

OSZACOWANIE KRZYWEJ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ  
PRZY JEDNOCZESNYM SKRĘCANIU Z ROZCIĄGANIEM

MIŁOSZ WNUK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Rozważania nasze dotyczące znajdowania oszacowania z góry i z dołu krzywej nośności granicznej  $f(M_s, N) = 0$ , gdzie  $M_s$  jest momentem skręcającym,  $N$  siłą podłużną, przeprowadzimy w oparciu o znane twierdzenia wariacyjne (ekstremalne) teorii plastyczności (L. M. KACZANOW, [9], W. PRAGER i P. G. HODGE, [14], R. HILL, [4], oraz P. G. HODGE, [7]). W szczególności wykorzystamy dwa z nich. Po pierwsze, twierdzenie o maksymalnym oporze plastycznym lub tzw. twierdzenie o maksymalnej pracy plastycznej (M. A. SADOVSKY, [16], G. H. HANDELMAN, [3] oraz L. M. KACZANOW, [10] i [11]). Przyjmując w myśl tego twierdzenia rozkład naprężeń statycznie dopuszczalny i żądając następnie, aby zachodziło maksimum jednego z obciążeń zewnętrznych przy stałej wartości drugiego, znajdziemy oszacowanie dolne krzywej nośności granicznej w płaszczyźnie  $M_s, N$ . Po drugie, dla znalezienia oszacowania górnego krzywej granicznej posłużymy się nierównościami Hilla, [4] i [5], i na drodze rozważań energetycznych, A. R. RŻANICYN, [15], po przyjęciu pewnego układu przemieszczeń kinematycznie możliwych (co jest równoważne założeniu pewnego schematu zniszczenia, dla którego poszukiwać będziemy następnie minimum obciążeń zewnętrznych) znajdziemy odpowiednie równanie  $f(M_s, N) = 0$ .

Twierdzenia wariacyjne teorii plastyczności są chętnie wykorzystywane w pracach licznych autorów. Wspomnimy tu o pracach rozwiązujących problem nośności granicznej w przypadku jednoczesnego działania momentu zginającego  $M_g$  oraz momentu skręcającego  $M_s$ , mianowicie: G. H. HANDELMAN, [2], R. HILL i M. P. L. SIEBEL, [6], M. C. STEELE, [17], i jedna z nowszych — F. A. GAYDON, H. NUTTAL, [1].

W pierwszej części niniejszej pracy podamy pewne sugestie ogólne dotyczące znajdowania oszacowania dolnego, tj. przyjmowania rozkładu naprężeń statycznie dopuszczalnych, możliwie dobrze aproksymujących rzeczywisty rozkład naprężeń. Wykorzystamy tu m.in. analogię dachu A. NÁDAIA, [12], przy czym proponowany schemat obejmuje przypadek nośności granicznej  $M_s, N$  pręta o dowolnym kształcie przekroju. Podobnie podany w drugiej części pracy układ przemieszczeń  $u, v, w$ , kinematycznie możliwych, odnosi się do dowolnego kształtu przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta i umożliwia znalezienie oszacowania z góry. Ponadto

celem niniejszej pracy jest podanie efektywnego rozwiązania postawionego problemu w przypadku pręta o przekroju kwadratowym. Znalezione oszacowania dolne oraz górne zostaną następnie wykorzystane dla oszacowania dobroci aproksymacji równania krzywej  $f(M_s, N) = 0$ , które wprowadzono w pracy [18].

## 2. Oszacowanie z dołu

Dla znalezienia oszacowania dolnego krzywej granicznej  $f(M_s, N) = 0$  posłużymy się kryterium wariacyjnym, tzw. twierdzeniem o maksymalnym oporze plastycznym, według którego spośród wszystkich możliwych schematów rozkładu naprężeń ten jest najbliższy rozkładowi rzeczywistemu, dla którego siły zewnętrzne, powodujące uplastycznienie, będą posiadały wartość maksymalną. Przy tym żąda się tylko, aby dany rozkład naprężeń był statycznie dopuszczalny (spełniał równanie równowagi wewnętrznej, warunki brzegowe oraz warunek plastyczności<sup>1</sup>). Jeżeli przedstawić naprężenia  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\sigma_z$  przy pomocy funkcji naprężeń  $\Phi$ , jak np. u R. HILLA, [4], to siły zewnętrzne wyrażą się pewnymi funkcjami zależnymi od poszukiwanej funkcji naprężeń. Żądanie, aby jeden z funkcjonałów osiągał ekstremum, np.  $M_s[\Phi] = \max.$  przy warunku pobocznym  $N[\Phi] = \text{const}$  prowadzi po napisaniu równania Eulera-Lagrange'a do ścisłego postawienia problemu, tzn. do nieliniowego równania różniczkowego, eliptycznego o pochodnych cząstkowych. W ten sposób wykorzystanie twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym oraz konsekwentne stosowanie metod rachunku wariacyjnego daje w efekcie równanie ścisłe, znane skądinąd, którego nie potrafimy w przypadku ogólnym rozwiązać bez uciekania się do metod przybliżonych. Jednakże każdy problem wariacyjny może być sprowadzony do zagadnienia szukania zwykłego ekstremum, jeżeli zrezygnować z funkcji i wprowadzić zamiast niej pewien parametr, co jest równoważne przyjęciu *a priori* pewnego rozkładu naprężeń statycznie dopuszczalnego, a następnie poszukiwaniu takiej wartości parametru, dla którego zachodzi wymagane ekstremum. Postąpimy w ten właśnie sposób.

Przyjęty rozkład naprężeń może być w zasadzie dowolny, byleby spełniał równanie równowagi wewnętrznej

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

warunek brzegowy (powierzchnia boczna pręta ma być wolna od naprężeń normalnych)

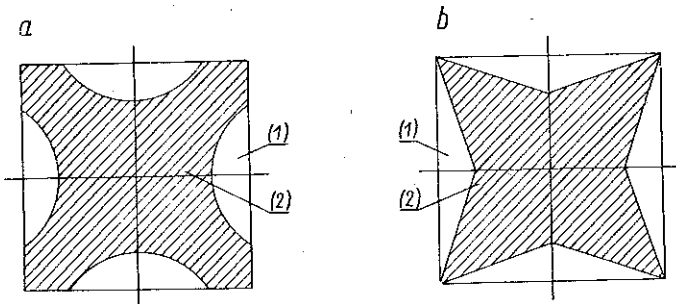
$$(2.2) \quad \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y) = 0,$$

gdzie  $n$  oznacza normalną do konturu, oraz warunek plastyczności

$$(2.3) \quad \sigma_z^2 + 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = Q^2.$$

<sup>1</sup> Ścisłej mówiąc nie żądamy, aby warunek plastyczności był dokładnie spełniony, nie może być jedynie przekroczony.

Pewnych wskazówek odnośnie rzeczywistego rozkładu naprężeń dostarcza analogia dachu A. Nádai'a, [12], opisująca czyste skręcanie w zakresie sprężysto-plastycznym; można spodziewać się, że podobszary, które pozostają sprężyste przy czystym skręcaniu, pozostaną uplastycznione przede wszystkim na skutek działania naprężeń normalnych  $\sigma_z$ . Podzielimy więc obszar rozpatrywanego przekroju na dwa podobszary w pewien specjalny sposób, tak aby granica tych podobszarów przebiegała podobnie do granicy wyznaczonej analogią dachu (rys. 1a). Wprowadzimy jednak pewną poprawkę żądając, aby obszar wewnętrzny 2 stykał się z konturem tylko w skończonej ilości punktów (rys. 1b), wtedy warunki brzegowe będą nałożone wyłącznie na funkcję naprężeń  $\Phi_1$ , odnoszącą się do obszaru zewnętrznego 1.



Rys. 1. Podział przekroju poprzecznego na podobszary 1 i 2

W podobszarze 1 założymy rozkład naprężeń  $\sigma_z = aQ$  (gdzie  $a \leq 1$  oznacza pewną stałą) oraz rozkład naprężeń stycznych, odpowiadających równaniu

$$(2.4) \quad |\text{grad } \Phi_1| = \frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - a^2}$$

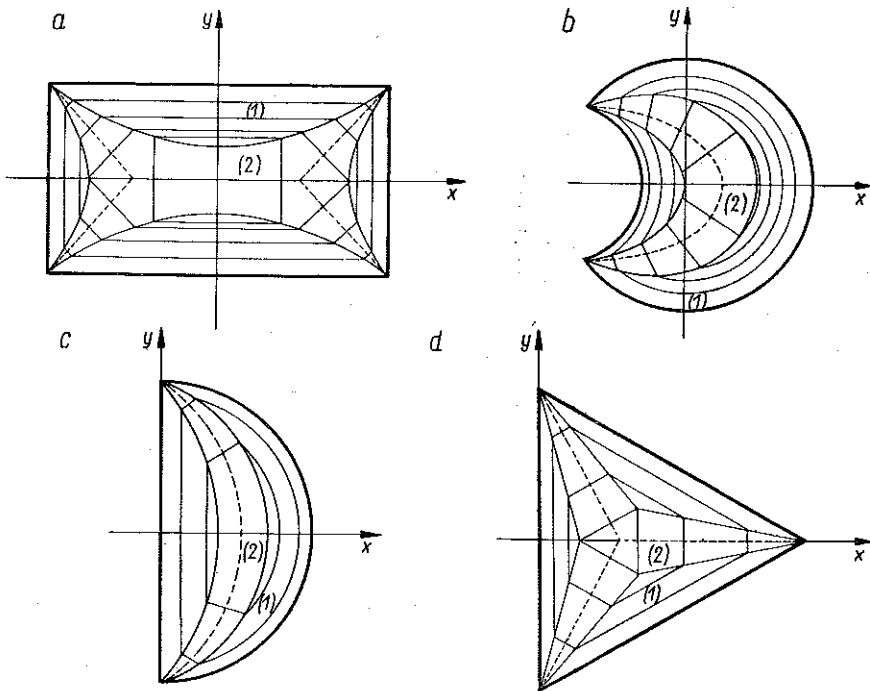
i warunkowi brzegowemu  $\Phi_1 = 0$  wzdłuż konturu. Naprężenia styczne są wtedy proporcjonalne do naprężeń w stanie granicznym przy czystym skręcaniu ze współczynnikiem zmniejszającym  $(1 - a^2)^{1/2}$ , a trajektorie naprężeń stycznych  $\Phi_1 = \text{const}$  biegną równoległe do konturu ograniczającego przekrój. Zakładamy ponadto, że trajektorie naprężeń stycznych  $\Phi_2 = \text{const}$  w obszarze wewnętrznym są prostopoliniowe (2): otrzymujemy je łącząc odpowiednie punkty przecięcia trajektorii  $\Phi_1 = \text{const}$  z liniami nieciągłości, stanowiącymi granice podobszaru 2 tak, aby prawo o cyrkulacji naprężeń stycznych było zachowane (rys. 2). Wynika stąd spełnienie warunku ciągłości funkcji naprężeń przy przejściu przez granicę obydwu podobszarów, czyli  $\tau_2 = |\text{grad } \Phi_2|$  nie może być dowolne przy przyjętym uprzednio  $\tau_1 = |\text{grad } \Phi_1|$ , lecz takie, aby stosunek  $\tau_2/\tau_1$  był równy stosunkowi modułów gradientu jako funkcji naprężeń  $\Phi_2$  oraz  $\Phi_1$  odpowiednio. Rozkład naprężeń normalnych w obszarze wewnętrznym  $\sigma_z^{(2)}$  wynika z warunku plastyczności. Równanie równowagi wewnętrznej jest oczywiście spełnione tożsamościowo w obydwu rozpatrywanych podobszarach. Łatwo ponadto wykazać, że spełnienie warunku ciągłości prowadzi do nierówności

$$(2.5) \quad \tau_1 > \tau_2,$$

co z kolei na mocy warunku plastyczności daje

$$(2.6) \quad \sigma_z^{(1)} < \sigma_z^{(2)}.$$

Otrzymany w ten sposób rozkład naprężeń jest rozkładem statycznie dopuszczalnym, spełnia bowiem równanie równowagi wewnętrznej (2.1), warunek plastyczności (2.3), warunek brzegowy (2.2) wzdłuż konturu ograniczającego przekrój oraz warunek ciągłości przy przejściu przez granicę podobszarów 1 i 2. Ponadto schemat ten został sparametryzowany: za parametr będziemy uważać odległość linii nieciągłości, to jest linii oddzielającej obydwu podobszarów od granicznego położenia tej linii, gdy nośność graniczna zostaje wyczerpana na drodze czystego skręcania: według analogii A. Nádai'a odpowiada to linii załomu wzgórza piaskowego. Parametr  $\delta$ , który decyduje o wielkości obydwu wprowadzonych podobszarów, jest zatem miarą wzajemnego stosunku skręcania i rozciągania.

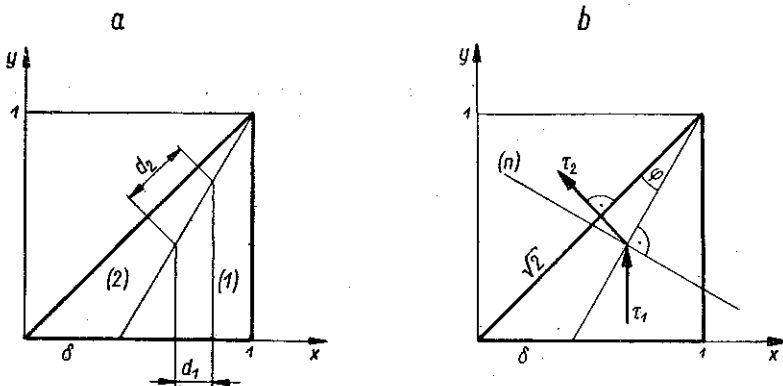


Rys. 2. Przykłady funkcji naprężeń  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  odpowiadających statycznie dopuszczalnemu rozkładowi naprężeń

Nierówności (2.5) oraz (2.6) wskazują na to, że stan graniczny w obydwu podobszarach jest osiągnięty w różny sposób: w obszarze skrajnym 1 przeważa naprężenie styczne pochodzące od skręcania, zatem zewnętrzna część przekroju osiąga stan czysto plastyczny przede wszystkim na skutek działania momentu skręcającego, natomiast część wewnętrzna przekroju pozostaje głównie pod wpływem rozciągania ( $\sigma_z$ ), mniejszą rolę grają tu naprężenia styczne  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$ . Okaze się, że tak określony schemat rozkładu naprężeń stosunkowo dobrze aproksymuje rzeczywisty rozkład

naprężeń, odpowiadający nośności granicznej pręta, poddanego jednoczesnemu skręcaniu i rozciąganiu.

Dalsze rozważania, mające na celu znalezienie równania kresu dolnego krzywej granicznej, przeprowadzimy na przykładzie przekroju kwadratowego. Ze względu na symetrię rozpatrywać będziemy jedynie oktant (rys. 3) wycięty z przekroju kwadratowego, przy czym w bezwymiarowym układzie współrzędnych  $x, y$  długość połowy boku kwadratu wynosi 1. Zgodnie z wyżej podanymi uwagami oktant dzielimy prostą



Rys. 3. Podział oktantu kwadratu na podobszary 1 i 2

$$(2.7) \quad y = \frac{x - \delta}{1 - \delta},$$

gdzie  $\delta$  jest parametrem, na dwa podobszary: skrajny 1 oraz wewnętrzny 2. Należy zatem prócz spełnienia równań (2.1), (2.2) oraz (2.3) żądać również spełnienia warunku równowagi wewnętrznej przy przejściu przez linię nieciągłości, tzn. należy tak przyjąć naprężenia styczne  $\tau_1$  w obszarze 1 oraz  $\tau_2$  w obszarze 2, aby ich rzuty na kierunek normalny do prostej  $y = (x - \delta)/(1 - \delta)$  były sobie równe:

$$(2.8) \quad [\tau_1]_{(n)} = [\tau_2]_{(n)}.$$

I tak mając na uwadze (2.1), (2.2) oraz (2.3) dla obszaru zewnętrznego 1 przyjmujemy

$$(2.9) \quad \sigma_z = \alpha Q, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = \frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \alpha^2},$$

gdzie  $\alpha$  oznacza parametr określający wzajemny stosunek skręcania i rozciągania, przy czym  $\alpha = 0$  odpowiada czystemu skręcaniu,  $\alpha = 1$  daje czyste rozciąganie. W dalszym ciągu rozważań parametr ten zostanie wyrugowany. Podobnie dla obszaru wewnętrznego 2 przyjmujemy

$$(2.10) \quad \sigma_z = \sqrt{1 - \mu^2(1 - \alpha^2)} Q, \quad \tau_{zx} = -\frac{Q}{\sqrt{6}} \mu \sqrt{1 - \alpha^2},$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q}{\sqrt{6}} \mu \sqrt{1 - \alpha^2},$$

przy czym współczynnik zmniejszający  $\mu = \tau_2/\tau_1$  należy określić z jednego, dotąd nie wykorzystanego, warunku (2.8). Warunek ten (rys. 3b) daje

$$(2.11) \quad \tau_1 \cos(\varphi + 45^\circ) = \tau_2 \cos \varphi.$$

Skąd

$$(2.12) \quad \mu = \frac{\cos(\varphi + 45^\circ)}{\cos \varphi}$$

lub inaczej

$$(2.13) \quad \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \operatorname{tg} \varphi).$$

Kąt  $\varphi$  można łatwo wyrugować korzystając z danych geometrycznych i wprowadzić parametr  $\delta$ . Widoczny związek

$$(2.14) \quad \frac{\delta}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \varphi)}$$

można przekształcić do postaci

$$(2.15) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2 - \delta}$$

co, po wstawieniu do (2.13), daje wreszcie

$$(2.16) \quad \mu = \sqrt{2} \frac{1 - \delta}{2 - \delta}.$$

Wzór (2.16) można również uzyskać na drodze innych, być może prostszych, rozważań. Jeżeli przez  $\Phi_1$  oraz  $\Phi_2$  oznaczymy funkcję naprężeń w obszarach 1 i 2 odpowiednio, przy czym funkcja  $\Phi$  przy przejściu przez granicę obydwu podobszarów pozostaje oczywiście ciągłą, to możemy napisać

$$(2.17) \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{|\operatorname{grad} \Phi_2|}{|\operatorname{grad} \Phi_1|}.$$

Miarą gradientu jest odwrotność odległości dwóch sąsiednich linii  $\Phi_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2$ ), tzn. dwóch sąsiednich trajektorii naprężeń stycznych, a zatem otrzymujemy natychmiast

$$(2.18) \quad \mu = \frac{|\operatorname{grad} \Phi_2|}{|\operatorname{grad} \Phi_1|} = \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{2} \frac{1 - \delta}{2 - \delta},$$

co jest identyczne ze wzorem (2.16).

Siły zewnętrzne obliczymy według schematu

$$(2.19) \quad M_s = \int_F \int (\tau_{zx} \bar{x} - \tau_{zy} \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}, \quad N = \int_F \int \sigma_z d\bar{x} d\bar{y},$$

przy czym  $\bar{x} = xa$ ,  $\bar{y} = ya$  są to współrzędne wymiarowe oraz  $a$  jest połową boku kwadratu.

Korzystając ze wzorów (2.9), (2.10) i (2.16) oraz obliczając całki osobno w obydwu obszarach 1 i 2, a następnie dodając je otrzymujemy

$$(2.20) \quad M_s = \frac{8Qa^3}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\alpha^2} \left\{ \int_{\delta}^1 x dx \int_0^{\frac{x-\delta}{1-\delta}} dy + \right. \\ \left. + \frac{1-\delta}{2-\delta} \left[ \int_0^{\delta} dx \int_0^x (x+y) dy + \int_{\delta}^1 dx \int_{\frac{x-\delta}{1-\delta}}^x (x+y) dy \right] \right\},$$

co po wykonaniu odpowiednich obliczeń daje

$$(2.21) \quad M_s = \frac{8Qa^3}{3\sqrt{3}} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{(1-\delta)(\delta+2)}{2-\delta}.$$

Analogicznie obliczamy siłę podłużną

$$(2.22) \quad N = 4Qa^2 \left[ (1-\delta)a + \delta \sqrt{1 - 2 \left( \frac{1-\delta}{2-\delta} \right)^2 (1-\alpha^2)} \right].$$

Obydwa wzory na siły zewnętrzne przepiszemy obecnie w postaci bezwymiarowej, wprowadzając bezwymiarowy moment skręcający  $m_s = M_s/\bar{M}_s$  i bezwymiarową siłę podłużną  $n = N/\bar{N}$ , przy czym wielkości oznaczone dwiema kreskami u góry przedstawiają odpowiednio graniczny moment skręcający oraz graniczną siłę podłużną. Jest oczywiście  $0 \leq m_s \leq 1$ ,  $0 \leq n \leq 1$ , a wartości skrajne  $m_s = 1$ ,  $n = 0$  oraz  $n = 1$ ,  $m_s = 0$  odpowiadają czystemu skręcaniu oraz czystemu rozciąganiu w stanie pełnego uplastycznienia. Dla rozpatrywanego pręta

$$(2.23) \quad \bar{M}_s = \frac{8Qa^3}{3\sqrt{3}}, \quad \bar{N} = 4Qa^2.$$

Otrzymujemy więc

$$(2.24) \quad m_s = \sqrt{1-\alpha^2} W(\delta), \\ n = (1-\delta)a + \delta \sqrt{1 - 2 \left( \frac{1-\delta}{2-\delta} \right)^2 (1-\alpha^2)},$$

gdzie oznaczono

$$(2.25) \quad W(\delta) = \frac{(1-\delta)(\delta+2)}{2-\delta}.$$

Jest to parametryczne równanie krzywej granicznej  $m_s = m_s(\alpha)$  i  $n = n(\alpha)$ , natomiast drugi parametr  $\delta$  należy określić z warunku istnienia ekstremum. Parametr  $\alpha$  można łatwo wyrugować; z równania pierwszego mamy

$$(2.26) \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{m_s^2}{W^2(\delta)}}$$

po wstawieniu do drugiego otrzymujemy ostatecznie

$$(2.27) \quad n = (1 - \delta) \sqrt{1 - \frac{m_s^2}{W^2(\delta)}} + \delta \sqrt{1 - 2 \left( \frac{1 - \delta}{2 - \delta} \right)^2 \frac{m_s^2}{W^2(\delta)}}.$$

Równanie (2.27) przedstawia się podłużną jako funkcję momentu skracającego  $m_s$  oraz parametru  $\delta$ . Zgodnie z twierdzeniem o maksymalnym oporze plastycznym zażądamy obecnie, aby  $n$  osiągało wartość maksymalną przy ustalonym  $m_s$ . Mamy więc warunek

$$(2.28) \quad \left[ \frac{\partial n}{\partial \delta} \right]_{m_s = \text{const}} = 0.$$

Różniczkowanie prawej strony równania (2.27) względem parametru  $\delta$ , przy przyjęciu  $m_s = \text{const}$ , po dosyć żmudnych przeliczeniach, prowadzi do równania:

$$(2.29) \quad (1 - \delta) \sqrt{(1 - \delta)^2 (\delta + 2)^2 - m_s^2 (2 - \delta)^2} \{(\delta + 2) [(\delta + 2)^2 - 2m_s^2] + 2\delta m_s^2\} - \sqrt{(\delta + 2)^2 - 2m_s^2} \{(\delta + 2) [(\delta + 2)^2 (1 - \delta)^2 - m_s^2 (2 - \delta)^2] + m_s^2 \delta (2 - \delta) (4 - \delta)\} = 0.$$

Równanie to należałoby obecnie rozwiązać ze względu na  $\delta$ , otrzymując  $\delta = \delta(m_s)$ , co umożliwiłoby bezpośrednio wyrugowanie parametru  $\delta$ , rzecz nie wydaje się jednak możliwa do przeprowadzenia [równanie (2.29) jest dwunastego stopnia ze względu na  $\delta$ ]. Można postąpić inaczej: znaleźć z równania (2.29)  $m_s = m_s(\delta)$ , rozwiązanie to wstawić do równania (2.27), otrzymując w ten sposób zależność

$$(2.30) \quad n = n[\delta, m_s(\delta)] = n(\delta),$$

co w powiązaniu ze znalezionym uprzednio związkiem  $m_s = m_s(\delta)$  dawałoby parametryczne równanie krzywej granicznej, skąd na koniec należałoby wyrugować parametr  $\delta$ . Obierzemy tę drogę. Zauważmy przedtem, że równanie (2.29) daje się sprowadzić do prostszej postaci, mianowicie:

$$(2.31) \quad f_1(\delta) m_s^4 + f_2(\delta) m_s^2 + f_3(\delta) = 0,$$

gdzie współczynniki

$$(2.32) \quad \begin{aligned} f_1(\delta) &= 2(2 - \delta)^2 \{(2 + \delta)(4 - 10\delta + 2\delta^2 + \delta^3) + \delta^2 [(4 - \delta)^2 - 2(1 - \delta)^2]\}, \\ f_2(\delta) &= (2 + \delta)^2 \{\delta^2 [4(1 - \delta)^4 - (2 - \delta)^2 (4 - \delta)^2] - \\ &\quad - (2 + \delta)(4 - 10\delta + 2\delta^2 + \delta^3) [2(1 - \delta)^2 + (2 - \delta)^2]\}, \\ f_3(\delta) &= (2 + \delta)^5 (1 - \delta)^2 (4 - 10\delta + 2\delta^2 + \delta^3). \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że zarówno równanie (2.29) jak i (2.31) jest spełnione, jak być powinno, w obydwu przypadkach szczególnych:

$$(2.33) \quad \delta = 0, \quad m_s = 1, \quad \delta = \delta_0, \quad m_s = 0,$$



z których pierwszy odpowiada czystemu skręcaniu, drugi czystemu rozciąganiu; znaczenie  $\delta_0$  wyjaśnimy później. Nie trudno podać ściśle rozwiązanie równania (2.31) w postaci zamkniętej, przytaczanie odpowiednich wzorów wydaje się jednak bezcelowe, gdyż nie można z nich skorzystać przy dalszych rachunkach (odwracanie ze względu na  $\delta$ ). Omawiane równanie rozwiążemy metodą szeregów potęgowych, szukając rozwiązania zbieżnego dwukrotnie: w pobliżu  $m_s = 1$ , a następnie w pobliżu  $m_s = 0$ . Przyjmujemy

$$(2.34) \quad m_s = 1 - a_1 \delta^2 - \dots$$

oraz rozwijamy współczynniki  $f_1(\delta)$ ,  $f_2(\delta)$  i  $f_3(\delta)$  na szeregi potęgowe w otoczeniu punktu  $\delta = 0$ , mianowicie

$$(2.35) \quad \begin{aligned} f_1(\delta) &= 16(4 - 12\delta + 13\delta^2 + \dots), \\ f_2(\delta) &= -16(12 - 28\delta + 7\delta^2 + \dots), \\ f_3(\delta) &= 32(4 - 8\delta - 9\delta^2 + \dots). \end{aligned}$$

Takie postępowanie odpowiada poszukiwaniu rozwiązania w przypadku, gdy  $\delta$  jest małe, co jest równoważne niewielkiemu «zakłóceniu» skręcania przez nałożenie równocześnie działającej siły rozciągającej (lub ściskającej). Uzyskane niżej rozwiązanie stosuje się więc dla  $n \ll m_s$ . Po wstawieniu szeregów (2.34) oraz (2.35) do równania (2.31) i porównaniu współczynników przy  $\delta^2$ , otrzymamy łatwo

$$(2.36) \quad a_1 = 3/2.$$

Rozwiniemy z kolei na szereg potęgowy  $\delta$  wyrażenie (2.27) przyjmując moment skręcający w postaci (2.34)

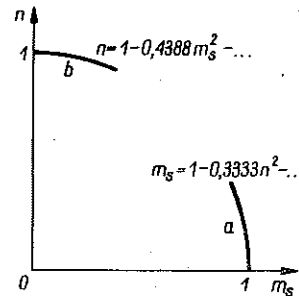
$$(2.37) \quad n = \left( \sqrt{2a_1 - 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \delta + \dots$$

Po dokonaniu odpowiednich podstawień otrzymujemy

$$(2.38) \quad m_s = 1 - \frac{3}{2} \delta^2 - \dots, \quad n = \frac{3}{2} \delta + \dots,$$

skąd po wyrugowaniu parametru mamy

$$(2.39) \quad m_s = 1 - \frac{1}{3} n^2 - \dots,$$



Rys. 4. Oszacowanie dolne krzywej granicznej  $f(m_s, n) = 0$ : a dla  $n \ll m_s$ , b dla  $m_s \ll n$

co jest poszukiwanym oszacowaniem dolnym krzywej nośności granicznej  $f(m_s, n) = 0$ . Równanie (2.39) przedstawia tylko część a tej krzywej ( $n \ll m_s$ ), co przedstawiono na rys. 4.

Aby uzyskać podobne rozwiązanie w przypadku dużego rozciągania i małego skręcania ( $m_s \ll n$ ), należy przede wszystkim znaleźć tę wartość parametru  $\delta$ , dla której zajdzie równość  $m_s = 0$ , a zatem  $n = 1$ , co odpowiada czystemu rozciąganiu.

Z równania (2.31) otrzymujemy  $m_s = 0$ , jeżeli wyraz wolny  $f_3(\delta) = 0$ , przy niejednoczesnym przyjmowaniu wartości zero przez funkcje  $f_1(\delta)$ ,  $f_2(\delta)$ :

$$(2.40) \quad f_1^2(\delta) + f_2^2(\delta) > 0.$$

Mamy więc równanie

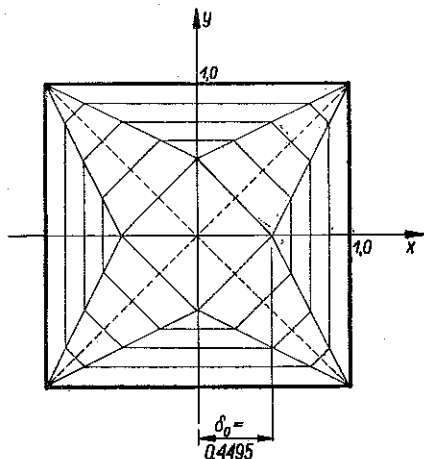
$$(2.41) \quad (2+\delta)^5(1-\delta)^2(\delta^3+2\delta^2-10\delta+4) = 0,$$

skąd dostajemy ciąg pierwiastków

$$(2.42) \quad \begin{aligned} \delta_0 &= \sqrt[5]{6} - 2, & \delta_3 &= -2, \\ \delta_1 &= -\sqrt[5]{6} - 2, & \delta_4 &= 1, & \delta_2 &= 2. \end{aligned}$$

Ze względów fizykalnych (rys. 3) wartości  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  i  $\delta_3$  należy odrzucić, łatwo wykazać, że również rozwiązanie  $\delta_4 = 1$  nie odpowiada postawionym warunkom: przy  $\delta = 1$  mamy  $f_1(\delta) = f_2(\delta) = 0$  i  $m_s \neq 0$ , co jest sprzeczne z założeniem (2.40).

Pozostaje więc jedyny pierwiastek równania (2.41)  $\delta_0 = 0,4495$ , dla którego zachodzi  $m_s = 0$  oraz  $n = 1$ . W ten sposób dla  $\delta = \delta_0$  otrzymujemy przypadek czystego rozciągania: we wzorach (2.9) i (2.10)  $\alpha = 1$ , naprężenia styczne w obydwu podobszarach znikają,  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , natomiast naprężenia normalne  $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = Q$ .



Rys. 5. Trajektorie naprężeń stycznych w przypadku  $\delta \rightarrow \delta_0$

Rysunek 5 przedstawia układ trajektorii naprężeń stycznych  $\Phi_1 = \text{const}$ ,  $\Phi_2 = \text{const}$  w przypadku, gdy  $\delta \rightarrow \delta_0$ , tzn. gdy prosta dzieląca oktant kwadratu zbliża się na osi  $x$ -ów do punktu  $x = \delta_0$ . Na pierwszy rzut oka rysunek przypomina układ trajektorii naprężeń stycznych dla funkcji Prandtla, a więc w przypadku sprężystego skręcania pręta posiadającego przekrój poprzeczny w kształcie kwadratu. Uwaga ta nie wyda się dziwna, jeżeli porównać ją z wnioskami pracy [18], w której wykazano, że rozwiązanie znane z teorii sprężystości (problem de Saint Venanta) jest pierwszym przybliżeniem, przy uwzględnieniu wpływu skręcania na rozciąganie dla funkcji spaczenia przekroju  $\bar{w} = \bar{w}(x, y)$ ,

która rozwiązuje problem nośności granicznej pręta poddanego jednoczesnemu skręcaniu i rozciąganiu.

Rozważmy obecnie wpływ skręcania na rozciąganie stosując, podobnie jak poprzednio, metodę rozwinięć na szeregi potęgowe, tym razem jednak dla punktu  $\delta = \delta_0$  lub  $\omega = 0$ , jeżeli przyjmiemy oznaczenie

$$(2.43) \quad \omega = \delta_0 - \delta.$$

Wprowadzając zmienną  $\omega$  w miejsce  $\delta$  przepisujemy równanie (2.31) w postaci

$$(2.44) \quad f_1(\omega) m_s^4 + f_2(\omega) m_s^2 + f_3(\omega) = 0.$$

Współczynniki  $f_1(\omega)$ ,  $f_2(\omega)$  oraz  $f_3(\omega)$  rozwijamy na szeregi potęgowe dla punktu  $\omega = 0$ , mianowicie

$$(2.45) \quad f_i(\omega) = A_i + B_i \omega + C_i \omega^2 + \dots, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przyjęto oznaczenia:

$$(2.46) \quad \begin{aligned} v_0 &= 1 - \delta_0, \\ A_1 &= 16v_0^2(1+v_0)^2, \quad B_1 = 32v_0(1+v_0)(1+2v_0), \\ C_1 &= 16(1+6v_0+6v_0^2), \\ A_2 &= 8v_0^2(9 - 51v_0 + 4v_0^2 + 22v_0^3 - 9v_0^4 + v_0^5), \\ B_2 &= 8v_0^2(18 - 153v_0 + 16v_0^2 + 110v_0^3 - 54v_0^4 + 7v_0^5), \\ C_2 &= 8(9 - 153v_0 + 24v_0^2 + 220v_0^3 - 135v_0^4 + 21v_0^5), \\ A_3 &= v_0^2(3 - v_0)^5(v_0 + 1)(-v_0^2 + 6v_0 - 3), \\ B_3 &= (v_0 + 1)(-v_0^2 + 6v_0 - 3)v_0(3 - v_0)^4(6 - 7v_0) + \\ &\quad + v_0^2(3 - v_0)^5(-3v_0 + 10v_0 + 3), \\ C_3 &= v_0^2(3 - v_0)^5(-3v_0 + 5) + (1 + v_0)(v_0^2 + 6v_0 - 3)(3 - v_0)^3(9 - \\ &\quad - 36v_0 + 21v_0^2) + v_0(3 - v_0)^4(6 - 7v_0)(-3v_0^2 + 10v_0 + 3). \end{aligned}$$

Wyrażenia na moment skręcający  $m_s = m_s(\omega)$  szukamy w postaci uogólnionego szeregu potęgowego, którego pierwszy wyraz, co można łatwo wykazać, zawiera zmienną  $\omega$  w potęgę  $1/2$ , mianowicie

$$(2.47) \quad m_s = k\omega^{1/2} + \dots$$

Współczynnik  $k$  znajdujemy z równania (2.44)

$$(2.48) \quad k^2 = -\frac{B_3}{A_2}.$$

Aby napisać równanie krzywej granicznej, należy jeszcze określić siłę podłużną  $n = n(\omega)$ . Wprowadzając do równania (2.27) zmienną  $\omega$  oraz rozwijając prawą stronę tego równania na szereg potęgowy, otrzymujemy

$$(2.49) \quad n = 1 - \frac{1 + 4v_0 - v_0^2}{2v_0(3 - v_0)^2} k^2 \omega + \dots,$$

co wraz z (2.47) stanowi parametryczne równanie krzywej granicznej  $m_s = m_s(\omega)$  i  $n = n(\omega)$  dla  $m_s \ll n$ . Po wyrugowaniu parametru  $\omega$  oraz obliczeniu współczynnika

$$(2.50) \quad \frac{1 + 4v_0 - v_0^2}{2v_0(3 - v_0)^2} = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{6} - 1}{3 - \sqrt{6}} = 0,4388,$$

otrzymujemy równanie krzywej granicznej w postaci

$$(2.51) \quad n = 1 - 0,4388 m_s^2 - \dots$$

Równanie to stosuje się tylko dla  $m_s \ll n$  i przedstawia część  $b$  krzywej pokazanej na rys. 4. Części  $a$  i  $b$  krzywej granicznej  $f(m_s, n) = 0$  można zeszyć stosując interpolację typu Hermite'a. Omówimy tu dwa rodzaje tej interpolacji, polegającej na wykorzystaniu znajomości wartości funkcji oraz jej kilku pierwszych pochodnych w obydwu punktach skrajnych obszaru  $0 \leq m_s \leq 1$ ,  $0 \leq n \leq 1$ .

1. Interpolacja bikwadratowa zastosowana po raz pierwszy przez S. PIĘCHNIKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO, [13], polega na szukaniu pełnego równania krzywej nośności granicznej w postaci

$$(2.52) \quad Am_s^2 + Bn^2 + Cm_s^4 + Dn^4 = 1.$$

Równanie to rozwiązujemy ze względu na  $m_s^2$ :

$$(2.53) \quad m_s^2 = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4C(1 - Bn^2 - Dn^4)}}{2C}$$

oraz rozwijamy na szereg potęgowy zmiennej  $n$ :

$$(2.54) \quad m_s^2 = \frac{1}{2C} \left\{ -A + \sqrt{A^2 + 4C} \left[ 1 - \frac{2BCn^2}{A^2 + 4C} + \dots \right] \right\}.$$

Analogicznie po rozwikłaniu względem  $n^2$  i po rozwinięciu na szereg potęgowy  $m_s$  otrzymujemy

$$(2.55) \quad n^2 = \frac{1}{2D} \left\{ -B + \sqrt{B^2 + 4D} \left[ 1 - \frac{2ADm_s^2}{B^2 + 4D} + \dots \right] \right\}.$$

Szeregi (2.54) i (2.55) dają się łatwo porównać z uzyskanymi poprzednio szeregami (2.39) oraz (2.51):

$$(2.56) \quad m_s = 1 - \beta n^2 - \dots, \quad n = 1 - \alpha m_s^2 - \dots,$$

gdzie  $\alpha = 0,4388$  oraz  $\beta = 0,3333$ . Porównując współczynniki przy poszczególnych wyrazach w odpowiadających sobie szeregach, otrzymujemy prosty układ równań liniowych względem  $A, B, C, D$ :

$$(2.57) \quad A + C = 1, \quad B + D = 1, \quad B = 2\beta(2 - A), \quad A = 2\alpha(2 - B).$$

Po rozwiązaniu możemy napisać pełne równanie krzywej granicznej w postaci ogólnej:

$$(2.58) \quad 4\alpha \frac{1 - 2\beta}{1 - 4\alpha\beta} m_s^2 + \left( 4\beta - 8\alpha\beta \frac{1 - 2\beta}{1 - 4\alpha\beta} \right) n^2 + \frac{1 - 4\alpha(1 - \beta)}{1 - 4\alpha\beta} m_s^4 + \left( 1 - 4\beta + 8\alpha\beta \frac{1 - 2\beta}{1 - 4\alpha\beta} \right) n^4 = 0.$$

W szczególności dla rozpatrywanego pręta o przekroju kwadratowym otrzymujemy

$$(2.59) \quad 1,4102 m_s^2 + 0,3932 n^2 - 0,4102 m_s^4 + 0,6068 n^4 = 1.$$

2. Interpolacja sześcienna jest znacznie prostsza, choć na ogół mniej dokładna od omówionej powyżej interpolacji bikwadratowej. Równania krzywej granicznej poszukujemy teraz w postaci

$$(2.60) \quad Am_s^2 + Bn^2 + Cn^3 = 1.$$

Należy tu wyznaczyć tylko trzy nieznanne współczynniki  $A$ ,  $B$  i  $C$ , a zatem wystarczy mniejsza ilość informacji niż w przypadku równania (2.52). Przypuśćmy<sup>2</sup>, że znamy jedynie drugi spośród szeregów (2.56) oraz wykorzystujemy dodatkowo warunek  $m_s = 1$  dla  $n = 0$ . Wówczas równanie (2.60) przybierze postać

$$(2.61) \quad m_s^2 + \left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)n^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 2\right)n^3 = 1.$$

Współczynnik  $\beta$  może więc być nieznan, co, jak się okazuje, nie uniemożliwia napisania pełnego równania krzywej granicznej  $f(m_s, n) = 0$ . Wniosek ten został wykorzystany w pracy [18], gdzie podaliśmy bliską aproksymację ścisłego równania krzywej granicznej dla dowolnego kształtu przekroju korzystając z metody małego parametru oraz stosując interpolację według (2.61).

Równanie (2.61) posiada jedną jeszcze zaletę w porównaniu z równaniem (2.58) wynikającym z interpolacji bikwadratowej, mianowicie w przypadku pręta o przekroju kołowym równanie (2.61) jest identyczne ze znanym rozwiązaniem ścisłym, co nie zachodzi przy stosowaniu równania (2.58), choć błędy są wprawdzie znikome.

Przyjmując  $\alpha = 0,4388$ , a więc wartość uzyskaną na drodze stosowania wariacyjnego twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym, otrzymujemy<sup>3</sup>:

$$(2.62) \quad m_s^2 + 0,7211 n^2 + 0,2789 n^3 = 0.$$

Jest to oszacowanie dolne krzywej granicznej  $f(m_s, n) = 0$  dla pręta o przekroju kwadratowym. Krzywa opisywana tym równaniem została przedstawiona na rys. 7 (krzywa 1).

### 3. Oszacowanie z góry

Równanie oszacowania górnego krzywej nośności granicznej uzyskamy na drodze rozważań energetycznych. Tok postępowania będzie podobny do stosowanej przez A. R. RZANICYNĄ, [15], metody przybliżonego rozwiązywania problemów teorii plastyczności. Znany wzór na elementarną pracę sił wewnętrznych (A. A. ILIUSZIN, [8])

$$(3.1) \quad dT = \left[ \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i d\epsilon_i + K \frac{\theta^2}{2} \right] dx dy dz,$$

<sup>2</sup> Oczywiście można założyć na odwrót: znamy  $\beta$ , nie znamy  $\alpha$  oraz wykorzystujemy warunek  $n = 1$  dla  $m_s = 0$ . Wówczas równanie krzywej granicznej (2.60) należy napisać  $m_s^2 + 2\beta n^2 + (1 - 2\beta)n^3 = 1$ , co stanowi również pewną aproksymację poszukiwanego równania  $f(m_s, n) = 0$ . Tym przypadkiem nie będziemy się w dalszym ciągu zajmować.

<sup>3</sup> Różnice między współrzędnymi punktów, obliczonymi wg. (2.62) oraz (2.59) są bardzo małe,  $\Delta < 1\%$ . Ostatecznie więc dla kresu dolnego proponujemy przyjęć równanie (2.62), które jest prostsze.

gdzie  $\sigma_i$  oraz  $e_i$  oznaczają odpowiednio intensywności naprężeń i odkształceń,  $K$  objętościowy moduł sprężystości oraz  $\theta$  dylatację, można przepisać w prostszej postaci

$$(3.2) \quad dT = Qe_i d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z},$$

jeżeli założyć uprzednio nieściśliwość materiału  $\nu = 1/2$  (wówczas  $K = \infty$ ,  $\theta = 0$  oraz iloczyn  $K\theta^2 = 0$ ) jak również, że energia odkształceń sprężystych w stosunku do energii odkształceń plastycznych jest mała i ponadto zażądać, aby był spełniony warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego,

$$(3.3) \quad \sigma_i = Q.$$

Korzystając ze wzorów Cauchy'ego możemy wyrazić intensywność odkształceń poprzez przemieszczenia  $u, v, w$ , a następnie całkując po objętości pręta, otrzymujemy pracę sił wewnętrznych w postaci

$$(3.4) \quad T = \frac{\sqrt{2}}{3} Q \int \int \int \left[ 2(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 - u_x v_y - v_y w_z - w_z u_x) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}(u_y^2 + u_z^2 + v_x^2 + v_z^2 + w_x^2 + w_y^2) + 3(u_y v_x + v_z w_y + w_x u_z) \right]^{1/2} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z},$$

przy czym indeksy u dołu oznaczają różniczkowanie podług odpowiedniej współrzędnej (wymiarowej), np.  $u_x = \partial u / \partial \bar{x}$ .

Zgodnie z wariacyjnym twierdzeniem teorii plastyczności o minimum całkowitej energii układu należy tak dobrać funkcje  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ ,  $w = w(x, y, z)$ , aby wyrażenie (3.4) posiadało minimum przy warunku pobocznym

$$(3.5) \quad V = \int \int \int (Xu + Yv + Zw) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = \text{const}$$

oraz

$$(3.6) \quad u_x + v_y + w_z = 0,$$

tnz. żądamy  $T = \min$ , gdy praca sił zewnętrznych  $V$  posiada stałą wartość ( $X, Y, Z$  są to składowe sił działających na rozpatrywane continuum materialne; należy tu uwzględnić zarówno siły masowe jak i zewnętrzne) oraz gdy deformacja objętościowa, zgodnie z założeniem uczynionym na wstępie, równa się zeru. Ścisłe rozwiązanie tego problemu przy zastosowaniu metod rachunku wariacyjnego prowadzi do układu trzech nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, z których należałoby określić szukane funkcje  $u, v, w$ . Jest to problem bardzo trudny i na ogół nie daje się efektywnie rozwiązać. A. R. RZANICYN, [15], proponuje pewną metodę przybliżoną, polegającą na przyjęciu *a priori* postaci funkcji  $u, v, w$  (zacieśnia się tym samym klasę rozwiązań) wyrażających się za pomocą pewnego, na razie nieokreślonego parametru. Przyjęcie takie jest równoważne założeniu pewnego typu możliwego schematu zniszczenia. Z równania, [1], [4] i [15];

$$(3.7) \quad V = T$$

można następnie określić siły zewnętrzne, w naszym przypadku  $M_s$  i  $N$ , jako funkcje wprowadzonego parametru  $i$  na koniec, żądając<sup>4</sup>  $M_s = \min$  przy  $N = \text{const.}$ , lub  $N = \min$  przy  $M_s = \text{const.}$ , uzyskuje się przybliżone równanie krzywej granicznej, które jest oszacowaniem górnym. Oczywiście znalezione w ten sposób oszacowanie z góry jest tym «lepsze», tzn. bliższe do rozwiązania ścisłego, im przyjęta postać przemieszczeń, a zatem i założony schemat zniszczenia jest bliższy schematowi rzeczywistemu.

A. R. RZANICYN, [15], rozwiązał w podany wyżej sposób kilka wybranych zagadnień teorii plastyczności, mianowicie: 1) skręcanie pręta o przekroju sześciokąta oraz o przekroju elipsy w zakresie czysto plastycznym, 2) skręcanie z rozciąganiem pręta o przekroju kołowym, 3) skręcanie ze zginaniem pręta o przekroju kołowym. W ostatnim z tych przypadków odpowiednie wzory na obciążenia zewnętrzne zawierają funkcje nieelementarne (pełne całki eliptyczne).

Dla pręta posiadającego przekrój poprzeczny o dowolnym kształcie, poddanego jednoczesnemu działaniu skręcania i rozciągania, proponujemy następującą postać przemieszczeń:

$$(3.8) \quad u = \vartheta \bar{z} \bar{y} - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{x}, \quad v = -\vartheta \bar{z} \bar{x} - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{y}, \quad w = \vartheta w_0(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon \bar{z},$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza wydłużenie względne,  $\vartheta$  jednostkowy kąt skręcania,  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  układ odniesienia oraz  $\bar{z}$  oś pręta. Należy zaznaczyć, że dwa pierwsze spośród napisanych wzorów są ściśle, natomiast trzeci z nich jest prawdziwy tylko w przypadku czystego skręcania, wówczas bowiem funkcja spazczenia  $w_0 = w_0(\bar{x}, \bar{y})$  jest całką równania ścisłego, [18]:

$$(3.9) \quad \left( \bar{y} + \frac{\partial w_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \bar{y}^2} + \left( -\bar{x} + \frac{\partial w_0}{\partial \bar{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \bar{x}^2} - 2 \left( \bar{y} + \frac{\partial w_0}{\partial \bar{x}} \right) \left( -\bar{x} + \frac{\partial w_0}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = 0$$

i spełnia warunek brzegowy

$$(3.10) \quad \left( \bar{y} + \frac{\partial w_0}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{y} - \left( -\bar{x} + \frac{\partial w_0}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{x} = 0.$$

Dla  $\varepsilon \neq 0$ , a więc w przypadku obciążenia złożonego ( $M_s, N$ ), do lewej strony równania (3.9) należy dodać wyraz  $3\varepsilon^2/\vartheta^2 \nabla^2 w_0$  (gdzie  $\nabla^2$  jest operatorem Laplace'a) i wówczas podana wyżej funkcja  $w_0 = w_0(\bar{x}, \bar{y})$  nie będzie na ogół spełniać równania ścisłego.

Warto zauważyć, że w przypadku szczególnym, gdy  $\vartheta = 0$  (brak skręcania, zachodzi tylko rozciąganie) przyjęty rozkład przemieszczeń będzie prawdziwy, ponieważ wyraz  $\vartheta w_0(\bar{x}, \bar{y})$  zniknie. Oznacza to, że znalezione oszacowanie górne krzywej granicznej powinno «trafiać» w obydwa skrajne punkty obszaru  $0 \leq n \leq 1$ ,

<sup>4</sup> A. R. RZANICYN, [15], pisze omyłkowo max zamiast min.

$0 \leq m_s \leq 1$ , co winno zapewnić dosyć dobre zbliżenie oszacowania górnego do rozwiązania ścisłego. Dla porównania wspomnimy rozważania F. A. GAYDONA i H. NUTTALA, [1], poświęcone wyprowadzeniu równania oszacowania górnego krzywej granicznej  $f(m_s, m_g) = 0$  ( $m_g$  jest bezwymiarowym momentem gnącym), które zbliża się do rozwiązania ścisłego tylko w sąsiedztwie punktu  $m_g = 1$ ,  $m_s = 0$  (gdy spaczenie przekroju jest równe zeru), odchylając się w pobliżu punktu  $m_g = 0$ ,  $m_s = 1$  znacznie powyżej rozwiązania ścisłego, ponieważ obrona postać przemieszczeń nie jest prawdziwa w przypadku czystego skręcania. Podobne rezultaty (rozbieżne w pobliżu punktu  $M_s = \bar{M}_s$ , jeżeli chodzi o kres górny krzywej granicznej w płaszczyźnie  $M_g, M_s$  dla pręta o przekroju kwadratowym) uzyskali R. HILL i M. P. L. SIEBEL, [6].

Funkcję spaczenia przekroju  $w_0(\bar{x}, \bar{y})$  występującą w ostatnim spośród wzorów (3.8) i spełniającą ściśle równanie różniczkowe (3.9) oraz warunek brzegowy (3.10) można stosunkowo łatwo określić wprost ze wzoru J. Mandela, cytowanego przez W. PRAGERA i P. H. HODGE'A [7]:

$$(3.11) \quad w_0(\bar{x}, \bar{y}) = w_0(R) - qd,$$

gdzie oznaczenie wielkości  $q$  i  $d$  wyjaśnia rys. 6a. Pozostałe oznaczenia przyjęte na rys. 6:  $C$  jest konturem rozpatrywanego przekroju,  $I'$  granicą strefy sprężystej i plastycznej,  $P(\bar{x}, \bar{y})$  punktem bieżącym strefy odkształceń plastycznych oraz  $n$  normalną do konturu przechodzącą punkt  $P$ ;  $R$  jest punktem przecięcia normalnej z granicą stref. Pierwszy wyraz we wzorze (3.11) oznacza więc wartość funkcji spaczenia na granicy stref. W stanie czysto plastycznym  $I'$  odpowiada linii nieciągłości (linia załomu wzgórza piaskowego według analogii A. Nádaiá) i wówczas odpowiednie wyrażenie, [7], na  $w_0(R)$  redukuje się do prostego wzoru:

$$(3.12) \quad w_0(R) = \int_{R_0}^R (\bar{x} d\bar{y} - \bar{y} d\bar{x}),$$

przy czym dolna granica całki krzywoliniowej  $R_0$  jest punktem leżącym na  $I'$  i takim, że  $w_0(R_0) = 0$ .

Zajmiemy się obecnie rozwiązaniem postawionego problemu dla pręta o przekroju kwadratowym. Ze wzoru (3.11) oraz na podstawie rys. 6b, uwzględniając równości  $w_0(R) = 0$ ,  $q = \bar{x} - \bar{y}$ , oraz  $d = \bar{y}$ , określimy bez trudu funkcję spaczenia  $w_0$ , rozwiązującą zagadnienie nośności granicznej rozpatrywanego pręta w przypadku czystego skręcania, mianowicie dla pierwszego oktantu otrzymujemy

$$(3.13) \quad w_0(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}(\bar{y} - \bar{x}).$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia równanie (3.9) oraz warunek brzegowy w pierwszym oktancie:  $\partial w_0 / \partial \bar{x} = -\bar{y}$  dla  $\bar{x} = a$ . Ze wzoru (3.12) można określić rozkład przemieszczeń  $w = \partial w_0(\bar{x}, \bar{y})$  we wszystkich pozostałych oktantach kwadratu korzystając z antysymetrii względem osi układu oraz przekątnych kwadratu, co jednak w dalszym ciągu obliczeń nie będzie nam potrzebne.



Korzystając ze wzorów (3.8) oraz (3.13) obliczamy odpowiednie pochodne  $u_j, v_j, w_j$  ( $j = x, y, z$ ), wstawiamy do wyrażenia (3.4) i po wykonaniu kilku przekształceń mamy

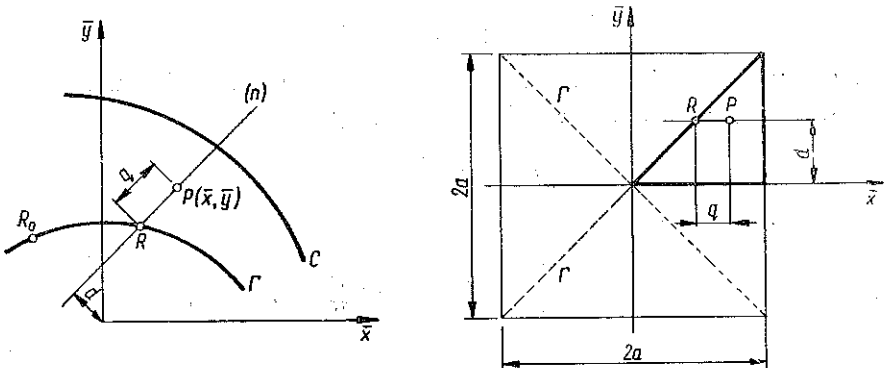
$$(3.14) \quad T = Q \int_0^l d\bar{z} \iint_F \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} \vartheta^2 (\bar{x} - \bar{y})^2} d\bar{x} d\bar{y},$$

gdzie  $l$  oznacza długość pręta lub, po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych  $x = \bar{x}/a, y = \bar{y}/a$  ( $a$  jest połową boku kwadratu) oraz bezwymiarowego parametru

$$(3.15) \quad s = \frac{\varepsilon}{a\vartheta},$$

praca sił wewnętrznych  $T$  da się przedstawić w postaci

$$(3.16) \quad T = \frac{16Qa^3 \vartheta}{\sqrt{3}} l \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{\frac{3}{4} s^2 + (y-x)^2} dy.$$



Rys. 6. Określenie funkcji spaczenia przekroju  $w_0(\bar{x}, \bar{y})$  według J. Mandela, [7]

Całka

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{\frac{3}{4} (s^2 + (y-x)^2)} dy$$

da się efektywnie obliczyć i po dosyć długich rachunkach mamy

$$(3.17) \quad I = \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{3}{4} s^2 + 1 \right)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} s^3 \right] + \\ + \frac{3}{8} s^2 \left( \ln \frac{s}{\sqrt{\frac{3}{4} s^2 + 1} - 1} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} s - \frac{\frac{3}{4} s^2}{\sqrt{\frac{3}{4} s^2 + 1} - 1} \right).$$

Praca sił zewnętrznych wyraża się prostym wzorem

$$(3.18) \quad V = M_s \vartheta l + N \varepsilon l.$$

Korzystając z równości (3.7) otrzymujemy równanie

$$(3.19) \quad M_s \vartheta l + N \varepsilon l = \frac{16}{\sqrt{3}} Q a^3 \vartheta l l$$

lub, po podzieleniu przez  $a \vartheta l$ ,

$$(3.20) \quad \frac{M_s}{a} + N s = \frac{16}{\sqrt{3}} Q a^2 l.$$

Prawą stronę tego równania nazwiemy  $F(s)$ , przy czym

$$(3.21) \quad F(s) = \frac{8Qa^2}{3\sqrt{3}} \left( A^3 + \frac{3\sqrt{3}}{4} s^3 + \frac{9}{4} s^2 + \frac{9}{4} s^2 \ln \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1+A}{s} - \frac{27}{16} \frac{s^4}{A-1} \right),$$

gdzie dla uproszczenia zapisu użyto oznaczenia

$$(3.22) \quad A = \sqrt{\frac{3}{4} s^2 + 1}.$$

Żądamy, aby dla stałej siły podłużnej  $N = \text{const}$  zachodziło minimum momentu skręcającego  $M_s = \text{min}$ . Z równania (3.20) mamy

$$(3.23) \quad M_s = a [F(s) - Ns].$$

Warunek istnienia minimum

$$(3.24) \quad \left[ \frac{\partial M_s}{\partial s} \right]_{N=\text{const}} = 0$$

daje

$$(3.25) \quad N = \frac{dF(s)}{ds}.$$

Korzystając z równań (3.21), (3.25) oraz (3.23) znajdujemy obciążenia zewnętrzne  $m_s = M_s / \bar{M}_s$  oraz  $n = N / \bar{N}$ , mianowicie:

$$(3.26) \quad m_s = A^3 - \frac{9}{4} s^2 \left( 1 + A - \frac{1}{A} + \ln \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1+A}{s} - \frac{3\sqrt{3}}{2} s^3 + \right. \\ \left. + \frac{27}{16} s^4 \frac{2A-3+1/A}{(A-1)^2} \right), \\ n = \sqrt{3} s \left( 1 + \frac{1}{2} (A - 1/A) + \frac{\sqrt{3}}{2} s + \ln \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1+A}{s} - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} s^2 \frac{3A-4+1/A}{(A-1)^2} \right),$$

Wyrażenia te przedstawiają parametryczne równanie krzywej granicznej  $m_s = m_s(s)$ ,  $n = n(s)$ . Dla  $s = 0$  otrzymujemy natychmiast  $m_s = 1$ ,  $n = 0$ , jak być powinno; przypadek  $s = \infty$  (czyste rozciąganie) omówimy osobno. Dyskusja oszacowania górnego zapisanego w postaci (3.26) jest dosyć trudna: budowa obydwu równań jest raczej złożona, parametr  $s$  nie daje się wyrugować, co więcej, wyrażenia te nie mogą być rozwinięte na szereg potęgowy zmiennej  $s$  w okolicy punktu  $s = 0$  (ze względu na występującą w obydwu wzorach funkcję  $\ln s$ ).

Aby uniknąć tych trudności, wprowadzimy nową zmienną  $\lambda = 1/s$  ( $\lambda = 0$ , gdy  $s = \infty$ ) i przepiszemy wzory (3.26) w postaci

$$(3.27) \quad m_s = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{B^3}{\lambda^3} - \frac{9}{4} \frac{1}{\lambda^2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B}{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{B} + \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda + B \right) \right] - \\ - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\lambda^3} + \frac{27}{16} \frac{1}{\lambda^4} \frac{\frac{\sqrt{3}}{\lambda} B - 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{B}}{\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B}{\lambda} - 1 \right)},$$

$$n = \frac{\sqrt{3}}{\lambda} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B}{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{B} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\lambda} + \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda + B \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{B}{\lambda} - 4 + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{B}}{\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B}{\lambda} - 1 \right)^2} \right],$$

gdzie

$$B = \sqrt{1 + 4/3 \lambda^2}.$$

Rozwijamy teraz na szereg potęgowy MacLaurina zmiennej  $\lambda$  wyrażenia

$$(3.28) \quad B = 1 + \frac{2}{3} \lambda^2 - \frac{2}{9} \lambda^4 + \dots, \\ \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda + B \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda - \frac{4}{9\sqrt{3}} \lambda^3 + \dots$$

Po wykonaniu wszystkich naznaczonych działań na tych szeregach otrzymujemy

$$(3.29) \quad \begin{cases} m_s = a\lambda^{-3} + b\lambda^{-2} + c\lambda^{-1} + d\lambda + \dots, \\ n = e\lambda^{-2} + f\lambda^{-1} + 1 + g\lambda^2 + \dots, \end{cases}$$

gdzie jednak współczynniki  $a, b, c, e$  i  $f$  znikają, natomiast

$$(3.30) \quad d = -\frac{1}{9}, \\ g = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

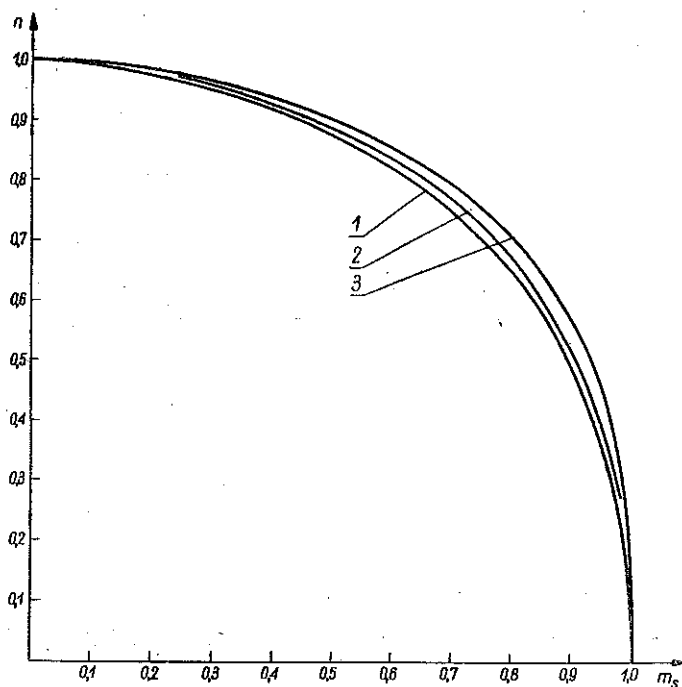
Równanie krzywej granicznej możemy obecnie zapisać w postaci

$$(3.31) \quad n = 1 - \frac{1}{9} \lambda^2 - \dots,$$

$$m_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda + \dots$$

lub na koniec po wyrugowaniu parametru  $\lambda$

$$(3.32) \quad n = 1 - \frac{1}{3} m_s^2 - \dots$$



Rys. 7. Krzywe graniczne  $f(m_s, n) = 0$  dla pręta o przekroju kwadratowym:  
1 — oszacowanie z dołu, 2 — rozwiązanie ścisłe (aproxymacja według [18]), 3 — oszacowanie z góry

Równanie to przedstawia część krzywej granicznej (oszacowanie górne) dla  $m_s \ll n$ . Dla napisania pełnego równania krzywej nośności granicznej korzystamy z omówionej poprzednio interpolacji sześcienniej typu (2.61). Wstawiając  $\alpha = 1/3$ , otrzymujemy proste równanie

$$(3.33) \quad m_s^2 + n^3 = 1.$$

Jest to oszacowanie górne. Krzywa opisywana tym równaniem<sup>5</sup> została przed-

<sup>5</sup> Krzywą graniczną (oszacowanie górne) można by narysować również, korzystając z równania ścisłego (parametrycznego) oszacowania górnego (3.26), wstawiając do niego wybrane wartości parametru  $s$  i uzyskując na drodze numerycznej odpowiednie współrzędne punktów  $f(m_s, n) = 0$ . Dla sprawdzenia przeprowadzono takie obliczenia dla kilku punktów krzywej i porównano z rezultatami otrzymywanymi przy użyciu wzoru (3.33) — różnice są znikomo małe.

stawiona na rys. 7 (krzywa 3). Krzywa 2 będąca bliską aproksymacją rozwiązania ścisłego jest opisana równaniem, podanym w pracy [18]:

$$(3.34) \quad m_s^2 + 0,4709 n^2 + 0,5291 n^3 = 1.$$

Z rysunku 7 widać, że krzywa ta mieści się pomiędzy obydwooma znalezionymi oszacowaniami: dolnym (2.62) oraz górnym (3.33), a zatem dla zastosowań w praktyce inżynierskiej należy polecić równanie (3.34) jako nieomal ścisłe.

Powyższe rozważania dotyczące znajdowania oszacowania dolnego i górnego dla pręta ( $M_s, N$ ) o przekroju kwadratowym można by uogólnić dla dowolnego  $p$ -kąta foremnego, jednakże ilość pracy przy  $p \neq 4$  znacznie wzrasta, a uzyskiwane rezultaty nie wydają się wnosić wiele nowego. I bez liczenia można stwierdzić, że dla  $p > 4$  oszacowanie z góry zbliża się coraz bardziej ku rozwiązaniu ścisłemu, a w przypadku granicznym  $p \rightarrow \infty$ , gdy wielokąt przechodzi w koło, oszacowanie z góry jest identyczne z rozwiązaniem ścisłym, co po raz pierwszy stwierdził A. R. RŻANICYN, [15].

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] F. A. GAYDON, H. NUTTAL, *On the Combined Bending and Twisting of Beams of Various Sections*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 5 (1957).
- [2] G. H. HANDELMAN, *A Variational Principle for a State of Combined Plastic Stress*, Q. Appl. Math., 1 (1944), 351-353.
- [3] G. H. HANDELMAN, *A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity* QJA Math., 1 (1948), 18-28.
- [4] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, New York 1950.
- [5] R. HILL, *A Comparative Study of Some Variational Principles in the Theory of Plasticity*, J. Appl. Mech. 17 (1950), 64-66.
- [6] R. HILL, M. P. L. SIEBEL, *On Combined Bending and Twisting of thin Tubes in the Plastic Range*, Phil. Mag., 7, 42 (1951), 722-733.
- [7] P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- [8] A. A. ИЛЬЮЩИН, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва 1948.
- [9] Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Гостехиздат, Москва 1956.
- [10] Л. М. Качанов, *К механике пластических сред*, Прикл. Мат. и Мех., 3, 5 (1941).
- [11] Л. М. Качанов, *Вариационные принципы для упруго-пластических сред*, Прикл. Мат. и Мех., 2-3, 6 (1942).
- [12] A. NÁDAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Moscow 1954, (w jęz. ros.).
- [13] S. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the Plastic Interaction Curve for Bending and Torsion of a Circular Bar*, Arch. Mech. Stos., 5, 3 (1961).
- [14] W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, New York-London 1951.
- [15] A. P. РЖАНИЦЫН, *Приближенные решения задач теории пластичности*, Сборник: Исследование по вопросам строительной механики и теории пластичности, Т УС, Москва 1956.
- [16] M. A. SADOVSKY, *A Principle of Maximum Plastic Resistance*, J. Appl. Mech., June 1943.
- [17] M. C. STEBLE, *The Plastic Bending and Twisting of Square Section Member*, J. Mech. Phys. Solids, 3 (1955), 156-166.
- [18] M. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcanego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., 4, 10 (1962).

## Резюме

ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ КРАЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРИВОЙ  
ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

Используя вариационные теоремы теории пластичности, дается общий метод определения нижнего и верхнего края кривой несущей способности в плоскости внешних нагрузок  $(M_s, N)$ , где  $M_s$  — крутящий момент,  $N$  — продольная растягивающая или сжимающая силы. Приведенный метод можно использовать для исследования несущей способности  $(M_s, N)$  стержней с произвольной формой сечения.

Первая часть работы посвящается определению некоторой схемы статически допускаемых напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , возможно лучше аппроксимирующих действительное распределение напряжений, используя при этом аналогию крыши А. Нада́йя, [12]. Подобно, приведенная во второй части работы кинематически возможная система перемещений  $u_i$  — обязывает для произвольной формы сечения, рассматриваемого стержня и дает возможность определить верхний край кривой несущей способности  $f(M_s, N) = 0$ . Определенные таким образом нижний и верхний края, в обоих случаях: 1 — чистое кручение, 2 — чистое растяжение совпадают с точным решением, а для произвольной сложной системы внешних нагрузок  $(M_s, N)$  — позволяют оценить правильность известных, [18], аппроксимаций точного решения (точное решение вопроса несущей способности одновременно скручиваемого и растягиваемого стержня — еще не найдено).

Для иллюстрирования приведенных методов, основанных на вариационных теоремах, решается эффективно случай стержня квадратного сечения, находя благодаря интерполяции Гермита, полное уравнение нижнего и верхнего края кривой несущей способности в плоскости  $(M_s, N)$ . В заключение (см. рис. 7) результаты настоящей работы используются для оценки точности решения, рассматриваемой задачи, — приведенного в работе [18].

## Summary

THE LOWER AND UPPER BOUND OF THE LIMIT CURVE  
FOR COMBINED TENSION AND TORSION

Making use of the variational theorems of plasticity a general method is given for the determination of the upper and lower bound of the limit curve in the  $(M_s, N)$  — plane of external loads where  $M_s$  is the torque and  $N$  — the longitudinal force (tensile or compressive). The method described can be used for investigating the limit load  $(M_s, N)$  of bars of any cross section.

The first part of the paper is devoted to the determination of a certain scheme of statically admissible stresses  $\sigma_{ij}$  approaching the real stress distribution as well as possible. For this purpose the Nádai roof analogy is made use of [12]. Similarly, the system of kinematically admissible displacements described in the second part of the paper is valid for any form of the cross-section and enables us to find the upper bound of the limit curve  $f(M_s, N) = 0$ . In the two particular cases 1) of pure torsion and 2) of pure tension the upper and lower bound thus found coincide with the accurate values. For any load combination  $(M_s, N)$  they enable us to obtain an estimate of the correctness of the known approximations, [18], to the accurate solution (the accurate solution of the problem of limit load of a bar subject to combined tension and torsion has not yet been found).

To illustrate the methods described based on the variational theorems, the case of a square bar is solved effectively thus finding by means of Hermitian interpolation the full equation of the lower and the upper bound of the limit curve in the  $(M_s, N)$ -plane. Finally (cf. Fig. 7) the results of the present paper are used to estimate the accuracy of the solution of the problem given in [18].

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
KATEDRA FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1962 r.