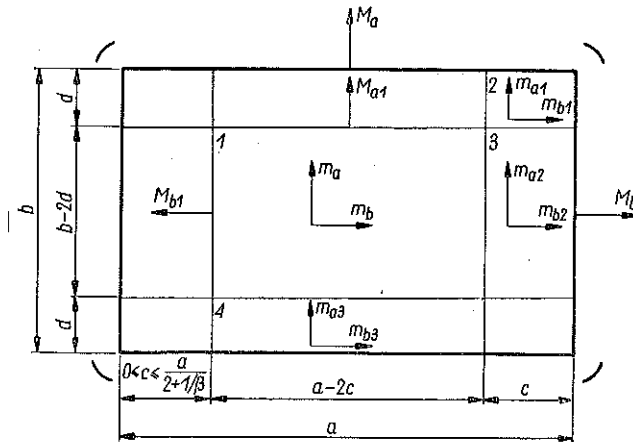
Przypadek 6.3 (rys. 11). Tutaj kalenice daszków zniszczenia mają kierunek dłuższego boku ustroju dla płyt 1, 2 i 4, zaś kierunek prostopadły dla płyt 3.

Jak poprzednio płytowe moduły plastyczne uzależniamy od m_b :

$$\begin{aligned}
 (6.10) \quad m_a &= \frac{\beta^2}{3-2\beta^2} m_b, \\
 m_{a1} &= \frac{\beta^2 \xi}{3-2\beta^2} m_b, \quad m_{b1} = \xi m_b,
 \end{aligned}$$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} m_{a2} &= \frac{(3\beta^2 - 2\xi)\xi}{(3 - 2\beta^2)\beta^4} m_b, & m_{b2} &= \frac{\xi^2}{(3 - 2\beta^2)\beta^4} m_b, \\ m_{a3} &= \frac{\beta^2 \xi^2}{3 - 2\beta^2} m_b, & m_{b3} &= \frac{(3 - 2\beta^2)\xi}{3 - 2\beta^2} m_b. \end{aligned}$$

Wskaźniki φ , α i ω posiadają to samo znaczenie, co dla przypadku 6.2.



Rys. 11

Wielkości obciążeń granicznych w powiązaniu z odpowiednimi mechanizmami (rys. 9) przedstawiają się następująco:

$$(6.11) \quad \begin{aligned} p_{\text{I}} &= \frac{4m_b}{b^2(1 - \frac{2}{3}\delta^2)} \left[\frac{\delta^2}{(1 - 2\delta)^2} \left(\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 \right) + \frac{\varphi}{\delta} (1 + \beta\omega) \right], \\ p_{\text{IIa}} &= \frac{8m_b}{b^2} \left\{ \frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} \left[\frac{2\delta^5}{(1 - 2\delta)^4} + 1 - 2\delta \right] + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right\}, \\ p_{\text{IIb}} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[\frac{2\delta^5}{(1 - 2\delta)^4 (3 - 2\beta^2)\beta^4} + 1 - 2\delta + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{\text{III}} &= \frac{12m_b}{b^2} \left\{ \left(\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 \right) \left[\frac{2\delta^3}{(1 - 2\delta)^2} + 1 - 2\delta \right] + \varphi\alpha (1 + \beta\omega) \right\}, \\ p_{\text{IV}} &= \frac{24m_b}{b^2} \frac{1}{(3 - 2\beta^2)(1 - 2\delta)^2}. \end{aligned}$$

Ze względu na zbyt skomplikowane związki, określające obciążenia graniczne dla omawianego w tym rozdziale dość ogólnego przypadku ustroju płytowo-żebrowego, badanie zakresu stosowalności poszczególnych wzorów oraz określanie współczynników plastycznych, zapewniających jednoczesne zniszczenie się elementów składowych konstrukcji, przeprowadzone będzie w następnych rozdziałach

dla szczególnych przypadków podziału ustroju np. $\delta = 0$, $\delta = 1/2$ i $\delta = 1/3$. Na tym miejscu podamy jeszcze wyniki metody kinematycznej dla ustroju o dowolnym podziale na płyty, w którym żebra skrajne zastąpione są przegubowymi podparciami wzdłuż krawędzi. Tutaj (ze względu na więzy boków ustroju) możemy brać pod uwagę jedynie schematy III i IV (rys. 9).

Przypadek $1/(2+\beta) \leq \delta \leq 1/2$. Moduły płytowe określone są wzorami (6.4). Wskaźniki plastyczne oznaczamy następująco:

$$(6.12) \quad \varphi_1 = \varphi a = \frac{2M_{b1}}{m_{b1} a}, \quad \omega = \frac{M_{a1}}{M_{b1}}.$$

Wielkości obciążeń granicznych wynoszą

$$(6.13) \quad p_{III} = \frac{12m_{b1}}{b^2} \left\{ \left(\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 \right) \left[\frac{(1-2\delta)^3}{\delta^2} + 2\delta \right] + \varphi_1 (1+\beta\omega) \right\},$$

$$p_{IV} = \frac{24m_{b1}}{b^2} \frac{1}{(3-2\beta^2)^2 \delta^2}.$$

Nas interesuje najbardziej przypadek $p_{III} = p_{IV}$, przy którym ulegają zniszczeniu jednocześnie wszystkie płyty składowe ustroju oraz obie pary żeber pośrednich. Ma on miejsce dla wartości

$$(6.14) \quad \varphi_1 (1+\beta\omega) = \frac{2 - (\beta^4 - 2\beta^2 + 3) [(1-2\delta)^3 + 2\delta^3]}{(3-2\beta^2) \delta^2}.$$

Jeżeli we wzorze (6.14) wprowadzić na miejsce równości znak $<$, to ustrój zniszczy się według mechanizmu III, jeżeli $>$, to według mechanizmu IV.

Przypadek $1/(2+1/\beta) \leq \delta \leq 1/(2+\beta)$. Moduły płyt należy w tym przypadku dobrać zgodnie ze wzorami (6.8).

Wskaźniki plastyczne oznaczamy

$$(6.15) \quad \varphi_1 = \frac{2M_{b1}}{m_b a} (= \varphi a), \quad \omega = \frac{M_{a1}}{M_{b1}}.$$

Obciążenia graniczne związane ze schematami zniszczenia III i IV posiadają wartości

$$(6.16) \quad p_{III} = \frac{12m_b}{b^2} \left\{ \left(\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 \right) \left[\frac{2\delta^3}{(1-2\delta)^2} + 1 - 2\delta \right] + \varphi_1 (1+\beta\omega) \right\},$$

$$p_{IV} = \frac{24m_b}{b^2} \frac{1}{(3-2\beta^2)(1-2\delta)^2}.$$

Założenie $p_{III} = p_{IV}$ doprowadza do wyniku

$$(6.17) \quad \varphi_1 (1+\beta\omega) = \frac{2 - (\beta^4 - 2\beta^2 + 3) [(1-2\delta)^3 + 2\delta^3]}{(3-2\beta^2)(1-2\delta)^2},$$

Analiza znaków nierówności doprowadza do takich samych wniosków, jak dla przypadku (6.14).

Przypadek $0 \leq \delta \leq 1/(2+1/\beta)$. Moduły plastyczne płyt należy tu przyjmować zgodnie z wzorami (6.10), wskaźniki φ_1 i ω jak w (6.15). Na obciążenia graniczne i wielkość $\varphi_1(1+\beta\omega)$ słuszne są wzory (6.16) i (6.17).

Należy zauważyć, że zgodnie z oznaczeniami (6.12) możemy napisać

$$\varphi_1(1+\beta\omega) = \frac{2}{m_{b1}a} \left(M_{b1} + \frac{b}{a} M_{a1} \right).$$

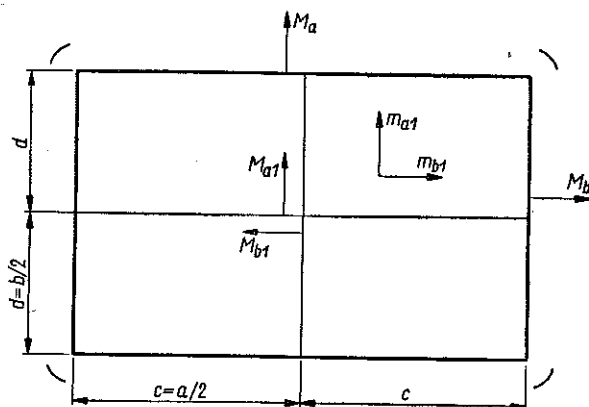
Biorąc pod uwagę wzory (6.14) i (6.17), z których wynika, że $\varphi_1(1+\beta\omega)$ jest dla prawidłowo zaprojektowanego ustroju wielkością zależną jedynie od jego wymiarów (a więc dla danego ustroju stałą), dochodzimy do następującego ważnego wniosku.

Dla ustroju płytowo-żebrowego z dwoma parami żeber pośrednich, podpartego przegubowo wzdłuż krawędzi, suma mocy plastycznej przekrojów żeber pośrednich (odniesionej do jednostki długości każdego z nich) jest ściśle określona. Oznacza to, że w zakresie tej sumy moduły plastyczne żeber na zginanie można zmieniać zachowując jedynie warunek ich dystrybucji

$$\frac{M_{b1}}{b} + \frac{M_{a1}}{a} = \text{const.}$$

7. Podział na cztery równe prostokąty

Ustrój ten, charakteryzujący się współczynnikiem $\delta = 1/2$ ($\xi = \infty$), przedstawiony jest na rys. 12.



Rys. 12

Stosownie do wzorów (6.4) dla przypadku ogólnego mamy tu do czynienia jedynie z modułami płytowymi m_{b1} i $m_{a1} = \beta^2 m_{b1}/(3 - 2\beta^2)$.

Oznaczamy podobnie jak (6.5)

$$\varphi = \frac{M_b}{m_{b1}a}, \quad \alpha = \frac{M_{a1}}{M_a} = \frac{M_{b1}}{M_b}, \quad \omega = \frac{M_a}{M_b}.$$

Obciążenia graniczne dla kolejnych schematów zniszczenia wynoszą

$$\begin{aligned}
 p_I &= \frac{4,8 m_{b1}}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 + 2\varphi(1 + \beta\omega) \right], \\
 p_{IIa} &= \frac{8 m_{b1}}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\
 p_{IIb} &= \frac{8 m_{b1}}{b^2} \left[1 + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\
 p_{III} &= \frac{12 m_{b1}}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 + \varphi\alpha(1 + \beta\omega) \right], \\
 p_{IV} &= \frac{96 m_{b1}}{b^2} \frac{1}{3 - 2\beta^2}.
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Wzory te odnoszą się do przypadku, gdy przekroje płyt przy podporach pośrednich (żebrawach pośrednich) mają zdolność przenoszenia takich samych dodatnich momentów zginających, jak przekroje przęsłowe (dla ustroju żelbetowego odpowiada to skonstruowaniu płyt z zachowaniem ciągłości zbrojenia dolnego przy żebrawach pośrednich). W przypadku przeciwnym należy we wzorze (7.1)₂ pominąć wyraz $\beta^4/(3 - 2\beta^2)$, zaś we wzorze (7.1)₃ pierwszą jedynkę.

Ograniczając się do przypadku ciągłości zajmiemy się teraz określeniem takich wartości φ , α i ω , których wykorzystanie w trakcie projektowania konstrukcji doprowadzi do jednoczesnego zniszczenia wszystkich elementów składowych ustroju.

Istnieją tutaj dwie możliwości, które można przedstawić następująco:

$$p_I = p_{IIa} = p_{IIb} = p_{III} \quad \text{lub} \quad p_I = p_{III} = p_{IV}.$$

Wykorzystanie pierwszej z nich wymaga rozwiązania układu czterech równań: (7.1)₁-(7.1)₄ z czterema niewiadomymi α , φ , ω i p . Pomijając wszystkie dość żmudne operacje rachunkowe podamy ostateczne wyniki, oznaczając przy tym dla uproszczenia $\beta^4/(3 - 2\beta^2) = \varrho$:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2}, & \varphi &= 0,8 + 1,2 \varrho, \\
 \omega &= \frac{3 + 2\varrho}{\beta(2 + 3\varrho)}, & p &= \frac{24 m_{b1}}{b^2} (\varrho + 1).
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Powyzsze wskaźniki plastyczne uzależnione od β przedstawione są graficznie na rys. 13.

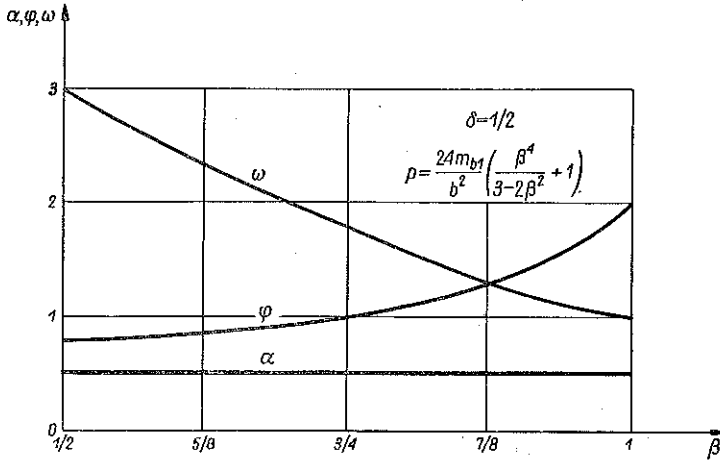
Wykorzystanie drugiej możliwości ze względu na kombinację podstawowych mechanizmów zniszczenia polega na rozwiązaniu układu trzech równań: (7.1)₁, (7.1)₄ i (7.1)₅ ze względu na poszukiwane wielkości α , $\varphi(1 + \beta\omega)$ i p . Otrzymujemy

$$(7.3) \quad \alpha = \frac{2(5+2\beta^2-\beta^4)}{17+2\beta^2-\beta^4},$$

$$\varphi(1+\beta\omega) = \frac{17+2\beta^2-\beta^4}{2(3-2\beta^2)}, \quad p = \frac{96m_{b1}}{b^2} \frac{1}{3-2\beta^2}.$$

Wykres tych zależności przedstawiony jest na rys. 14.

Łatwo sprawdzić, że obciążenie niszczące według wzoru (7.3)₃ jest zawsze (dla każdego $\beta \leq 1$) większe od wartości, określonej wzorem (7.2)₄. Zastosowanie więc drugiej możliwości prowadzi do lepszego wykorzystania własności nośnych omawianego ustroju.



Rys. 13

Ze wzoru (7.3)₂ wynika (podobnie jak w p. 6), że dla ustroju o określonym współczynniku geometrycznym β nośność jego nie zmienia się, o ile suma mocy plastycznej żeber zarówno pośrednich jak i skrajnych, odniesionej do jednostki długości żebra, jest stała.

Przejdziemy teraz do analizy ustroju opisanego wyżej, lecz podpartego przegubowo wzdłuż czterech krawędzi.

Wielkości obciążeń łamiących dla schematów III i IV wynoszą

$$(7.4) \quad p_{III} = \frac{12m_{b1}}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 + \varphi_1(1+\beta\omega) \right],$$

$$p_{IV} = \frac{96m_{b1}}{b^2} \frac{1}{3-2\beta^2}.$$

Równoczesne zniszczenie płyt i żeber pośrednich następuje przy wartości

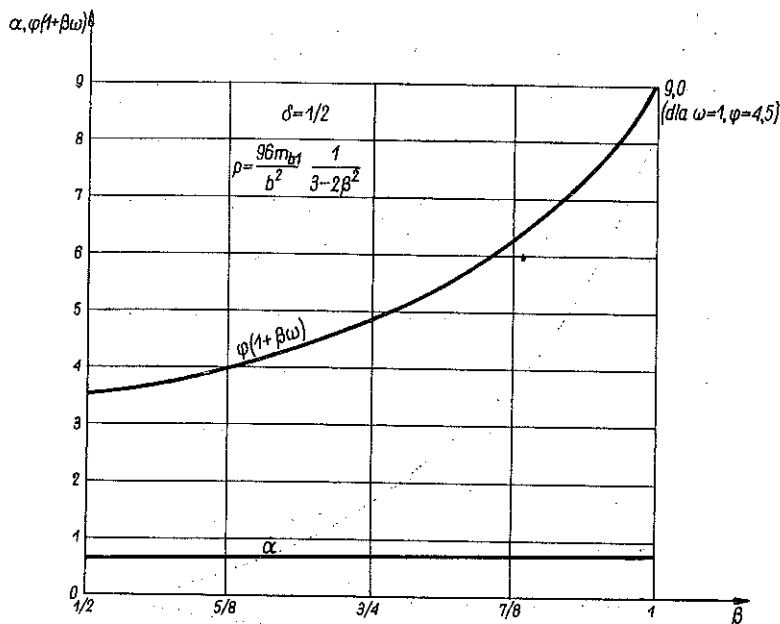
$$(7.5) \quad \varphi_1(1+\beta\omega) = \frac{5+2\beta^2-\beta^4}{3-2\beta^2}.$$

Obciążenie graniczne najłatwiej wtedy obliczyć ze wzoru (7.4)₂.

Na zakończenie tego punktu rozpatrzmy przypadek $\delta = 0$ ($\xi = 0$). Odpowiada mu ustrój wyposażony jedynie w żebra skrajne i jedną płytę o wymiarach $a \times b$. Współczynniki plastyczne wynoszą

$$\left[\varphi = \frac{M_b}{m_b a}, \quad a = 0, \quad \left[\omega = \frac{M_a}{M_b}, \right. \right.$$

zaś moduły płytowe poza m_b i $m_a = \beta^2 m_b / (3 - 2\beta^2)$ znikają.



Rys. 14

Schemat zniszczenia I prowadzi zawsze do obciążenia granicznego większego od IIa i IIb, natomiast schemat III nie jest możliwy, jeśli $m_a/m_b = \kappa_e$.

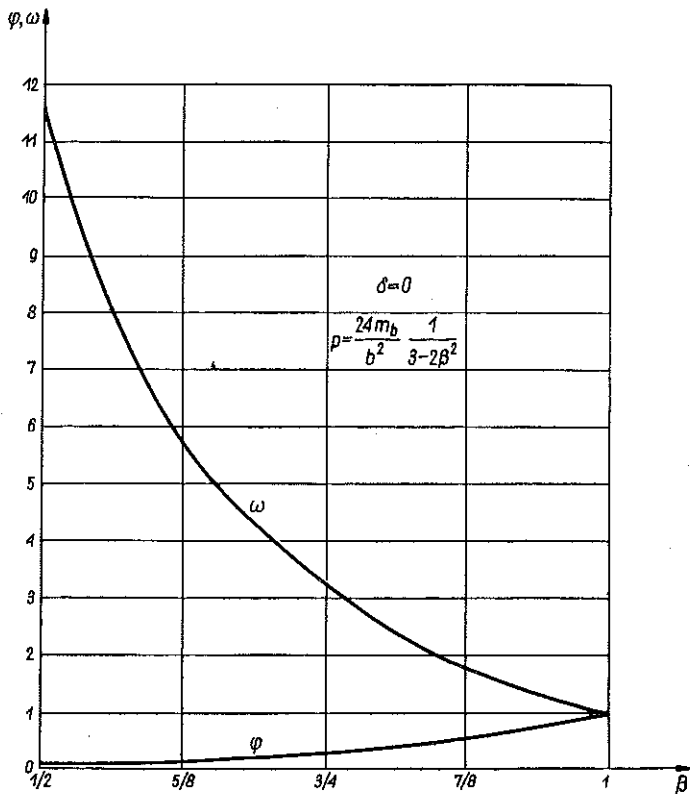
Obciążenia łamiące wynoszą

$$(7.6) \quad \begin{aligned} P_{IIa} &= \frac{8m_b}{b^2} \left(\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 2\beta\varphi\omega \right), \\ P_{IIb} &= \frac{8m_b}{b^2} (1 + 2\varphi), \\ P_{IV} &= \frac{24m_b}{b^2} \frac{1}{3 - 2\beta^2}. \end{aligned}$$

Przyrównanie ich do siebie czyli żądanie, aby łamały się równocześnie żebra dłuższe i krótsze oraz płyta, doprowadza do wzorów:

$$(7.7) \quad \varphi = \frac{\beta^2}{3 - 2\beta^2}, \quad \omega = \frac{3 - \beta^4}{2\beta^3}.$$

Wyniki te są zgodne z rezultatami uzyskanymi w pracy [1]. Wykresy pozwalające na bezpośrednie odczytanie wartości φ i ω jako funkcji stosunku boków ustroju β przedstawione są na rys. 15.



Rys. 15

8. Podział na dziewięć równych prostokątów

Ustrój ten, określony współczynnikiem podziału $\delta = 1/3$ ($\xi = 1$), przedstawiony jest na rys. 16.

Mamy tu do czynienia z dwoma modułami płytowymi:

$$m_b \text{ i } m_a = \beta^2 m_b / (3 - 2\beta^2).$$

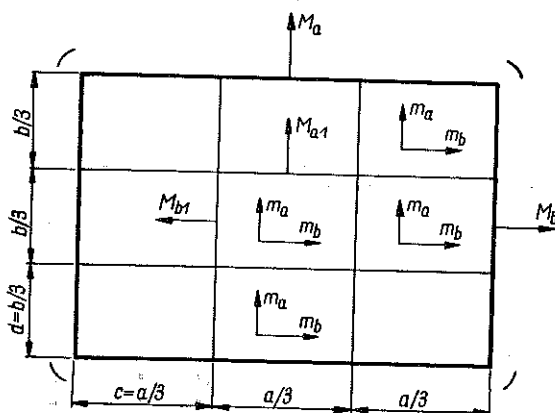
Oznaczamy podobnie jak poprzednio

$$\varphi = \frac{M_b}{m_b a}, \quad \alpha = \frac{2M_{a1}}{M_a} = \frac{2M_{b1}}{M_b}, \quad \omega = \frac{M_a}{M_b}.$$

Obciążenia graniczne dla kolejnych kinematycznie możliwych schematów zniszczenia przybierają wartości:

$$\begin{aligned}
 p_I &= \frac{4,32m_b}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 + 3\varphi(1+\beta\omega) \right], \\
 p_{IIa} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 2\beta\varphi\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\
 p_{IIb} &= \frac{8m_b}{b^2} \left[1 + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\
 p_{III} &= \frac{12m_b}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3-2\beta^2} + 1 + \varphi\alpha(1+\beta\omega) \right], \\
 p_{IV} &= \frac{216m_b}{b^2} \frac{1}{3-2\beta^2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Określmy takie wartości φ , α i ω , przy których nastąpi omówiony już przypadek jednoczesnego zniszczenia wszystkich elementów ustroju płytowo-żebrowego.



Rys. 16

Analiza przypadku $p_I = p_{IIa} = p_{IIb} = p_{III}$ doprowadza do wniosku, że nie istnieje taka trójka dodatnich wartości φ , α i ω , dla której możliwe jest równo-uprawnione zniszczenie się ustroju według schematów, oznaczonych wyżej indeksami przy p . Podobnie zresztą (por. p. 12) w przypadku $\beta = 1$ niemożliwe jest jednoczesne załamanie konstrukcji zgodnie ze schematami I, II i III (rys. 28).

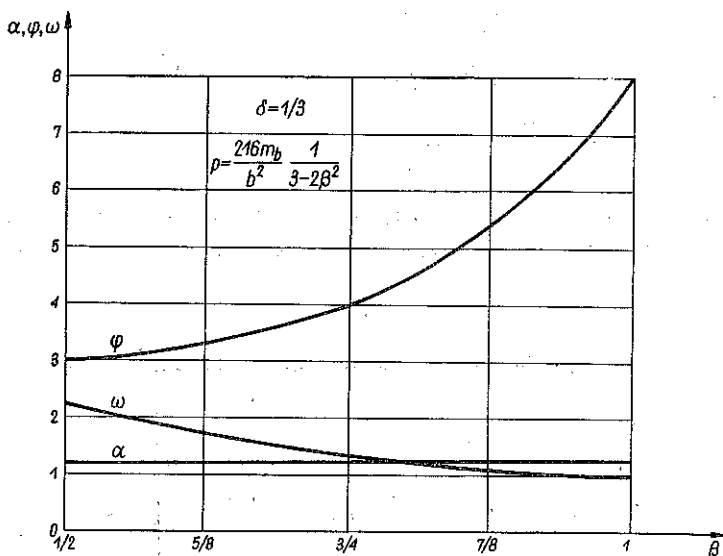
Rozpatrzenie równości $p_I = p_{IIa} = p_{IIb} = p_{IV}$, czyli formalnie biorąc rozwiązanie trzech równań algebraicznych z trzema niewiadomymi, daje rezultaty następujące:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{2124 - 1167\beta^2 - 196\beta^4 + 17\beta^6 + 2\beta^8}{1692 - 915\beta^2 - 172\beta^4 + 17\beta^6 + 2\beta^8}, \\
 \varphi &= \frac{2}{3} \frac{564 + 71\beta^2 - 10\beta^4 - \beta^6}{153 - 96\beta^2 - 7\beta^4 + 2\beta^6}, \\
 \omega &= \frac{27 - \beta^4}{2\beta(12 + \beta^2)}.
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

Należy zaznaczyć, że dla praktycznie ważnych wartości $1/2 \leq \beta \leq 1$ można w przybliżeniu przyjmować współczynnik α ze wzoru (8.2)₁ jako wartość stałą

$$(8.3) \quad \alpha = 1,25.$$

Odczytanie wielkości współczynników plastycznych jako funkcji β z pominięciem żmudnych rachunków umożliwiają wykresy przedstawione na rys. 17.



Rys. 17

Pozostaje jeszcze, zgodnie z postulatem jednoczesnego zniszczenia wszystkich elementów, wykorzystanie równości $p_{IIa} = p_{IIb} = p_{III} = p_{IV}$.

Rozwiązanie układu trzech równań daje następujące wyniki:

$$(8.4) \quad \alpha = \frac{15 + 2\beta^2 - \beta^4}{18},$$

$$\varphi = \frac{36(12 + \beta^2)}{(3 - 2\beta^2)(51 + 2\beta^2 - \beta^4)},$$

$$\omega = \frac{27 - \beta^4}{2\beta(12 + \beta^2)}.$$

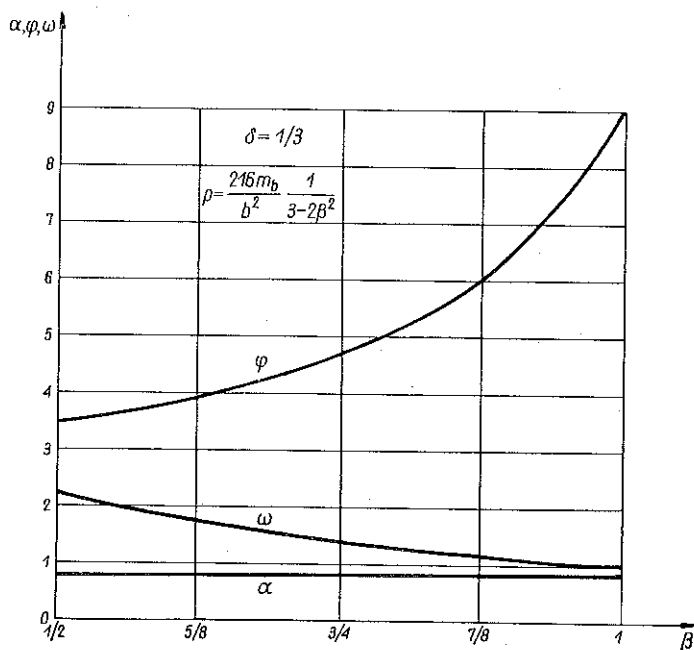
Wyniki te w postaci wykresów przedstawiono na rys. 18. Nie różnią się one wiele od wykresów poprzednich i teoretycznie nie ma powodu, aby którekolwiek z nich uprzywilejować. Zastosowanie jednego bądź drugiego układu wartości α , φ i ω określa tę samą nośność według wzoru (8.1)₅.

Przejdziemy teraz do analizy ustroju płytowo-żebrowego przedstawionego na rys. 16, lecz o żebkach skrajnych nieskończenie sztywnych (tzn. podpartego swobodnie wzdłuż czterech krawędzi). Przyjmujemy oznaczenia (6.15).

Wielkości obciążeń łamiących dla schematów zniszczenia III i IV wynoszą:

$$(8.5) \quad p_{III} = \frac{12m_b}{b^2} \left[\frac{\beta^4}{3 - 2\beta^2} + 1 + \varphi_1(1 + \beta\omega) \right],$$

$$p_{IV} = \frac{216m_b}{b^2} \frac{1}{3 - 2\beta^2}.$$



Rys. 18

Równoczesne zniszczenie płyt i żebier pośrednich następuje przy wartości

$$(8.6) \quad \varphi_1(1 + \beta\omega) = \frac{15 + 2\beta^2 - \beta^4}{3 - 2\beta^2}.$$

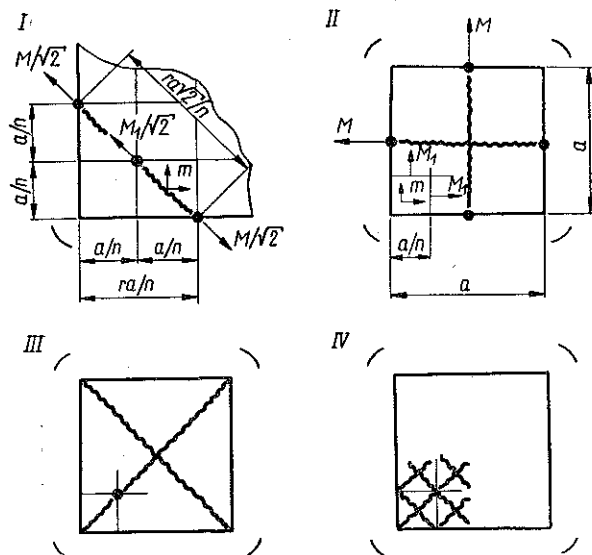
Budowa lewej strony wyrażenia (8.6) wskazuje na to, że moduły plastyczne żebier pośrednich można w pewnych granicach zmieniać zachowując przy tym warunek sformułowany na końcu rozdziału 6.

9. Podział na n^2 równych kwadratów

Ustrój ten posiada cztery żebra skrajne i podzielony jest na n^2 jednakowych, izotropowych płyt przy pomocy $2(n - 1)$ żebier, przy czym n może być dowolną liczbą całkowitą nie mniejszą od 2. Stanowi on przypadek szczególny układu omówionego w p. 5 ($\beta = 1, r = s$).

Podstawowe mechanizmy zniszczenia dla tego ustroju przedstawiono na rys. 19. Ponieważ siatka zniszczenia 19.I (przedstawiona w powiększeniu dla jednej ćwiartki

ustroju) nie jest wyznaczona jednoznacznie samymi wymiarami ustroju, przyjmujemy, że jej kształt zależy od jednego parametru r (ze względu na podwójną symetrię). Oznacza to, że przegub plastyczny w zębrze skrajnym tworzy się w r -tym



Rys. 19

skrzyżowaniu żebra pośredniego z tymże żebrzem skrajnym licząc od najbliższego naroża ustroju. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\varphi = \frac{M}{ma} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{(n-1)M_1}{M}$$

oraz wykorzystaniu wzoru (5.1)₁ otrzymujemy wielkość obciążenia granicznego

$$(9.1) \quad p_1 = \frac{24m}{a^2} \frac{1}{3 - 2\frac{r^2}{n^2}} \left[1 + \frac{n}{r} \varphi \left(1 + \frac{r-1}{n-1} \alpha \right) \right].$$

Liczba całkowita r zawarta jest w granicach $1 \leq r \leq n/2$ i musi być dobrana tak, aby $p_1(r) = \min p_1$.

Ze względu na nieciągłość parametru r (wynikającą z wykorzystanego już założenia, że przeguby plastyczne mogą tworzyć się w miejscach skrzyżowania żeber) różniczkowanie funkcji $p_1(r)$ daje wynik orientacyjny. Po wprowadzeniu współczynnika kształtu siatki zniszczenia $\bar{\varepsilon} = r/n$ warunek $\partial p_1 / \partial \bar{\varepsilon} = 0$ doprowadza po odpowiednich przekształceniach do równania

$$(9.2) \quad \frac{\bar{\varepsilon}^3}{1 - 2\bar{\varepsilon}^2} = \frac{3\varphi(n-1-\alpha)}{4(n-1+\varphi\alpha n)}.$$

Należy obliczyć pierwiastek tego równania mieszczący się w przedziale $1/n \leq \bar{\varepsilon} \leq 1/2$, a następnie wziąć pod uwagę najbliższą mu mniejszą oraz większą wartość $\bar{\varepsilon}$, której

licznik jest liczbą całkowitą r . Przez dwukrotne podstawienie do wzoru (9.1) i wykorzystanie warunku $p_1(r) = \min p_1$ dochodzimy do poszukiwanego r .

Dodamy, że dla niezbyt wielkiej liczby podziału n bezpośrednia metoda prób prościej prowadzi do wyniku na r .

Dla następnych mechanizmów zniszczenia konstrukcji otrzymujemy wielkości obciążeń łamiących korzystając ze wzorów (5.1)₂-(5.1)₅

$$(9.3) \quad \begin{aligned} p_{II} &= \frac{8m}{a^2} \left[1 + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{III} &= \frac{24m}{a^2} (1 + \varphi\alpha), \\ p_{IV} &= \frac{24m}{a^2} n^2. \end{aligned}$$

Poszukiwanie stref stosowalności poszczególnych wzorów na obciążenie graniczne przed sprecyzowaniem liczby podziału n prowadzi do rozpatrywania zagadnienia w przestrzeni pięciowymiarowej, przy czym równania stref są funkcjami $\varphi = \varphi(a, n, \varepsilon)$. Dla celów praktycznych prostsza wydaje się metoda podstawiania do wzorów (9.1), (9.3) i wybór $\min p$ (oczywiście dla konkretnego n). Na zakończenie dodamy, że jednoczesna możliwość zniszczenia ustroju według schematów II, III, IV następuje dla współczynników plastycznych

$$(9.4) \quad \varphi = n^2, \quad \alpha = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Zajmiemy się jeszcze ustrojem płytowo-żebrowym o n^2 polach, podpartym przegubowo wzdłuż wszystkich krawędzi. Wprowadzimy współczynnik

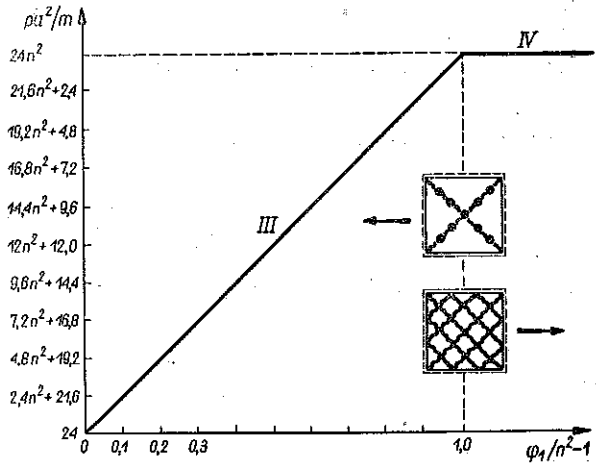
$$\varphi_1 = \varphi\alpha = \frac{(n-1) M_1}{ma}$$

Dla geometrycznie możliwych mechanizmów zniszczenia III i IV (rys. 19) dochodzimy do wzorów na obciążenie łamiące

$$(9.5) \quad \begin{aligned} p_{III} &= \frac{24m}{a^2} (1 + \varphi_1), \\ p_{IV} &= \frac{24m}{a^2} n^2. \end{aligned}$$

Jednoczesne zniszczenie płyt i żeber zachodzi dla

$$(9.6) \quad \varphi_1 = n^2 - 1.$$

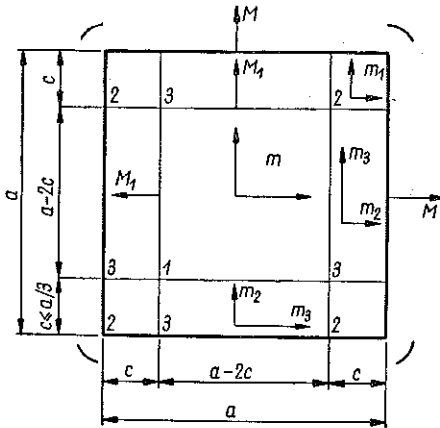


Rys. 20

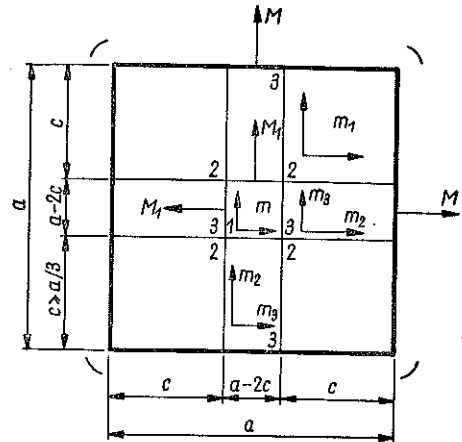
Obciążenie łamiące obliczamy wtedy ze wzoru (9.5)₂. Wzory (9.5) przedstawione są graficznie na rys. 20. Skala osi obciążeń uzależniona jest od liczby podziału n .

10. Podział na pięć kwadratów i cztery prostokąty

Konstrukcja niżej rozpatrywana (rys. 21 i 22) jest szczególnym przypadkiem omawianej w rozdziale 6 dla $\beta = 1$ i $c = d$. W związku z tym mamy do czynienia z trzema (a nie z czterema) rodzajami płyt, wchodzących w skład ustroju. Płyta 1 i płyty 2 są kwadratowe i izotropowe, płyty 3 są na ogół prostokątne i przyjmujemy je za plastycznie ortotropowe. Wprowadzimy od razu współczynnik ortotropii ekonomicznej, uzależniony od stosunku boków płyty.



Rys. 21



Rys. 22

Ponadto założymy z góry, że nośność wszystkich 9-ciu płyt ma być jednakowa. Przyjęcia te pozwalają zredukować ilość niezależnych modułów płytowych z czterech do jednego. Trzy pozostałe będą z nim związane za pomocą parametrów geometrycznych ustroju.

Wprowadzamy geometryczny wskaźnik podziału δ i ξ określony tak samo jak w p. 6.

Wskaźniki plastyczne wynoszą

$$\varphi = \frac{M}{m_1 a} \left(\text{lub } \frac{M}{m a} \right), \quad a = \frac{2M_1}{M}.$$

Musimy od razu odróżnić dwa przypadki ustroju ze względu na współczynnik δ , mianowicie

$$(10.1) \quad \frac{1}{3} \leq \delta \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq \xi < \infty$$

oraz

$$(10.2) \quad 0 \leq \delta \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Zajmiemy się nimi po kolei.

Przypadek 10.1 (rys. 21). Wykorzystanie wzoru na «ortotropię» ekonomiczną oraz równość $p_1 = p_2$ i $p_2 = p_3$ doprowadza do określenia następujących modułów płytowych:

$$(10.3) \quad m = \frac{1}{\xi} m_1, \quad m_1, \\ m_2 = \frac{3\xi - 2}{\xi^2} m_1, \quad m_3 = \frac{1}{\xi^2} m_1.$$

Weźmiemy teraz pod uwagę podstawowe mechanizmy zniszczenia podobne do przedstawionych na rys. 9. Dla $\beta = 1$ schemat IIa jest równoważny schematowi IIb.

Wielkości obciążeń granicznych związanych z tymi mechanizmami zniszczenia na podstawie wzorów (6.6) wynoszą

$$(10.4) \quad p_I = \frac{8m_1}{a^2} \frac{1 + \varphi/\delta}{1 - \frac{2}{3}\delta^2}, \\ p_{II} = \frac{8m_1}{a^2} \left[\frac{(1-2\delta)^2}{\delta^3} (-12\delta^2 + 17\delta - 4) + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{III} = \frac{24m_1}{a^2} \left[\frac{(1-2\delta)^3}{\delta^2} + 2\delta + \varphi\alpha \right], \\ p_{IV} = \frac{24m_1}{a^2} \frac{1}{\delta^2}.$$

Należy zastrzec, że w przypadku granicznym, mianowicie dla $\delta = 1/2$, we wzorze (10.4)₂ cały wyraz zależny od δ przyjmuje wartość 1 (ze względu na znikanie płyt 3).

Przypadek 10.2 (rys. 22). Moduły płytowe, zapewniające jednoczesne wyczerpanie nośności wszystkich płyt ustroju przy zachowaniu «ortotropii» ekonomicznej wynoszą w tym przypadku

$$(10.5) \quad m, \quad m_1 = \xi m, \\ m_2 = \xi^2 m, \quad m_3 = (3 - 2\xi) \xi m.$$

Obciążenia graniczne dla omówionych już schematów zniszczenia wynoszą

$$(10.6) \quad p_I = \frac{8m}{a^2} \frac{\frac{\delta^2}{(1-2\delta)^2} + \frac{\varphi}{\delta}}{1 - \frac{2}{3}\delta^2}, \\ p_{II} = \frac{8m}{a^2} \left[\frac{2\delta^5}{(1-2\delta)^4} + 1 - 2\delta + 2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{III} = \frac{24m}{a^2} \left[\frac{2\delta^3}{(1-2\delta)^2} + 1 - 2\delta + \varphi\alpha \right], \\ p_{IV} = \frac{24m}{a^2} \frac{1}{(1-2\delta)^2}.$$

Konieczność wprowadzenia dwu układów wzorów na obciążenia tłumaczy się tym, że tylko dla wskaźnika podziału $\delta = 1/3$ płyty 3 tworzą prostokąty podobne (kwadraty). Dla wszystkich par wartości $\delta = 1/3 + \Delta$, $\delta = 1/3 - \Delta$ płyt tych nie da się nałożyć na siebie przez obrót o 90° .

Podamy teraz wyniki pozwalające na zaprojektowanie na podstawie teorii nośności granicznej ustroju płytowo-żebrowego podobnego do opisanego wyżej, lecz w którym zastąpiono żebra skrajne przegubowymi podparciami wzdłuż krawędzi. Podobnie jak wyżej rozróżniamy dwa przypadki ukształtowania geometrycznego.

Przypadek $1/3 \leq \delta \leq 1/2$. Momenty płytowe określają wzory (10.3). Obciążenia graniczne dla kinematycznie możliwych mechanizmów III i IV wynoszą

$$(10.7) \quad p_{III} = \frac{24m_1}{a^2} \left[\frac{(1-2\delta)^3}{\delta^2} + 2\delta + \varphi_1 \right],$$

$$p_{IV} = \frac{24m_1}{a^2} \frac{1}{\delta^2},$$

gdzie

$$\varphi_1 = \varphi a = \frac{2M_1}{m_1 a}.$$

Wielkość tego współczynnika, przy którym mamy do czynienia z jednoczesnym wyczerpaniem nośności wszystkich płyt oraz żebrowo pośrednich, wynosi

$$(10.8) \quad \varphi_1 = \frac{6(1-\delta)^2}{\delta}.$$

Dla $\varphi_1 < 6(1-\delta)^2/\delta$ mamy schemat III (zniszczenie żebrowo), dla $\varphi_1 > 6(1-\delta)^2/\delta$ żebra są na tyle sztywne, że niszczą się jedynie płyty zgodnie ze schematem IV.

Przypadek $0 \leq \delta \leq 1/3$. Momenty płytowe należy określać ze wzorów (10.5). Obciążenia graniczne wynoszą

$$(10.9) \quad p_{III} = \frac{24m}{a^2} \left[\frac{2\delta^3}{(1-2\delta)^2} + 1 - 2\delta + \varphi_1 \right],$$

$$p_{IV} = \frac{24m}{a^2} \frac{1}{(1-2\delta)^2}.$$

Współczynnik $\varphi_1 = \varphi a = 2M_1/ma$, którego użycie doprowadza do uplastycznienia płyt i żebrowo przy jednakowym obciążeniu, wynosi w tym przypadku

$$(10.10) \quad \varphi_1 = \frac{6\delta(1-\delta)^2}{(1-2\delta)^2}.$$

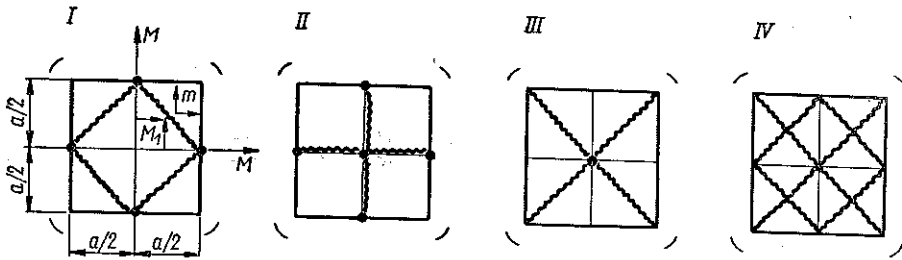
11. Podział na cztery równe kwadraty

Ustrój ten stanowi przypadek szczególny układu omówionego w rozdziale 9 dla $n = 2$ ($r = 1$). Składa się z czterech żebrowo skrajnych, dwu żebrowo pośrednich i czterech jednakowych, izotropowych płyt. Kinematycznie możliwe schematy zniszczenia przedstawione są na rys. 23.

Wprowadzamy współczynniki $\varphi = M/ma$ oraz $\alpha = M_1/M$. W związku z tym ustrój charakteryzują cztery niezależne wielkości a , m , φ i α . Będziemy poszukiwać obciążeń granicznych $p_i = f(m/a^2, \varphi, \alpha)$, a następnie analizować przy takich wielkościach φ i α poszczególne schematy zniszczenia czynią zadość warunkowi ekstremalnemu. Obciążenia graniczne można obliczyć bezpośrednio ze wzorów (9.1) i (9.3) albo też wykorzystując regułę bilansu przyrostów prac (4.1). Oto one:

$$(11.1) \quad \begin{aligned} p_I &= \frac{48m}{5a^2} (1+2\varphi), \\ p_{II} &= \frac{8m}{a^2} \left[1+2\varphi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right], \\ p_{III} &= \frac{24m}{a^2} (1+\varphi\alpha), \quad p_{IV} = \frac{96m}{a^2}. \end{aligned}$$

Aby odpowiedzieć teraz na pytanie, z którego wzoru należy korzystać przy danych wartościach φ i α , stworzymy 6 możliwych równań na obciążenia łamiące p_i . Otrzymujemy w ten sposób 6 równań hiperbol w płaszczyźnie φ, α . Pięć z nich stanowi granice pewnych stref. Każda z powstałych w ten sposób czterech stref związana jest z odpowiednim schematem zniszczenia. Ten właśnie schemat zniszczenia gwarantuje najmniejsze obciążenie łamiące ustroju, o ile para wskaźników φ i α , charakteryzująca go, leży wewnątrz lub na krawędzi danej strefy.



Rys. 23

Odpowiednie warunki analityczne są następujące:

p_I stanowi $\min p_i$, jeśli

$$(11.2) \quad \varphi \geq \frac{-1,6}{3,2 - 8\alpha}, \quad \varphi \leq \frac{14,4}{19,2 - 24\alpha}, \quad \varphi \leq 4,5;$$

p_{II} stanowi $\min p_i$, jeśli

$$(11.3) \quad \varphi \leq \frac{-1,6}{3,2 - 8\alpha}, \quad \varphi \leq \frac{1}{1 - \alpha};$$

p_{III} stanowi $\min p_i$, jeśli

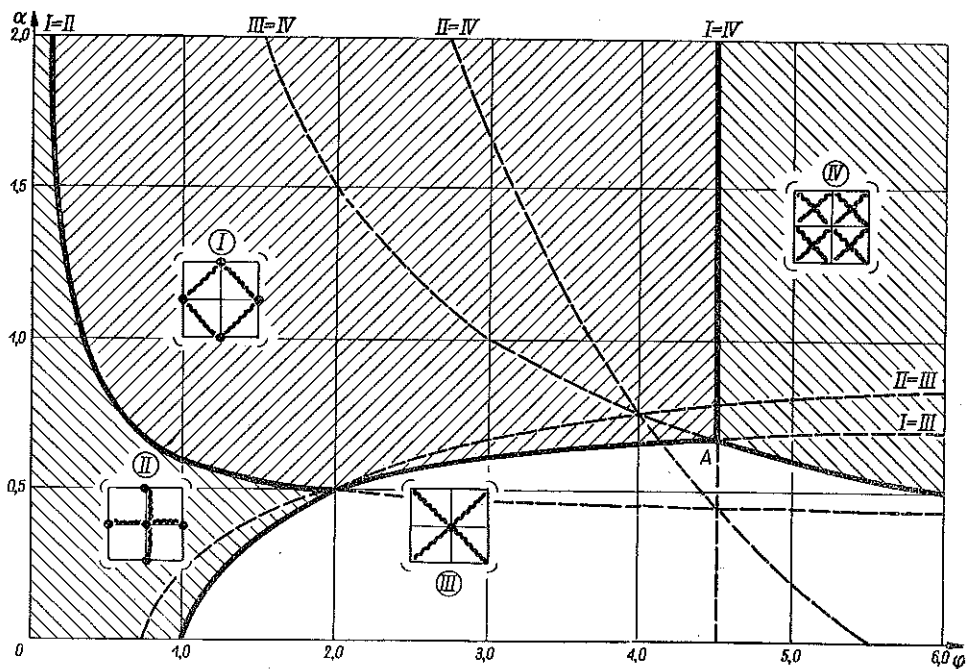
$$(11.4) \quad \varphi \geq \frac{14,4}{19,2 - 24\alpha}, \quad \varphi \geq \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \varphi \leq \frac{3}{\alpha};$$

p_{IV} stanowi $\min p_i$, jeśli

$$(11.5) \quad \varphi \geq 4,5, \quad \varphi \geq \frac{3}{a}.$$

Należy dodać, że szóstą granicę stref, określoną równaniem $\varphi = 11/(2+a)$ nie bierze udziału w ich kształtowaniu. Oznacza to, że nie istnieje taka para wartości φ i a , dla których schemat zniszczenia II i IV daje takie samo obciążenie graniczne przy jednoczesnym spełnieniu warunków $p_{II} = p_{IV} < p_I$ i $p_{II} = p_{IV} < p_{III}$.

Graficzne przedstawienie warunków (11.2)-(11.5), ułatwiające poszukiwanie odpowiedniego schematu zniszczenia omawianego ustroju płytowo-żebrowego, pokazane jest na rys. 24.



Rys. 24

Dla nas szczególnie interesujący jest przypadek, kiedy trzy z czterech rozpatrywanych mechanizmów zniszczenia dają tę samą wartość obciążenia łamiącego. Wówczas następuje jednoczesne wyczerpanie nośności zarówno płyt ustroju, jak i żeberek skrajnych oraz żeberek pośrednich. Można zatem powiedzieć, że przez odpowiedni dobór wskaźnika sztywności plastycznej żeberek skrajnych φ i stosunku mocy żeberek pośrednich do skrajnych a możemy zagwarantować jednakowy współczynnik pewności dla ustroju płytowo-żebrowego traktowanego jako całość.

Dla omawianego ustroju istnieją dwie takie pary wielkości φ i a .

Przyjmując $p_I = p_{II} = p_{III}$ otrzymujemy

$$(11.6) \quad \varphi = 2, \quad a = 0,5.$$

Obciążenie graniczne wynosi w tym przypadku

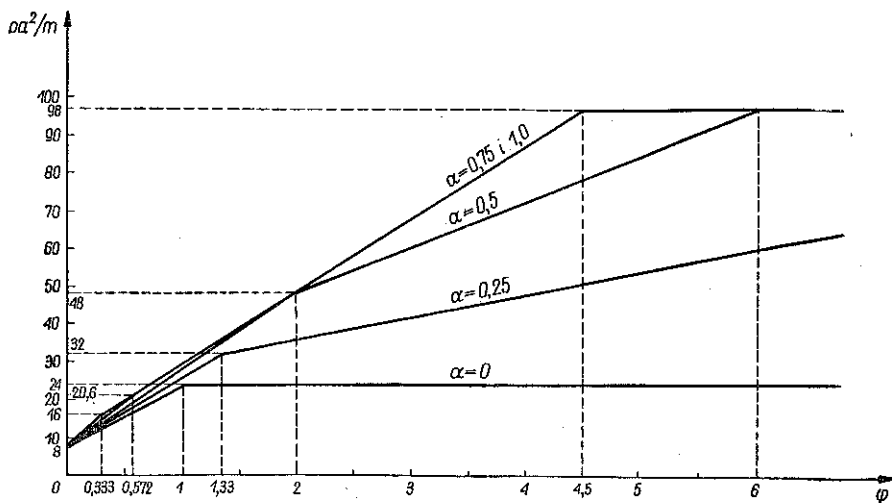
$$(11.7) \quad p = \frac{48m}{a^2}.$$

Zakładając, że $p_I = p_{III} = p_{IV}$, znajdziemy

$$(11.8) \quad \varphi = 4,5, \quad a = 0,667.$$

Obciążenie graniczne wynosi dla tego przypadku

$$(11.9) \quad p = \frac{96m}{a^2}.$$



Rys. 25

Przytoczmy tutaj (por. [1]) rozwiązanie dla ustroju płytowo-żebrowego o rzucie kwadratowym bez żeber pośrednich. Jest to przypadek szczególny wyżej omawianej konstrukcji, gdy $a = 0$. Aby płyta i żebra skrajne ulegały zniszczeniu przy tej samej wielkości obciążenia zewnętrznego wskaźnik sztywności plastycznej żeber musi posiadać wartości $\varphi = 1$.

Obciążenie graniczne wynosi wtedy

$$(11.10) \quad p = \frac{24m}{a^2}.$$

Jak widać, przy tej samej nośności płyty (i wymiarach ustroju) wprowadzenie dwu żeber pośrednich powoduje w przypadku (11.6) dwukrotny, a dla wartości (11.8) czterokrotny wzrost nośności całego ustroju.

Dla lepszego zilustrowania zależności między najmniejszym obciążeniem granicznym a wielkościami φ i a wykorzystamy równania (11.1) w sposób następujący. Równania (11.1)₁ i (11.1)₄ przedstawiają płaszczyzny, zaś (11.1)₂ i (11.1)₃ hiper-

boloidy w przestrzeni p, φ, α . Wykonamy przecięcia tych powierzchni płaszczyznami, równoległymi do płaszczyzny p, φ . Otrzymamy w ten sposób rodzinę linii

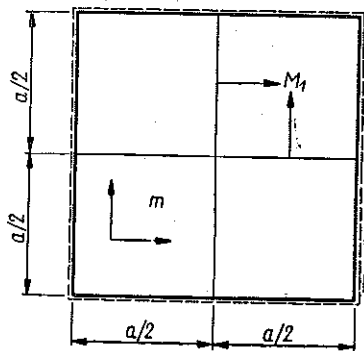
$$(11.11) \quad \min \left(\frac{pa^2}{m} \right) = f(\varphi, \alpha_1).$$

Weźmy pod uwagę linie

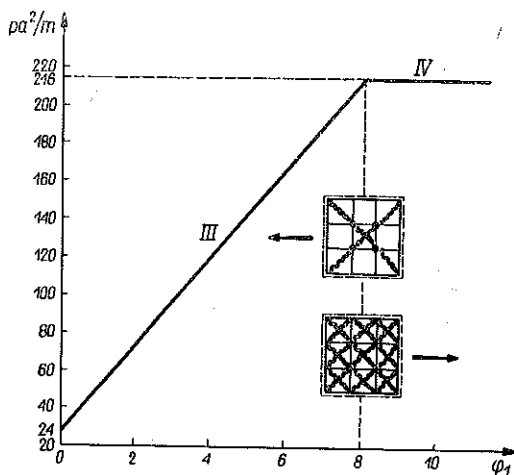
$$\alpha_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0.$$

Wyniki te przedstawione są graficznie na rys. 25.

Zajmiemy się jeszcze ustrojem płytowo-żebrowym, utworzonym przez zastąpienie żeber skrajnych przegubowym podparciem wzdłuż czterech krawędzi (rys. 26).



Rys. 26



Rys. 27

Dla tej konstrukcji wprowadzamy wskaźnik sztywności plastycznej żeber pośrednich $\varphi_1 = \varphi\alpha = M_1/ma$.

Kinematycznie możliwymi mechanizmami zniszczenia są w tym przypadku schematy III i IV. Związane z nimi obciążenia łamiące wynoszą

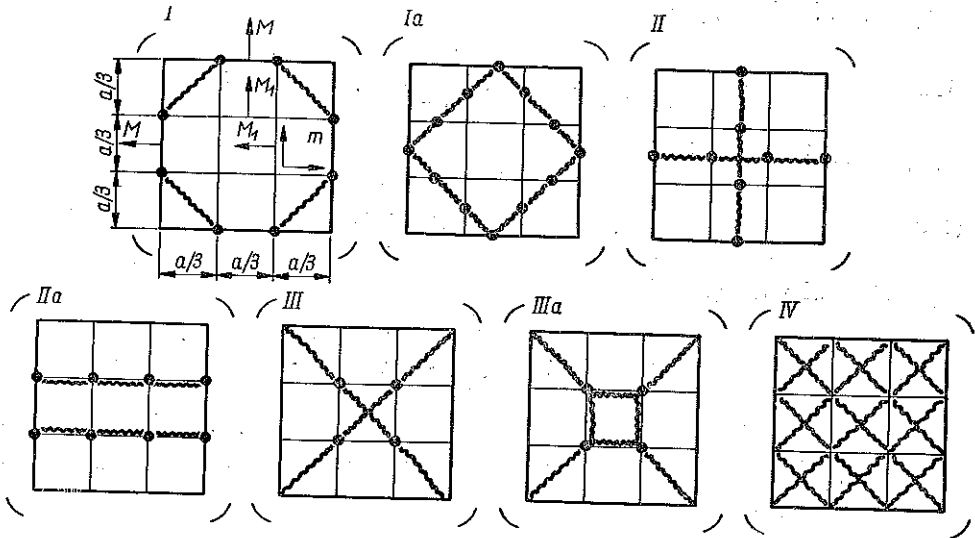
$$(11.12) \quad p_{III} = \frac{24m}{a^2} (1 + \varphi_1), \quad p_{IV} = \frac{96m}{a^2}.$$

Wielkość wskaźnika φ_1 , przy którym następuje jednoczesne wyczerpanie nośności płyt i żeber pośrednich, znajdujemy z równania $p_{III} = p_{IV}$, z którego otrzymujemy $\varphi_1 = 3$.

Obciążenie graniczne obliczamy wtedy bezpośrednio ze wzoru (11.12)₂. Dla $\varphi_1 \leq 3$ obowiązuje układ linii załomów III, dla $\varphi_1 \geq 3$ układ linii załomów IV. Na rys. 27 pokazany jest graficzny obraz zależności (11.12). Wykres ten informuje, która z siatek zniszczenia spełnia dla danego φ_1 warunek najmniejszego obciążenia oraz ile wynosi obciążenie graniczne, określone metodą kinematyczną.

12. Podział na dziewięć równych kwadratów

Zajmiemy się bliżej przypadkiem szczególnym ustroju z p. 9 dla $n = 3$ ($r = 1$), mianowicie ustrojem płytowo-żebrowym, posiadającym jak poprzednio 4 żebra skrajne i podzielonym na 9 izotropowych, jednakowych płyt przy pomocy dwu par żebier pośrednich. Wymiary ustroju, oznaczenia momentów granicznych oraz postulowane mechanizmy zniszczenia przedstawione są na rys. 28.



Rys. 28

Wprowadzamy oznaczenia $\varphi = M/ma$ oraz $\alpha = 2M_1/M$. Postępując podobnie jak w poprzednim punkcie, znajdujemy następujące wielkości obciążeń granicznych, związanych z odpowiednimi schematami zniszczenia:

$$\begin{aligned}
 p_I &= \frac{216}{25} \frac{m}{a^2} (1+3\varphi), \\
 p_{II} &= \frac{8m}{a^2} \left[1+2\varphi \left(1+\frac{\alpha}{2} \right) \right], \\
 p_{III} &= \frac{24m}{a^2} (1+\varphi\alpha), \\
 p_{IV} &= \frac{216m}{a^2}.
 \end{aligned}
 \tag{12.1}$$

Pozostałe trzy schematy przyjęte ze względu na ich kinematyczną dopuszczalność nie są jednak dalej brane pod uwagę, ponieważ udowodniono, że $p_{Ia} = 1,2 p_{II}$, $p_{IIa} = 1,125 p_{II}$ i $p_{IIIa} = 1,0375 p_{III}$. Tak więc przy żadnych wartościach współczynnika φ i α nie będą one decydujące, jak to wynika z twierdzenia ekstremalnego. W celu analitycznego określenia stref, w których dany mechanizm zniszczenia

zapewnia najmniejsze obciążenie łamiące, tworzymy wszystkie możliwe równania obciążeń (12.1). Otrzymujemy w ten sposób:

p_I stanowi min p_i , jeśli

$$(12.2) \quad \varphi \geq \frac{0,64}{8\alpha - 9,92}, \quad \varphi \leq 8;$$

p_{II} stanowi min p_i , jeśli

$$(12.3) \quad \varphi \leq \frac{0,64}{8\alpha - 9,92}, \quad \varphi \leq \frac{26}{\alpha + 2}, \quad \varphi \leq \frac{1}{1 - \alpha};$$

p_{III} stanowi min p_i , jeśli

$$(12.4) \quad \varphi \geq \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \varphi \leq \frac{8}{\alpha};$$

p_{IV} stanowi min p_i , jeśli

$$(12.5) \quad \varphi \geq 8, \quad \varphi \geq \frac{26}{\alpha + 2}, \quad \varphi \geq \frac{8}{\alpha}.$$

Szósta, teoretycznie możliwa granica stref, wyrażająca się równaniem hiperboli $\varphi = 15,36/(25,92 - 24\alpha)$ nie jest brana pod uwagę, bowiem nie istnieje żadna para wartości φ i α , dla których

$$p_I = p_{III} < p_{II} \quad \text{i} \quad p_I = p_{III} < p_{IV}.$$

Na rysunku 29, na którym przedstawiono obszary, odnoszące się do odpowiednich wzorów na obciążenie łamiące, granica ta pokazana jest linią przerywaną w całej płaszczyźnie φ, α .

Zajmiemy się teraz przypadkami, kiedy trzy mechanizmy zniszczenia dają tę samą wartość obciążenia łamiącego. Zakładając $p_I = p_{II} = p_{IV}$ otrzymujemy

$$(12.6) \quad \varphi = 8, \quad \alpha = 1,25,$$

dla $p_{II} = p_{III} = p_{IV}$ mamy

$$(12.7) \quad \varphi = 9, \quad \alpha = 0,89.$$

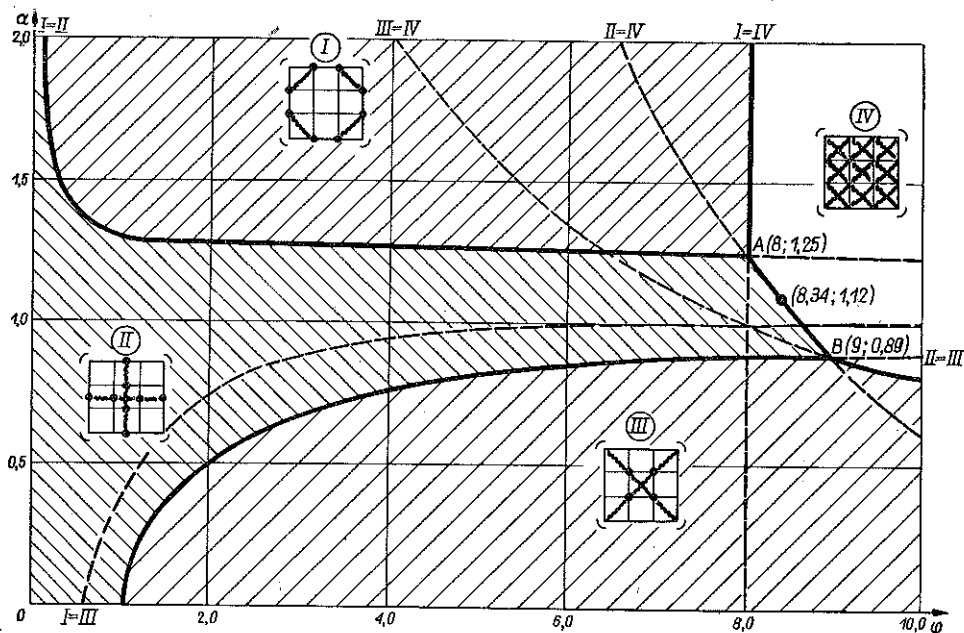
W obu tych przypadkach obciążenie graniczne należy określać ze wzoru (12.1)₄, co oznacza dziewięciokrotny wzrost nośności ustroju płytowo-żebrowego w porównaniu z układem pozbawionym żeber pośrednich ($\varphi = 1, \alpha = 0$).

Z powyższego widać, że do najlepszych efektów (tzn. do jednoczesnego wykorzystania nośności wszystkich elementów składowych ustroju) prowadzić będzie takie zaprojektowanie omawianej konstrukcji, przy którym zachodzi związek

$$(12.8) \quad \varphi = \frac{26}{\alpha + 2}.$$

Do wzoru tego należy przyjmować stosunek momentów granicznych żeber w granicach

(12.9.1) $0,89 \leq \alpha \leq 1,25.$



Rys. 29

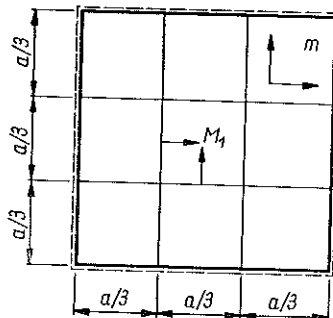
Odpowiada to zmienności wskaźnika sztywności plastycznej żeber skrajnych w przedziale

(12.9.2) $8 \leq \varphi \leq 9.$

Zależności te reprezentuje na rys. 29 część AB gałęzi hiperboli określonej równaniem (12.8).

Zajmiemy się jeszcze powyższym ustrojem płyto-żebrowym, lecz żebra skrajne zastąpimy przegubowym podparciem wzdłuż wszystkich krawędzi (rys. 30). Dla tego typu konstrukcji oznaczymy następującą zależność pomiędzy parametrami φ i α :

$$\varphi_1 = \varphi\alpha = \frac{2M_1}{ma}.$$



Rys. 30

Ze względu na uniemożliwienie przemieszczeń krawędzi ustroju schematy zniszczenia I i II (rys. 28) są kinematycznie niemożliwe. Dla pozostałych mechanizmów obciążenia łamiące wynoszą

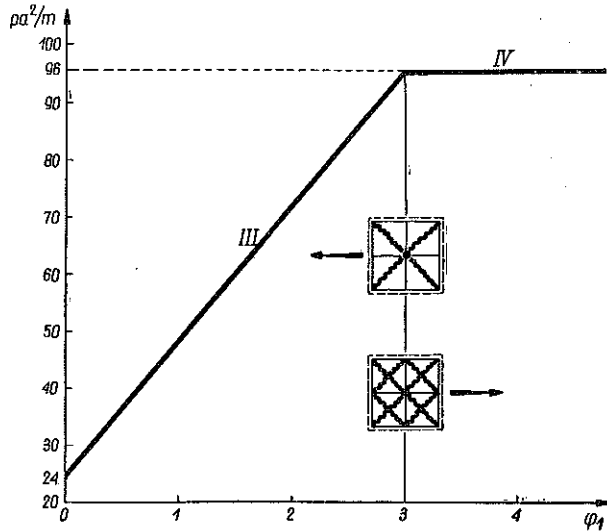
(12.10) $P_{III} = \frac{24m}{a^2} (1 + \varphi_1), \quad P_{IV} = \frac{216m}{a^2}.$

Jednoczesne zniszczenie płyt i żeber następuje, gdy

$$(12.11) \quad \varphi_1 = 8.$$

Przy zastosowaniu tej wielkości obciążenie łamiące obliczamy ze wzoru (12.10)₂.

Na rysunku 31 przedstawiony jest kontur obejmujący rzędne obciążeń łamiących.

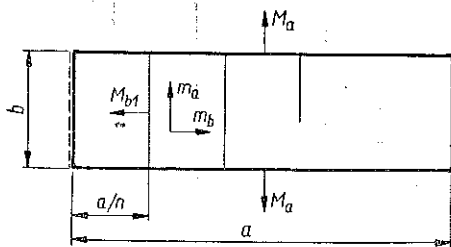


Rys. 31

Informuje on, który ze schematów zniszczenia spełnia (ze względu na φ_1) warunek ekstremalny oraz ile wynosi obciążenie graniczne ustroju.

13. Podział na n równych prostokątów

W tym punkcie rozpatrzmy konstrukcję, złożoną z 2 żeber krawędziowych biegnących w kierunku dłuższego boku ustroju i $n - 1$ żeber wewnętrznych prostokątnych do pierwszych. Płyty składowe o wymiarach $a/n \times b$ posiadają «ortotropię» ekonomiczną. Ustrój podparty jest przegubowo na krótszych bokach, obciążony równomiernie na całej górnej powierzchni. Konstrukcja taka nosi w budownictwie potoczną nazwę płyty panwowej (rys. 32).



Rys. 32

Moduły płytowe wynoszą m_b i $m_a = (3n^2 \beta^2 - 2) m_b$, gdzie jak zwykle $\beta = b/a \leq 1$ i $n \geq 1/\beta$.

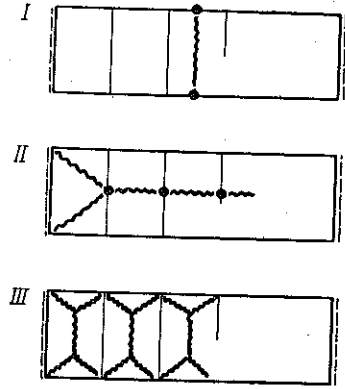
Wprowadzamy oznaczenia

$$(13.1) \quad \varphi = \frac{(n-1) M_{b1}}{m_b a}, \quad \omega = \frac{2M_a}{(n-1) M_{b1}}.$$

Bierzemy pod uwagę trzy podstawowe kinematycznie możliwe mechanizmy zniszczenia (rys. 33), przedstawiające kolejno wyczerpanie nośności ustroju ze względu na żebra skrajne, żebra wewnętrzne i płyty.

Zastosowanie zasady bilansu przyróstów prac doprowadza do następujących wielkości na obciążenia graniczne:

$$\begin{aligned}
 p_I &= \frac{8m_b \beta}{b^2} [\beta (3n^2 \beta^2 - 2) + \varphi \omega], \\
 (13.2) \quad p_{II} &= \frac{12m_b}{b^2} \frac{n}{3n-2} [2 + (3n^2 \beta^2 - \\
 &\quad - 2) \beta^2 n + 2\varphi], \\
 p_{III} &= \frac{24m_b}{b^2} n^4 \beta^4.
 \end{aligned}$$



Rys. 33

W celu określenia wzorów na p , φ i ω , których użycie w trakcie wymiarowania konstrukcji zapewni całkowite wykorzystanie własności plastycznych wszystkich elementów składowych, rozwiązujemy układ trzech równań przy założeniu $p_I = p_{II} = p_{III} = p$. Otrzymujemy

$$p_I = p_{II} = p_{III} = p.$$

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{\beta^2 n}{2} [\beta^2 n^2 (6n-7) + \\
 (13.3) \quad &\quad + 2] - 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{\beta}{\varphi} [3\beta^2 n^2 (n^2 - 1) + \\
 &\quad + 2].
 \end{aligned}$$

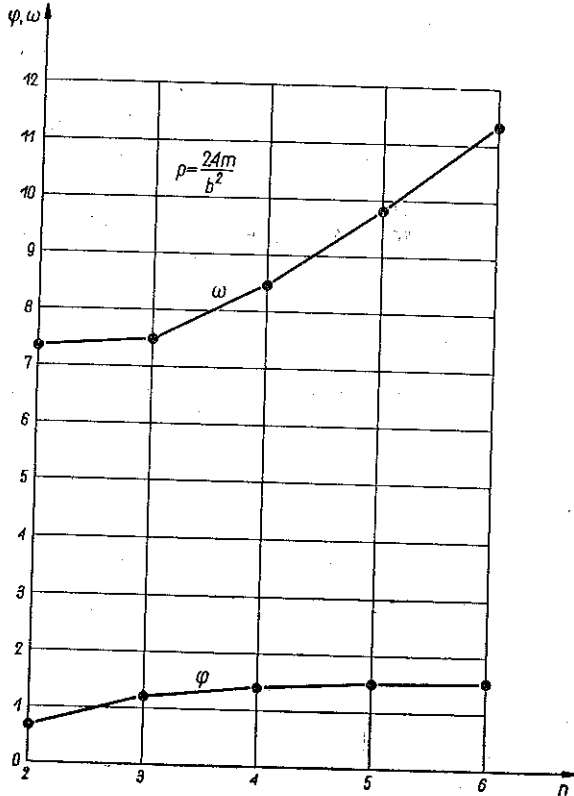
Obciążenie łamiące obliczamy ze wzoru (13.2)₃.

Podamy jeszcze wzory dotyczące przypadku szczególnego, mianowicie dla płyt składowych o rzucie kwadratowym. Bok dłuższy ustroju jest wtedy n -krotnością krótszego, tzn. $\beta = 1/n \leq 1/2$.

Moduły spełniają warunek $m_a = m_b = m$.

Obciążenie graniczne wynosi

$$(13.4) \quad p = \frac{24m}{b^2}$$



Rys. 34

a współczynniki plastyczne osiągają wartości

$$(13.5) \quad \varphi = 2 - \frac{2,5}{n}, \quad \omega = \frac{3n^2 - 1}{2(n - 1,25)}.$$

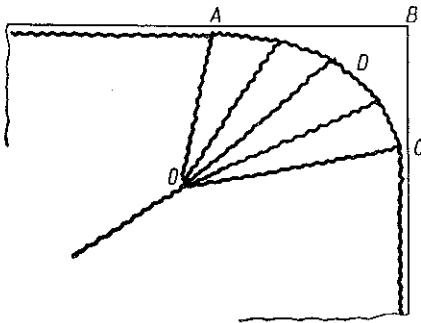
Współczynniki te mają wartość odpowiednio

$$\varphi = \frac{n - 1}{n} \frac{M_{b1}}{mb}, \quad \omega = \frac{2}{n - 1} \frac{M_a}{M_{b1}}.$$

Na rysunku 34 przedstawiono graficznie zależności (13.5) dla $2 \leq n \leq 6$.

14. Zagadnienie naroży

W niniejszej pracy nie uwzględniono wpływu na nośność graniczną płyt składowych tzw. efektu naroży. Uwzględnienie tego efektu prowadzi do przyjęcia, że w partiach narożnych mechanizmu zniszczenia strefy uplastycznienia mają postać



Rys. 35

«wachlarzy» (rys. 35). Wpływ tego założenia (por. [15], [16], [18]) jest dość znaczny dla płyt o brzegach utwierdzonych i o dość dużym współczynniku warstwowości $\nu = m'/m \leq 1$. Wtedy utworzenie się załomu krzywoliniowego ADC i załomów typu OA (na miejsce linii uplastycznienia AB , BC i OB) powoduje obniżenie się nośności granicznej płyty. Np. dla płyty o rzucie kwadratowym $a \times a$ przy wskaźniku ortotropii $\kappa = 1$ i współczynniku warstwowości $\nu = 1$ obciążenie niszczące, obliczone z uwzględnieniem

«wachlarzy» wynosi $p = 43,848 m/a^2$, natomiast bez uwzględnienia efektu naroży posiada, jak wiemy, wartość $p = 48 m/a^2$.

Obniżenie nośności wynosi tu 8,65%.

Dla płyty prostokątnej $a \times 2a$, $\kappa = \nu = 1$ obciążenie łamiące wynosi w pierwszym przypadku $p = 26,20 m/a^2$, zaś w drugim $p = 28,28 m/a^2$.

Zmniejszenie nośności osiąga dla tego przykładu 7,35%.

Wyniki te uzyskano w pracy [18], obierając załomy ADC w postaci łuku elipsy lub koła. W pracy [16] rozpatrzono ten problem w sposób ściślejszy. Zestawienie wpływu efektu naroży na nośność graniczną płyt o różnych kształtach i współczynnikach warstwowości znaleźć można w tablicach VII i VIII pracy [15].

W rozpatrywanych przez nas zagadnieniach wpływ rozwidlania się linii załomów można uważać za nieistotny, gdyż mamy do czynienia z płytami swobodnie podpartymi na żebrach i przy określaniu górnej granicy obciążenia łamiącego nie uwzględniono budowy warstwowej płyt, mogącej przyczynić się do powstania ujemnych załomów plastycznych na brzegach. Potwierdzają to badania doświadczalne na modelach (por. [14]).

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. SAWCZUK, M. KWIECIŃSKI, *Nośność graniczna ustrojów płytowo-żebrowych*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 3 (1957).
- [2] R. H. WOOD, *Studies in composite construction*, part II. Building Research Studies 22, London 1955.
- [3] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955).
- [4] D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna niejednorodnych płyt prostokątnych (w druku)*.
- [5] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Basel 1955.
- [6] D. C. DRUCKER, W. PRAGER, H. I. GREENBERG, *Extendend limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math., 4, 9 (1952).
- [7] A. A. ГВОЗДЕВ, *Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Москва 1949.
- [8] W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, New York 1951.
- [9] P. G. HODGE, *The mathematical theory of plasticity*, New York 1958.
- [10] W. OLSZAK, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Budownictwo Przemysłowe, 7, 8 (1953).
- [11] W. OLSZAK, *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych*, Rozpr. Inżyn., 4 (1954).
- [12] A. SAWCZUK, *O możliwościach praktycznego korzystania z rozwiązań teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Inżyn. Ładow., 1, 2 (1956).
- [13] D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna prostokątnych płyt ortotropowych*, Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Nr 23, Bud., nr 6 (1956).
- [14] M. KWIECIŃSKI, *Weryfikacja doświadczalna teorii nośności granicznej ustrojów płytowo-żebrowych*, Rozpr. Inżyn., 1, 9 (1961).
- [15] R. H. WOOD, *Plastic and elastic design of slabs and plates*. Thames and Hudson, London 1961.
- [16] E. H. MANSFIELD, *Studies in collapse analysis of rigid-plastic plates with a square yield diagram*, Proc. Roy. Soc. Series A., Vol 241 (1957).
- [17] A. SAWCZUK, *Transformacja liniowa w zastosowaniu do teorii nośności granicznej płyt*, Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej Nr 10, Bud., 3 (1955).
- [18] Z. SOBOTKA, *Unosnost vetknutých desek*, Stavebnický Časopis, sav IX, 5/6, Bratislava 1961

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ИСЧЕРПАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

ПЛАСТИЧАТО-РЕБЕРНЫХ КОНСТРУКЦИИ.

Ч. I. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В практических расчетах несущих конструкций, подвергающихся изгибу, состоящих из пластин и балок, отделяется обычно, мысленно, отдельные элементы и после отделения действующих нагрузок и краевых условий определяются их внутренние силы и размеры стержней. Такое искусственное разделение системы на элементы вызывает то, что действительный коэффициент безопасности конструкции как целости, значительно разнится от предусматриваемой. Правильную оценку запаса прочности получаем на основании анализа предельного состояния как целости, предполагая одновременно исчерпание несущей способности всех составных элементов.

В настоящей работе учитываются вопросы несущей способности пластинчато-реберных систем, как чаще всего применяемых в строительстве. Предельные нагрузки определяются по кинематическому анализу возможных полей приращения деформаций и статически возможных полей внутренних сил (моментов). Предполагается, жестко-пластическую модель деформаций, принимая одновременно, что пластические деформации очень малы. Имея в виду железобетонные конструкции, при формулировке условия пластичности учитывается пластическую ортотропию и слоистость (плит) и, кроме того, неоднородность, вызванную введением ребер.

При кинематическом подходе, являющимся главной темой настоящей работы, определяется формула для верхнего предела разрушающей нагрузки для системы в виде произвольного многоугольника, равномерно нагруженного по всей поверхности. Эта формулировка дает возможность определить нагрузки без надобности формулирования приращений работ, а только с помощью геометрических величин, связанных со структурой конструкции.

Подробно рассматривается 10 типов пластинчато-реберных систем, приводя решение для разрушающих нагрузок, критерии одновременного пластического истощения несущей способности составных элементов и соответствующие диаграммы.

Основываясь на анализе предельного состояния конструкции устраняются две непоследовательности, существующей до сих пор практики проектирования железобетонных конструкций, а именно: 1) определение внутренних сил, рассматривая систему как упругую, т.е. изотропную и однородную, а введение действительной ортотропии и слоистости при определении размеров элементов; 2) определение внутренних сил, упругим способом, а определение сечения — методом пластических деформаций.

Определению нижнего (статического) предела разрушающих нагрузок для пластинчато-реберных систем, проанализированных кинематически в настоящей работе, посвящается разработка, которая будет опубликована в следующем выпуске.

S u m m a r y

PLASTIC EXHAUSTION OF THE LOAD CARRYING CAPACITY OF RIBBED PLATES.

Part 1. KINEMATIC SOLUTIONS

In practical computations of bent structures composed of plates and beams it is customary to separate mentally elements. After the loads and the boundary conditions for those elements are determined, interior forces and profile dimensions are found. Such an artificial division of the structure into elements results in the fact that the real safety factor of the structure as a whole differs considerably from the expected one. A correct estimate of the safety can be obtained on the basis of the limit analysis of the structure as a whole, assuming the limit load is attained simultaneously in all the elements.

The present paper is devoted to problems of limit load of ribbed plates, which are in most common use in building. The limit load is determined from the analysis of kinematically admissible fields of strain increment and statically admissible fields of section force (moments). The rigid-plastic deformation type is assumed. Plastic strain is assumed to be small. For R.C. structures plastic orthotropy and layered structure are assumed as well as non-homogeneity due to the ribs.

With the kinematic approach, which is the main object of this paper, an equation for the upper limit of the limit load is obtained for any polygonal plate supported in any manner and uniformly loaded over the entire surface. This equation enables us to compute the load without the necessity of determining the work increment, geometrical quantities and other quantities connected with the properties of the structure being the only involved.

Ribbed plates of 10 types are discussed. Solutions are given for ultimate loads. The paper presents also some criteria of simultaneous plastic exhaustion of the load carrying capacity of component elements and the corresponding graphs.

The application of the limit analysis enables us to avoid two inconsistencies of the usual design procedure of R.C. structures in which a) The internal forces are determined for an elastic, isotropic and homogeneous structure while orthotropy and layered structure is introduced first for the determination of the dimensions of the ϵ l m nt. b) The section forces are determined by the elastic method while the dimensioning of the sections is done by the plastic method.

A separate paper which will appear in the next number will be devoted to the problem of determining the lower (static) limit load for ribbed plates of which a kinematic analysis is the object of the present paper.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w redakcji dnia 8 marca 1962 r.