ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 11 (1963)

METODA KRAKOWIANOWA W ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ RUCHU UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

STANISŁAW ZŁONKIEWICZ (KRAKÓW)

Wstęp

Praca niniejsza dotyczy klasycznego już zagadnienia mechaniki, jakim jest badanie drgań układów dynamicznych dokoła położenia równowagi stałej. Wiadomo, że ruch takiego układu o n stopniach swobody opisać można podając zależność od czasu współrzędnych uogólnionych $q_1, ..., q_n$. Dla jej wyznaczenia należy całkować układ równań Lagrange'a wyznaczający funkcje $q_1 = q_1(t), ..., q_n = q_n(t)$. Pójdziemy tu tą samą drogą używając jako pomocniczego narzędzia algebry krakowianów. Celem nie będzie uzyskanie nowych rezultatów, lecz takie ujęcie rozumowań i schematów rachunkowych, które pozwoli uzyskać maksymalną ich prostotę i przejrzystość.

Nie podajemy argumentacji prowadzącej do matematycznego ujęcia pewnych faktów fizykalnych, lecz powoływać się będziemy na prace specjalne cytowane w bibliografii; podobnie postąpimy w stosunku do własności równań różniczkowych i do teorii krakowianów.

Rozpoczniemy od rozdziału dotyczącego równania wektorów własnych krakowianu. Okaże się, że równanie to odgrywać będzie w dalszym ciągu istotną rolę. Twierdzenia tego rozdziału są w dużej mierze podobne do twierdzeń dotyczących macierzy; w niektórych miejscach udało się nawet przenieść dowody twierdzeń o macierzach do teorii krakowianów. Na owe analogie i zapożyczenia wskazują odsyłacze w tekście.

1. Wektory własne i wartości własne krakowianu

1.1. Równanie wektorów własnych i równanie charakterystyczne. Oznaczmy przez K następujący krakowian kwadratowy

$$K = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{n1} \\ . & . & \dots & . \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} \end{Bmatrix}. \tag{1.1}$$

Rozpatrzmy równanie

$$XK = \lambda X, \tag{1.2}$$

w którym X oznacza kolumnę $X = \tau\{x_1, ..., x_n\}$ (gdzie τ jest krakowianem jednostkowym), λ zaś liczbę rzeczywistą lub zespoloną.

Nie trudno przedyskutować istnienie rozwiązań równania (1.2). Przekształćmy je bowiem następująco:

$$XK - X\lambda\,\tau = 0$$

oraz

(1.3) $$X(K - \lambda\tau) = 0.$$

Wzór (1.3) oznacza, że X ma być ilorazem krakowianu-kolumny 0 przez krakowian transponowany $K - \lambda\tau$. Jest nim w szczególności $X = 0$; jeśli zaś mają istnieć także ilorazy niezerowe, krakowian $K - \lambda\tau$ nie może być pełnego rzędu, jego wyznacznik musi przyjmować wartość zera.

Warunkiem rozwiązalności równania (1.2) w dziedzinie niezerowych kolumn X jest zatem

(1.4) $$\mathrm{Det}\,(K - \lambda\tau) = 0.$$

Wartość wyznacznika $\mathrm{Det}\,(K - \lambda\tau)$ zależy od liczby λ. Łatwo zauważyć, że jest to wielomian n-tego stopnia ze względu na λ; (1.4) zachodzi więc wtedy, gdy λ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Równanie (1.4) nazywamy równaniem charakterystycznym krakowianu K, a rozwiązujące je liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ wartościami charakterystycznymi lub własnymi krakowianu.

Równania

(1.5) $$X_i\,(K - \lambda_i\,\tau) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

wyznaczają zależne od jednego lub więcej parametrów poszukiwane krakowiany

$$X_i = \tau\,\{x_{i1} \ldots x_{in}\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Nazywamy je wektorami własnymi krakowianu, odpowiadającymi wartościom własnym λ_i, a reprezentowane przez nie kierunki kierunkami własnymi.

1.2. Twierdzenia o wektorach i wartościach własnych. Podamy pewne podstawowe własności wektorów i wartości własnych, potrzebne do dalszych rozważań.

Wprowadźmy oznaczenia

$$D = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Bmatrix}, \qquad Z = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{n2} \\ . & . & \ldots & . \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Twierdzenie 1.1. Równania (1.5) czyli

(1.6) $$X_i\,K = \lambda_i\,X_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dają się zapisać jednym związkiem

(1.7) $$ZK = D\,\tau Z.$$

Dowód. O słuszności (1.7) przekonamy się natychmiast, porównując odpowiadające sobie wyrazy lewej i prawej strony związku.

Podzielmy obie strony (1.7) przez τZ. Jeżeli założymy, że istnieje Z^{-1}, to otrzymamy

(1.8) $$D = ZKZ^{-1}.$$

Z kolei przetransponujmy obie strony (1.7) i podzielmy przez X. Daje to

$$KZ = \tau Z\, D$$

i

(1.9) $$K = \tau Z\, D\, \tau Z^{-1}.$$

Krakowian Z^{-1} istnieje wtedy, gdy wektory $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są liniowo niezależne[1]. Warunek na to podaje

Twierdzenie 1.2. Jeżeli wartości własne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są między sobą różne, odpowiadające im wektory własne $X_1, \ldots, X_n$ są liniowo niezależne.

Dowód (nie wprost). Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ są liniowo niezależne, a więc, że $X_{k+1}, \ldots, X_n$ $(k < n)$, stanowią kombinacje liniowe wektorów niezależnych $X_1, , , X_k$. W szczególności

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i.$$

Zachodzi związek

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) K = \lambda_n X_n = \lambda_n \sum_{i=1}^{k} a_i X_i\,;$$

z drugiej strony

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) K = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i K = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i X_i\,.$$

Mamy więc

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i X_i = \lambda_n \sum_{i=1}^{k} a_i X_i\,,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{k} a_i (\lambda_i - \lambda_n) X_i = 0\,.$$

Ponieważ $X_1, \ldots, X_k$ są niezależne, a $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$, musi być $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, czyli $X_n = 0$, co jest sprzeczne.

Wniosek 1.1. Jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są między sobą różne, to zachodzą związki (1.8) i (1.9).

Załóżmy teraz, że K jest krakowianem symetrycznym. Jest więc

(1.10) $$\tau K = K.$$

Zachodzi wówczas

---

[1] Por. [2], rozdział IV.

Twierdzenie 1.3. Wektory własne X_1 i X_2 krakowianu symetrycznego, odpowiadające różnym wartościom własnym λ_1 i λ_2 są względem siebie ortogonalne.

Dowód. Należy wykazać, że $X_1 X_2 = 0$.

Z założenia

$$X_1 K = \lambda_1 X_1$$

oraz

$$X_2 K = \lambda_2 X_2.$$

Pomnóżmy pierwszą równość przez X_2, a drugą przez X_1:

$$X_1 KX_2 = \lambda_1 X_1 X_2, \tag{1.11}$$

$$X_2 KX_1 = \lambda_2 X_2 X_1. \tag{1.12}$$

Transponujemy (1.12) obustronnie

$$X_1 \tau KX_2 = \lambda_2 X_1 X_2,$$

czyli wobec (1.10)

$$X_1 KX_2 = \lambda_2 X_1 X_2. \tag{1.13}$$

Odejmując stronami (1.11) i (1.13) otrzymamy

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 X_2 = 0,$$

co wobec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dowodzi naszej tezy.

Bez uzasadnienia podamy tu następujące

Twierdzenie 1.4[2]. *Jeżeli wartość własna krakowianu symetrycznego ma krotność r, to odpowiada jej r liniowo niezależnych wektorów własnych, które można dobrać tak, by były parami ortogonalne.*

Wypływa stąd

Wniosek 1.2. Dla krakowianu symetrycznego K krakowian wektorów własnych Z ma kolumny liniowo niezależne, parami ortogonalne. Dla krakowianu symetrycznego zachodzą związki (1.8) i (1.9).

Udowodnimy jeszcze jedno twierdzenie dotyczące wartości własnych.

Twierdzenie 1.5[3]. *Jeżeli krakowian K symetryczny ma wszystkie wyrazy rzeczywiste, to jego wartości własne są też rzeczywiste.*

Dowód. Niech λ będzie wartością własną, X odpowiadającym jej wektorem własnym. Zachodzi (1.2), czyli

$$XK = \lambda X.$$

Porównując wyrazy lewej i prawej strony otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{n} x_j k_{ij} = \lambda x_i, \quad i = 1, ..., n.$$

[2] Analogiczne twierdzenie dla macierzy, którego dowód można tu przenieść, znaleźć można np. w [7], rozdział VIII.

[3] Dowód analogicznego twierdzenia dla macierzy, przeprowadzony inaczej w [7], rozdział VIII.

Obie strony pomnożymy przez sprzężoną z x_i liczbę $\bar{x}_i$ i zsumujemy dla wszystkich i:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_j k_{ij} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \bar{x}_i . \tag{1.14}$$

Weźmy dla przykładu liczby sprzężone z obu stronami

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_j \bar{k}_{ij} x_i = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i . \tag{1.15}$$

Ponieważ jednak $\bar{k}_{ij} = k_{ij} = k_{ji}$, lewa strona jest równa

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_j k_{ji} x_i ,$$

co po przestawieniu pozornych wskaźników i i j daje

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i k_{ij} x_j .$$

Lewe strony (1.14) i (1.15) okazują się jednakowe, pociąga to

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i ,$$

skąd oczywiście $\lambda = \bar{\lambda}$, co dowodzi, że λ jest rzeczywiste.

1.3. Metoda iteracyjna wyznaczania wektorów i wartości własnych. Równanie (1.4), wyznaczające wartości własne, pozwala obliczyć λ na ogół w sposób przybliżony[4]. Spośród wielu metod wybierzemy metodę iteracyjną, pozwalającą na równoczesne wyznaczanie wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego [5]. Charakteryzuje ją bardzo przejrzysty schemat postępowania.

Podamy ją dla wartości własnej rzeczywistej, można jednak łatwo przenieść postępowanie i na przypadek wartości własnej zespolonej.

W równaniu (1.2)

$$XK = \lambda X$$

oznaczamy prawą stronę przez N:

$$N = \lambda X. \tag{1.16}$$

Równanie (1.2) napiszemy więc w postaci

$$XK = N. \tag{1.17}$$

Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie wektora X dowolny wektor $A_1 = \tau \{A_{11}, ..., A_{1n}\}$, dla którego $A_{11} = 1$. Wstawiając go do (1.17) za X obliczamy:

$$N_1 = A_1 K, \quad N_1 = \tau \{N_{11} \ldots N_{1n}\}.$$

Przyjmijmy teraz $A_2 = N_1 / N_{11}$, tak że $A_{21} = 1$.

[4] Różne metody rozwiązania równania (1.4) podaje [4], rozdział III.

[5] Metoda zaczerpnięta z [6], rozdział V.

Krakowian A_2 wstawiamy do (1.17) i wyznaczamy

$$N_2 = A_2 K, \quad N_2 = \tau \{N_{21} \ldots N_{2n}\}.$$

Z kolei przyjmiemy $A_3 = N_2/N_{21}$ itd.

Ciąg wektorów

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \tag{1.18}$$

przedstawia kolejne przybliżenia wektora własnego, o ile jest ciągiem zbieżnym. Przybliżeniami wartości własnej λ są wyznaczane z (1.16) v_i:

$$N_i = v_i A_i,$$

więc

$$v_i = \frac{N_{i1}}{A_{i1}} = N_{i1}.$$

Rzeczywiście, niech $A_i \to A_0$ i $v_i \to v_0$; ponieważ

$$A_i K = N_{i1} A_{i+1},$$

czyli

$$A_i K = v_i A_{i+1},$$

więc w granicy

$$A_0 K = v_0 A_0.$$

Liczba v_0 jest więc wartością własną, a A_0 odpowiadającym jej wektorem własnym.

Postępowanie powyższe da się ująć w następujący związek krakowianowy

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots \\ A_{12} & \dfrac{N_{12}}{N_{11}} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots \\ A_{1n} & \dfrac{N_{1n}}{N_{11}} & \ldots \end{matrix}\right\} K = \left\{\begin{matrix} N_{11} & N_{21} & \ldots \\ N_{12} & N_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots \\ N_{1n} & N_{2n} & \ldots \end{matrix}\right\}.$$

W krakowianie lewej strony wpisujemy dowolną pierwszą kolumnę z pierwszym wyrazem równym 1. Mnożąc ją przez K otrzymujemy pierwszą kolumnę prawej strony, którą po podzieleniu przez N_{11} wpisujemy jako drugą kolumnę lewej strony. Postępowanie to powtarzamy z drugą kolumną i dalszymi.

Jak widać, właściwie nie trzeba wypisywać prawej strony powyższego związku krakowianowego. Wystarczy notować tylko jej pierwszy wiersz dający przybliżenia λ.

Przykład. Wyznaczyć wektor i wartość własną krakowianu

$$\left\{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}$$

z dokładnością do czterech znaków dziesiętnych.

Schemat rachunku jest następujący (pierwsza kolumna jest przyjęta dowolnie)

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}867 & 0{,}806 & 0{,}802 & 0{,}802 \\ 1 & 0{,}500 & 0{,}451 & 0{,}445 & 0{,}445 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\{6 \quad 5{,}167 \quad 5{,}063 \quad 5{,}049\}.$$

Dalsze przybliżenia liczone z tą samą dokładnością będą identyczne z ostatnim, jest więc

$$X = \tau\{1 \quad 0{,}802 \quad 0{,}445\}, \qquad \lambda = 5{,}049$$

z żądaną dokładnością.

Podamy obecnie warunki gwarantujące zbieżność ciągu (1.18).

Twierdzenie 1.6. Metoda nasza daje zbieżny ciąg (1.18) *wtedy, gdy któraś wartość własna posiada moduł większy od modułów pozostałych, a wektory własne $X_1, \ldots, X_n$ są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech

(1.19) $$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots$$

Weźmy pod uwagę pierwszy wektor ciągu (1.18) A_1; można przedstawić go jako kombinację liniową wektorów $X_1, \ldots, X_n$:

$$A_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n.$$

Ponieważ

$$X_i K = \lambda_i X_i,$$

więc licząc z (1.17) N_1 otrzymujemy

$$N_1 = A_1 K = \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n X_n.$$

Z kolei

$$N_2 = A_2 K = \frac{N_1}{N_{11}} K = \frac{1}{N_{11}} (\alpha_1 \lambda_1^2 X_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 X_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^2 X_n).$$

Postępując tak dalej otrzymamy

$$N_k = A_k K = \frac{1}{N_{11} N_{21} \ldots N_{k-1,1}} (\alpha_1 \lambda_1^k X_1 + \alpha_2 \lambda_2^k X_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k X_n)$$

oraz

$$A_{k+1} = \frac{1}{N_{11} N_{21} \ldots N_{k,1}} (\alpha_1 \lambda_1^k X_1 + \alpha_2 \lambda_2^k X_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k X_n),$$

$$A_{k+1} = \frac{\lambda_1^k}{N_{11} N_{21} \ldots N_{k,1}} \left[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k X_2 + \ldots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) X_n\right].$$

Wobec (1.19) współczynnik przy X_1 ma różną od zera, skończoną granicę, współczynniki przy $X_2, \ldots, X_n$ zmierzają do zera. Ciąg A_{k+1} posiada więc granicę proporcjonalną do X_1, a więc o kierunku własnym wyznaczonym przez X_1. Widać od razu, że $N_{k1} \to \lambda_1$.

Metoda iteracyjna wyznaczy dla krakowianów symetrycznych również dalsze wektory własne. Niech bowiem będzie już wyznaczony X_1, wtedy dla każdego innego X zachodzi oprócz

$$XK = \lambda X \tag{1.20}$$

także równanie wynikłe z ortogonalności X_1 i X:

$$X_1 X = 0 . \tag{1.21}$$

Dla wyrazów X mamy zatem układ równań

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i k_{ji} &= \lambda x_j , \qquad j = 1, \ldots, n , \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_i &= 0 . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Wyznaczmy z ostatniego równania np. x_n:

$$x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i x_{10}}{x_{1n}} \tag{1.23}$$

i wstawmy do poprzednich

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i k_{ji} - \sum_{i=1}^{n-1} k_{jn} \frac{x_i x_{1i}}{x_{1n}} = \lambda x_j , \qquad j = 1, \ldots, n .$$

Odrzucając ostatnie z nich dostajemy równania dla wektora własnego krakowianu K' stopnia $n-1$ o wyrazach

$$k'_{ji} = k_{ji} - k_{jn} \frac{x_{1i}}{x_{1n}} . \tag{1.24}$$

Równanie to można przedstawić w formie

$$X K' = \lambda X. \tag{1.25}$$

Metoda iteracyjna wyznaczy największą co do modułu wartość własną i odpowiadający jej wektor własny, który uzupełniony wyrazem x_n, wyznaczonym z (1.23), jest wektorem własnym krakowianu K.

Powtarzając postępowanie wyznaczymy wszystkie wektory własne K.

2. Układy dynamiczne w pobliżu położenia równowagi stałej

2.1. Układ zachowawczy swobodny. Rozpatrzymy układ dynamiczny o n stopniach swobody w polu potencjalnym, z potencjałem $U = U(q_1, \ldots, q_n)$. Układ współrzędnych uogólnionych dobierzemy tak, by w położeniu równowagi stałej było $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Założymy ponadto, że

$$U(0, \ldots, 0) = 0 .$$

Wiadomo [6], że w pobliżu położenia równowagi można w przybliżeniu przyjąć, że U jest formą kwadratową współrzędnych q_i, a więc, że

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_i q_j . \tag{2.1}$$

Bez szkody dla ogólności można przyjąć

$$k_{ij} = k_{ji} . \tag{2.2}$$

Podobnie przyjmiemy, że energia kinetyczna T jest formą kwadratową prędkości uogólnionych. Oznaczmy

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i , \qquad i = 1, \ldots, n .$$

Mamy więc

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j . \tag{2.3}$$

Współczynniki m_{ij} są znów dobrane tak, aby

$$m_{ij} = m_{ji}. \tag{2.4}$$

Równania Lagrange'a funkcji $q_i = q_i(t)$ mają postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 , \qquad r = 1, \ldots, n . \tag{2.5}$$

Wprowadźmy oznaczenia na następujące krakowiany

$$Q = \tau\{q_1 \ldots q_n\}, \qquad \dot{Q} = \tau\{\dot{q} \ldots \dot{q}_n\},$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial q_r}\right\} = \tau\left\{\frac{\partial}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial}{\partial q_n}\right\}, \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} = \tau\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\right\},$$

$$K = \left\{\begin{matrix} k_{11} & \ldots & k_{n1} \\ . & \ldots & . \\ k_{1n} & \ldots & k_{nn} \end{matrix}\right\}, \qquad M = \left\{\begin{matrix} m_{11} & \ldots & m_{n1} \\ . & \ldots & . \\ m_{1n} & \ldots & m_{nn} \end{matrix}\right\}.$$

K nazwiemy krakowianem elastyczności, M krakowianem inercji. Z uwagi na (2.2) i (2.4) są to krakowiany symetryczne.

Widać, że związek (2.1) można zapisać w postaci

$$U = \frac{1}{2} QKQ , \tag{2.6}$$

a związek (2.3)

$$T = \frac{1}{2} \dot{Q}M\dot{Q}, \tag{2.7}$$

[6] Por. [6], rozdział V.

równania (2.5) zaś

$$\frac{d}{dt}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} T\right] + \left\{\frac{\partial}{\partial q_r}\right\} U = 0. \tag{2.8}$$

Wobec (2.7) mamy [7]

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} T = \dot{Q} M \tag{2.9}$$

i

$$\frac{d}{dt}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} T\right] = \ddot{Q} M, \tag{2.10}$$

a wobec (2.6)

$$\left\{\frac{\partial}{2 q_r}\right\} U = QK. \tag{2.11}$$

Dzięki temu równanie (2.8) zastąpić można przez

$$\ddot{Q} M + QK = 0. \tag{2.12}$$

To «liniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego w dziedzinie krakowianów» będzie miało rozwiązanie szczególne w postaci

$$Q = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.13}$$

gdzie

$$A = \tau\{a_1 \dots a_n\}, \qquad a_i = \text{const}, \qquad \omega = \text{const}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Różniczkując (2.13) względem t dwukrotnie otrzymamy

$$\ddot{Q} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi),$$

co po wstawieniu do równania (2.12) i redukcji przekształca je w równanie algebraiczne

$$A(K - \omega^2 M) = 0. \tag{2.14}$$

Jeżeli mają istnieć rozwiązania niezerowe, musi być

$$\operatorname{Det}[K - \omega^2 M] = 0. \tag{2.15}$$

Jest to tzw. równanie częstości układu dynamicznego; spełniające je ω nazywają się częstościami własnymi układu. Dla każdej częstości własnej równanie (2.14) wyznacza wektor A zwany wektorem drgań własnych.

Nie trudno zauważyć, że rozwiązanie (2.14) jest równoznaczne z wyznaczeniem wektorów własnych pewnego krakowianu. Istotnie, jeżeli istnieje M^{-1}, co ma

---

[7] W ogóle bowiem $\left\{\frac{\partial}{\partial q_r}\right\}$ $[QXQ] = 2QX$. Dowód jest natychmiastowy, jeżeli wypisze się eksplicite różniczkowaną formę i policzy jej pochodne.

miejsce wtedy, gdy Det $M \neq 0$, to mnożąc (2.14) obustronnie przez M^{-1} otrzymamy

$$A(K - \omega^2 M) M^{-1} = 0,$$

stąd

$$A [M^{-1} \tau (K - \omega^2 M)] = 0 ;$$

ale $K - \omega^2 M$ jest symetryczny, więc

(2.16) $$A [M^{-1} K - \omega^2 \tau] = 0 .$$

Oznacza to, że A i ω^2 są rozwiązaniami równania

(2.17) $$X [M^{-1} K - \lambda \tau] = 0 ,$$

czyli równania wektorów własnych krakowianu

$$\mathcal{K} = M^{-1} K.$$

W ten sposób rozwiązanie równania (2.14) sprowadza się do zagadnienia opracowanego w pierwszej części pracy. Krakowian $\mathcal{K}$ nie będzie, ogólnie biorąc, krakowianem symetrycznym, niemniej jednak przenoszą się nań udowodnione przez nas dla krakowianów symetrycznych twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. *Wszystkie wartości własne krakowianu $\mathcal{K}$ są liczbami rzeczywistymi.*

Twierdzenie 2.2. *Odpowiadające różnym wartościom własnym wektory X_1 i X_2 są ortogonalne w tym sensie, że $X_1 M X_2 = 0$.*

Twierdzenie 2.3. *Każdemu r-krotnemu pierwiastkowi równania charakterystycznego odpowiada r liniowo niezależnych wektorów własnych, parami ortogonalnych.*

Dowody tych twierdzeń są powtórzeniem rozumowań uzasadniających odpowiednie twierdzenia dla krakowianów symetrycznych.

Tak więc równanie (2.14) wyznacza n liniowo niezależnych, parami ortogonalnych wektorów $A_1, \ldots, A_n$. Wstawiając je do (2.13) otrzymamy n liniowo niezależnych rozwiązań (2.12):

$$Q_i = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Na φ_i wzięto tu dowolnie ustalone wartości. Rozwiązaniem ogólnym (2.12) jest dowolna kombinacja liniowa Q_i, czyli

$$Q = A_1 a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + A_n a_n \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

przy czym φ_i i a_i są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Każdy ruch układu dynamicznego da się zatem rozłożyć na drgania harmoniczne w kierunkach własnych krakowianu $\mathcal{K} = M^{-1} K$, z częstościami własnymi, z odpowiednio dobranymi amplitudami i fazami tych drgań.

2.2. Drgania wymuszone układu zachowawczego. Rozpatrzmy teraz układ dynamiczny w polu potencjalnym, który poddany jest sile wymuszającej harmonicznej o częstości ω. Oznaczmy ją

(2.18) $$F \sin(\omega t + \varphi) = \tau \{F_1 \ldots F_n\} \sin(\omega t + \varphi).$$

Równania Lagrange'a mają teraz postać

$$\ddot{Q}M+QK=F\sin(\omega t+\varphi). \tag{2.19}$$

Równanie (2.19) rozwiążemy wyznaczając rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$\ddot{Q}M+QK=0$$

i dodając je do rozwiązania szczególnego równania (2.19). Podamy, jak wyznaczyć takie rozwiązanie szczególne.

Otóż kształt równania (2.19) upoważnia do szukania rozwiązania w postaci

$$Q=A\sin(\omega t+\varphi), \quad \text{gdzie} \quad A=\tau\{a_1 \ldots a_n\}=\text{const}. \tag{2.20}$$

Po wstawieniu do równania otrzymuje się

$$-\omega^2 AM+AK=F, \tag{2.21}$$

czyli

$$A(K-\omega^2 M)=F \tag{2.22}$$

i

$$A=\frac{F}{\tau(K-\omega^2 M)}=\frac{F}{K-\omega^2 M}. \tag{2.23}$$

W szczególności, gdy ω nie jest częstością własną układu, krakowian $K-\omega^2 M$ jest pełnego rzędu i wtedy

$$A=F(K-\omega^2 M)^{-1}. \tag{2.24}$$

W wyliczeniu (2.23) lub (2.24) zastosować można metodę pierwiastka krakowianowego.

Korzystny pod względem rachunkowym jest także następujący sposób [8].

Szukamy rozwiązania, które jest sumą drgań o częstości ω i o kierunkach równoległych do kierunków drgań własnych układu. Oznaczmy przez $X_1, \ldots, X_n$ wektory własne. Szukamy zatem takiego Q, spełniającego (2.19), którego składowe mają postać

$$q_i=\sum_{r=1}^{n} c_r x_{ri}\sin(\omega t+\varphi), \quad i=1, \ldots, n. \tag{2.25}$$

Krakowianowo napiszemy to

$$Q=C\,\tau Z\sin(\omega t+\varphi), \quad \text{gdzie} \quad C=\tau\{c_1, \ldots, c_n\}. \tag{2.26}$$

Dla wyznaczenia C wstawiamy (2.26) do (2.19) otrzymując po uporządkowaniu

$$-\omega^2 C\,\tau Z\,M+C\,\tau Z\,K=F. \tag{2.27}$$

[8] Ideę tej metody dla układu bez sprzężenia bezwładnościowego (M jest przekątniowy) podaje [6], rozdział V.

Transponujemy obie strony i otrzymujemy

$$KZC - \omega^2 MZC = \tau F. \tag{2.28}$$

Podobnie jak (1.7) p. 1, otrzymuje się

$$KZ = MZD, \tag{2.29}$$

gdzie

$$D = \begin{Bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & . & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & . & \dots & 0 & \omega_n^2 \end{Bmatrix}.$$

Wstawiając (2.29) do (2.28) otrzymamy

$$(MZD - \omega^2 MZ)\, C = \tau F$$

oraz

$$MZ\,(D - \omega^2 \tau)\, C = \tau F.$$

Jeżeli teraz przedstawimy F w postaci

$$F = f(MZ), \quad \text{gdzie} \quad f = \tau\{f_1 \dots f_n\}, \tag{2.30}$$

to ostatnie równanie przyjmie postać

$$MZ\,(D - \omega^2 \tau)\, C = (MZ) f,$$

a stąd dla MZ o pełnym rzędzie wynika

$$(D - \omega^2 \tau)\, C = f. \tag{2.31}$$

Istotnie, $MZ\,[(D - \omega^2 \tau)\, C - f] = 0$ oznacza, że $(D - \omega^2 \tau)\, C - f$ jest rozwiązaniem równania $MZY = 0$, które dopuszcza niezerowe rozwiązania na Y tylko wtedy, gdy $\operatorname{Det}(MZ) = 0$.

Obliczenie wyrazów C ze związku (2.31) jest łatwe, gdyż $D - \omega^2 \tau$ jest krakowianem przekątniowym. Otrzymujemy dzięki temu

$$(\omega_i^2 - \omega^2)\, c_i = f_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

oraz

$$c_i = \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Przedstawienie F w postaci (2.30) jest możliwe dzięki ortogonalności wektorów $X_1, \dots, X_n$. Pomnóżmy bowiem (2.30) obustronnie przez X_s:

$$X_s F = X_s\,[f(MX)]$$

i przekształćmy prawą stronę następująco

$$X_s\, \tau\,(MZ) f = X_s\,(ZM) f = X_s\, MZf.$$

Ale

$$X_s MZ = \tau \{0 \dots 0, X_s MX_s, 0 \dots 0\},$$ co wynika z ortogonalności $X_1, \dots, X_n$.

Wobec tego mamy

$$X_s F = (X_s MX_s) f_s$$

i stąd ostatecznie

$$f_s = \frac{X_s F}{X_s MX_s}, \qquad s = 1, \dots, n.$$

2.3. Układ niezachowawczy swobodny. Załóżmy, że rozważany układ dynamiczny jest układem dysypatywnym. Oznacza to, że oprócz pola potencjalnego sił podlega on działaniu sił zależnych od prędkości uogólnionych. Istnieje mianowicie tzw. funkcja dysypacji D, będąca formą kwadratową prędkości uogólnionych, a więc

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{2.32}$$

taka, że składowe sił zależnych od prędkości są

$$-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_r}, \qquad r = 1, \dots, n;$$

Założymy znowu, że współczynniki n_{ij} są tak dobrane, by

$$n_{ij} = n_{ji}. \tag{2.33}$$

Równania Lagrange'a przyjmą teraz postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.34}$$

lub

$$\frac{d}{dt}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} T\right] + \left\{\frac{\partial}{\partial q_r}\right\} U + \left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} D = 0. \tag{2.34'}$$

Oznaczmy krakowian współczynników formy (2.32) przez N:

$$N = \left\{\begin{matrix} n_{11} & n_{21} & \dots & n_{n1} \\ . & . & \dots & . \\ n_{1n} & n_{2n} & \dots & n_{nn} \end{matrix}\right\}. \tag{2.35}$$

Wtedy można (2.32) zapisać w postaci

$$D = \frac{1}{2} \dot{Q} N \dot{Q}, \tag{2.36}$$

a równanie (2.34) wobec (2.12) z rozdziału pierwszego i

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right\} D = \dot{Q} N \tag{2.37}$$

w postaci

$$\ddot{Q}M+\dot{Q}N+QK=0. \tag{2.38}$$

To równanie różniczkowe rzędu drugiego można zastąpić przez układ równań rzędu pierwszego. Przyjmijmy bowiem

$$\dot{Q}=R, \tag{2.39}$$

wtedy

$$\dot{R}M+RN+QK=0. \tag{2.40}$$

Układ (2.39) i (2.40) napiszmy następująco:

$$\begin{aligned} &\dot{R}0+\dot{Q}\tau+R(-\tau)+Q0=0, \\ &\dot{R}M+\dot{Q}0+RN+QK=0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

co krótko napiszemy

$$\dot{Y}\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+Y\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}=0, \tag{2.42}$$

gdzie

$$Y=\begin{Bmatrix} R \\ Q \end{Bmatrix}, \qquad \dot{Y}=\begin{Bmatrix} \dot{R} \\ \dot{Q} \end{Bmatrix}. \tag{2.43}$$

W (2.42) i (2.43) występują tzw. krakowiany blokowe [9].

Poszukajmy rozwiązania (2.42) postaci [10]

$$Y=Ae^{\lambda t}, \quad \text{gdzie } A=\tau\{a_1 \dots a_n\}. \tag{2.44}$$

Po wstawieniu (2.44) do (2.42) otrzymamy

$$\lambda A\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+A\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}=0,$$

czyli

$$A\left[\lambda\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}\right]=0. \tag{2.45}$$

Załóżmy, że istnieje $\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}$, co zachodzi dla M pełnego rzędu. Mnożąc (2.45) przez $\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}$ otrzymamy

$$A\left(\lambda\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}=0,$$

[9] Por. [2], rozdział I.

[10] Por. [5], część A, par. 3.13.

skąd

$$A\left[\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}\left(\lambda\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} N & K \\ -\tau & 0 \end{Bmatrix}\right)\right]=0,$$

czyli

$$A\left(\lambda\tau+\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} N & K \\ -\tau & 0 \end{Bmatrix}\right)=0. \tag{2.46}$$

Jest to równanie wektorów własnych krakowianu

$$-\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} N & K \\ -\tau & 0 \end{Bmatrix}.$$

Jego równanie charakterystyczne jest

$$\operatorname{Det}\left[\lambda\tau+\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} N & K \\ -\tau & 0 \end{Bmatrix}\right]=0. \tag{2.47}$$

Każdemu pierwiastkowi rzeczywistemu (2.47) odpowiada rzeczywisty wektor własny. Jeżeli (2.47) ma pierwiastek zespolony, (2.46) wyznacza dlań wektor zespolony, w którym rozdzieliwszy część rzeczywistą i urojoną otrzymamy dwa liniowo niezależne wektory. Te same wektory otrzymamy dla pierwiastka sprzężonego. Tak więc otrzymamy tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile jest różnych pierwiastków (2.47).

Niech teraz λ_0 będzie pierwiastkiem $(r+1)$-krotnym. Poszukamy rozwiązań (2.42) w postaci

$$\begin{aligned} Y_1 &= [A_{11}t+A_{10}]\,e^{\lambda_0 t}, \\ Y_2 &= [A_{22}t^2+A_{21}t+A_{20}]\,e^{\lambda_0 t}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_r &= [A_{rr}t^r+A_{r,r-1}t^{r-1}+\dots+A_{r0}]\,e^{\lambda_0 t}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

gdzie

$$A_{ik}=\tau\,\{a_{ik1}\dots a_{ikn}\}.$$

Podstawmy Y_k do (2.42), otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} &[kA_{kk}t^{k-1}+(k-1)A_{k,k-1}t^{k-2}+\dots+A_{k1}]\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+ \\ &\qquad+(A_{kk}t^k+A_{k,k-1}t^{k-1}+\dots A_{k0})\,\lambda_0\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+ \\ &\qquad+(A_{kk}t^k+A_{k,k-1}t^{k-1}+\dots+A_{k0})\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}=0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Pociąga to

$$A_{kk}\left(\lambda_0\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}\right)=0 \tag{2.50}$$

i

$$A_{k,k-i}\left(\lambda_0\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} N & -\tau \\ K & 0 \end{Bmatrix}\right)=-(k-i)A_{k\;k-i+1}\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}. \tag{2.51}$$

Z (2.50) widać, że A_{kk} jest wektorem własnym krakowianu

$$-\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N & K \\ -\tau & 0 \end{Bmatrix}$$

odpowiadającym wartości własnej λ_0.

Z (2.51) wynika wzór rekurencyjny dla $A_{k,k-i}$:

$$A_{k,k-i} = -(k-i)A_{k,k-i+1}\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix} \Big/ \left(\lambda_0 \begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N & K \\ -\tau & 0 \end{Bmatrix}\right), \tag{2.52}$$

$$i = 1, \ldots, k.$$

Rozwiązania $Y_1, \ldots, Y_r$ są między sobą niezależne. W ten sposób każdej wartości własnej odpowiada tyle niezależnych rozwiązań typu (2.44) lub (2.48), ile wynosi jej krotność. Daje to n niezależnych rozwiązań równania (2.42), co pozwala wyznaczyć jego rozwiązanie ogólne.

Literatura cytowana w tekście

[1] S. Banach, *Mechanika*, tom II, Czytelnik 1947.
[2] T. Banachiewicz, *Rachunek krakowianowy*, PWN Warszawa 1959.
[3] J. P. Den Hartog, *Mechanical vibrations*, New York 1933.
[4] W. N. Faddiejewa, *Metody numeryczne algebry liniowej*, PWN Warszawa 1955.
[5] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden u. Lösungen*. Band I., Leipzig 1943.
[6] T. Kármán i M. A. Biot, *Metody matematyczne w technice*, PWN Warszawa 1958.
[7] A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa*, tom I, III, PWN Warszawa 1953 i 1954.

Резюме

КРАКОВИАНОВЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе приводится пример применения краковианового исчисления к интегрированию уравнений движения Лагранжа. Краковиановое исчисление использовалось в качестве средства, которое придает известным рассуждениям и исчислительным схемам большую простоту и ясность.

Рассуждениям предшествует глава о векторах и собственных значениях краковиана. Здесь вводятся аналогичные употребляемые в алгебре матрицы, понятия векторов и собственных значений, а также даются основные теоремы, касающиеся этих понятий. В особенности точнее исследуется случай симметрического краковиана. В конце этого раздела приводится итерационный метод определения векторов и собственных значений, ясно представляющий исчислительную схему.

Раздел 2 посвящен дискуссии, касающейся уравнений Лагранжа для динамических систем, находящихся вблизи положения конвариантного равновесия. Рассматривается свободная консервативная система, для которой уравнение Лагранжа заменяются дифференциальными уравнениями второго порядка в области краковианов и его решение сводится к определению собственных векторов некоторого краковиана. Свойства решений выясняются несколькими теоремами.

Затем, полученные результаты расширяются на консервативную систему, подверженную вынуждающей силе. Этот случай описывает линейное однородное уравнение второго по-

рядка в области краковианов. Для его решения можно, в особенности, применить методы краковианового корня или приведенную в работе удобную, с точки зрения исчислений, схему.

В заключительной части работы рассматриваются диссипативные системы. Этот случай описан линейным уравнением первого порядка с коэффициентами в виде краковианов. Его решение также сводится к определению собственных векторов некоторого краковиана.

Summary

A CRACOVIAN METHOD FOR SOLVING EQUATIONS OF MOTION OF DYNAMIC SYSTEMS

This paper is devoted to the application of the Cracovian calculus to the integration of Lagrange's equations of motion. The Cracovian calculus gives considerable simplicity and lucidity to familiar arguments and schemes.

The discussion proper is preceded by a section devoted to eigenvectors and eigenvalues of a Cracovian. The notions of eigenvector and eigenvalue are introduced similarly to those of the matrix algebra. Some fundamental theorems concerning these notions are given. In particular the case of symmetric Cracovian is discussed in more detail. The section is concluded by a description of the iteration method for determining the eigenvectors and eigenfunctions showing the simplicity of the computation.

The second section is devoted to a discussion of Lagrange's equations for dynamic systems in the neighbourhood of stable equilibrium. A free conservative system is considered, for which Lagrange's equations are replaced with a Cracovian differential equation of the second order. Its solution is reduced to the determination of the eigenvectors of a certain Cracovian. A few theorems express the properties of the solutions.

Next, the results are generalized to the case of a conservative system subject to an excitation. This case is described by a non-homogeneous linear Cracovian equation of the second order. To solve it the method of the Cracovian root may be used as well as a convenient procedure proposed in the present paper.

The work is concluded by a section devoted to dissipative systems. This case is described by a linear equation of the first order with coefficients constituting block Cracovians. Its solution reduces again to the determination of the eigenvectors of a certain Cracovian.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 grudnia 1961 r.