Rozprawy Inżynierskie
2, 11 (1963)

PEWNE ROZWIĄZANIE DLA ANIZOTROPOWEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

ROMAN SOLECKI (WARSZAWA)

Rozwiązania ogólne wyprowadzone w pracy [1] wykorzystamy obecnie w celu określenia nieskończonych układów równań algebraicznych występujących w przypadku konkretnych warunków brzegowych.

1. Płyta podparta na obwodzie

W tym przypadku współczynniki Fouriera ${}^jA_p$ oraz przemieszczenia naroży są równe zeru. Rozwiązanie (2.9.1), [1], przyjmuje zatem następującą postać:

$$(1.1)\qquad \frac{4}{ab}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} W_{klmn}\, w_{kl} = q_{mn} + \frac{b}{2}\alpha_m(({}^1B_n)) + \frac{a}{2}\beta_n(({}^2B_m)) + 2\alpha_m\beta_n\left[\sum_{l=1}^{\infty}((\overset{1-5}{c_{nl}}\,{}^1C_l)) + \sum_{k=1}^{\infty}((\overset{2-6}{c_{mk}}\,{}^2C_k))\right],\qquad m,n=1,2,\ldots,$$

gdzie

$$(1.2)\qquad W_{klmn} = \sum_{r=1}^{3} {}^rW_{klmn}.$$

We wzorach powyższych i w dalszych częściach pracy zachowujemy oznaczenia podane w [1]. Pamiętając o tym, że współczynniki ${}^jC_p$ są współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera według sinusów kąta nachylenia odpowiedniej krawędzi płyty, nie trudno znaleźć związki między nimi a współczynnikami w_{mn}. Mamy mianowicie

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} {}^1C_n &= \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m w_{mn}, & {}^3C_n &= \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\alpha_m w_{mn},\\ {}^2C_m &= \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n w_{mn}, & {}^4C_m &= \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\beta_n w_{mn}. \end{aligned}$$

Podstawiamy z kolei (1.3) do (1.1) otrzymując po stosownych przekształceniach następujący nieskończony układ równań algebraicznych:

$$(1.4)\qquad \frac{4}{ab}\sum_{k}\sum_{l} W'_{klmn}\, w_{kl} = q_{mn} + \frac{b}{2}\alpha_m(({}^1B_n)) + \frac{a}{2}\beta_n(({}^2B_m)),$$

gdzie

$$(1.5)\quad W'_{klmn} = {}^1W_{klmn} + {}^2W_{klmn} - 2\,[\alpha_m\,\alpha_k\,(\alpha_k\,\beta_n\,b^5_{klmn} + \alpha_m\,\beta_l\,b^5_{mnkl}) + \\ + \beta_n\,\beta_l\,(\alpha_m\,\beta_l\,b^6_{klmn} + \alpha_k\,\beta_n b^6_{mnkl})].$$

Układ (1.4) stanowi podstawę do otrzymania rozwiązań dla płyty o krawędziach utwierdzonych lub swobodnie podpartych. Najprostsze rozwiązanie znajdujemy dla płyty na obwodzie swobodnie podpartej. Zważywszy, że w tym przypadku współczynniki ${}^jB_p$ są równe zeru mamy bezpośrednio z (1.4)

$$(1.6)\quad \frac{4}{ab}\sum_k\sum_l W'_{klmn}\,w_{kl} = q_{mn},$$

gdzie W'_{klmn} jest określone wzorem (1.5).

Bardziej skomplikowany jest drugi skrajny przypadek: płyta na obwodzie całkowicie utwierdzona. Przekształcamy (1.4) w tym przypadku do następującej postaci:

$$(1.7)\quad \frac{4}{ab}\,W'_{mnmn}\,w_{mn} + \frac{4}{ab}\sum_k\sum_l \overline{W}'_{klmn}\,w_{kl} = q_{mn} + \\ + \frac{b}{2}\,\alpha_m\,(({}^1B_n)) + \frac{a}{2}\,\beta_n\,(({}^2B_m)),$$

gdzie

$$(1.8)\quad \overline{W}'_{klmn} = (1 - \delta^k_m\,\delta^l_n)\,W'_{klmn}.$$

Po obustronnym podzieleniu przez $(4/ab)\,W'_{mnmn}$, po pomnożeniu przez α_m lub β_n itd. oraz po zsumowaniu względem m albo n znajdujemy uwzględniając, że ${}^jC_p \equiv 0$ następujące jednowskaźnikowe układy równań:

(1.9)

$$\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l W_{kln}\,w_{kl} = G_n + \frac{b}{2}\,(Q_n\,{}^1B_n - Q'_n\,{}^3B_n) + \frac{\beta_n}{2}\sum_m \frac{m\pi}{W'_{mnmn}}\,(({}^2B_m)), \\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l W'_{kln}\,w_{kl} = G'_n + \frac{b}{2}\,(Q'_n\,{}^1B_n - Q_n\,{}^3B_n) + \frac{\beta_n}{2}\sum_m \frac{(-1)^m\,m\pi}{W'_{mnmn}}\,(({}^2B_m)),$$

$$\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l \overline{W}_{klm}\,w_{kl} = \overline{G}_m + \frac{\alpha_m}{2}\sum_n \frac{n\pi}{W'_{mnmn}}\,(({}^1B_n)) + \frac{a}{2}\,(\overline{Q}_m\,{}^2B_m - \overline{Q}'_m\,{}^4B_m), \\ m = 1,$$

$$\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l \overline{W}'_{klm}\,w_{kl} = \overline{G}'_m + \frac{\alpha_m}{2}\sum_n \frac{(-1)^n\,n\pi}{W'_{mnmn}}\,(({}^1B_n)) + \frac{a}{2}\,(\overline{Q}'_n\,{}^2B_m - \overline{Q}_m\,{}^4B_m),$$

gdzie oznaczyliśmy

$$
(1.10)\qquad
\begin{aligned}
W_{kln} &= \sum_m \frac{\alpha_m \overline{W}'_{klmn}}{W'_{mnmn}}, &
W'_{kln} &= \sum_m \frac{(-1)^m \alpha_m \overline{W}'_{klmn}}{W'_{mnmn}},\\
\overline{W}_{klm} &= \sum_n \frac{\beta_n \overline{W}'_{klmn}}{W'_{mnmn}}, &
\overline{W}'_{klm} &= \sum_n \frac{(-1)^n \beta_n \overline{W}'_{klmn}}{W'_{mnmn}},\\
G_n &= \sum_m \frac{\alpha_m q_{mn}}{W'_{mnmn}}, &
G'_n &= \sum_m \frac{(-1)^m \alpha_m q_{mn}}{W'_{mnmn}},\\
\overline{G}_m &= \sum_n \frac{\beta_n q_{mn}}{W'_{mnmn}}, &
\overline{G}'_m &= \sum_n \frac{(-1)^n \beta_n q_{mn}}{W'_{mnmn}},\\
Q_n &= \sum_m \frac{\alpha_m^2}{W'_{mnmn}}, &
Q'_n &= \sum_m \frac{(-1)^m \alpha_m^2}{W'_{mnmn}},\\
\overline{Q}_m &= \sum_n \frac{\beta_n^2}{W'_{mnmn}}, &
\overline{Q}'_m &= \sum_n \frac{(-1)^n \beta_n^2}{W'_{mnmn}}.
\end{aligned}
$$

Należy pamiętać o tym, że w szeregach oznaczonych symbolami W wyrazy ogólne są równe zeru przy $m=k$ lub $n=l$ [wynika to z (1.8)]. Układy równań (1.7), (1.9) sprowadzamy po przekształceniach do układu trzech sprzężonych nieskończonych układów równań:

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l A_{klmn} w_{kl} = q_{mn} - \alpha_m C_{mn} -\\
&\quad -\frac{a}{2}\alpha_m\beta_n \sum_k \frac{[1+(-1)^{m+k}]\,\alpha_k}{A_{kn}}\left[(({}^2B_k)) + \frac{a}{2}\beta_n(({}^2B_m))\right], \qquad m,n=1,2,\ldots,
\end{aligned}
$$

$$
(1.11)\qquad
\begin{aligned}
&(\overline{Q}_m+\overline{Q}'_m)\,{}^1\overline{B}_m - \alpha_m \sum_k [1+(-1)^{m+k}]\,(V_{mk}+V'_{mk})\,\alpha_k\,{}^1\overline{B}_k =\\
&\quad = -\frac{2}{a}(\overline{G}_m+\overline{G}'_m) + \frac{2}{a}\alpha_m(H_m+H'_m) + \frac{8}{a^2 b}\sum_k\sum_l [(\overline{W}_{klm}+\overline{W}'_{klm}) -\\
&\qquad - \alpha_m(U_{klm}+U'_{klm})]\,w_{kl}, \qquad m=1,2,\ldots,\\
&(\overline{Q}_m-\overline{Q}'_m)\,{}^2\overline{B}_m - \alpha_m \sum_k [1+(-1)^{m+k}]\,(V_{mk}-V'_{mk})\,\alpha_k^2\,{}^2\overline{B}_k =\\
&\quad = -\frac{2}{a}(\overline{G}_m-\overline{G}'_m) + \frac{2}{a}\alpha_m(H_m-H'_m) +\\
&\quad + \frac{8}{a^2 b}\sum_k\sum_l [(\overline{W}_{klm}-\overline{W}'_{klm}) - \alpha_m(U_{klm}-U'_{klm})]\,w_{kl}, \qquad m=1,2,\ldots,
\end{aligned}
$$

gdzie oznaczyliśmy

$$
{}^1\overline{B}_m = {}^2B_m - {}^4B_m, \qquad {}^2\overline{B}_m = {}^2B_m + {}^4B_m,
$$

$$
U_{klm} = \sum_r \frac{[W_{klr}+(-1)^m W'_{klr}]\,\beta_r}{A_{mr}},
$$

$$
U'_{klm} = \sum_r \frac{(-1)^r\,[W_{klr}+(-1)^m W'_{klr}]\beta_r}{A_{mr}},
$$

$$V_{mk} = \sum_r \frac{\beta_r^2}{A_{rk} W'_{mrmr}}, \qquad V'_{mk} = \sum_r \frac{(-1)^r \beta_r^2}{A_{kr} W'_{mrmr}},$$

$$H_m = \sum_r \frac{\beta_r [G_r + (-1)^m G'_r]}{A_{mr}}, \qquad H'_m = \sum_r \frac{(-1)^r \beta_r [G_r + (-1)^m G'_r]}{A_{mr}},$$

$$A_{kn} = [Q_n + (-1)^k Q'_n] W'_{knkn}, \tag{1.12}$$

$$A_{klmn} = W'_{klmn} - \frac{\alpha_m [W_{kln} + (-1)^m W'_{kln}]}{Q_n + (-1)^m Q'_n},$$

$$C_{mn} = \frac{G_n + (-1)^m G'_n}{Q_n + (-1)^m Q'_n}.$$

Po wyznaczeniu w_{mn} obliczamy ${}^2B_m$ i ${}^4B_m$ z równań (1.11) i (1.12), natomiast współczynniki ${}^1B_n$ oraz ${}^3B_n$ określamy ze wzorów:

$$\begin{aligned}
{}^1B_n &= \frac{1}{Q_n'^2 - Q_n^2} \left\{ \frac{2}{b}(Q_n G_n - Q'_n G'_n) + \frac{8}{ab^2} \sum_k \sum_l (Q'_n W'_{kln} - Q_n W_{kln}) w_{kl} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{a}{b} \beta_n \sum_k \frac{\alpha_k}{W'_{knkn}} [Q_n - (-1)^k Q'_n] (({}^2B_k)) \right\}, \\
{}^3B_n &= \frac{1}{Q_n'^2 - Q_n^2} \left\{ \frac{2}{b}(Q'_n G_n - Q_n G'_n) + \frac{8}{ab^2} \sum_k \sum_l (Q_n W'_{kln} - Q'_n W_{kln}) w_{kl} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{a}{b} \beta_n \sum_k \frac{\alpha_k}{W'_{knkn}} [Q'_n - (-1)^k Q_n] (({}^2B_k)) \right\}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Rozwiązanie płyty o mieszanych warunkach brzegowych przeprowadza się w podobny sposób. Warto zauważyć, że nieco prościej rozwiązuje się zagadnienie dla płyty o warunkach brzegowych typu M. Lévy'ego. Zadanie sprowadza się bowiem w tym przypadku do poszukiwania rozwiązania jednego dwuwskaźnikowego nieskończonego układu równań algebraicznych.

2. Płyta o krawędziach swobodnych

Ponieważ brzegowe momenty zginające są teraz równe zeru, przeto w równan (2.9.1) pracy [1] przyrównujemy do zera współczynniki Fouriera ${}^jB_p$ otrzymując w ten sposób

$$\begin{aligned}
\frac{4}{ab} \sum_k \sum_l W_{klmn} w_{kl} &= q_{mn} + 2\alpha_m \beta_n \left[\sum_l ((\overset{1-5}{c_{nl}} {}^1C_l)) + \right. \\
&\quad + \sum_k ((\overset{2-6}{c_{mk}} {}^2C_k)) + \sum_l \alpha_m (([{}^1\varphi_{mnl} - 2\beta_n \overset{1-5}{d_{nl}}] {}^1A_l)) + \\
&\quad \left. + \sum_k \beta_n (([{}^2\psi_{mnk} - 2\alpha_m \overset{2-6}{c_{mk}}] {}^2A_k)) \right], \qquad m, n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Przed ułożeniem warunków potrzebnych do wyznaczenia współczynników ${}^{j}A_p$ musimy wyrugować z (2.1) współczynniki Fouriera ${}^{j}C_p$. Napotykamy przy tym następującą trudność: różniczkując szereg Fouriera, będący rozwinięciem poszukiwanej funkcji $w(x, y)$, zgodnie z zasadami różniczkowania szeregu sinusów otrzymujemy szereg, którego wyraz ogólny jest sumą kilku składników. Do dalszych przekształceń konieczne jest zastąpienie wspomnianego szeregu sum przez sumę szeregów, co nie jest dozwolone, bowiem niektóre z nich są rozbieżne. Trudność tę przezwyciężamy w następujący sposób. Przedstawiamy powierzchnię ugięcia $w(x, y)$ w postaci sumy dwóch funkcji

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y), \tag{2.2}$$

z których pierwsza

$$\begin{aligned} w_0(x, y) = \frac{a-x}{a} \sum_n {}^{1}A_n \sin \beta_n y + \frac{x}{a} \sum_n {}^{3}A_n \sin \beta_n y + \\ + \frac{b-y}{b} \sum_m {}^{2}A_m \sin \alpha_m x + \frac{y}{b} \sum_m {}^{4}A_m \sin \alpha_m x \end{aligned} \tag{2.3}$$

spełnia, co łatwo sprawdzić, geometryczne warunki brzegowe badanego zadania, druga zaś

$$w_1(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n w'_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \tag{2.4}$$

jest równa zeru na konturze płyty, może więc być dwukrotnie różniczkowana wyraz po wyrazie. Otrzymujemy teraz następujące wzory określające współczynniki ${}^{j}C_p$:

$$\begin{aligned} {}^{1}C_n &= \frac{4}{ab} \sum_m \alpha_m w'_{mn} + \frac{1}{a} ({}^{3}A_n - {}^{1}A_n) + \frac{2}{b\beta_n} \sum_m \alpha_m (({}^{2}A_m)), \\ {}^{3}C_n &= \frac{4}{ab} \sum_m (-1)^m \alpha_m w'_{mn} + \frac{1}{a} ({}^{3}A_n - {}^{1}A_n) + \frac{2}{b\beta_n} \sum_m (-1)^m \alpha_m (({}^{2}A_m)), \\ {}^{2}C_m &= \frac{4}{ab} \sum_n \beta_n w'_{mn} + \frac{1}{b} ({}^{4}A_m - {}^{2}A_m) + \frac{2}{a\alpha_m} \sum_n \beta_n (({}^{1}A_n)), \\ {}^{4}C_m &= \frac{4}{ab} \sum_n (-1)^n \beta_n w'_{mn} + \frac{1}{b} ({}^{4}A_m - {}^{2}A_m) + \frac{2}{a\alpha_m} \sum_n (-1)^n \beta_n (({}^{1}A_n)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wyznaczamy z kolei związek zachodzący między transformatami w_{mn} i w'_{mn}. W tym celu rozwijamy obie strony równości (2.2) w podwójny szereg Fouriera według sinusów i przyrównujemy współczynniki rozwinięcia, otrzymując

$$w_{mn} = w'_{mn} + \frac{b}{2\alpha_m} (({}^{1}A_n)) + \frac{a}{2\beta_n} (({}^{2}A_m)). \tag{2.6}$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.5) i (2.6) do (2.1) i po wykonaniu nieskomplikowanych przekształceń znajdujemy następujący nieskończony układ równań algebraicznych:

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad \frac{4}{ab}\sum_{k}\sum_{l} W_{klmn}\, w'_{kl} = q_{mn} + \sum_{l}\Big[(({}^{1}T_{mnl}\, {}^{1}A_{l})) -{} \\
- \frac{2}{a}\, \alpha_m \beta_n\, ((\overset{1-5}{c}_{nl}))\, ({}^{1}A_{l} - {}^{3}A_{l})\Big] + \sum_{k}\Big[(({}^{2}T_{mnk}\, {}^{2}A_{k})) -{} \\
- \frac{2}{b}\, \alpha_m \beta_n\, ((\overset{2-6}{c}_{mk}))\, ({}^{2}A_{k} - {}^{4}A_{k})\Big] + \frac{2}{ab}\sum_{k}\sum_{l}\Big\{ b V_{klmn}\, [{}^{1}A_{l} - (-1)^{k}\, {}^{3}A_{l}] +{} \\
+ a\overline{V}_{klmn}\, [{}^{2}A_{k} - (-1)^{l}\, {}^{4}A_{k}]\Big\}, \qquad m, n, = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

gdzie oznaczyliśmy

$$
(2.8)\qquad
\begin{aligned}
{}^{j}T_{mnl} &= \alpha_m\, [{}^{j}\varphi_{mnl} - 2\beta_n\, \overset{j-5}{d}_{nl}], \qquad j = 1, 3, \\
{}^{j}T_{mnk} &= \beta_n\, [{}^{j}\psi_{mnk} - 2\alpha_m\, \overset{j-6}{c}_{mk}], \qquad j = 2, 4, \\
V_{klmn} &= \frac{1}{\alpha_k}\{- W'_{klmn} + 2\alpha_m \beta_n \beta_l\, [[\overset{2-6}{c}_{mk}]]\}, \\
\overline{V}_{klmn} &= \frac{1}{\beta_l}\{- W'_{klmn} + 2\alpha_m \beta_n \alpha_k\, [[\overset{1-5}{c}_{nl}]]\}.
\end{aligned}
$$

Układ (2.7) zawiera już tylko pięć nieznanych ciągów współczynników Fouriera. Brakujące cztery układy równań otrzymujemy z warunków, że siła poprzeczna jest równa zeru wzdłuż każdej z krawędzi płyty. Rozwijamy przede wszystkim moment zginający $M_x(x, y)$ w podwójny szereg Fouriera według sinusów

$$
(2.9)\qquad M_x(x, y) = \frac{4}{ab}\sum_{k}\sum_{l} M_{kl} \sin \alpha_k x \sin \beta_l y.
$$

Współczynnik rozwinięcia M_{kl} obliczamy po przekształceniach ze wzorów (2.7), (2.8) i (2.10) podanych w pracy [1] oraz ze wzoru (2.6):

$$
\begin{aligned}
(2.10)\qquad M_{kl} = \frac{4}{ab}\sum_{m}\sum_{n}\Big\{ [\alpha_m^2\, a^1_{klmn} + \beta_n^2\, a^3_{klmn} - 2\alpha_m \beta_n\, b^5_{klmn}]\, w'_{mn} +{} \\
+ \frac{a}{2}\, \frac{\alpha_m^2}{\beta_n}\, a^1_{klmn}\, (({}^{2}A_m)) + \frac{b}{2}\, \frac{\beta_n^2}{\alpha_m}\, a^3_{klmn}\, (({}^{1}A_n))\Big\} + \frac{2}{a}\sum_{n} \beta_n\, b^5_{kl0n}\, ({}^{1}A_n - {}^{3}A_n) +{} \\
+ \frac{2}{b}\sum_{m} \alpha_m\, b^5_{klm0}\, ({}^{2}A_m - {}^{4}A_m).
\end{aligned}
$$

Natomiast moment skręcający $M_{xy}(x, y)$ rozwijamy w podwójny szereg Fouriera według cosinusów

$$
(2.11)\qquad M_{xy}(x, y) = \frac{4}{ab}\sum_{k=0}\sum_{l=0} \lambda_{kl}\, \overline{M}_{kl} \cos \alpha_k x \cos \beta_l y,
$$

przy czym współczynniki $\overline{M}_{kl}$ wyrażone są wzorem

$$
(2.12)\qquad \overline{M}_{kl} = \frac{4}{ab}\sum_{m}\sum_{n}\Big\{ [\alpha_m^2\, b^5_{mnkl} + \beta_n^2\, b^6_{mnkl} - 2\alpha_m \beta_n\, \bar{a}^4_{klmn}]\, w'_{mn} +
$$

$$+\frac{a}{2}\frac{\alpha_m^2}{\beta_n}b^5_{mnkl}((^2A_m))+\frac{b}{2}\frac{\beta_n^2}{\alpha_m}b^6_{mnkl}((^1A_n))\Big\}+\frac{2}{a}\sum_n\beta_n\bar{a}^4_{kl0n}(^1A_n-{}^3A_n)+$$
$$+\frac{2}{b}\sum_m\alpha_m\bar{a}^4_{klm0}(^2A_m-{}^4A_m).$$

Funkcja $M_x(x,y)$ jest z założenia równa zeru na brzegu płyty, przeto jej szereg Fouriera (2.9) może być zróżniczkowany wyraz po wyrazie. Również szereg (2.11) może być zróżniczkowany wyraz po wyrazie (jako szereg według cosinusów). Okoliczności te wykorzystujemy obliczając brzegowe siły poprzeczne. I tak np. dla krawędzi $x=0$ mamy

$$Q_x(0,y)=\frac{\partial}{\partial x}[M_x(0,y)]+2\frac{\partial}{\partial y}[M_{xy}(0,y)]=0, \tag{2.13}$$

skąd po przekształceniach wynika następujący nieskończony układ równań:

$$\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l D_{nkl}w'_{kl}+\frac{2}{a}\sum_k\beta_k(H_{nk}\,{}^1A_k-H'_{nk}\,{}^3A_k)+ \tag{2.14}$$
$$+\frac{2}{b}\sum_k\alpha_k(\overline{H}_{nk}\,{}^2A_k-\overline{H}'_{nk}\,{}^4A_k).$$

Oznaczyliśmy

$$\begin{aligned} D_{nkl}&=\sum_{m=0}\lambda_m(\alpha_m\alpha_k^2a^1_{klmn}+\alpha_m\beta_l^2a^3_{klmn}-2\alpha_m\alpha_k\beta_l b^5_{mnkl}-\\ &\qquad-2\alpha_k^2\beta_n b^5_{klmn}-2\beta_n\beta_l^2b^6_{klmn}+4\alpha_k\beta_n\beta_l\bar{a}^4_{klmn}),\\ H_{nk}&=\beta_k E_{nk}+F_{nk},\qquad H'_{nk}=\beta_k E'_{nk}+F_{nk},\\ \overline{H}_{nk}&=\alpha_k\overline{E}_{nk}+\overline{F}_{nk},\qquad \overline{H}'_{nk}=\alpha_k\overline{E}'_{nk}+\overline{F}_{nk},\end{aligned} \tag{2.15}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \overline{E}_{nk}&=\sum_{m=0}\sum_l\frac{\lambda_m}{\beta_l}(\alpha_m a^1_{klmn}-2\beta_n b^5_{klmn}),\\ E_{nk}&=\sum_{m=0}\sum_l\frac{\lambda_m}{\alpha_l}(\alpha_m a^3_{klmn}-2\beta_n b^6_{klmn}),\\ F_{nk}&=\sum_{m=0}\lambda_m(\alpha_m b^5_{mn0k}-2\beta_n\bar{a}^4_{mn0k}),\\ \overline{F}_{nk}&=\sum_{m=0}\lambda_m(\alpha_m b^5_{mnk0}-2\beta_n\bar{a}^4_{mnk0}),\qquad \lambda_m=1-\frac{1}{2}\delta^0_m.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Wielkości oznaczone znakiem (′) otrzymuje się z (2.16) mnożąc wyrazy odpowiednich szeregów przez $(-1)^l$. W podobny sposób wyznaczamy pozostałe trzy nieskończone układy równań. Układ odpowiadający warunkowi $Q_x(a,y)=0$ ma budowę identyczną z (2.14), przy czym wyrazy ogólne szeregów (2.15) i (2.16) należy pomnożyć przez $(-1)^m$. Z warunku $Q_y(x,0)=0$ znajdujemy natomiast

$$\frac{4}{ab}\sum_k\sum_l K_{mkl}\, w'_{kl} + \frac{2}{a}\sum_k \beta_k (\bar{P}_{mk}\, {}^1A_k - \bar{P}'_{mk}\, {}^3A_k) + \tag{2.17}$$
$$+\frac{2}{b}\sum_k \alpha_k (P_{mk}\, {}^2A_k - P'_{mk}\, {}^4A_k) = 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$K_{mkl} = \sum_{n=0} \lambda_n (\beta_n \beta_l^2 a^2_{klmn} + \alpha_k^2 \beta_n a^3_{klmn} - 2\alpha_k \beta_n \beta_l b^6_{mnkl} -$$
$$- 2\alpha_m \alpha_k^2 b^5_{klmn} - 2\alpha_m \beta_l^2 b^6_{klmn} + 4\alpha_m \alpha_k \beta_l \bar{a}^4_{klmn}), \tag{2.18}$$
$$\bar{P}_{mk} = \beta_k L_{mk} + \bar{N}_{mk}, \qquad \bar{P}'_{mk} = \beta_k L'_{mk} + \bar{N}_{mk},$$
$$P_{mk} = \alpha_k \bar{L}_{mk} + N_{mk}, \qquad P'_{mk} = \alpha_k \bar{L}'_{mk} + N_{mk},$$

przy czym

$$L_{mk} = \sum_{n=0}\sum_l \frac{\lambda_n}{\alpha_l}(\beta_n a^2_{klmn} - 2\alpha_m b^6_{klmn}),$$
$$\bar{L}_{mk} = \sum_{n=0}\sum_l \frac{\lambda_n}{\beta_l}(\beta_n a^3_{klmn} - 2\alpha_m b^5_{klmn}),$$
$$\bar{N}_{mk} = \sum_{n=0} \lambda_n (\beta_n b'_{mn0k} - 2\alpha_m \bar{a}^4_{mn0k}), \tag{2.19}$$
$$N_{mk} = \sum_{n=0} \lambda_n (\beta_n b^6_{mnk0} - 2\alpha_m \bar{a}^4_{mnk0}).$$

Wielkości oznaczone ′ (prim) obliczamy w sposób poprzednio omówiony. Aby otrzymać układ równań odpowiadający ostatniemu warunkowi, należy pomnożyć wyrazy ogólne szeregów (2.18) i (2.19) przez $(-1)^n$. Uzyskujemy ostatecznie układ pięciu nieskończonych układów równań algebraicznych (2.7), (2.14) i (2.17). Do jeszcze bardziej skomplikowanych związków prowadzi zagadnienie płyty «pływającej». Nie będziemy się tym problemem zajmować i zauważymy jedynie, że w tym przypadku powierzchnię odkształconą płyty dogodnie jest przedstawić jako sumę trzech funkcji, dodając do sumy (2.2) składnik, którego znaczenie opisane jest w pracy [2].

3. Przykład

Dla ilustracji wyprowadzonych związków rozwiążemy następujący przykład: izotropowa płyta kwadratowa o zmiennej sztywności, całkowicie utwierdzona wzdłuż obwodu, jest poddana działaniu obciążenia ciągłego równomiernie rozłożonego na jej powierzchni. Zakładamy, że sztywność $D(x, y)$ zmienia się liniowo w kierunku osi Ox:

$$D(x, y) \equiv D(x) = D_0(1 + x/a). \tag{3.1}$$

Podstawiając wielkości

$$D^1 = D^2 = D(x), \quad D^3 = \nu D(x), \quad D^4 = \frac{1-\nu}{2} D(x), \quad D^5 = D^6 = 0 \tag{3.2}$$

do wzorów (2.10) w [1], znajdujemy

$$a^1_{klmn}=a^2_{klmn}=\begin{cases}\dfrac{3D_0\,a^2}{8}\,\delta^l_n, & \text{gdy}\quad k=m,\\[2mm] -\dfrac{D_0\,a^2}{\pi^2}\,\dfrac{[1-(-1)^{k+m}]mk}{(m^2-k^2)^2}\,\delta^l_n, & \text{gdy}\quad k\neq m;\end{cases}$$

$$a^3_{klmn}=\nu a^1_{klmn};\tag{3.3}$$

$$a^4_{klmn}=\begin{cases}\dfrac{1-\nu}{2}\,\dfrac{3D_0\,a^2}{8}\,\delta^l_n, & \text{gdy}\quad k=m,\\[2mm] -\dfrac{1-\nu}{2}\,\dfrac{D_0\,a^2}{2\pi^2}\,\dfrac{[1-(-1)^{k+m}](m^2+k^2)}{(m^2-k^2)^2}\,\delta^l_n, & \text{gdy}\quad k\neq m.\end{cases}$$

W dalszym ciągu ze związków (2.9.2) w pracy [1] oraz (1.2) i (1.8) obliczamy

$$\begin{aligned}\overline{W}'_{klmn}&=-\frac{D_0\,\pi^2}{a^2}\,\frac{[1-(-1)^{k+m}]_{mk}\,(m^2+n^2)\,(k^2+n^2)}{(m^2-k^2)^2}\,\delta^l_n,\\ W'_{mnmn}&=\frac{3D_0\,\pi^4}{8a^2}\,(m^2+n^2)^2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Z kolei ze wzoru (1.10) znajdujemy

$$\begin{aligned}W_{kln}&=-\frac{8}{3a\pi}\,\delta^l_n\,k\,(k^2+n^2)\sum_{m\pm k}\frac{[1-(-1)^{k+m}]\,m^2}{(m^2-k^2)^2\,(m^2+n^2)},\\ W'_{kln}&=-(-1)^k\,W_{kln}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Po licznych przekształceniach, w których obliczono sumy następujących szeregów (skorzystaliśmy tu ze wzorów 0.237.1, 0.237.4, 1.421.3 oraz 1.422.4, podanych w pracy [3]) znajdujemy

(3.6)

$$\sum_{m\mp k}\frac{m^2}{(m^2-k^2)^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{16k^2},\qquad \sum_{m\mp k}\frac{(-1)^m\,m^2}{(m^2-k^2)^2}=\frac{(-1)^k}{8}\left(-\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2k^2}\right),$$

$$\sum_{m\mp k}\frac{1}{(m^2-k^2)^2}=\frac{\pi^2}{12k^2}-\frac{11}{16k^4},\qquad \sum_{m\mp k}\frac{(-1)^m}{(m^2-k^2)^2}=-\frac{8+3\,(-1)^k}{16k^4}-\frac{(-1)^k\,\pi^2}{24k^2},$$

$$\sum_{m}\frac{1}{m\,(m+2k)}=\frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{2k}\frac{1}{m},\qquad \sum_{m}\frac{(-1)^m}{m\,(m+2k)}=-\frac{1}{2k}\sum_{m=k+1}^{2k}\frac{1}{m},$$

$$\sum_{m}\frac{1}{m\,(m+2k)^2}=-\frac{\pi^2}{12k}+\frac{1}{4k^2}\sum_{m=1}^{2k}\frac{m+2k}{m^2},$$

$$\sum_m \frac{(-1)^m}{m(m+2k)^2} = \frac{\pi^2}{24k} + \frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{2k}\frac{(-1)^m}{m^2} - \frac{1}{4k^2}\sum_{m=k+1}^{2k}\frac{1}{m},$$

$$\sum_m \frac{1}{m^2(m+2k)^2} = -\frac{\pi^2}{12k} + \frac{1}{4k^2}\sum_{m=1}^{2k}\frac{m+2k}{m^2},$$

$$\sum_m \frac{(-1)^m}{m^2(m+2k)^2} = \frac{\pi^2}{24k} + \frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{2k}\frac{(-1)^m}{m^2} - \frac{1}{4k^2}\sum_{m=k+1}^{2k}\frac{1}{m}$$

znajdujemy ostatecznie

$$W_{kln} = \delta_n^l \frac{k}{3a}\left\{-\pi + \frac{4n}{n^2+k^2}\left[\operatorname{cth} n\pi - (-1)^k \operatorname{cosech} n\pi\right]\right\}. \tag{3.7}$$

Związek ten jest podstawą do wyznaczenia wielkości występujących w (1.11), a określonych wzorami (1.12). Ponieważ ze względu na symetrię ${}^2B_m = {}^4B_m$, to ${}^1\bar{B}_m = 0$ i z układu (1.11) pozostają jedynie dwa równania, które po przekształceniach i przy zastosowaniu wzorów (2.8) i (4.9) z pracy [2], przyjmują następującą postać:

$$\frac{1}{m}(1+m\pi \operatorname{cosech} m\pi)(\operatorname{cth} m\pi - \operatorname{cosech} m\pi)\,{}^2\bar{B}_m - \frac{64}{\pi^2} m \sum_{k=2,4,\ldots}\sum_{r=1,3,\ldots}\frac{kr^2}{(r^2+k^2)^2(m^2+r^2)^2 P(m,r)}\,{}^2\bar{B}_k = \frac{3D_0\pi}{2}F(m),$$
$$m = 2, 4, \ldots;$$

$$\frac{1}{m}(1+m\pi \operatorname{cosech} m\pi)(\operatorname{cth} m\pi - \operatorname{cosech} m\pi)\,{}^2\bar{B}_m - \frac{64}{\pi^2} m \sum_{k=1,3,\ldots}\sum_{r=1,3,\ldots}\frac{kr^3}{(r^2+k^2)^2(m^2+r^2)^2 P(m,r)}\,{}^2\bar{B}_k =$$
$$= -\frac{8qa^2}{m^4\pi^3}(1-m\pi \operatorname{cosech} m\pi)(\operatorname{cth} m\pi - \operatorname{cosech} m\pi) + \tag{3.8}$$
$$+\frac{64\,qa^2}{\pi^4} m \sum_{r=1,3}\frac{1-r\pi \operatorname{cosech} r\pi}{(m^2+r^2)^2(1+r\pi \operatorname{cosech} r\pi)} + \frac{3D_0\pi}{2}F(m),$$
$$m = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\frac{3}{2}\pi^4(m^2+n^2)^2 w_{mn} - 2m\pi^2\sum_k\left[1-(-1)^{k+m}\right]kZ(m,n,k)\,w_{kn} =$$
$$= \frac{2\bar{q}\left[1-(-1)^m\right]}{\pi^2 mn} - \frac{2\bar{q}m(1-n\pi \operatorname{cosech} n\pi)\left[1-(-1)^m\right]}{\pi^2 n^3(1+n\pi \operatorname{cosech} n\pi)} -$$
$$-\frac{2a^4}{D_0}mn^2\sum_k\frac{k\left[1+(-1)^{m+k}\right]}{P(k,n)(k^2+n^2)^2}\,{}^2\bar{B}_k + \frac{n\pi a^4}{2D_0}\,{}^2\bar{B}_m,$$
$$m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 3, 5, \ldots,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\bar{q} = \frac{qa^6}{D_0}, \quad P(m, n) = \operatorname{cth} n\pi - n\pi \operatorname{cosech}^2 n\pi + (-1)^m \operatorname{cosech} n\pi \, (1 - n\pi \operatorname{cth} n\pi), \tag{3.9}$$

$$Z(m, n, k) = -\frac{2(m^2+n^2)(k^2+n^2)}{(m^2-k^2)^2} + \frac{4n^2}{n^2+k^2} \frac{\operatorname{cth} n\pi - (-1)^k \operatorname{cosech} n\pi}{P(m, n)},$$

$$F(m) = -\frac{64}{\pi a^4} m \sum_k \sum_{r=1,3,\ldots} \frac{kr[1-(-1)^{k+m}]}{(m^2+r^2)^2} Z(m, r, k) \, w_{kr}.$$

Przy wyprowadzaniu podanych wyżej zależności uwzględniliśmy ponownie wynikające z warunków brzegowych związki $\sum_k k[1-(-1)^{k+m}] w_{kr} = 0$ itp. Z przybliżonego rozwiązania układów $(3.8)_{1,2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
{}^2\bar{B}_1 &= -0{,}0965\, qa^2 + \frac{3D_0\pi}{2a^4}(16{,}4\, w_{21} + 8{,}78\, w_{41} + 8{,}85\, w_{23}),\\
{}^2\bar{B}_3 &= 0{,}0096\, qa^2 + \frac{3D_0\pi}{2a^4}(-5{,}71\, w_{21} + 17{,}6\, w_{41} - 9{,}30\, w_{23}),\\
{}^2\bar{B}_5 &= 0{,}0045\, qa^2 + \frac{3D_0\pi}{2a^4}(-0{,}56\, w_{21} - 9{,}60\, w_{41} - 0{,}61\, w_{23}),\\
{}^2\bar{B}_7 &= 0{,}0018\, qa^2 + \frac{3D_0\pi}{2a^4}(-0{,}09\, w_{21} - 2{,}10\, w_{41} + 0{,}23\, w_{23}),\\
{}^2\bar{B}_2 &= \frac{3D_0\pi}{2a^4}(-1{,}46\, w_{11} - 5{,}70\, w_{13} - 5{,}97\, w_{15} + 18{,}7\, w_{31} + 23{,}1\, w_{33} + \\
&\qquad + 9{,}47\, w_{51}),\\
{}^2\bar{B}_4 &= \frac{3D_0\pi}{2a^4}(0{,}202\, w_{11} - 0{,}407\, w_{13} - 1{,}90\, w_{15} - 8{,}10\, w_{31} - 14{,}5\, w_{33} + \\
&\qquad + 10{,}1\, w_{51}),\\
{}^2\bar{B}_6 &= \frac{3D_0\pi}{2a^4}(0{,}117\, w_{11} + 0{,}233\, w_{13} - 0{,}421\, w_{15} - 1{,}28\, w_{31} - 1{,}86\, w_{33} - \\
&\qquad - 10{,}1\, w_{51}),\\
{}^2\bar{B}_8 &= \frac{3D_0\pi}{2a^4}(0{,}060\, w_{11} + 0{,}236\, w_{13} + 0{,}041\, w_{15} + 0{,}37\, w_{31} - 0{,}28\, w_{33} - \\
&\qquad - 2{,}12\, w_{51}).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Po podstawieniu tych wartości do $(3.8)_3$ otrzymujemy następujący dwuwskaźnikowy układ równań algebraicznych (tu i poprzednio zachowaliśmy jedynie współczynniki $w_{11}, w_{21}, w_{31}, w_{41}, w_{51}, w_{13}, w_{23}, w_{33}$ i w_{15}):

$$\begin{aligned}
&582\, w_{11} - 212\, w_{21} - 93{,}6\, w_{41} - 34{,}4\, w_{23} = 0{,}104\, \bar{q},\\
&51{,}4\, w_{11} + 3630\, w_{21} - 273\, w_{31} + 20{,}2\, w_{13} - 93{,}0\, w_{33} + \\
&\qquad + 7{,}12\, w_{15} - 83{,}6\, w_{51} = 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$1033\, w_{21}+14500\, w_{31}-1420\, w_{41}+163\, w_{23} = -0{,}304\, \bar{q},$$

$$17{,}8\, w_{21}+14500\, w_{13}-159\, w_{41}-945\, w_{23} = -0{,}304\, \bar{q},$$

$$28{,}1\, w_{11}-359\, w_{31}+504\, w_{13}+24700\, w_{23}-2170\, w_{33}+ \\ +104\, w_{15}-205\, w_{51}=0,$$

$$-88{,}3\, w_{11}+2230\, w_{31}-41{,}0\, w_{13}+42100\, w_{41}+263\, w_{33}- \\ -59{,}7\, w_{15}-1990\, w_{51}=0,$$

$$180\, w_{21}-282\, w_{41}+1260\, w_{23}+47900\, w_{33} = 0{,}137\, \bar{q},$$

$$-56{,}9\, w_{21}-308\, w_{41}-334\, w_{23}+99900\, w_{15} = -0{,}667\, \bar{q},$$

$$407\, w_{21}+4130\, w_{41}-160\, w_{23}+99900\, w_{51} = -0{,}667\, \bar{q},$$

skąd obliczamy

$$\begin{aligned} &w_{11}=0{,}000178\, \bar{q}, && w_{21}=-0{,}00000403\, \bar{q}, && w_{31}=-0{,}0000205\, \bar{q}, \\ &w_{13}=-0{,}0000209\, \bar{q}, && w_{23}=0{,}000000152\, \bar{q}, && w_{41}=0{,}00000109\, \bar{q}, \\ &w_{33}=0{,}00000288\, \bar{q}, && w_{15}=-0{,}00000667\, \bar{q}, && w_{51}=-0{,}00000669\, \bar{q}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ugięcie w środku rozpiętości płyty jest zatem równe

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)=\frac{4}{a^2}\sum_m \sum_n w_{mn} \sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2} \approx 0{,}000940 \frac{qa^4}{D_0}=0{,}00141 \frac{qa^4}{D_s}, \tag{3.13}$$

gdzie $D_s=1{,}5\, D_0$ jest średnią sztywnością płyty. Odpowiednie ugięcie izotropowej płyty kwadratowej, utwierdzonej na obwodzie, o stałej sztywności D_s wynosi, [4],

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)=0{,}00127 \frac{qa^2}{D_s} \tag{3.14}$$

jest przeto o około 11% mniejsze.

Literatura cytowana w tekście

[1] R. Solecki, *Non homogeneous anisotropic rectangular plate of variable thickness and arbitrary boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 1, 14 (1962).

[2] Z. Kączkowski, *Orthotropic rectangular plates with arbitrary boundary conditions*, Arch. Mech. Stos. 2, 8 (1956), 179.

[3] И. И. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, вып. 3, ГИТТЛ, Москва 1951.

[4] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Springer, Berlin.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Основываясь на формулах выведенных в [1] исследуются пластинки со свободно опертыми, защемленными и свободными краями. Приведенный в работе числовой пример касается изгиба квадратной изотропной пластинки, защемленной по контуру и обладающей линейно переменной жесткостью.

Summary

A PARTICULAR SOLUTION OF THE PROBLEM OF AN ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATE WITH VARIABLE RIGIDITY

Making use of the equations derived in [1], the problem of simply supported, clamped or free plates is analysed. The numerical example concerns the bending problem of an isotropic square plate clamped along the contour and having linearly variable rigidity.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 listopada 1961 r.