

LABORATORIUM I DOŚWIADZENIA
POZNAŃ
Lp. 3019
Wpł. 9 IV 63

S. P.	Prof.	A. W.

O WYTRZYMAŁOŚCI BELEK PROSTYCH. Cz. 2.
WSPORNIKI I BELKI WSPORNIKOWE.
ZASADA WZAJEMNOŚCI DLA BELEK PROSTYCH.

P. P. TEODORESCU (BUKARESZT)

Zagadnienie belki utwierdzonej jest trudniejsze od uprzednio zbadanego zagadnienia belki podpartej swobodnie. Rzeczywiście, w przypadku tym należy nakładać warunki na przemieszczenia na pewnych krawędziach prostokątnego konturu belki, podczas gdy na innych nakłada się warunki na naprężenia. Z punktu widzenia teorii sprężystości problem zalicza się zatem do kategorii problemów mieszanych. R. L'HERMITE, [3], zauważył, że określenie stanu naprężeń i odkształceń w jednej ze stref utwierdzenia jest problemem dotychczas nie rozwiązany na gruncie teorii wytrzymałości materiałów.

W przypadku belek długich można zakładać, że utwierdzenie realizowane jest w pewnym punkcie teoretycznym (przemieszczenie tego punktu jest zerem, takie jest również jedno z odkształceń kątowych); można również przybliżyć przekrój utwierdzony w inny sposób: zakładamy na przykład, że przemieszczenia w dwu lub trzech punktach tego przekroju są zerami. Takie metody rachunkowe nie wystarczają w przypadku belek krótkich, np. belek-ścian.

A. S. KALMANOK, [4], w roku 1950 badał zagadnienie wspornika-ściany przyjmując warunki utwierdzenia doskonałego. Badania te powtórzył w pracach [5] i [6], następnie zaś zastosował przybliżoną metodę rachunkową, [7]. W pracach tych po raz pierwszy nałożono poprawnie warunki na przekrojach utwierdzenia. W roku 1955 autor niniejszej pracy podał również pewną ogólną metodę badania tych zagadnień, [8].

Wsporniki długie traktować można również w sposób przybliżony, jako półpasy płaskie sprężyste utwierdzone wzdłuż przekroju końcowego, wykorzystując prace [11] i [13]. W przypadku wspornika-ściany wykorzystać można także rezultaty uzyskane przez autora w pracach [10] i [12].

Poniżej rozważać będziemy przypadek belek długich.

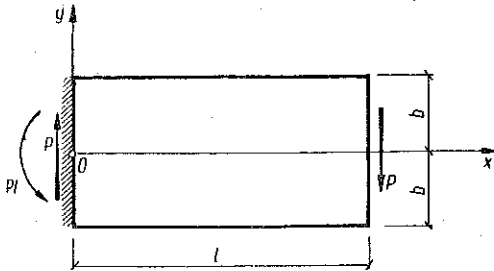
4. Wspornik. Rozwiązania przy zastosowaniu wielomianów biharmonicznych

Zbadamy przede wszystkim zagadnienie obciążenia siłami skupionymi, co pozwoli nam na ogólne sformułowanie problemu wspornika i sprowadzenie go do problemu belki prostej podpartej swobodnie.

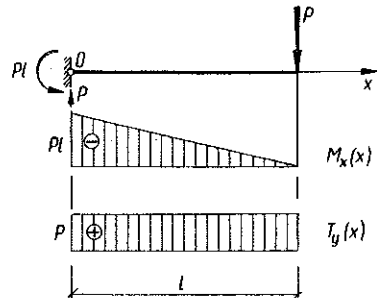
4.1. Obciążenie siłami skupionymi. Rozważymy przypadek obciążenia górnej powierzchni belki siłą skupioną lub momentem skupionym, jest to bowiem przy-

padek podstawowy. Można również nie zmniejszając ogólności rozważań założyć, że to obciążenie skupione przyłożone jest na swobodnym końcu wspornika. Można przyjąć, co więcej, przybliżone założenie, że obciążenie skupione jest siłą lub momentem działającym na przekrój końcowy.

Rozważmy wspornik obciążony siłą skupioną na wolnym końcu (rys. 42). Jest to przypadek obciążenia antysymetrycznego względem osi Ox , można zatem zastosować wielomian biharmoniczny nieparzysty względem y .



Rys. 42



Rys. 43

Znajdujemy funkcję Airy'ego

$$(4.1) \quad F = \frac{P}{4b^3} [x(3b^2 - y^2) + ly^2]y,$$

zatem naprężenia wynoszą

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= 3 \frac{P}{b} \lambda (1 - \xi) \eta, \\ \sigma_y &= 0, \\ \tau_{xy} &= -\frac{3}{4} \frac{P}{b} (1 - \eta^2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że naprężenia te są takie same jak obliczone na gruncie teorii wytrzymałości materiałów, zatem

$$(4.2') \quad \sigma_x^E = \sigma_y^E = \tau_{xy}^E = 0.$$

Siły i momenty na tym przekroju wynoszą (rys. 43)

$$(4.3) \quad \begin{aligned} M_x(x) &= -P(l - x) = -Pl(1 - \xi), \\ T_y(x) &= P, \end{aligned}$$

a na powierzchni spełnione są warunki

$$(4.4) \quad y = b: \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = 0;$$

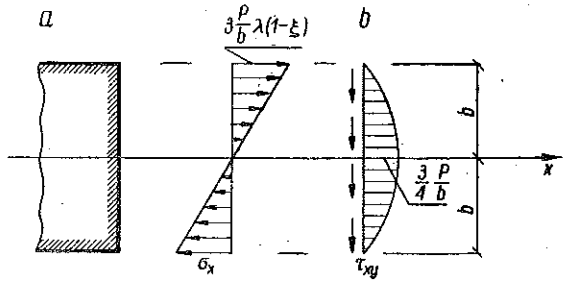
$$(4.4') \quad x = 0: \quad N_x = 0, \quad T_y = P, \quad M_x = -Pl,$$

$$x = l: \quad \bar{N}_x = 0, \quad \bar{T}_y = P, \quad \bar{M}_x = 0.$$

Naprężenia zmieniają się wzdłuż przekroju poprzecznego tak, jak pokazano to na rysunkach 44a i 44b.

Składowe przemieszczenia uzyskujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 E[u - (-\omega_0 y + u_0)] &= \\
 &= -\frac{P}{4b^3} \{3[(l-x)^2 + \\
 &2(1+\nu)b^2] - (2+\nu)y^2\}y, \\
 E[v - (\omega_0 x + v_0)] &= \\
 &= -\frac{P}{4b^3} (l-x)[(l-x)^2 + \\
 &+ 3\nu y^2],
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

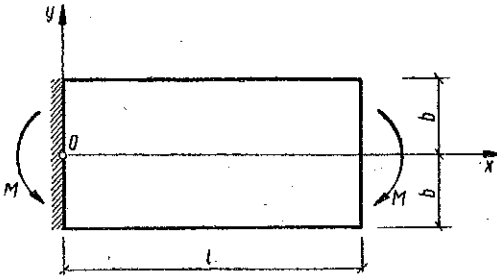


Rys. 44

przy czym warunek, że punkt (0,0) nie podlega przemieszczeniom ($u = 0, v = 0$) prowadzi do

$$\tag{4.6} \quad u_0 = 0, \quad v_0 = \frac{Pl^3}{4Eb^3} = 2 \frac{P}{E} \lambda^3.$$

Obrót ω_0 ciała sztywnego jest wyznaczony przez warunki utwierdzenia belki. Rozpatrzmy teraz przypadek wspornika obciążonego na końcu swobodnym momentem skupionym (rys. 45). Jest to przypadek obciążenia antysymetrycznego względem osi Ox . Jest on identyczny, jeśli chodzi o stan naprężeń, z przypadkiem czystego zginania.



Rys. 45

Funkcja naprężeń

$$\tag{4.7} \quad F = \frac{M}{4b^3} y^3 = \frac{M}{4} \eta^3$$

określa stan naprężeń

$$\tag{4.8} \quad \sigma_x = \frac{3}{2} \frac{M}{b^2} \eta, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$$

który pokrywa się z obliczonym na gruncie teorii wytrzymałości materiałów.

Moment zginający jest stały, równy M , a siła poprzeczna jest zerem we wszystkich przekrojach.

Składowymi przemieszczenia są

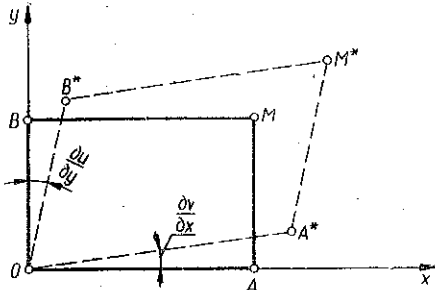
$$\begin{aligned}
 E[u - (-\omega_0 y + u_0)] &= \frac{3M}{2b^3} xy, \\
 E[v - (\omega_0 x + v_0)] &= -\frac{3M}{4b^3} (x^2 + \nu y^2).
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Z warunku stałości punktu $(0,0)$ wynika, że

$$(4.10) \quad u_0 = v_0 = 0,$$

a obrót ω_0 ciała sztywnego wyznaczony jest przez warunki utwierdzenia belki.

Badanie występujących w rzeczywistości przekrojów utwierdzonych jest dość trudne, co już podkreśliliśmy. W dalszym ciągu zakładając będziemy, że punkt $O(0,0)$ (środek ciężkości przekroju utwierdzonego) jest nieruchomy, oraz nakładając warunek dodatkowy na obrót przekroju lub na przemieszczenie innego punktu.



Rys. 46

Rozważmy nieskończenie mały element prostokątny $OAMB$ wycięty z belki w pobliżu początku O (rys. 46). Element ten ulegnie odkształceniu przekształcając się w równoległobok $OA^*M^*B^*$, którego boki tworzą z bokami prostokąta kąty wynoszące odpowiednio $\partial v/\partial x$ i $\partial u/\partial y$.

Przyjmijmy warunek

$$(4.11) \quad x = 0, \quad y = 0: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

co odpowiada założeniu, że odkształcona warstwa środkowa belki pozostaje w przekroju utwierdzonym styczna do warstwy środkowej nieodkształconej.

W przypadku obciążenia końca belki momentem skupionym otrzymujemy

$$(4.12) \quad \omega_0 = 0,$$

zatem przemieszczenia wynoszą

$$(4.13) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{l} &= \frac{3}{2} \frac{M}{b^2} \xi \eta, \\ E \frac{v}{b} &= -\frac{3}{4} \frac{M}{b^2} (4\lambda^2 \xi^2 + \nu \eta^2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że przemieszczenie u jest zerem na całym przekroju utwierdzonym i przekrój ten pozostaje płaski po odkształceniu.

Przyjmując ten sam warunek w przypadku obciążenia przekroju końcowego siłą skupioną otrzymujemy

$$(4.14) \quad \omega_0 = -\frac{3Pl^2}{4Eb^3} = -\frac{3P}{Eb} \lambda^2,$$

wobec tego składowe przemieszczenia wynoszą

$$(4.15) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{l} &= \frac{P}{8b\lambda} \{3 [4\lambda^2 \xi (2 - \xi) - 2(1 + \nu)] + (2 + \nu) \eta^2\} \eta, \\ E \frac{v}{b} &= -\frac{P}{2b} \lambda [4\lambda^2 \xi^2 (3 - \xi) + 3\nu (1 - \xi) \eta^2]. \end{aligned}$$

Równanie odkształconej warstwy środkowej przyjmuje postać

$$(4.16) \quad E \frac{v(\xi, 0)}{b} = E \frac{v_M}{b} = -2 \frac{P}{b} \lambda^3 \xi^2 (3 - \xi),$$

jest więc identyczne z równaniem tej warstwy uzyskanym przy uwzględnieniu wpływu momentu zginającego metodami wytrzymałości materiałów. Ugięcie maksymalne wyniesie zatem

$$(4.17) \quad f = -v(1, 0) = 4 \frac{P}{E} \lambda^3.$$

W podobny sposób otrzymamy

$$(4.18) \quad E \frac{u_R}{I} = \frac{3P}{2b} \lambda \xi (2 - \xi) \eta, \quad v_R = v_M + v_T,$$

przy czym

$$(4.19) \quad E \frac{v_T}{b} = 2,4(1+\nu) \frac{P}{b} \lambda \xi,$$

oraz punkt $O(0,0)$ nie ulega przemieszczeniu.

Ugięcie maksymalne będzie określone wzorem

$$(4.20) \quad f_R = f_M + f_T,$$

gdzie

$$(4.20') \quad f_M = 4 \frac{P}{E} \lambda^3, \quad f_T = 2,4(1+\nu) \frac{P}{E} \lambda.$$

Aby porównać wpływ siły poprzecznej z wpływem momentu zginającego w powyższych wzorach, należy obliczyć stosunek

$$(4.21) \quad \frac{f_T}{f_M} = 0,6 \frac{1+\nu}{\lambda^2}.$$

Zależne od λ i ν wartości tego stosunku (w procentach) zestawione są w tablicy 13.

Tablica 13

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	15,0	6,7	3,8	2,4	0,6
$\frac{1}{6}$	17,5	7,8	4,4	2,8	0,7
0,3	19,8	8,8	4,9	3,2	0,8
0,5	22,5	10,0	5,6	3,6	0,9

Należy również obliczyć stosunek

$$(4.22) \quad \frac{f_T}{f_R} = \frac{1}{1+f_M/f_T} = \frac{1}{1+5\lambda^2/3(1+\nu)},$$

którego procentowe wartości dla różnych λ i ν zestawione są w tablicy 14.

Zauważmy również, że dla $\lambda \leq 3$ wyraźny jest wpływ siły poprzecznej i należy brać go pod uwagę. Dla $\lambda = 2$ składowa ugięcia pochodząca od siły poprzecznej stanowi piątą część całego ugięcia.

Tablica 14

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	13,0	6,3	3,7	2,3	0,6
$\frac{1}{6}$	14,9	7,2	4,2	2,7	0,7
0,3	16,6	8,1	4,7	3,1	0,8
0,5	18,4	9,1	5,3	3,5	0,9

Metodami teorii sprężystości uzyskujemy dla składowych przemieszczenia poprawki

$$(4.23) \quad E \frac{u_E}{l} = \frac{P}{8b\lambda} [(2+\nu)\eta^2 - 6(1+\nu)] \eta,$$

$$E \frac{v_E}{b} = -\frac{3}{2} \frac{P}{b} \nu \lambda (1 - \xi) \eta^2,$$

przy czym ostatnia poprawka jest liczona względem v_M .

Maksymalną wartość składowej przemieszczenia u w narożach przekroju końcowego belki otrzymujemy w postaci

$$(4.24) \quad u_R(1, \pm 1) = \pm \frac{3P}{E} \lambda^2,$$

$$u_E(\xi, \pm 1) = \mp \frac{P}{4E} (4+5\nu),$$

przy czym u_E nie zależy od rozpatrywanego przekroju normalnego i jest największa co do wartości bezwzględnej w warstwach ekstremalnych.

Obliczmy stosunek

$$(4.25) \quad -\frac{u_E(\xi, \pm 1)}{u_R(1, \pm 1)} = \frac{4+5\nu}{12\lambda^2},$$

którego zależne od λ i ν wartości (w procentach) zestawione są w tablicy 15. Widzimy, że wpływ poprawki, jaką uzyskujemy na gruncie teorii sprężystości, jest mały dla $\lambda \geq 3$ i wzrasta szybko dla mniejszych stosunków pomiędzy wymiarami belki. Zauważmy również, że poprawka ta zmniejsza wartość bezwzględną składowej u przemieszczenia.

Utwórzmy stosunek

$$(4.26) \quad \frac{|u_{\max}|}{f} = \frac{3}{4\lambda} - \frac{4+5\nu}{16\lambda^3} = \frac{3}{4\lambda} - \frac{4,0 \dots 6,5}{16\lambda^3},$$

którego procentowe wartości dla różnych λ podane są w tablicy 16. Widzimy, że przemieszczenie wzdłuż osi belki jest dla niektórych punktów tak duże, że nie można go pominąć w rachunku.

Poprawka v_E dla warstwy środkowej belki jest zerem.

Dla warstw zewnętrznych znajdujemy przemieszczenie

$$(4.27) \quad E \frac{v(\xi, \pm 1)}{b} = -\frac{P}{2b} \lambda [4\lambda^2 \xi^2 (3 - \xi) + 3\nu (1 - \xi)].$$

Tablica 15

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	8,3	3,7	2,1	1,3	0,3
$\frac{1}{6}$	10,0	4,5	2,5	1,6	0,4
0,3	11,4	5,1	2,9	1,8	0,5
0,5	13,6	6,0	3,4	2,2	0,5

Tablica 16

λ	2	3	4	5	10
$\frac{ u_{\max} }{f}$	35 ... 32	24	18	15	7

Tablica 17

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\frac{1}{6}$	1,56	0,70	0,39	0,25	0,06
0,3	2,80	1,25	0,70	0,45	0,11
0,5	4,50	2,00	1,13	0,72	0,18

Zauważmy, że w przekroju końcowym przemieszczenia warstw zewnętrznych i warstwy środkowej w kierunku Oy są identyczne. W przekroju utwierdzonym punkt leżący w warstwie środkowej nie ulega przemieszczeniu. Należy zbadać stosunek

$$(4.28) \quad \frac{v(0, \pm 1)}{v(1, 0)} = \frac{3\nu}{8\lambda^2},$$

którego wartości (w procentach) podane są w tablicy 17. Widzimy, że przemieszczenie v jest dla warstw zewnętrznych większe niż dla warstwy środkowej, jednakże różnice pomiędzy przemieszczeniami warstw zewnętrznych a przemieszczeniem warstwy środkowej można praktycznie pominąć. Można zatem uważać, że zdeformowane warstwy belki są równoległe i że ugięcie maksymalne mierzone na jednej z powierzchni belki jest równe ugięciu maksymalnemu warstwy środkowej.

Zamiast nakładać warunek (4.11), możemy przyjąć, że przekrój utwierdzenia powinien pozostawać (lub powinien mieć tendencję do pozostawania) bliski przekroju płaskiego. Można to osiągnąć przez nałożenie warunku, że przemieszczenie u nie porusza punktów przynajmniej w otoczeniu punktu $O(0,0)$. Można zatem napisać

$$(4.11') \quad x = 0, \quad y = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Przekrój utwierdzony powinien w tym przypadku pozostawać po odkształceniu styczny (w środku ciężkości) do przekroju nieodkształconego.

Przy obciążeniu momentem skupionym na przekroju końcowym uzyskujemy takie same rezultaty. W przypadku obciążenia siłą skupioną na przekroju końcowym (koniec swobodny) otrzymujemy

$$(4.14') \quad \omega'_0 = -\frac{3P}{4Eb^3} [l^2 + 2(1+\nu)b^2] = \omega_0 - \frac{3}{2}(1+\nu) \frac{P}{Eb},$$

który daje następujące składowe przemieszczenia

$$(4.29) \quad \begin{aligned} E \frac{u'}{l} &= \frac{P}{8b\lambda} [12\lambda^2 \xi (2 - \xi) + (2 + \nu) \eta^2] \eta, \\ E \frac{v'}{b} &= -\frac{P}{2b} \lambda [4\lambda^2 \xi^2 (3 - \xi) + 6(1 + \nu) \xi + 3\nu (1 - \xi) \eta^2]. \end{aligned}$$

Równanie odkształconej warstwy środkowej napisać możemy w postaci

$$(4.30) \quad E \frac{v'(\xi, 0)}{b} = -\frac{P}{b} \lambda [2\lambda^2 \xi (3 - \xi) + 3(1 + \nu)] \xi,$$

co daje ugięcie maksymalne

$$(4.31) \quad f' = -v'(1, 0) = \frac{P}{E} \lambda [4\lambda^2 + 3(1 + \nu)].$$

Porównanie wzorów (4.16), (4.18) i (4.19) uzyskanych metodami wytrzymałości materiałów z równaniem (4.30) uzyskanym metodami teorii sprężystości, pozwala wyróżnić wpływ momentu zginającego (pierwszy składnik z prawej strony). Wpływy innych czynników (siła poprzeczna, naprężenie normalne σ_y) zawarte są w

$$(4.32) \quad E \frac{v' - v_M}{b} = -3(1 + \nu) \frac{P}{b} \lambda \xi.$$

Obliczywszy stosunek

$$(4.33) \quad \frac{v' - v_M}{v_T} = 1,25$$

dochodzimy do wniosku, że teoria wytrzymałości materiałów daje, przy uwzględnieniu działania siły poprzecznej, wystarczająco dobre przybliżenia (z niedomiarem)

dla odkształconej warstwy środkowej. Przybliżenie to nie zależy od stosunku λ pomiędzy wymiarami belki oraz od współczynnika ν .

Dla składowych przemieszczenia uzyskujemy metodami sprężystości poprawki

$$(4.34) \quad E \frac{u'_E}{l} = (2+\nu) \frac{P}{8b\lambda} \eta^3,$$

$$E \frac{v'_E}{b} = -\frac{P}{b} \lambda [0,6(1+\nu)\xi + 1,5\nu(1-\xi)\eta^2].$$

Maksymalną wartość składowej przemieszczenia otrzymamy na krawędziach swobodnego przekroju końcowego belki:

$$(4.35) \quad u'_R(1, \pm 1) = \pm \frac{3P}{E} \lambda^2, \quad u'_E(\xi, \pm 1) = \pm(2+\nu) \frac{P}{4E},$$

przy czym u'_E nie zależy od rozważanego przekroju normalnego i jest największe dla warstw ekstremalnych. Zauważmy również, że poprawka ta powiększa co do wartości bezwzględnej składową u (przeciwnie niż w poprzednio rozważonym rodzaju utwierdzenia).

Obliczmy stosunek

$$(4.36) \quad \frac{u'_E(\xi, \pm 1)}{u'_R(1, \pm 1)} = \frac{2+\nu}{12\lambda^2}.$$

Wyrażone w procentach wartości tego stosunku dla różnych λ i ν zestawione są w tablicy 18. Widzmy, że wpływ poprawki uzyskanej na gruncie teorii sprężystości jest mały i w praktyce można go pominąć dla $\lambda \geq 2$ (poprawka ta jest w przybliżeniu dwa razy mniejsza niż w poprzednio rozważonym przypadku utwierdzenia).

Wartości stosunku

$$(4.37) \quad \frac{|u_{\max}|}{f} = \frac{12\lambda^2 + 2 + \nu}{4\lambda [4\lambda^2 + 3(1+\nu)]} =$$

$$= \frac{3}{4\lambda} \frac{7+8\nu}{4\lambda [4\lambda^2 + 3(1+\nu)]} = \frac{3}{4\lambda} \frac{7 \dots 11}{4\lambda [\lambda^2 + (3,0 \dots 4,5)]}$$

podane są (w procentach) dla różnych wartości λ w tablicy 19. Widzimy, że przemieszczenie wzdłuż osi belki jest w pewnych punktach stosunkowo duże i nie można go pominąć w rachunkach (pomimo, że jest mniejsze niż w poprzednio rozważanym sposobie utwierdzenia).

W przypadku przemieszczenia v' oprzemy się na przemieszczeniu maksymalnym f' warstwy środkowej ($\eta = 0$), które ma miejsce na swobodnym przekroju końcowym belki. Zauważmy, że f'_E jest liczbą dodatnią, zatem ugięcie, które daje teoria wytrzymałości, jest mniejsze od rzeczywistego. W tablicy 20 zestawione są procentowe wartości stosunku

$$(4.38) \quad \frac{f'_E}{f'} = \frac{0,2}{1 + \frac{4\lambda^2}{3(1+\nu)}}$$

Widzimy, że poprawkę sprężystą można w praktyce pominąć. Można zatem w tym przypadku stosować metody teorii wytrzymałości materiałów.

Różnice w przemieszczeniach v' warstw zewnętrznych i warstwy środkowej są również małe.

Aby porównać ugięcia uzyskane w dwu rozważonych sposobach utwierdzenia wprowadzimy stosunek

$$(4.39) \quad \frac{f' - f}{f} = 0,75 \frac{1 + \nu}{\lambda^2},$$

którego wartości otrzymać można mnożąc wartości z tablicy 13 przez współczynnik 1,25. Widzimy również, że różnice w sposobach utwierdzenia prowadzą do różnic w wynikach, które stają się znaczące dla $\lambda \leq 3$ i osiągają rząd 20-25% dla $\lambda = 2$.

Tablica 18

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	4,2	1,9	1,0	0,7	0,2
$\frac{1}{6}$	4,5	2,0	1,1	0,7	0,2
0,3	4,8	2,1	1,2	0,8	0,2
0,5	5,2	2,3	1,3	0,8	0,2

Tablica 19

λ	2	3	4	5	10
$\frac{ u_{\max} }{f}$	33 ... 31	23	18	15	7

Tablica 20

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	3,2	1,5	0,9	0,6	0,1
$\frac{1}{6}$	3,6	1,8	1,0	0,7	0,2
0,3	4,0	2,0	1,2	0,8	0,2
0,5	4,4	2,2	1,3	0,9	0,2

Trudno jest określić, jak wygląda rzeczywisty sposób utwierdzenia belki. Jest on, być może, «pomiędzy» rozważonymi przypadkami utwierdzenia, które mogłyby wobec tego spełniać rolę przypadków granicznych.

Aby osiągnąć możliwie dobre matematyczne sformułowanie zjawiska fizycznego rozważymy przypadek, w którym przemieszczenia u są bardzo małe na całym przekroju utwierdzonym. Przyjmijemy więc zamiast warunków (4.11), (4.11') warunek

$$(4.11'') \quad x = 0, \quad y \pm b: \quad u = 0,$$

co stanowi przybliżenie warunków na konturze (warunek $u = 0$ nakładamy w skończonej ilości punktów — w naszym przypadku w trzech punktach przekroju utwierdzonego).

Obrót ciała sztywnego wyniesie

$$(4.14'') \quad \omega_0'' = -\frac{P}{4Eb^3} [3l^2 + (4+5\nu)b^2] = \omega_0 - \frac{1}{4}(4+5\nu)\frac{P}{Eb},$$

wobec czego składowymi przemieszczenia będą

$$(4.40) \quad \begin{aligned} E \frac{u''}{l} &= \frac{P}{8b\lambda} [12\lambda^2 \xi(2-\xi) - (2+\nu)(1-\eta^2)] \eta, \\ E \frac{v''}{b} &= -\frac{P}{2b} \lambda [4\lambda^2 \xi^2(3-\xi) + (4+5\nu)\xi + 3\nu(1-\xi)\eta^2]. \end{aligned}$$

Równanie środkowej warstwy zdeformowanej można napisać w postaci

$$(4.41) \quad E \frac{v''(\xi, 0)}{b} = -\frac{P}{2E} \lambda [4\lambda^2 \xi(3-\xi) + 4+5\nu] \xi,$$

wobec czego ugięcie maksymalne wynosi

$$(4.42) \quad f'' = -v''(1, 0) = \frac{P}{2E} \lambda (8\lambda^2 + 4 + 5\nu).$$

Zestawienie równania (4.41) uzyskanego metodami teorii sprężystości z równaniami (4.16), (4.18), (4.19), uzyskanymi metodami wytrzymałości materiałów pozwala wyróżnić w równaniu tym składnik związany z działaniem momentu zginającego (pierwszy składnik prawej strony). Działanie innych czynników zawarte jest w

$$(4.43) \quad E \frac{v'' - v_M}{b} = -\frac{1}{2}(4+5\nu)\frac{P}{b}.$$

Obliczając stosunek

$$(4.44) \quad \frac{v'' - v_M}{v_T} = \frac{4+5\nu}{4,8(1+\nu)} = 1 - \frac{4-\nu}{24(1+\nu)}$$

stwierdzamy, że po uwzględnieniu wpływu siły poprzecznej znalezionej na gruncie teorii wytrzymałości otrzymamy dla odkształconej warstwy środkowej przybliżenie wystarczająco dobre i niezależne od stosunku λ pomiędzy wymiarami belki.

Metody teorii sprężystości dają — w tym przypadku — dla składowych przemieszczenia poprawkę w postaci następującej

$$(4.45) \quad \begin{aligned} E \frac{u_E''}{l} &= -(2+\nu)\frac{P}{8b\lambda}(1-\eta^2)\eta, \\ E \frac{v_E''}{b} &= \frac{P}{10b} \lambda [(4-\lambda)\xi - 15\nu(1-\xi)\eta^2]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że również w tym przypadku poprawka u_E'' nie zależy od rozważanego przekroju normalnego oraz zmniejsza co do wartości bezwzględnej składową u przemieszczenia. Co więcej, poprawkę tę można praktycznie opuścić dla $\lambda \geq 2$, ponieważ jest ona mniejsza niż w poprzednio rozważanych przypadkach utwierdzenia.

Co więcej, przemieszczenie u jest duże w stosunku do ugięcia f w niektórych punktach belki i wobec tego nie można go pominąć w rachunkach.

Przemieszczenie v'' porównywać będziemy z przemieszczeniami środkowej warstwy belki ($\eta = 0$), przy czym przemieszczenie maksymalne odpowiada przekrojowi końcowemu belki ($\xi = 1$). Zauważmy, że f_E'' jest wielkością dodatnią lub ujemną w zależności od stosunku λ . Rozważmy stosunek

$$(4.46) \quad \frac{f_E''}{f''} = -\frac{4 - \lambda}{10(4\lambda^2 + 2 + 2,5\nu)},$$

którego procentowe wartości podane są w tabelicy 21 w zależności od wartości λ i ν .

Tabela 21

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	1,11	0,26	0,00	-0,10	-0,15
$\frac{1}{6}$	1,08	0,26	0,00	-0,10	-0,15
0,3	1,07	0,26	0,00	-0,10	-0,15
0,5	1,04	0,25	0,00	-0,10	-0,15

Można zatem wykorzystywać rezultaty otrzymane na gruncie teorii wytrzymałości materiałów, bowiem wpływ poprawki uzyskanej na gruncie teorii sprężystości można praktycznie pominąć. Poprawka ta jest mniejsza niż w poprzednich przypadkach. Dla warstw ekstremalnych uzyskać można wnioski analogiczne.

Dla porównania ugięć uzyskanych w dwu ostatnio rozpatrywanych przypadkach wprowadzimy ułamek

$$(4.47) \quad \frac{f'' - f'}{f'} = \frac{2 + \nu}{8\lambda^2 + 6(1 + \nu)} = \frac{2 + \nu}{6(1 + \nu)} \frac{1}{1 + \frac{4\lambda^2}{3(1 + \nu)}}$$

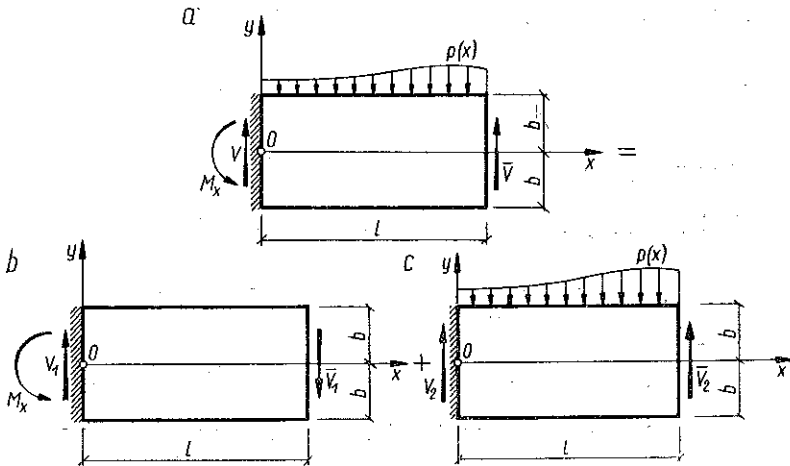
Zauważmy, że przy uwzględnieniu (4.38) uzyskujemy rezultaty nieco większe niż rezultaty zestawione w tabelicy 20, tak więc ostatnio rozpatrywane dwa sposoby utwierdzenia prowadzą do wyników różniących się nie więcej niż 5%, przy czym ugięcia są mniejsze w przypadku ostatnim.

Wobec uzyskanych rezultatów można przypuszczać, że ostatnio rozważany sposób utwierdzenia odpowiada najlepiej rzeczywistemu zjawisku fizycznemu, można również twierdzić, że rezultaty otrzymane na gruncie teorii wytrzymałości materiałów są wystarczająco dobre.

W przypadku działania wielu momentów lub sił skupionych wystarczy zastosować zasadę składania efektów.

4.2. Obciążenie rozłożone w sposób ciągły. Przejdziemy teraz do ogólnego przypadku obciążenia takiego jak na rysunku 47a. W przypadku tym do zagadnienia podejść można wprost (tak jak powyżej), można też sprowadzić je do innych zagadnień zbadanych wcześniej.

Przypadek obciążenia górnej powierzchni belki można rozłożyć na dwa prostsze: przypadek obciążenia siłą skoncentrowaną \bar{V}_1 na przekroju swobodnym belki (rys. 47b), przypadek zbadany w punkcie 4.1, oraz na przypadek obciążenia siłą



Rys. 47

skoncentrowaną $\bar{V}_2 = \bar{V}_1$ na przekroju wolnym oraz obciążeniem $p(x)$ na górnej powierzchni belki (rys. 47c). Siła skoncentrowana $\bar{V} = \bar{V}_1 = \bar{V}_2$ jest dobrana tak, że moment utwierdzenia M_x

$$(4.48) \quad M_x = \int_0^l p(x) x dx$$

znika w drugim przypadku utwierdzenia. Zatem

$$(4.49) \quad \bar{V} = \frac{M_x}{l}$$

Wobec tego w drugim z rozważanych przypadków obciążenia stan naprężeń jest identyczny ze stanem naprężeń, który otrzymujemy w przypadku belki podpartej swobodnie, poddanej działaniu tego samego obciążenia $p(x)$. Wobec tego można wykorzystać tu rezultaty uzyskane poprzednio.

Jeśli chodzi o stan odkształceń, to uzyskane rezultaty ogólne pozostają w mocy, przy czym należy określić ruch ciała sztywnego tak, żeby spełnione były warunki utwierdzenia.

Im mniejsza jest różnica pomiędzy rozkładami naprężeń stycznych na przekroju $x = l$ w tych dwu przypadkach obciążenia (różnica taka istnieje, mimo że siła \bar{V} jest taka sama) tym dokładniejsze są uzyskane rezultaty. To samo można powiedzieć w stosunku do poprawnego sposobu nałożenia warunków na naprężenia normalne. W obu przypadkach uzyskane rezultaty obowiązują w zakresie, w jakim stosowalna jest zasada St. Venanta.

Podaną metodę rachunkową wykorzystamy dla przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie (rys. 48). Stan naprężeń wyrazić można w postaci (1.24), (1.24'), gdzie

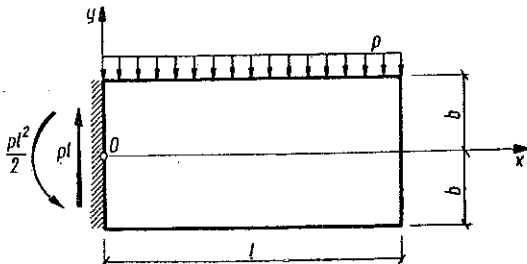
$$(4.50) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= 3p\lambda^2(1 - \xi^2)\eta, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y^E &= -\frac{p}{4}(1 + \eta)^2(2 - \eta), \\ \tau_{xy}^R &= -\frac{3}{2}p\lambda(1 - \eta^2)(1 - \xi), & \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Naprężenia i momenty na przekroju wyniosą (rys. 49):

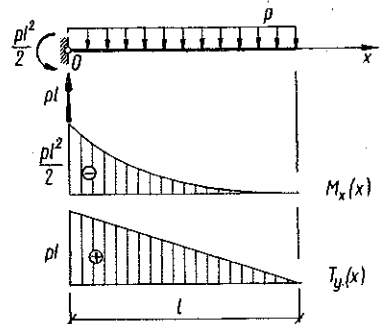
$$(4.51) \quad M_x(x) = -\frac{pl^2}{2}(1 - \xi)^2, \quad T_y(x) = pl(1 - \xi)$$

Warunki

$$(4.52) \quad \begin{aligned} x = 0, \quad y = 0: & \quad u = 0, \quad v = 0; \\ x = 0, \quad y = \pm b: & \quad u = 0 \end{aligned}$$



Rys. 48



Rys. 49

pozwalają nam zapisać przemieszczenia w postaci

$$(4.53) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{l} &= \frac{p}{2} \left\{ \left[2\lambda^2(\xi^2 - 3\xi + 3) + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} + \nu \right) - \frac{1}{2}(2 + \nu)\eta^2 \right] \xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(2 + \nu)(1 - \eta^2) \right\} \eta, \\ E \frac{v}{b} &= -\frac{p}{2} \left\{ 3 \left[\nu\lambda^2(1 - \xi)^2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\nu}{5} \right) \right] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \eta^2 \right\} \eta^2 - \\ &\quad - \frac{p}{2} \eta + p\lambda^2 \left\{ \lambda^2 \xi^2(4 - \xi) - \left[6\lambda^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{8}{5} + \nu \right) \right] \xi - (4 + 5\nu) \right\} \xi. \end{aligned}$$

Równanie zdeformowanej warstwy środkowej przyjmie postać

$$(4.54) \quad E \frac{v(\xi, 0)}{b} = p\lambda^2 \left\{ \lambda^2 \xi^2 (4 - \xi) - \left[6\lambda^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{8}{5} + \nu \right) \right] \xi - (4 + 5\nu) \right\} \xi,$$

wobec czego maksymalne ugięcie wyniesie

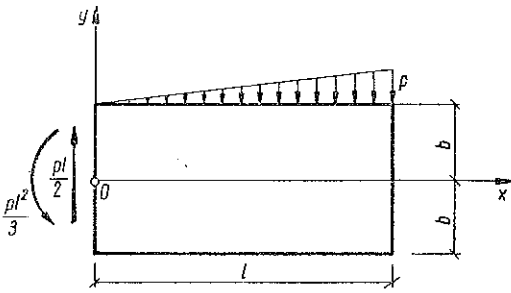
$$(4.55) \quad f = -v(1, 0) = \frac{pb}{E} \lambda^2 (3\lambda^2 + 1,6 + 3,5\nu).$$

Pierwszy składnik odpowiada ugięciu, które otrzymamy przy uwzględnieniu wpływu warunku zginającego

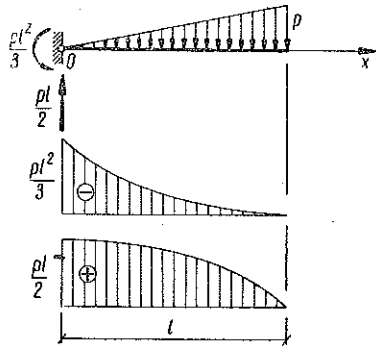
$$(4.56) \quad f_M = 3 \frac{pb}{E} \lambda^4$$

na gruncie teorii wytrzymałości materiałów.

Dla pozostałych przypadków utwierdzenia przeprowadzić można rozumowanie analogiczne.



Rys. 50



Rys. 51

Stan naprężeń wspornika poddanego obciążeniu trójkątnemu (rys. 50) znaleźć można wykorzystując związki (4.54) (dla belki swobodnie podpartej) oraz wzór (4.2) i (4.2'). Otrzymamy

$$(4.57) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= p\lambda^2 (1 - \xi)^2 (2 + \xi) \eta, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) \xi \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y^E &= -\frac{p}{4} (1 + \eta)^2 (2 - \eta) \xi, \\ \tau_{xy}^R &= -\frac{3p}{4} \lambda (1 - \xi^2) (1 - \eta^2), & \tau_{xy}^E &= \frac{p}{16\lambda} (1 - \eta^2) \left(\frac{1}{5} - \eta^2 \right). \end{aligned}$$

Sily i momenty na przekroju (rys. 51) określone będą wzorami

$$(4.58) \quad \begin{aligned} M_x(x) &= -\frac{pl^2}{6} (1 - \xi)^2 (2 + \xi), \\ T_y(x) &= \frac{pl}{2} (1 - \xi^2). \end{aligned}$$

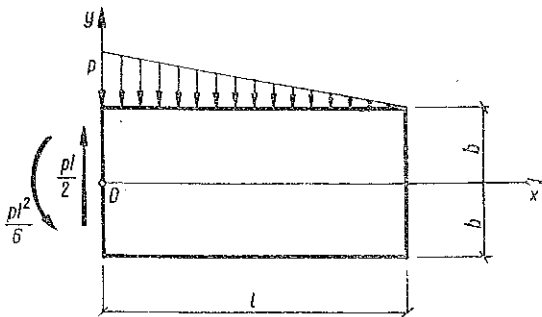
Aby otrzymać stan naprężeń wspornika poddanego obciążeniu trójkątnemu należy złożyć przypadek obciążenia rozłożonego równomiernie (rys. 52) z obciążeniem poprzednim. Otrzymamy zatem

$$(4.59) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= p\lambda^2 (1 - \xi)^3, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) (1 - \xi) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y^E &= -\frac{p}{4} (1 + \eta)^2 (2 - \eta) (1 - \xi), \\ \tau_{xy}^R &= \frac{3p}{4} \lambda (1 - \xi)^2 (1 - \eta^2), & \tau_{xy}^E &= -\frac{p}{16\lambda} (1 - \eta^2) \left(\frac{1}{5} - \eta^2 \right), \end{aligned}$$

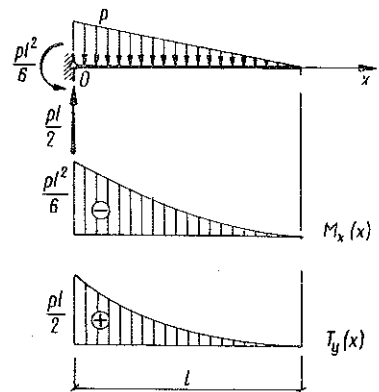
przy czym siły i momenty na przekrojach (rys. 53) wyniosą

$$(4.60) \quad M_{x'}(x)_s = -\frac{pl^2}{6} (1 - \xi)^3, \quad T_y(x) = \frac{pl}{2} (1 - \xi)^2.$$

Stan odkształceń otrzymać można w sposób analogiczny.



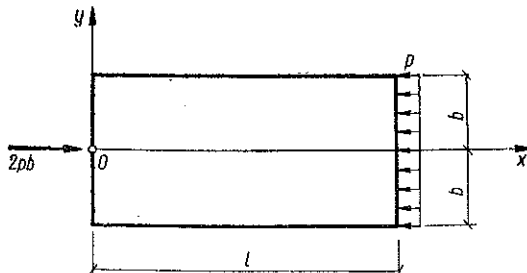
Rys. 52



Rys. 53

Jeśli chodzi o stan odkształceń i sposób rozpatrywania przekroju utwierdzonego, to wykorzystać można rezultaty uzyskane w p. 4.1. Wykorzystany tam aparat rachunkowy nie pozwala na rozważanie innych przypadków utwierdzenia doskonałego (obie składowe przemieszczenia znikają na całym przekroju).

4.3. Obciążenia na przekroju końcowym. Podobnie podejść można do zagadnień obciążenia na przekroju końcowym, na przykład do zagadnienia sił osiowych.



Rys. 54

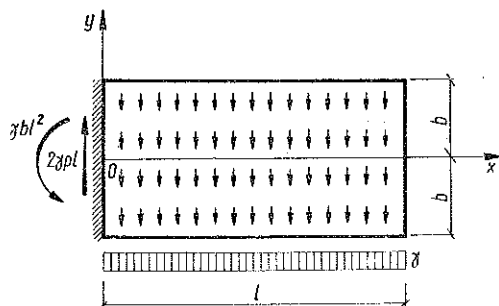
Weźmy zatem pod uwagę przypadek obciążenia normalnego rozłożonego równomiernie (rys. 54). Stan naprężeń określony będzie wzorami

$$(4.61) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^R = -p, & \sigma_x^E &= 0, \\ \sigma_y &= \sigma_y^R = \sigma_y^E = 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^R = \tau_{xy}^E = 0. \end{aligned}$$

Przypadek wspornika bardzo długiego (z teoretycznego punktu widzenia można go traktować jak pół-pas płaski elastyczny utwierdzony wzdłuż przekroju poprzecznego obciążonego tak jak na rys. 54) był badany przy pomocy ścisłych metod teorii sprężystości przez K. GIRKMANN, [2].

4.4. Obciążenie siłami masowymi. W analogiczny sposób badać można również niektóre elementarne przypadki obciążenia siłami masowymi. Przypadki takie często spotykane są w praktyce. Wykorzystuje się tu również rezultaty uzyskane w przypadku belki podpartej swobodnie.

Tak jak w przypadku belki podpartej swobodnie (p. 2.6), obciążenie siłami ciężkości (rys. 55) prowadzi do wyników analogicznych do rezultatów otrzymanych w przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie (przy czym naprężenie σ_y jest inne):



Rys. 55

$$(4.62) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= 6\gamma b \lambda^2 (1 - \xi^2) \eta, & \sigma_x^E &= \gamma b \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y^E &= -\frac{\gamma b}{2} (1 - \eta^2) \eta, \\ \tau_{xy}^R &= 3\gamma b \lambda (1 - \eta^2) (1 - \xi), & \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu warunków podparcia (4.52) wyrażenia określające przemieszczenia można napisać w postaci

$$(4.63) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{l} &= \gamma b \left\{ \frac{\lambda^2}{2} - \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) + \frac{1}{4} (2 + \nu) (3\eta^2 - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \xi \left[\frac{6}{5} + \nu - (2 + \nu) \eta^2 + \lambda^2 (4\xi^2 - 9\xi + 6) \right] \right\} \eta, \\ E \frac{v}{b} &= -\gamma b \left[3\nu \lambda^2 (1 - \xi)^2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{6}{5} \nu \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \eta^2 \right] \eta^2 + \\ &\quad + \gamma b \lambda^2 \left\{ 2\lambda^2 - \left(\frac{16}{5} + 5\nu \right) - 4\lambda^2 \xi (3 - \xi) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi) \left[2\lambda^2 (2\xi^2 - 2\xi - 1) - 3 \left(\frac{8}{5} + 3\nu \right) \right] \right\} \xi. \end{aligned}$$

Równanie warstwy środkowej odkształconej zapisać można w postaci

$$(4.64) \quad \begin{aligned} E \frac{v(\xi, 0)}{b} &= \gamma b \lambda^2 \left\{ 2\lambda^2 - \left(\frac{16}{5} + 5\nu \right) - 4\lambda^2 \xi (3 - \xi) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi) \left[2\lambda^2 (2\xi^2 - 2\xi - 1) - 3 \left(\frac{8}{5} + 3\nu \right) \right] \right\} \xi, \end{aligned}$$

a ugięcie maksymalne określone będzie

$$(4.65) \quad f = -v(1, 0) = \gamma b \lambda^2 (6\lambda^2 + 3,2 + 5\nu).$$

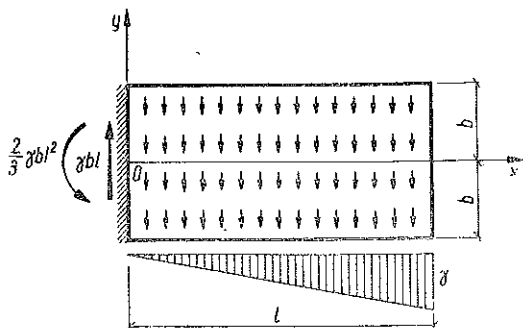
Pierwszy składnik prawej strony odpowiada wynikowi, który uzyskamy przy uwzględnieniu wpływu momentu zginającego

$$(4.66) \quad f_M = 6\gamma b \lambda^4$$

na gruncie teorii sprężystości.

W analogiczny sposób badać można również inne przypadki utwierdzenia.

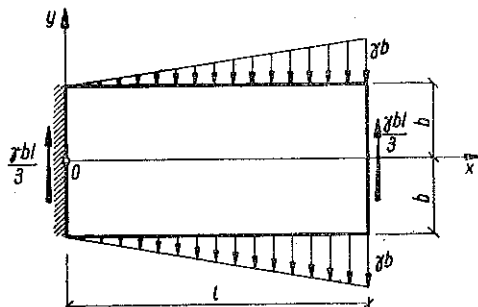
Innym, ważnym praktycznie przypadkiem obciążenia jest obciążenie siłami bezwładności, zmieniającymi się liniowo wzdłuż belki (siła trapezoidalna). Taki typ obciążenia znów można rozważać jako złożenie dwu innych obciążeń. Przypadek wspornika obciążonego stałą siłą bezwładności został zbadany uprzednio; należy zatem zbadać wspornik poddany działaniu siły masowej o rozkładzie trójkątnym (rys. 56). Rozważymy przypadek, w którym podstawa trójkąta odpowiada przekrojowi wolnemu belki, ponieważ w praktyce przypadek ten jest bardziej interesujący (oznaczymy maksimum gęstości sił masowych przez γ).



Rys. 56

Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie jest identyczne z zagadnieniem odpowiadającym obciążeniu ukazanemu na rys. 57, zbadanemu w punkcie 2.2. I w tym przypadku otrzymujemy stan naprężeń (1.24), (1.24'), gdzie

$$(4.67) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= 2\gamma b \lambda^2 (1 - \xi)^2 (2 + \xi) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, \\ \tau_{xy}^R &= -\frac{3\gamma b}{2} \lambda (1 - \xi^2) (1 - \eta^2), \\ \sigma_x^E &= \gamma b \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) \xi \eta, \\ \sigma_y^E &= -\gamma \frac{b}{2} (1 - \eta^2) \xi \eta, \\ \tau_{xy}^E &= \frac{\gamma b}{8\lambda} (1 - \eta^2) \left(\frac{1}{5} - \eta^2 \right). \end{aligned}$$



Rys. 57

Pewne rezultaty dla tego przypadku obciążenia podał również Al. Cișmigiu, [1].

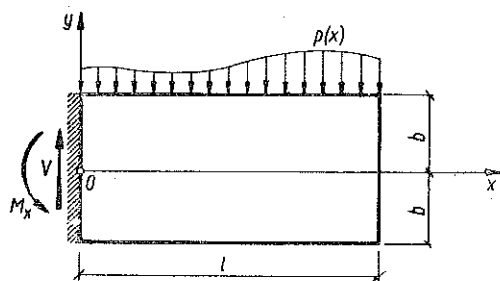
5. Wspornik. Rozwiązania przy zastosowaniu rozwinięć w szeregi

Aby omówić ogólnie zagadnienie wspornika wykorzystamy, podobnie jak w p. 3, rozwinięcia w szeregi Fouriera oraz oznaczenia wprowadzone w Dodatku ¹.

5.1. Obciążenie dowolne. Zbadamy poniżej przypadek wspornika poddanego obciążeniu dowolnemu.

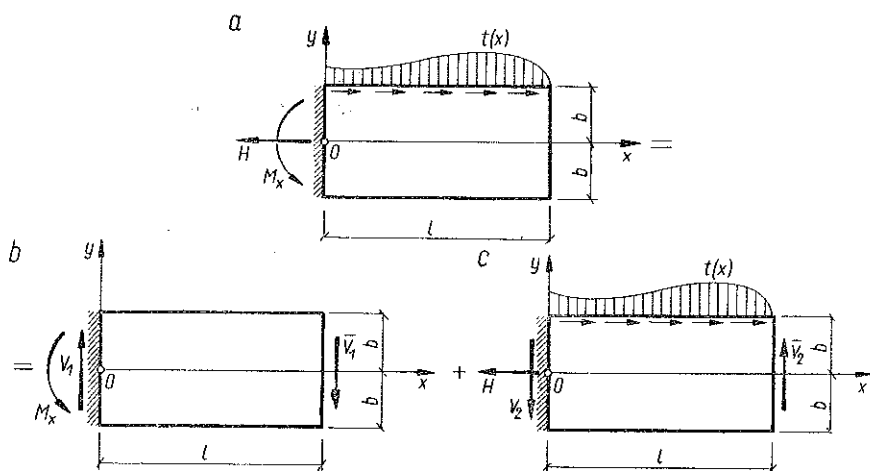
W przypadku obciążenia normalnego (rys. 58) wykorzystać można sformułowaną w p. 4.2 metodę rachunku oraz ogólne wyniki uzyskane dla belki podpartej swobodnie (p. 3.1).

Dla obciążenia stycznego (rys. 59a) wykorzystać można analogiczną metodę rachunku rozkładając takie obciążenie na obciążenie skoncentrowane na przekroju końcowym (rys. 59b) i na pewne obciążenie styczne (rys. 59c). Wyniki otrzymane w p. 3.1 dla belki podpartej swobodnie wykorzystać można również w tym ostatnim przypadku obciążenia. Należy jed-



Rys. 58

ynie określić obrót ciała sztywnego tak, aby spełnione były warunki utwierdzenia na przekroju $x = 0$. Nie można jednakże przy tym założyć, że przemieszczenie u znika w trzech punktach tego przekroju (co najwyżej w dwóch). Podamy teraz bezpośrednie rozwiązanie tego zagadnienia.



Rys. 59

Przyjmować będziemy, że obciążeniu poddana jest górna powierzchnia belki; przypadek obciążenia dolnej powierzchni badać można w sposób analogiczny. Układ współrzędnych oberzemy tak, jak w przypadku belki podpartej swobodnie i wykorzystamy notację p. 3.1.

¹ Pierwsza część pracy.

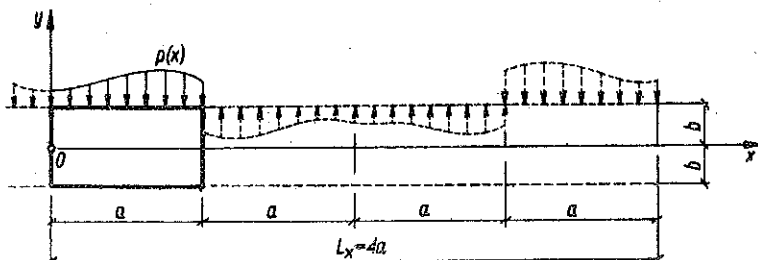
Rozważmy wspornik o długości l poddany obciążeniu normalnemu

$$(5.1) \quad p(x) = \sum_n b_n \cos a_n x,$$

gdzie

$$(5.1') \quad a_n = \frac{n\pi}{2l}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

a okres L_x wynosi $4l$ (rys. 60).



Rys. 60

Stan naprężeń obliczany na gruncie teorii wytrzymałości wyniesie

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{3y}{2b^3} \sum_n \frac{b_n}{\alpha_n^2} [(-1)^{(n-1)/2} a_n (l-x) - \cos a_n x] = \\ &= -\frac{24}{\pi^2} \lambda^2 \eta \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left[(-1)^{(n-1)/2} \frac{n\pi}{2} (1-\xi) - \cos a_n x \right], \end{aligned}$$

$$\sigma_y^R = 0,$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^R &= \frac{3(b^2 - y^2)}{4b^3} \sum_n \frac{b_n}{\alpha_n} [(-1)^{(n-1)/2} - \sin a_n x] = \\ &= \frac{3}{\pi} \lambda (1 - \eta^2) \sum_n \frac{b_n}{n} [(-1)^{(n-1)/2} - \sin a_n x]. \end{aligned}$$

Po nałożeniu warunków utwierdzenia

$$(5.3) \quad x = 0: \quad \theta = 0, \quad v_M = 0$$

i uwzględnieniu działania siły poprzecznej otrzymamy metodami tej teorii przemieszczenia następujące

$$(5.4) \quad E \frac{v_R(x)}{b} = -\frac{19,2(1+\nu)}{\pi^2} \lambda^2 \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left\{ \left[1 + \frac{20\lambda^2}{(1+\nu)\pi^2 n^2} \right] (1 - \cos a_n x) - \frac{\pi}{2} (-1)^{(n-1)/2} n\xi \left[1 + \frac{\lambda^2(3-\xi)\xi}{1,2(1+\nu)} \right] \right\},$$

zatem dla $\nu = 1/6$

$$(5.5) \quad E \frac{v_R(x)}{b} = -2,27 \lambda^2 \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left\{ \left(1 + 1,74 \frac{\lambda^2}{n^2} \right) (1 - \cos a_n x) - \right. \\ \left. - 1,57 (-1)^{(n-1)/2} n \xi [1 + 0,715 \lambda^2 (3 - \xi) \xi] \right\}.$$

Szereg ten jest zbieżny szybko i do praktycznych obliczeń wystarczy brać małą ilość składników.

Ugięcie maksymalne (w przekroju końcowym) można zapisać w postaci

$$(5.6) \quad f_R = \frac{19,2 (1+\nu)}{\pi^2} \lambda^2 \frac{b}{E} \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left\{ 1 + \frac{20 \lambda^2}{(1+\nu) \pi^2 n^2} - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} (-1)^{(n-1)/2} n \left[1 + \frac{\lambda^2}{0,6(1+\nu)} \right] \right\}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

więc przy $\nu = 1/6$

$$(5.7) \quad f_R = 2,27 \lambda^2 \frac{b}{E} \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left[1 + 1,74 \frac{\lambda^2}{n^2} - 1,57 (-1)^{(n-1)/2} n (1 + 1,43 \lambda^2) \right].$$

Przemieszczenie w kierunku osi Ox wynosi

$$(5.8) \quad E \frac{u_R}{l} = -\frac{48}{\pi^3} \lambda^2 \eta \sum_n \frac{b_n}{n^3} \left[\frac{\pi^2}{8} (-1)^{(n-1)/2} n^2 (2^\eta - \xi) \xi - \sin a_n x \right].$$

Znika ono w przekroju utwierdzonym.

Na gruncie teorii sprężystości dochodzimy do funkcji Airy'ego

$$(5.9) \quad F = -\frac{1}{4} \eta [3\xi + \eta^2 (1 - \xi)] \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{a_n} - \\ - \frac{1}{2} \sum_n \frac{b_n}{a_n^2} \left[\frac{\Psi_7(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_2(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x.$$

Stan naprężeń określony będzie zatem wzorem

$$(5.10) \quad \sigma_x = -\frac{12}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) \eta \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \\ + \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[\frac{\Psi_9(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_4(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x, \\ \sigma_y = \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[\frac{\Psi_7(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_2(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x, \\ \tau_{xy} = \frac{3\lambda}{\pi} (1 - \eta^2) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \\ + \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[\frac{\Psi_8(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_3(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \sin a_n x,$$

a stan odkształceń zapiszemy w postaci

$$(5.11) \quad E \frac{u - (-\omega_0 y + u_0)}{l} = \frac{1}{2\pi} \{ 6 [2\lambda^2 (1 - \xi)^2 + 1 + \nu] - (2 + \nu) \eta^2 \} \eta \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{b_n}{n} \left[\frac{\Psi_{9-7}(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_{4-2}(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \sin a_n x,$$

$$E \frac{v - (\omega_0 x + v_0)}{b} = \frac{2}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) [4\lambda^2 (1 - \xi)^2 + 3\nu\eta^2] \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} - \frac{2\lambda}{\pi} \sum_n \frac{b_n}{n} \left[\frac{\Psi_{6-8}(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_{1-3}(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x,$$

przy czym ruch ciała sztywnego określony jest warunkami podparcia.

Przyjmując warunki

$$(5.12) \quad x = 0, \quad y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0$$

znajdziemy:

$$(5.13) \quad u_0 = 0, \\ v_0 = -\frac{8}{\pi} \lambda^2 \frac{b}{E} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \frac{2}{\pi} \lambda \frac{b}{E} \sum_n \frac{b_n}{n} \frac{\Psi_{1-3}(0)}{\psi_1(n\lambda')}.$$

Obrót ciała sztywnego ω_0 określony jest przez jeden z warunków utwierdzenia. Tak więc warunek

$$(5.14) \quad x = 0, \quad y = 0: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

prowadzi do

$$(5.15) \quad \omega_0 = \frac{12}{\pi E} \lambda^3 \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n}.$$

Podobnie warunek

$$(5.14'') \quad x = 0, \quad y = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

daje wzór

$$(5.15') \quad \omega_0 = \frac{6}{\pi E} \lambda (2\lambda^2 + 1 + \nu) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n}.$$

Również

$$(5.14''') \quad x = 0, \quad y = \pm b: \quad u = 0$$

pozwala napisać

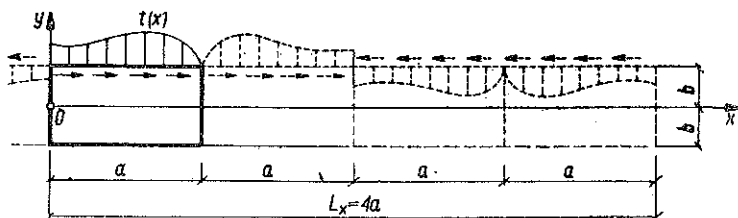
$$(5.15'') \quad \omega_0 = \frac{\lambda}{\pi E} (12\lambda^2 + 4 + 5\nu) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n}.$$

Stan naprężeń jest zatem całkowicie określony.

Rozważmy wspornik (rys. 61) o długości l poddany obciążeniu stycznemu

$$(5.16) \quad t(x) = \sum_n a_n \sin a_n x$$

o tym samym okresie $L_x = 4l$.



Rys. 61

Stan naprężeń obliczony na gruncie teorii wytrzymałości (ściskanie mimośrodowe) zapisać można w postaci

$$(5.17) \quad \sigma_x^R = \frac{2\lambda}{\pi} (1 + 3\eta) \sum_n \frac{a_n}{n} \cos a_n x, \quad \sigma_y^R = 0, \quad \tau_{xy}^R = 0.$$

W analogiczny sposób obliczyć można przemieszczenia.

Na gruncie teorii sprężystości wprowadzamy funkcję Airy'ego

$$(5.18) \quad F = \frac{1}{2} \sum_n \frac{a_n}{a_n^2} \left[\frac{\Psi_3(a_n y)}{\varphi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_8(a_n y)}{\kappa_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x.$$

Stan naprężeń określają związki

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{2} \sum_n a_n \left[\frac{\Psi_5(a_n y)}{\varphi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_{10}(a_n y)}{\kappa_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x, \\ \sigma_y &= -\frac{1}{2} \sum_n a_n \left[\frac{\Psi_3(a_n y)}{\varphi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_8(a_n y)}{\kappa_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \sum_n a_n \left[\frac{\Psi_4(a_n y)}{\varphi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_9(a_n y)}{\kappa_1(n\lambda')} \right] \sin a_n x; \end{aligned}$$

natomiast stan odkształceń — związki

$$(5.20) \quad \begin{aligned} E \frac{u - (-\omega_0 y + u_0)}{l} &= -\frac{1}{\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \left[\frac{\Psi_{5-3}(a_n y)}{\varphi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_{10-8}(a_n y)}{\kappa_1(n\lambda')} \right] \sin a_n x, \\ E \frac{v - (\omega_0 x + v_0)}{b} &= \frac{2\lambda}{\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \left[\frac{\Psi_{2-4}(a_n y)}{\varphi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_{7-9}(a_n y)}{\kappa_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x, \end{aligned}$$

a ruch ciała sztywnego wyznaczają warunki utwierdzenia.

Każdy z poprzednio wprowadzonych warunków utwierdzenia prowadzi do

$$(5.21) \quad \begin{aligned} u_0 &= 0, & \omega_0 &= 0, \\ v_0 &= -\frac{2\lambda}{\pi} \frac{b}{E} \sum_n \frac{a_n}{n} \frac{\Psi_{7-9}(0)}{\chi_1(n\lambda')}, \end{aligned}$$

wobec czego stan odkształceń jest wyznaczony całkowiec.

5.2. Stan naprężeń i odkształceń wspornika. Przeprowadzimy poniżej jakościowe i ilościowe badania stanu naprężeń i stanu odkształceń wspornika w przypadku dowolnego obciążenia. Ograniczymy się tylko do obciążeń normalnych.

Naprężenie normalne σ_x znika dla $x = l$. W przekroju normalnym $x = \text{const}$ naprężenie to zmienia się liniowo (na gruncie teorii wytrzymałości) lub krzywoliniowo (na gruncie teorii sprężystości). W odróżnieniu od wyników teorii wytrzymałości, w której warstwa neutralna pokrywa się z warstwą środkową belki, w teorii sprężystości otrzymujemy

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \sigma_x(x, 0) &= \frac{1}{2} \sum_n b_n \frac{\Psi_9(0)}{\chi_1(n\lambda')} \cos a_n x = \\ &= \sum_n b_n \frac{\text{sh } a_n b - a_n b \text{ch } a_n b}{\text{sh } 2a_n b + 2a_n b} \cos a_n x. \end{aligned}$$

Warstwa neutralna będzie zatem na ogół leżała powyżej warstwy środkowej, co łatwo stwierdzić na przykładach.

Naprężenia maksymalne na warstwach zewnętrznych wyniosą

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \sigma_x(x, b) &= -\frac{12}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[\frac{\chi_1(n\lambda')}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\varphi_1(n\lambda')}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x = p(x) - \\ &= -\frac{12}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} - \sum_n b_n \frac{2a_n b}{\text{sh } 2a_n b + 2a_n b} \cos a_n x + \\ &\quad + \sum_n b_n \frac{2a_n b}{\text{sh } 2a_n b - 2a_n b} \cos a_n x, \\ \sigma_x(x, -b) &= \frac{12}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[\frac{\chi_1(n\lambda')}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\varphi_1(n\lambda')}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos a_n x = \\ &= \frac{12}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} - \sum_n b_n \frac{2a_n b}{\text{sh } 2a_n b + 2a_n b} \cos a_n x - \\ &\quad - \sum_n b_n \frac{2a_n b}{\text{sh } 2a_n b - 2a_n b} \cos a_n x. \end{aligned}$$

Szeregi występujące w tym wzorze są szybko zbieżne. Biorąc pod uwagę początkowe składniki tych rozwinięć możemy napisać (dla przekroju utwierdzenia $x = 0$ oraz $\lambda = 2$, co jest granicą stosowności elementarnych metod rachunkowych teorii sprężystości):

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \sigma_x(0, b) &= -5,32 b_1 + 6,56 b_3 - 2,00 b_5 + 3,19 b_7 - 0,70 b_9 + \dots, \\ \sigma_x(0, -b) &= 5,36 b_1 - 6,26 b_3 + 2,74 b_5 - 2,27 b_7 + 1,68 b_9 - \dots \end{aligned}$$

Metody wytrzymałości materiałów dają tu

$$(5.24') \quad \sigma_x^R(0, \pm b) = \mp (5,56 b_1 - 6,18 b_3 + 2,66 b_5 - 2,37 b_7 + 1,46 b_9 - \dots),$$

co pozwala na porównanie tych wyników dla różnych przypadków obciążenia.

Naprężenie normalne σ_y znika na przekroju $x = l$, co nie jest faktem poprawnym. Nieprawidłowość ta ma miejsce, ponieważ rozważana funkcja ma nieciągłość pierwszego rodzaju w tym przekroju: suma szeregu w tym punkcie jest średnią prawostronnej i lewostronnej granicy funkcji w tym punkcie. W dowolnym przekroju normalnym $x = \text{constant}$, σ_y zmienia się krzywoliniowo malejąc od $p(x)$ do 0.

Dla warstwy środkowej mamy

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= \frac{1}{2} \sum_n b_n \frac{\Psi_7(0)}{\chi_1(n\lambda')} \cos a_n x = \\ &= \sum_n b_n \frac{\text{sh } a_n b + a_n b \text{ ch } a_n b}{\text{sh } 2a_n b + 2a_n b} \cos a_n x. \end{aligned}$$

Naprężenie τ_{xy} znika na górnej i dolnej powierzchni belki przyjmując wartość bliską maksymalnej w warstwie środkowej ($y = 0$), dla której

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= \frac{3\lambda}{\pi} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} + \frac{1}{2} \sum_n b_n \frac{\Psi_3(0)}{\psi_1(n\lambda')} \sin a_n x = \\ &= \frac{3\lambda}{\pi} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} - \sum_n b_n \frac{a_n b \text{ sh } a_n b}{\text{sh } 2a_n b - 2a_n b} \sin a_n x. \end{aligned}$$

W przekroju utwierdzenia maksymalne naprężenia styczne określa wzór

$$(5.27) \quad \tau_{xy}(0, 0) = \frac{3\lambda}{\pi} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n}.$$

Wynik ten pokrywa się z wynikiem uzyskanym na gruncie teorii wytrzymałości.

Jeśli chodzi o stan odkształceń to zajmijmy się przede wszystkim przemieszczeniem v przy warunkach podparcia w postaci (5.12), (5.16).

Równanie warstwy środkowej odkształconej będzie miało postać

$$(5.28) \quad E \frac{v(x, 0)}{b} = \frac{2\lambda^2}{\pi} \left\{ (12\lambda^2 + 5\nu) \xi + 4(1 - \xi) [\lambda^2(1 - \xi)^2 - 1] \times \right. \\ \left. \times \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} \right\} + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_n \frac{b_n}{n} \frac{\Psi_{1-3}(0)}{\psi_1(n\lambda')} (1 - \cos a_n x).$$

Znajdziemy również ugięcia maksymalne ($x = l$)

$$(5.29) \quad f = -\frac{\lambda}{\pi} (12\lambda^2 + 5\nu) \frac{l}{E} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} - \frac{1}{\pi} \frac{l}{E} \sum_n \frac{b_n}{n} \frac{\Psi_{1-3}(0)}{\psi_1(n\lambda')},$$

przy czym dla $\nu = 1/6$ i $\lambda = 2$

$$(5.30) \quad f = -31,1 \frac{l}{E} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n} - 0,637 \frac{l}{E} \sum_n \frac{b_n}{n} \frac{1 + 0,583 a_n b \operatorname{th} a_n b}{\operatorname{sh} a_n b - \frac{a_n b}{\operatorname{ch} a_n b}}.$$

Metodami teorii wytrzymałości otrzymujemy natomiast

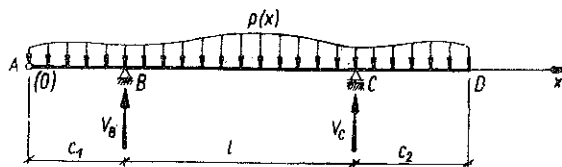
$$(5.31) \quad f_R = 2,27 \frac{l}{E} \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left[1 + \frac{6,96}{n^2} - 10,56 (-1)^{(n-1)/2} n \right],$$

co pozwala na przeprowadzenie w przypadku wspornika rozważań analogicznych do przeprowadzonych już w przypadku belki podpartej swobodnie. Rezultaty są analogiczne.

6. Belka prosta wspornikowa. Belki Gerbera

Wykorzystane powyżej metody rachunkowe pozwalają również na określenie stanu naprężeń i odkształceń belki wspornikowej lub belek Gerbera.

6.1. Omówienie zagadnienia w przypadku belek wspornikowych. Badanie belki ze wspornikami można przeprowadzić dwoma różnymi sposobami. Można bowiem badać belkę odcinkami (rys. 62), oddzielnie części AB , BC i CD . Połączenie tych trzech

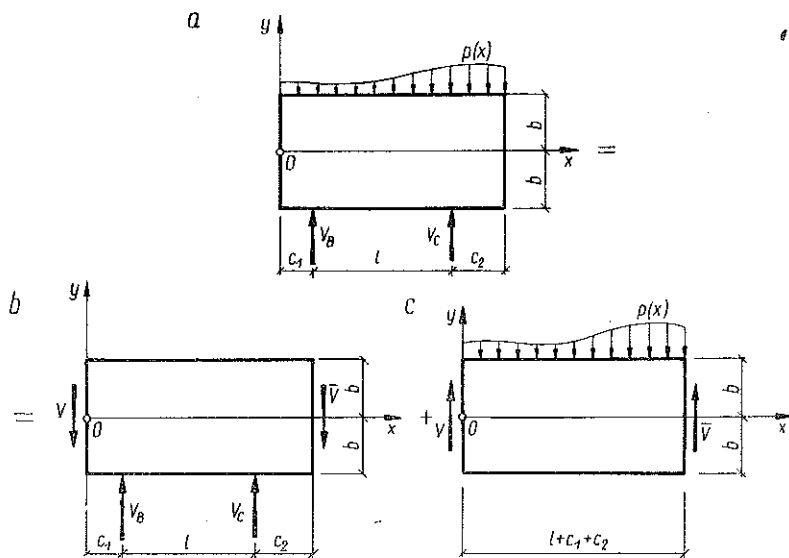


Rys. 62

odcinków uzyskujemy nakładając warunek, że obroty przekrojów podpartych są te same z prawej i lewej strony.

Można również rozłożyć dany przypadek obciążenia (rys. 63a) na dwa inne: obciążenie siłami lub momentami skupionymi (ewentualnie rozłożonymi równomiernie w przypadku podpór szerokich), odpowiadającymi podporom B i C dla

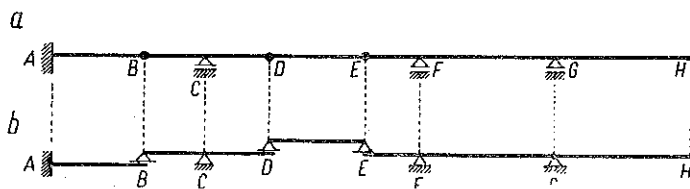
belki podpartej w A i D (rys. 63b), oraz na przypadek obciążenia $p(x)$ działającego na swobodnie podpartą belkę o długości $(l+c_1+c_2)$ (rys. 63c). Można zatem wykorzystać wyniki otrzymane dla belki podpartej swobodnie, dotyczące zarówno stanu naprężeń jak i stanu odkształceń.



Rys. 63

W ten sposób wprowadza się oczywiście pewne przybliżenie, w granicach zasady Saint Venanta, ponieważ rozkłady naprężeń na przekrojach końcowych będą różne dla obciążeń w postaci 63b i 63c (równe są jedynie siły i momenty na przekroju).

6.2. Omówienie zagadnienia w przypadku belek Gerbera. Na rysunku 64a pokazana jest belka Gerbera skonstruowana z belek wspornikowych BCD i $EFGH$ oraz wspornika AB jako belek niosących, jak również swobodnie podpartej belki DE



Rys. 64

jako belki niezależnej. W przekrojach B , D i E części belki są połączone między sobą przegubowo i mogą obracać się względem siebie bez wytwarzania momentu zginającego. Na rysunku 64b pokazano, jak można w sposób schematyczny rozważać podparcie jednej części belki przez inne. Schemat ten daje jednocześnie możliwość wykonania odpowiednich rachunków.

Wszystkie omówione poprzednio zagadnienia znajdują zastosowanie w przypadku belek złożonych. Występujące problemy specjalne należą już do mechaniki budowli i nie mieszczą się w ramach niniejszej pracy.

7. Zasada wzajemności przemieszczeń dla belek prostych

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń i pracy mechanicznej, wyprowadzone przez BETTIEGO oraz w szczególnym przypadku udowodnione niezależnie przez J. C. MAXWELLA, zachodzi ogólnie dla dowolnego ciała sprężystego. W przypadku szczególnym, w którym ciało sprężyste poddane jest działaniu obciążenia skupionego S_i w punkcie i oraz obciążenia skupionego S_j w punkcie j (S_i, S_j mogą być zarówno siłami jak i momentami skupionymi a punkty i, j leżą na powierzchni ciała) napisać można, zgodnie z twierdzeniem Bettiego, związek

$$(7.1) \quad S_i \delta_{ij} = S_j \delta_{ji},$$

gdzie δ_{ij} jest przemieszczeniem (gdy S_i jest siłą) lub obrotem (jeśli S_i jest momentem), przy czym δ_{ij} jest wynikiem działania S_j w kierunku, w którym działa S_i . Przyjmujemy przy tym, że obciążenie S_j jest jednostkowe. Jeśli przyjąć S_i równe S_j (gdy obciążenia zewnętrzne mają różny charakter, równość ta ma charakter wyłącznie numeryczny, nie ma zgodności wymiarów), to otrzymujemy twierdzenie Maxwella

$$(7.2) \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

W ramach metod uproszczonych teorii wytrzymałości materiałów obliczanie stanu odkształceń belki sprowadza się do obliczania odkształceń jej warstwy środkowej, przy czym przyjmuje się, że obciążenia zewnętrzne działają bezpośrednio na tę warstwę. Wymienione powyżej twierdzenia o wzajemności stosowalne są w tym przypadku, ponieważ dzięki uproszczeniom i przybliżeniom wprowadzonym w teorii wytrzymałości spełnione są założenia tych twierdzeń.

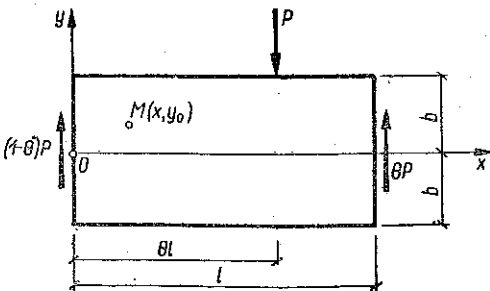
Znajdziemy poniżej, wykorzystując wcześniejszą pracę, [9], warunki, przy których w przypadkach belki prostej podpartej swobodnie i wspornika twierdzenia (7.1) i (7.2) są spełnione nie tylko w ramach teorii wytrzymałości ale i na gruncie teorii sprężystości. W tym celu znajdziemy pewne związki zachodzące w przypadkach tych belek.

7.1. Belka podparta swobodnie. Rozważmy belkę podpartą swobodnie obciążoną siłą normalną skupioną P w odległości θl od lewej podpory (rys. 65). Obciążenie to można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$(7.3) \quad p(x) = - \frac{2P}{l} \sum_n \sin n\theta\pi \sin \gamma_n x$$

przy oznaczeniach (3.3). Zatem

$$(7.3') \quad a_n = - \frac{2P}{l} \sin n\theta\pi.$$



Rys. 65

Wzory (3.18) dają stan naprężeń w postaci

$$(7.4) \quad \sigma_x = -\frac{P}{l} \sum_n \left[\frac{\Phi_9(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_4(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin n\theta\pi \sin n\xi\pi,$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{l} \sum_n \left[\frac{\Phi_7(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_2(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin n\theta\pi \sin n\xi\pi,$$

$$(7.4') \quad \tau_{xy} = \frac{P}{l} \sum_n \left[\frac{\Phi_8(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_3(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin n\theta\pi \cos n\xi\pi.$$

Dla ustalonej współrzędnej y_0 naprężenia normalne zależą od położenia siły skoncentrowanej P i od współrzędnej zredukowanej $\xi = x/l$

$$(7.5) \quad \sigma_x = \sigma_x(\theta, \xi), \quad \sigma_y = \sigma_y(\theta, \xi).$$

Zauważmy, że zachodzą związki

$$(7.6) \quad \sigma_x(\theta, \xi) = \sigma_x(\xi, \theta), \quad \sigma_y(\theta, \xi) = \sigma_y(\xi, \theta).$$

Oznacza to, że dla $y = y_0 = \text{const}$ naprężenia normalne σ_x^{ij} , σ_y^{ij} w pewnym przekroju normalnym i , będące wynikiem siły skoncentrowanej P_j działającej w przekroju j są równe naprężeniom normalnym σ_x^{ji} , σ_y^{ji} występującym w przekroju j pod wpływem siły skoncentrowanej P_i działającej w przekroju i — jeśli tylko $P_i = P_j$. Można więc napisać ogólnie

$$(7.7) \quad P_i \sigma_x^{ij} = P_j \sigma_x^{ji}, \quad P_i \sigma_y^{ij} = P_j \sigma_y^{ji}.$$

Analogiczne twierdzenie o wzajemności nie zachodzi dla naprężeń stycznych. Stan odkształceń określony będzie wzorem

$$(7.8) \quad E(u - u_0) = \frac{P}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \left[\frac{\Phi_{9-7}(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{4-2}(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin n\theta\pi \cos n\xi\pi,$$

$$E v = -\frac{P}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \left[\frac{\Phi_{6-8}(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{1-3}(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin n\theta\pi \sin n\xi\pi$$

przy założeniu, że belka podparta jest swobodnie w środkach przekrojów końcowych. Przesunięcie ciała sztywnego u_0 określone jest przez założenie, że jedna z podpór nie jest przesuwana (odpowiednie przesunięcie u musi być zerem).

Zauważmy, że dla przesunięcia v zachodzi taka sama własność wzajemności (ale nie dla przesunięcia u). Można zatem napisać dla przesunięć dwu punktów warstwy $y = y_0 = \text{const}$ związek

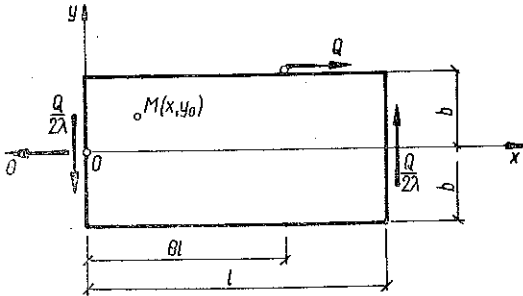
$$(7.9) \quad P_i v_{ij} = P_j v_{ji},$$

przy czym oznaczenia mają sens analogiczny jak w przypadku wielkości δ_{ij} , δ_{ji} . Zauważmy również, że dla górnej warstwy belki związek ten pokrywa się z twierdzeniem Bettiego, a dla warstwy środkowej odpowiada interpretacji tego twierdzenia

nia, którą wprowadza się w ramach teorii wytrzymałości materiałów. Znajdujemy zatem poprawne uzasadnienie dla stosowania metod wytrzymałościowych, w tym przypadku podparcia i utwierdzenia.

Związki (7.7) wykazują równocześnie, że przy $P_i = P_j = 1$ równania (7.4) określają linię wpływu naprężeń normalnych w przekroju o odciętej θl , przy sile normalnej, skoncentrowanej przebiegającej górną powierzchnię belki. Analogiczną uwagę zrobić można w stosunku do przemieszczeń v .

Inne przypadki obciążenia badać można w sposób analogiczny.



Rys. 66

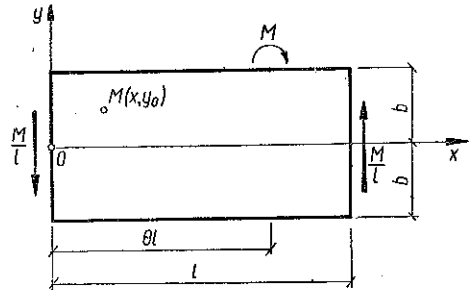
W przypadku belki podpartej swobodnie, poddanej działaniu siły stycznej skoncentrowanej Q , przyłożonej w punkcie odległym o θl ($0 \leq \theta \leq 1$) od lewego końca belki (rys. 66), dochodzimy do związków wzajemności

$$(7.10) \quad Q_i \tau_{xy}^{ij} = Q_j \tau_{xy}^{ji},$$

przy czym oznaczenia wprowadzone są w sposób analogiczny.

Zauważmy, że taki związek wzajemności nie zachodzi dla naprężeń normalnych i że nie można również napisać związków tego typu dla żadnej ze składowych przemieszczenia (nie zachodzi twierdzenie Bettiego).

W przypadku belki podpartej swobodnie, obciążonej momentem skoncentrowanym M , przyłożonym w punkcie odległym o θl ($0 \leq \theta \leq 1$) od lewej podpory (rys. 67), znajdujemy następujący związek wzajemności:



Rys. 67

$$(7.11) \quad M_i \tau_{xy}^{ij} = M_j \tau_{xy}^{ji}.$$

Związki tego typu nie zachodzą ani dla naprężeń normalnych, ani dla składowych przemieszczenia.

7.2. Wspornik. Rozważmy wspornik obciążony siłą normalną skoncentrowaną P , przyłożoną w odległości θl ($0 \leq \theta \leq 1$) od lewej podpory (rys. 68)

$$(7.12) \quad p(x) = -\frac{2P}{l} \sum_n \cos \frac{n}{2} \theta \pi \cos a_n x,$$

wobec czego

$$(7.12') \quad b_n = -\frac{2P}{l} \cos \frac{n}{2} \theta \pi,$$

to stan naprężeń znajdziemy w postaci

$$(7.13) \quad \sigma_x = \frac{24}{\pi} \lambda^2 (1 - \xi) \eta \frac{P}{l} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n} \cos \frac{n}{2} \theta \pi -$$

$$- \frac{P}{l} \sum_n \left[\frac{\Psi_9(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_4(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos \frac{n}{2} \theta \pi \cos \frac{n}{2} \xi \pi,$$

$$\sigma_y = - \frac{P}{l} \sum_n \left[\frac{\Psi_7(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_2(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos \frac{n}{2} \theta \pi \cos \frac{n}{2} \xi \pi,$$

$$(7.13') \quad \tau_{xy} = - \frac{6\lambda}{\pi} (1 - \eta^2) \frac{P}{l} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n} \cos \frac{n}{2} \theta \pi -$$

$$- \frac{P}{l} \sum_n \left[\frac{\Psi_8(a_n y)}{\chi_1(n\lambda')} + \frac{\Psi_3(a_n y)}{\psi_1(n\lambda')} \right] \cos \frac{n}{2} \theta \pi \sin \frac{n}{2} \xi \pi.$$

Zauważmy, że dla ustalonej współrzędnej $y = y_0$ dla stałej wielkości siły skoncentrowanej P można napisać

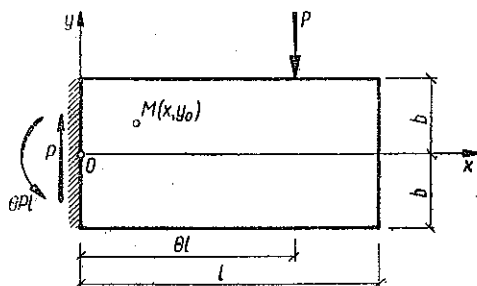
$$(7.14) \quad \sigma_y(\theta, \xi) = \sigma_y(\xi, \theta),$$

skąd wynika, że

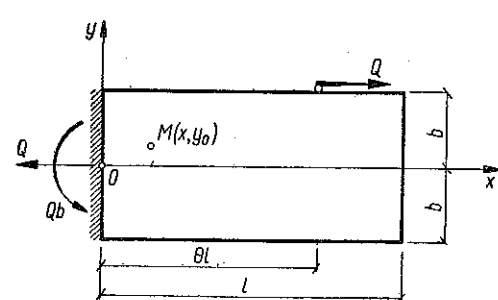
$$(7.15) \quad P_i \sigma_y^{ij} = P_j \sigma_y^{ji}.$$

Twierdzenie podobnego typu nie zachodzi dla innych składowych tensora naprężeń (zachodzi jedynie jeszcze dla σ_x w warstwie środkowej $y = 0$). Związków tego typu nie można również napisać dla przemieszczeń.

Związek (7.15) pokazuje, przy ($P_i = P_j = 1$), że drugie z równań (7.13) określa linię wpływu naprężenia normalnego σ_y w przekroju o odciętej θl przy sile normalnej skoncentrowanej, przebiegającej górną powierzchnię belki.



Rys. 68



Rys. 69

W przypadku wspornika obciążonego siłą styczną Q , przyłożoną w punkcie odległym o θl ($0 \leq \theta \leq 1$) od lewej podpory belki (rys. 69), uzyskać można związek wzajemności

$$(7.16) \quad Q_i \tau_{xy}^{ij} = Q_j \tau_{xy}^{ji}$$

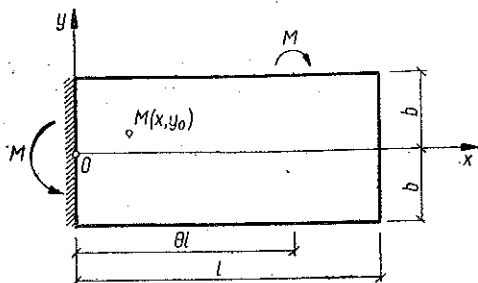
dla naprężeń stycznych oraz do związku wzajemności

$$(7.17) \quad Q_i u_{ij} = Q_j u_{ji}$$

dla składowej u przemieszczenia. Dla przemieszczeń górnej warstwy zewnętrznej belki związek ten pokrywa się z twierdzeniem Betti'ego, a dla przemieszczeń warstwy

środkowej odpowiada interpretacji tego twierdzenia, przyjmowanej w teorii wytrzymałości materiałów.

Żadnych związków tego typu nie można napisać w przypadku wspornika obciążonego momentem skoncentrowanym M , przyłożonym w odległości θl ($0 \leq \theta \leq 1$) od lewej podpory belki (rys. 70).



Rys. 70

Zbadaliśmy powyżej dwa możliwe przypadki belek izostatycznych złożonych z jednego odcinka. W analogiczny sposób można przeprowadzić rozważania dotyczące belek izostatycznych złożonych z wielu odcinków (belki wspornikowe, belki Gerbera itd).

Rzeczą interesującą jest, że ta postać twierdzenia Bettiego, którą stosuje się w teorii wytrzymałości, nie jest prawdziwa w teorii sprężystości. W przypadkach, w których twierdzenie to jest spełnione w ramach teorii sprężystości, przyjmie ono nieco ogólniejszą postać. Zauważmy również, że metoda rachunkowa zastosowana powyżej jest też metodą w pewnym stopniu przybliżoną. Wynika to z faktu, że warunki zostały nałożone w sposób globalny na przekrojach końcowych oraz że zastosowano zasadę Saint Venanta.

Literatura cytowana w tekście

- [1] AL. CISMIGIU, *Rigiditatea consolelor plane de lungime medie, acționate de forțe orizontale de volum (masice)*, Bul. științ. Inst. constr. București, 1 (1954), 79.
- [2] K. GIRKMANN, *Geschweisster Anschluss eines zugbeanspruchten Flachstabes bei behinderter Verformung*, Oesterr. Ing.-Archiv, 2-3, 9 (1955), 118.
- [3] R. L'HERMITE, *Problèmes non résolus en résistance de matériaux*, C. Rend. des recherches des Lab. du bat. et des tr. publ., 21, 1954.
- [4] A. С. КАЛМАНОВ, *К решению задачи о плоском напряжении в состоянии прямоугольной пластинки*, Констр. и мат. в городском строительстве, 6 (1950), 70.
- [5] A. С. КАЛМАНОВ, *Строительная механика*, Машстройиздат, Москва 1950.
- [6] A. С. КАЛМАНОВ, *Расчет балок-стенки*, Гостехиздат, Москва 1956.
- [7] A. С. КАЛМАНОВ, *Приближенный метод расчета балок большой высоты*, Исследования по теории сооружений, 7 (1957), 337.
- [8] P. P. TEODORESCU, *Calculul grinzilor pereți cu o singură deschidere în cas general de rezemare și încărcare*, Ed. Min. înv., București, 1955.
- [9] P. P. TEODORESCU, *Relații de reciprocitate în cazul grinzilor drepte*, An. Univ. «C. I. Parhon» s. Științele naturii, Mat.-Fizică, 25, 9 (1960), 203; *Relations de réciprocité dans le cas des poutres droites*, Rev. de Méc. appl., 5, 6 (1961), 359.
- [10] P. P. TEODORESCU, *Sur le calcul des poutres-paraïs encastrées. I. Le rectangle plan élastique*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., 7, 9 (1961), 391.
- [11] P. P. TEODORESCU, *Sur le calcul des poutres-paraïs encastrées. III. Le quart de plan élastique. La demibande plane élastique*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., 7, 9 (1961), 413.
- [12] P. P. TEODORESCU, *Asupra calculului grinzilor pereți încastrate*, An. Univ. «C. I. Parhon», s. Științele naturii, Mat.-Fizică 2, 10 (1961).
- [13] P. P. TEODORESCU, *O problemă mixtă a teoriei elasticității pentru unele domenii plane infinite*, An. Univ. «C. I. Parhon», s. Științele naturii, Mat.-Fizică, 29, 10 (1961), 323.

R é s u m é

SUR LE CALCUL DE RESISTANCE DES POUTRES DROITES. II. LA POUTRE DROITE A PORTE A FAUX. RELATIONS DE RÉCIPROCITÉ POUR LES POUTRES DROITES

Dans la seconde partie du travail on étudie la poutre droite en console, d'abord à l'aide des polynômes biharmoniques. On commence par l'étude des chargements avec des charges concentrées. À cette occasion on entreprend une étude développée des différentes possibilités d'encastrement approximatif d'une poutre droite. Dans le cadre des chargements distribués d'une manière continue, on étudie après avoir donné une méthode générale de calcul le cas d'une charge uniformément distribuée et le cas d'une charge à variation linéaire. Après avoir considéré aussi le cas des chargements sur la section de bout, on étudie les chargements avec des forces massiques (spécialement la pesanteur propre de la poutre et un cas de chargement avec une force d'inertie à variation linéaire).

La poutre droite en console, dans le cas d'une charge quelconque, est étudiée à l'aide de certaines fonctions de tension du type d'Airy, construites en forme de développements en série trigonométrique. On donne des résultats finals, ayant un caractère général, à l'aide de certaines fonctions, introduites par l'auteur dans l'Annexe de la première partie du travail, pour une charge normale et pour une charge tangentielle sur le côté d'en haut de la poutre. L'étude de l'état de sollicitation de la poutre est entrepris en détail, tant pour l'état de tension que pour l'état de déformation, en insistant sur la possibilité d'utiliser pratiquement les résultats obtenus.

On fait ensuite quelques considérations sur le problème des poutres droites à porte à faux et sur le problème des poutres Gerber, en insistant sur les possibilités de calcul approximatif de ces poutres.

On établit ensuite certaines relations de réciprocité qui généralisent les théorèmes de Betti et de Maxwell, pour les poutres droites simplement appuyées et pour les poutres droites en console; on considère tant le cas d'une force concentrée, normale ou tangentielle, que le cas d'un moment concentré, actionnant sur le côté d'en haut de la poutre. On démontre, avec cette occasion, que le théorème de Betti, sous la forme appliquée dans la résistance des matériaux, n'est pas toujours justifié du point de vue de la théorie de l'élasticité.

Au cours du travail on insiste surtout sur la comparaison entre les résultats obtenus par les méthodes de la théorie de l'élasticité et les résultats obtenus par les méthodes de la résistance des matériaux, en établissant des limites de valabilité pour ces derniers résultats.

Р е з ю м е

ПРОЧНОСТЬ ПРЯМЫХ БАЛОК. Ч. 2. КОНСОЛИ И КОНСОЛЬНЫЕ БАЛКИ.
ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ПРЯМЫХ БАЛОК

Первым из вопросов, рассматриваемых в настоящей (второй части) работе, является задача, касающаяся консоли, решенная при помощи бигармонических полиномов. Говоря о нагрузке консоли сосредоточенными силами проводится довольно широкая дискуссия различных способов приближенного накладывания условий защемления балки. Дается общий метод расчета для случая нагрузки распределенной непрерывно и исследуется случай нагрузок на крайнем сечении и нагрузок массовыми силами (прежде всего собственного веса балки и случай нагрузки силами инерции, изменяющимися линейно).

В случае произвольной нагрузки задача, касающаяся консоли, исследуется при помощи некоторых функций напряжений типа Эри, имеющих вид тригонометрических рядов. Для нормальной и касательной нагрузок, приложенных на верхней поверхности балки, дается

полное общее решение. Исследуется подробно напряженное и деформированное состояния, причем специальное внимание обращается на возможность практического применения полученных результатов.

Рассматриваются затем консольные балки Гербера со специальным учетом возможности проведения приближенных исчислений. Потом для случая прямой, свободно опертой балки и прямой консоли — определяются принципы взаимности, являющиеся обобщением теорем Бетти и Максвелла. При этом рассматривается случай сосредоточенной силы (нормальной или касательной) и сосредоточенного момента, действующих на верхней поверхности балки. При этом доказывается, что принятая в теории сопротивления материалов форма теоремы Бетти в рамках теории упругости — не правилна.

Во всей работе большое внимание обращается на сравнение результатов, получаемых методами теории упругости, с результатами, достигаемыми при использовании теории сопротивления материалов. Устанавливаются при этом пределы применимости этих последних методов.

ACADEMIA R. P. R.
INSTITUTUL DE MATEMATICA
BUCUREȘTI

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 czerwca 1961 r.