

ZAGADNIENIE ZGINANIA I WYBOCZENIA RAM ZŁOŻONYCH
Z PRĘTÓW KRATOWYCH O ZMIENNYCH SZTYWNOŚCIACH ZGINANIA

EDWARD KRYNICKI, ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Ustroje złożone z elementów kratowych o zmiennych sztywnościach zginania znajdują duże zastosowanie w różnych konstrukcjach inżynierskich zwłaszcza o przeznaczeniu komunikacyjnym i przemysłowym. Wyznaczanie wielkości nadliczbowych, sił przekrojowych oraz obciążeń krytycznych natrafia w tych przypadkach oczywiście na większe trudności niż w ustrojach złożonych z prętów o stałych przekrojach poprzecznych. Jedną z podstawowych i szeroko rozpowszechnionych metod, umożliwiających obliczanie wyżej wymienionych wielkości w ustrojach prętowych jest metoda przemieszczeń.

Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych metody przemieszczeń oraz zastosowanie tej metody w różnych rozwiązaniach zagadnień statyki, stateczności i dynamiki złożonych ustrojów prętowych o stałych przekrojach poprzecznych jest między innymi szeroko opisane w monografiach [1] S. BŁASZKOWIAKA i Z. KĄCZKOWSKIEGO oraz [2] W. NOWACKIEGO.

Wyprowadzenie odpowiednich wzorów transformacyjnych dla prętów o zmiennych sztywnościach zginania natrafia na ogół, zwłaszcza w zagadnieniach stateczności, na trudności w uzyskaniu całek ogólnych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach.

Niektóre rozwiązania zagadnień wyboczenia prętów o zmiennych sztywnościach zginania, podane np. w znanej i interesującej monografii [3] F. BLEICHA oraz w pracy [4] F. TÖLKE zostały otrzymane w oparciu o całki ogólne jednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu. Ponieważ całki te zawierają tylko dwie stałe dowolne, zatem rozwiązania podane w pracach [3, 4] i innych dotyczą wyłącznie bardzo szczególnych sposobów podparcia prętów i uniemożliwiają wyznaczenie sił krytycznych w wielu ważnych dla praktyki inżynierskiej złożonych ustrojach prętowych.

Rozwiązanie zagadnienia zginania i wyboczenia ustrojów ramowych, złożonych z prętów zbieżnych o kołowych i kwadratowych przekrojach poprzecznych, podali autorzy w pracach [5, 6, 7]. Natomiast praca obecna stanowi rozszerzenie publikacji [8] oraz usprawniającą modyfikację rozprawy [9].

W pracy tej wyprowadzono wzory transformacyjne metody przemieszczeń, umożliwiające rozwiązanie zagadnień wyboczenia i zginania ustrojów sprężystych (belek ciągłych i ram), złożonych z prętów kratowych o sztywnościach zginania zmiennych w sposób często spotykany w konstrukcjach inżynierskich.

Wyprowadzone wzory mogą być zastosowane do wyznaczania sił przekrojowych i obciążeń krytycznych w przypadku ram hal fabrycznych, ram dźwigowych, suwnic bramowych, masztów, słupów wysokiego napięcia, niektórych elementów mostowych i wielu innych konstrukcjach.

2. Zginanie

2.1. Zmienność momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta. Rozważmy pręt kratowy, w którym moment bezwładności przekroju poprzecznego (rys. 1) wyraża się funkcją:

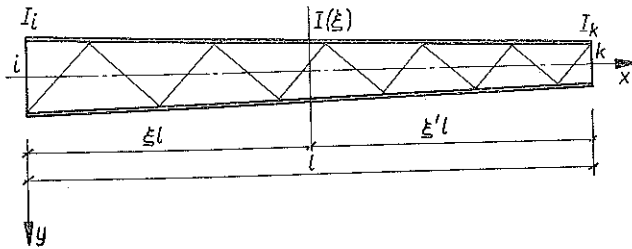
$$(2.1) \quad I(\xi) = I_s (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^2,$$

gdzie

$$(2.2) \quad I_s = \sqrt{I_i I_k}, \quad \xi' = 1 - \xi,$$

$$\mu_i = \sqrt{\frac{I_i}{I_s}}, \quad \mu_k = \sqrt{\frac{I_k}{I_s}}, \quad \mu_i \mu_k = 1.$$

Symbolami I_i i I_k oznaczono tu momenty bezwładności przekrojów podporowych.



Rys. 1

2.2. Równanie różniczkowe odkształconej osi pręta nieobciążonego. Równanie różniczkowe odkształconej osi pręta ma postać:

$$(2.3) \quad \frac{d^2}{l^4 d\xi^2} \left[EI(\xi) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] = 0.$$

Całka ogólna równania (2.3) wyraża się funkcją

$$(2.4) \quad y(\xi) = (C_1 \xi' + C_2 \xi) \ln(\mu_i \xi' + \mu_k \xi) + C_3 \xi' + C_4 \xi.$$

Uwzględniając następujące warunki brzegowe:

$$(2.5) \quad y(0) = y_i, \quad y(1) = y_k, \quad y'(0) = l\varphi_i, \quad y'(1) = l\varphi_k,$$

wyznaczamy występujące w funkcji (2.4) stałe całkowania

$$(2.6) \quad C_1 = \frac{l}{\Delta} [(\mu_i^2 - 1) \varphi_i + (2 \ln \mu_i) \varphi_k - (\mu_i^2 - 1 + 2 \ln \mu_i) \psi],$$

$$C_2 = -\frac{l}{\Delta} [(2 \ln \mu_k) \varphi_i + (\mu_k^2 - 1) \varphi_k - (\mu_k^2 - 1 + 2 \ln \mu_k) \psi],$$

$$C_3 = y_i - C_1 \ln \mu_i, \quad C_4 = y_k - C_2 \ln \mu_k,$$

gdzie

$$(2.7) \quad \Delta = (\mu_i - \mu_k)^2 - 4 (\ln \mu_i)^2.$$

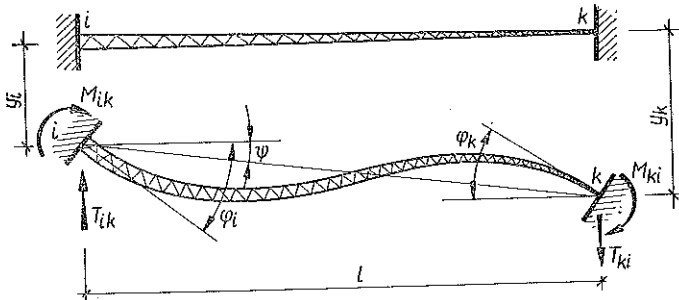
2.3. Momenty zginające i siły poprzeczne. Momenty zginające i siły poprzeczne, występujące w końcowych przekrojach pręta, wyrażają się następującymi wzorami

$$(2.8) \quad M_{ik} = - \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=0},$$

$$M_{ki} = \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=1},$$

$$(2.9) \quad T_{ik} = T_{ki} = - \left[\frac{d}{l^3 d\xi} \left[EI(\xi) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \right]_{\xi=0}^{\xi=1}.$$

2.4. Wzory transformacyjne. 2.4.1. Pręt obustronnie utwierdzony (rys. 2). Po podstawieniu obliczonych stałych całkowania do funkcji (2.4) otrzymujemy na podstawie wzorów (2.8) i (2.9), następujące wzory transformacyjne na wielkości statyczne:



Rys. 2

$$(2.10) \quad \begin{aligned} M_{ik} &= \frac{EI_s}{l} [\kappa(\mu) \varphi_i + \varepsilon(\mu) \varphi_k - \nu(\mu) \psi], \\ M_{ki} &= \frac{EI_s}{l} [\varepsilon(\mu) \varphi_i + \mu_k^2 \kappa(\mu) \varphi_k - \omega(\mu) \psi], \\ T_{ik} = T_{ki} &= - \frac{EI_s}{l^2} [\nu(\mu) \varphi_i + \omega(\mu) \varphi_k - \zeta(\mu) \psi], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \psi = \frac{y_k - y_i}{l},$$

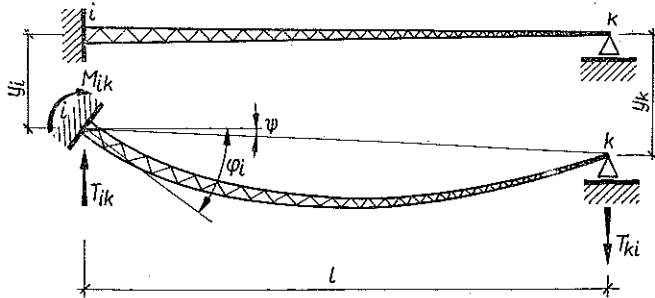
$$(2.12) \quad \begin{aligned} \kappa(\mu) &= \frac{1}{\Delta} (\mu_i^2 - 1) (\mu_i^2 - \mu_k^2 + 4 \ln \mu_k), \\ \varepsilon(\mu) &= \frac{2}{\Delta} (\mu_i^2 - 1) [\mu_k^2 - 1 + (\mu_k^2 + 1) \ln \mu_i], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(\mu) &= \frac{1}{\Delta} (\mu_i^2 - 1) [(\mu_i - \mu_k)^2 + 2(\mu_k^2 - 1) \ln \mu_i], \\
 \omega(\mu) &= \frac{1}{\Delta} (\mu_k^2 - 1) [(\mu_i - \mu_k)^2 + 2(\mu_i^2 - 1) \ln \mu_k], \\
 \zeta(\mu) &= \frac{1}{\Delta} (\mu_i - \mu_k)^4;
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

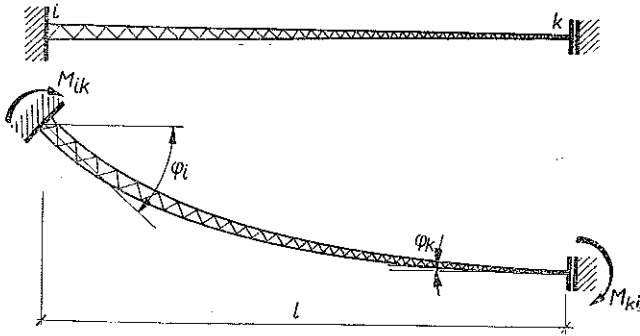
[c.d.]

Δ wyraża się za pomocą wzoru (2.7).

2.4.2. Pręt utwierdzony w węźle i oraz podparty przegubowo-przesuwnie w węźle k (rys. 3). Korzystając z warunku $M_{ki} = 0$ i eliminując z pozostałych wzorów transformacyjnych (2.10) kąt φ_k otrzymujemy



Rys. 3



Rys. 4

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= \frac{EI_s}{l} \kappa'(\mu) (\varphi_i - \psi), \\
 T_{ik} = T_{ki} &= -\frac{EI_s}{l^2} \kappa'(\mu) (\varphi_i - \psi),
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

gdzie

$$\kappa'(\mu) = \frac{\mu_i (\mu_i - \mu_k)^3}{\mu_i^2 - \mu_k^2 - 4 \ln \mu_i}.
 \tag{2.14}$$

2.4.3. Pręt utwierdzony w węźle i oraz o nieobraccalnej lecz przesuwnej podporze w węźle k (rys. 4). Z warunku $T_{ki} = 0$ rugujemy z pozostałych wzorów (2.10) kąt φ i otrzymujemy

$$(2.15) \quad M_{ik} = -M_{ki} = \frac{EI_s}{l} (\varphi_i - \varphi_k).$$

Występujące w powyższych wzorach współczynniki μ_i i μ_k zestawiono w tabelicy 1

Tablica 1. Wartości współczynników μ_i i μ_k

| $\frac{I_k}{I_i}$ | $\mu_i = \sqrt{\frac{I_i}{I_s}} = \sqrt[4]{\frac{I_i}{I_k}}$ | $\mu_k = \sqrt{\frac{I_k}{I_s}} = \sqrt[4]{\frac{I_k}{I_i}}$ |
|-------------------|--|--|
| 0,10 | 1,780 | 0,562 |
| 0,15 | 1,600 | 0,622 |
| 0,20 | 1,500 | 0,669 |
| 0,25 | 1,410 | 0,708 |
| 0,30 | 1,350 | 0,740 |
| 0,35 | 1,300 | 0,770 |
| 0,40 | 1,257 | 0,797 |
| 0,45 | 1,220 | 0,818 |
| 0,50 | 1,192 | 0,841 |
| 0,55 | 1,163 | 0,862 |
| 0,60 | 1,137 | 0,880 |
| 0,65 | 1,114 | 0,898 |
| 0,70 | 1,096 | 0,914 |
| 0,75 | 1,075 | 0,931 |
| 0,80 | 1,057 | 0,946 |

W przypadku momentu bezwładności stałego na całej długości pręta $I_s = I_i = I_k = I$, zaś $\mu_i = \mu_k = 1$. W związku z tym wzory (2.12) i (2.14) sprowadzają się do formy nieoznaczonej $0/0$. Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala wyprowadzone wyżej wzory sprowadzają się do znanych wzorów transformacyjnych, podanych np. w monografii [1].

2.5. Siły wyjściowe. 2.5.1. Pręt obustronnie utwierdzony. Obciążenie siłą skupioną (rys. 5). Rozważmy pręt obciążony siłą skupioną P działającą w dowolnym punkcie prostopadle do osi pręta.

Warunki równowagi przekroju c zapisujemy następująco:

$$(2.16) \quad M_{ci} + M_{ck} = 0, \quad -T_{ci} + T_{ck} + P = 0.$$

Siły przekrojowe występujące w równaniach (2.16) wyrażamy na podstawie wzorów (2.10) następująco:

$$\begin{aligned}
 M_{ci} &= \frac{EI_{s\xi}}{\xi l} \left[\mu_{ci}^2 \kappa_{\xi}(\mu) \varphi_c - \omega_{\xi}(\mu) \frac{y_c}{\xi l} \right], \\
 M_{ck} &= \frac{EI_{s\xi'}}{\xi' l} \left[\kappa_{\xi'}(\mu) \varphi_c + \nu_{\xi'}(\mu) \frac{y_c}{\xi' l} \right], \\
 T_{ci} &= -\frac{EI_{s\xi}}{(\xi l)^2} \left[\omega_{\xi}(\mu) \varphi_c - \zeta_{\xi}(\mu) \frac{y_c}{\xi l} \right], \\
 T_{ck} &= -\frac{EI_{s\xi'}}{(\xi' l)^2} \left[\nu_{\xi'}(\mu) \varphi_c + \zeta_{\xi'}(\mu) \frac{y_c}{\xi' l} \right],
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

gdzie

$$I_{s\xi} = \sqrt{I_i I_c}, \quad I_{s\xi'} = \sqrt{I_k I_c};
 \tag{2.18}$$

I_c jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego w punkcie c .

Funkcje $\kappa(\mu)$, $\nu(\mu)$, $\omega(\mu)$ i $\zeta(\mu)$ wyrażają się wzorami (2.12), a symbole ξ i ξ' oznaczają, że funkcje te odnoszą się odpowiednio do pręta $i-c$ oraz $c-k$.

Uwzględniając wyrażenia (2.17) i rozwiązując układ równań (2.16) znajdujemy:

$$\begin{aligned}
 \varphi_c &= \frac{Pl^2}{EI_s} \frac{\mu_k^2}{(\mu_i - \mu_k)^2 \Delta} \{ \mu_{ck}^2 (1 - \mu_{ck}^2 + 2 \ln \mu_{ck}) [(1 - \mu_{ic}^2)^2 - \\
 &\quad - 4\mu_{ic}^2 (\ln \mu_{ic})^2] + (1 - \mu_{ic}^2 + 2\mu_{ic}^2 \ln \mu_{ic}) [(1 - \mu_{ck}^2)^2 - 4\mu_{ck}^2 (\ln \mu_{ck})^2] \}, \\
 y_c &= -\frac{Pl^3}{EI_s} \frac{\mu_k^3}{(\mu_i - \mu_k)^3 \Delta} \mu_{ck}^2 \{ (1 - \mu_{ic}^4 + 4\mu_{ic}^2 \ln \mu_{ic}) [(1 - \mu_{ck}^2)^2 - \\
 &\quad - 4\mu_{ck}^2 (\ln \mu_{ck})^2] + (1 - \mu_{ck}^4 + 4\mu_{ck}^2 \ln \mu_{ck}) [(1 - \mu_{ic}^2)^2 - 4\mu_{ic}^2 (\ln \mu_{ic})^2] \},
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

gdzie Δ wyraża się za pomocą wzoru (2.7).

Między współczynnikami μ występującymi we wzorach (2.19) istnieją następujące zależności:

$$\begin{aligned}
 \mu_{ic} &= \sqrt{\frac{I_i}{I_{s\xi}}} = \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_i \xi' + \mu_k \xi}}, & \mu_{ci} &= \frac{1}{\mu_{ic}}, \\
 \mu_{kc} &= \sqrt{\frac{I_k}{I_{s\xi'}}} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_i \xi' + \mu_k \xi}}, & \mu_{ck} &= \frac{1}{\mu_{kc}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Wykorzystując wyrażenia (2.20) we wzorach (2.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \varphi_c &= \frac{Pl^2}{EI_s \Delta} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} \left\{ \left\{ -(\mu_i - \mu_k)^3 \xi \xi' + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\mu_i - \mu_k)^2 [(\mu_i \xi'^2 + \mu_k \xi^2) \ln \mu_i - (\mu_i \xi'^2 - \mu_k \xi^2) \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\mu_i - \mu_k) (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^2 \{ (\ln \mu_i)^2 + [\ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]^2 \} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(\mu_i - \mu_k) (\mu_i^2 \xi'^2 - \mu_k^2 \xi^2) \ln \mu_i \cdot \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(\mu_i \xi' + \mu_k \xi) \{ (\ln \mu_i)^2 - [\ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]^2 \} \ln \mu_i \right\} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad [c.d.] \quad y_c = & \frac{Pl^3}{EI_s \Delta} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^3} \left\{ 2(\mu_i - \mu_k)^3 \xi \xi' - \right. \\
 & - 2(\mu_i - \mu_k)^2 [(\mu_i \xi'^2 + \mu_k \xi^2) \ln \mu_i - (\mu_i \xi'^2 - \mu_k \xi^2) \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] - \\
 & - (\mu_i - \mu_k) [1 + (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^2] \{ (\ln \mu_i)^2 + [\ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]^2 \} - \\
 & - 2(\mu_i - \mu_k) (1 - 2\xi' - \mu_i^2 \xi'^2 + \mu_k^2 \xi^2) \ln \mu_i \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi) + \\
 & \left. + 4(\mu_i \xi' + \mu_k \xi) \{ (\ln \mu_i)^2 - [\ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]^2 \} \ln \mu_i \right\}.
 \end{aligned}$$

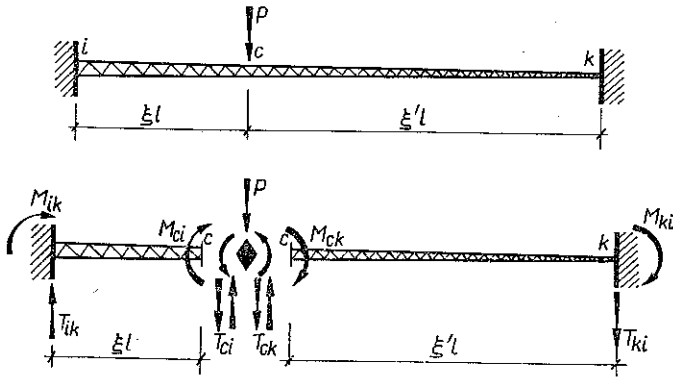
Momenty i siły poprzeczne występujące na końcach pręta wyrażają się na podstawie wzorów (2.10) następująco:

$$\begin{aligned}
 (2.22) \quad M_{ik} = M_{ic} &= \frac{EI_{s\xi}}{\xi l} \left[\varepsilon_\xi(\mu) \varphi_c - \nu_\xi(\mu) \frac{y_c}{\xi l} \right], \\
 M_{ki} = M_{kc} &= \frac{EI_{s\xi'}}{\xi' l} \left[\varepsilon_{\xi'}(\mu) \varphi_c + \omega_{\xi'}(\mu) \frac{y_c}{\xi' l} \right], \\
 T_{ik} = T_{ic} &= - \frac{EI_{s\xi}}{(\xi l)^2} \left[\omega_\xi(\mu) \varphi_c - \zeta_\xi(\mu) \frac{y_c}{\xi l} \right], \\
 T_{ki} = T_{kc} &= - \frac{EI_{s\xi'}}{(\xi' l)^2} \left[\nu_{\xi'}(\mu) \varphi_c + \zeta_{\xi'}(\mu) \frac{y_c}{\xi' l} \right].
 \end{aligned}$$

Podstawiając do wzorów (2.22) wyrażenia (2.21) oraz uwzględniając zależności (2.18) i (2.20) otrzymujemy następujące wzory na siły wyjściowe dla pręta obustronnie utwierdzonego obciążonego siłą P przyłożoną w odległości ξ od podpory i :

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad M_{ik}^0 &= -Pl \frac{1}{\Delta} \{ (\mu_i^2 - 1) \xi' [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] - \\
 & \quad - 2\xi \ln \mu_i [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] \}, \\
 M_{ki}^0 &= -Pl \frac{1}{\Delta} \{ (\mu_k^2 - 1) \xi [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] + \\
 & \quad + 2\xi' \ln \mu_i [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] \}, \\
 T_{ik}^0 &= \frac{P}{\Delta} \{ \xi' (\mu_i - \mu_k)^2 + (\mu_k^2 \xi' + \mu_k^2 \xi - 1) \ln \mu_i - (\mu_i^2 \xi' - \mu_k^2 \xi + \\
 & \quad + 2\xi - 1) \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi) - 2 \ln \mu_i [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] \}, \\
 T_{ki}^0 &= -\frac{P}{\Delta} \{ \xi (\mu_i - \mu_k)^2 - (\mu_i^2 \xi' + \mu_k^2 \xi - 1) \ln \mu_i + (\mu_i^2 \xi' - \mu_k^2 \xi + \\
 & \quad + 2\xi - 1) \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi) - 2 \ln \mu_i [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] \}.
 \end{aligned}$$

Rozważmy następnie przypadek obciążenia pręta siłą skupioną w połowie jego rozpiętości.



Rys. 5

Wówczas $\xi = \xi' = 1/2$; wzory (2.23) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -\frac{Pl}{2\Delta} \left[(\mu_i^2 - 1) \left(\ln \mu_i - \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) - 2 \ln \mu_i \left(\ln \mu_i + \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right], \\
 M_{ki}^0 &= -\frac{Pl}{2\Delta} \left[(\mu_k^2 - 1) \left(\ln \mu_k + \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) + 2 \ln \mu_k \left(\ln \mu_k - \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right], \\
 T_{ik}^0 &= \frac{P}{2\Delta} \left\{ (\mu_i - \mu_k) [(\mu_i - \mu_k) + 2\mu_i \ln \mu_i] - \right. \\
 &\quad \left. - (\mu_i^2 - \mu_k^2 + 4 \ln \mu_i) \left(\ln \mu_i + \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right\}, \\
 T_{ki}^0 &= -\frac{P}{2\Delta} \left\{ (\mu_i - \mu_k) (\mu_i - \mu_k - 2\mu_i \ln \mu_i) + \right. \\
 &\quad \left. + (\mu_i^2 - \mu_k^2) \left(\ln \mu_i + \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) - 4 \ln \mu_i \left(\ln \mu_i - \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności wzory (2.23) po żmudnych przekształceniach sprowadzają się do następującej znanej (por. np. [1]) postaci:

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -Pl\xi\xi'^2, & M_{ki}^0 &= Pl\xi'^2\xi, \\
 T_{ik}^0 &= P\xi'^2(2\xi+1), & T_{ki}^0 &= -P\xi^2(2\xi'+1).
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

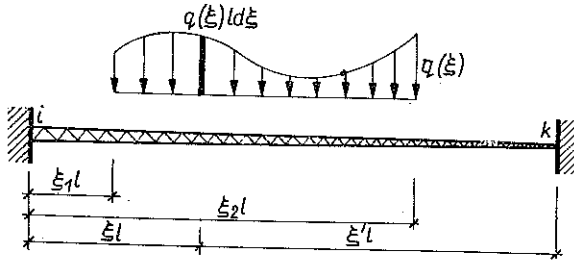
Łatwo zauważyć, że w tym przypadku dla $\xi = \xi' = \frac{1}{2}$ jest

$$M_{ik}^0 = -M_{ki}^0 = -\frac{Pl}{8}, \quad T_{ik}^0 = -T_{ki}^0 = \frac{P}{2}.$$

Obciążenie ciągłe na pewnym odcinku pręta (rys. 6). W tym przypadku wzory na siły wyjściowe wyprowadzimy łatwo z odpowiednich wzorów podanych powyżej, przyjmując

$$P = q(\xi) l d\xi
 \tag{2.26}$$

i całkując wyrażenia na siły wyjściowe w granicach od ξ_1 do ξ_2 .



Rys. 6

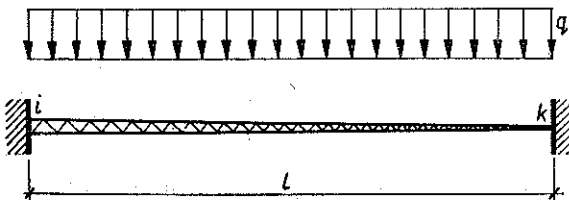
Dla pręta obustronnie utwierdzonego na podstawie wzorów (2.23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -\frac{l^2}{\Delta} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{(\mu_i^2 - 1) \xi' [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] - \\
 &\quad - 2\xi \ln \mu_i [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi, \\
 M_{ki}^0 &= -\frac{l^2}{\Delta} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{\mu_k^2 - 1\} \xi [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] + \\
 &\quad + 2\xi' \ln \mu_i [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi, \\
 T_{ik}^0 &= \frac{l}{\Delta} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{(\mu_i - \mu_k) \xi' [(\mu_i - \mu_k) + 2\mu_i \ln \mu_i] - [(\mu_i - \mu_k) \times \\
 &\quad \times (\mu_i \xi' + \mu_k \xi) + 2 \ln \mu_i] [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi, \\
 T_{ki}^0 &= -\frac{l}{\Delta} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{(\mu_i - \mu_k) [(\mu_i - \mu_k) \xi - 2 \mu_i \xi' \ln \mu_i] + \\
 &\quad + (\mu_i - \mu_k) (\mu_i \xi' + \mu_k \xi) [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] - \\
 &\quad - 2 \ln \mu_i [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności wzory (2.27) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -l^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi \xi'^2 d\xi, & M_{ki}^0 &= l^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi^2 \xi' d\xi, \\
 T_{ik}^0 &= l \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi'^2 (2\xi + 1) d\xi, & T_{ki}^0 &= T_{ik}^0 - l \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Obciążenie równomierne na całej długości pręta (rys. 7). Przyjmując we wzorach (2.27) $q(\xi) = q$ i wykonując całkowanie w granicach $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ znajdujemy;



Rys. 7

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -\frac{ql^2}{4\Delta} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2} [(\mu_i - \mu_k)^2 (\mu_i^2 - 3) - \\
 &\quad - 2(\mu_k^2 - 1)(3\mu_i^2 + 1) \ln \mu_i - 8\mu_i^2 (\ln \mu_i)^2], \\
 M_{ki}^0 &= \frac{ql^2}{4\Delta} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2} [(\mu_i - \mu_k)^2 (\mu_k^2 - 3) + \\
 (2.29) \quad &\quad + 2(\mu_i^2 - 1)(3\mu_k^2 + 1) \ln \mu_i - 8\mu_k^2 (\ln \mu_i)^2], \\
 T_{ik}^0 &= \frac{ql}{4\Delta} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)} [(\mu_i - \mu_k)^2 (\mu_k^2 - 3) \mu_i + 4(\mu_i - \mu_k) \ln \mu_i - \\
 &\quad - 16\mu_i (\ln \mu_i)^2], \\
 T_{ki}^0 &= -\frac{ql}{4\Delta} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)} [(\mu_i - \mu_k)^2 (\mu_i^2 - 3) \mu_k - 4(\mu_i - \mu_k) \ln \mu_i + \\
 &\quad + 16\mu_k (\ln \mu_i)^2].
 \end{aligned}$$

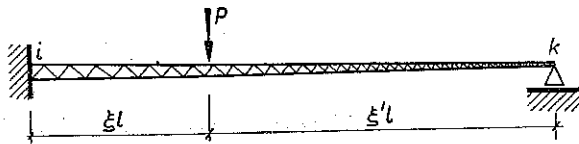
W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego wzory (2.29) na siły wyjściowe przyjmują znaną postać

$$M_{ik}^0 = -M_{ki}^0 = -\frac{ql^2}{12}, \quad T_{ik}^0 = -T_{ki}^0 = \frac{ql}{2}.$$

2.5.2. Pręt utwierdzony w węźle i oraz przegubowo przesuwnie podparty w węźle k .

Obciążenie siłą skupioną (rys. 8). W tym przypadku wzór na moment wyjściowy można łatwo otrzymać, wychodząc z odpowiednich wzorów wyprowadzonych dla pręta obustronnie utwierdzonego.

Przyjmując w pierwszym i drugim ze wzorów (2.10) $\varphi_i = 0$, $\psi = 0$ oraz $M_{ki} = 1$ obliczamy



Rys. 8

$$(2.30) \quad \varphi_k = \frac{l}{EI_s \mu_k^2 \varkappa(\mu)}$$

i znajdujemy przekąźnik

$$(2.31) \quad M_{ik} = k_{ik} = \frac{\varepsilon(\mu)}{\mu_k^2 \varkappa(\mu)} = \frac{2[\mu_i^2 - 1 - (\mu_i^2 + 1) \ln \mu_i]}{4 \ln \mu_i - \mu_i^2 + \mu_k^2}.$$

W rozważanym przypadku moment utwierdzenia (wyjściowy) M_{ik}^0 otrzymujemy na podstawie wzorów (2.23) ze związku

$$(2.32) \quad M_{ik}^0 = \bar{M}_{ik}^0 - k_{ik} \bar{M}_{ki}^0 = -\frac{Pl}{\Delta_1} \{2\xi [\ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] - (\mu_i^2 + 1) \xi' [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\},$$

gdzie $\Delta_1 = 4 \ln \mu_i - \mu_i^2 + \mu_k^2$, symbole \bar{M}_{ik}^0 i \bar{M}_{ki}^0 oznaczają momenty wyjściowe wyrażone wzorami (2.23) i zostały tu wprowadzone chwilowo dla bardziej przejrzystego przedstawienia związku (2.32).

Znając wielkość momentu M_{ik}^0 znajdujemy siły poprzeczne wyjściowe z równań równowagi

$$(2.33) \quad T_{ik}^0 = \frac{P}{\Delta_1} \{4 \ln \mu_i - \xi' (\mu_i^2 - \mu_k^2) - (1 + \xi + \mu_i^2 \xi') [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\},$$

$$T_{ki}^0 = \frac{P}{\Delta_1} \{\xi (\mu_i^2 - \mu_k^2) - (1 + \xi + \mu_i^2 \xi') [\ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\}.$$

Jeśli siła P działa w połowie rozpiętości ($\xi = \xi' = \frac{1}{2}$), wtedy wzory (2.32), (2.33) upraszczają się do postaci:

$$(2.34) \quad M_{ik}^0 = \frac{Pl}{2\Delta_1} \left[(\mu_i^2 - 1) \ln \mu_i - (\mu_i^2 + 3) \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right],$$

$$T_{ik}^0 = -\frac{P}{2\Delta_1} \left[(\mu_i^2 - 5) \ln \mu_i + \mu_i^2 - \mu_k^2 - (\mu_i^2 + 3) \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right],$$

$$T_{ki}^0 = \frac{P}{2\Delta_1} \left[\mu_i^2 - \mu_k^2 - (\mu_i^2 + 3) \left(\ln \mu_i - \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right].$$

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego, wzory (2.32), (2.33) po żmudnych przekształceniach sprowadzają się do znanej postaci (por. np. [1])

$$(2.35) \quad M_{ik}^0 = -\frac{1}{2} Pl \xi \xi' (2 - \xi),$$

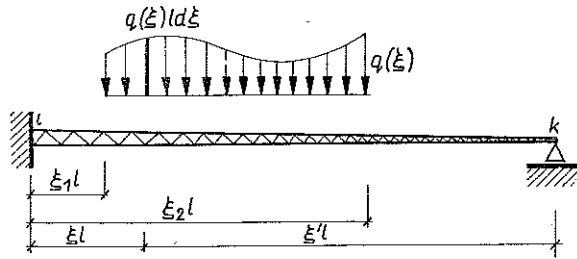
$$T_{ik}^0 = \frac{1}{2} P \xi' (3 - \xi'^2),$$

$$T_{ki}^0 = -\frac{1}{2} P \xi^2 (3 - \xi).$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku dla $\xi = \xi' = \frac{1}{2}$ mamy

$$M_{ik}^0 = -\frac{3}{16} Pl, \quad T_{ik}^0 = \frac{11}{16} P, \quad T_{ki}^0 = -\frac{5}{16} P.$$

Obciążenie ciągłe na pewnym odcinku pręta (rys. 9). Wzory na siły wyjściowe otrzymamy przyjmując w wyrażeniach (2.32), (2.33) $P = q(\xi) l d\xi$ i całkując je w granicach od ξ_1 do ξ_2 .



Rys. 9

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -\frac{l^2}{\Delta_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{2\xi [\ln \mu_i + \ln(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] - \\
 &\quad - (\mu_i^2 + 1) \xi' [\ln \mu_i - \ln(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi, \\
 (2.36) \quad T_{ik}^0 &= \frac{l}{\Delta_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{4 \ln \mu_i - \xi' (\mu_i^2 - \mu_k^2) - \\
 &\quad - (1 + \xi + \mu_i^2 \xi') [\ln \mu_i - \ln(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi, \\
 T_{ki}^0 &= \frac{l}{\Delta_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \{\xi (\mu_i^2 - \mu_k^2) - (1 + \xi + \mu_i^2 \xi') [\ln \mu_i - \ln(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)]\} d\xi.
 \end{aligned}$$

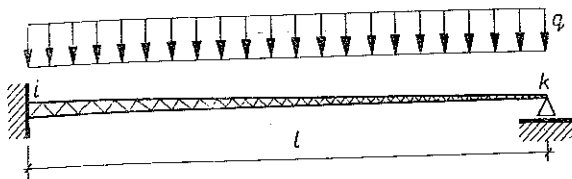
Wzory (2.36) można również łatwo otrzymać wprost ze wzorów (2.27), podobnie jak w przypadku obciążenia siłą skupioną.

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego wzory powyższe przyjmują postać:

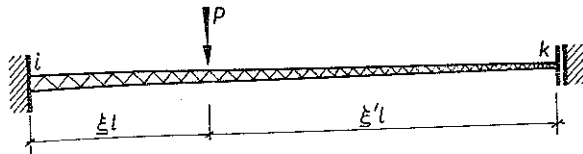
$$\begin{aligned}
 (2.37) \quad M_{ik}^0 &= -\frac{l^2}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi \xi' (2 - \xi) d\xi, \\
 T_{ik}^0 &= \frac{l}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi' (3 - \xi'^2) d\xi, \\
 T_{ki}^0 &= T_{ik}^0 - l \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Obciążenie równomierne na całej długości pręta (rys. 10). Przyjmując we wzorach (2.36) $q(\xi) = q$ i wykonując całkowanie w granicach $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ znajdujemy:

$$\begin{aligned}
 (2.38) \quad M_{ik}^0 &= \frac{ql^2}{4\Delta_1} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)} [(\mu_i - \mu_k) (\mu_i^2 + 5) - 4(2\mu_i + \mu_k) \ln \mu_i], \\
 T_{ik}^0 &= \frac{ql}{4\Delta_1} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)} [(\mu_i - \mu_k) (2\mu_k^2 - 3\mu_i^2 - 5) + 4(4\mu_i - \mu_k) \ln \mu_i], \\
 T_{ki}^0 &= -\frac{ql}{4\Delta_1} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)} [(\mu_i - \mu_k) (2\mu_k^2 - \mu_i^2 + 5) - 12\mu_k \ln \mu_i].
 \end{aligned}$$



Rys. 10



Rys. 11

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego, wzory, (2.38) przyjmują znaną postać:

$$M_{ik}^0 = -\frac{ql^2}{8}, \quad T_{ik}^0 = \frac{5}{8}ql, \quad T_{ki} = -\frac{3}{8}ql.$$

2.5.3. Pręt utwierdzony w węźle i oraz o nieobracalnej lecz przesuwnej podporze w węźle k. Obciążenie siłą skupioną (rys. 11).

Podobnie jak w przypadku rozważanym w p-ście 2.5.2. wzory na momenty wyjściowe można łatwo otrzymać, wychodząc z odpowiednich wzorów wyprowadzonych dla pręta obustronnie utwierdzonego.

Przyjmując we wzorach (2.10), $\varphi_i = 0$, $\varphi_k = 0$ otrzymujemy

$$(2.39) \quad \begin{aligned} M_{ik} &= -\frac{EI_s}{l} \nu(\mu) \psi, \\ M_{ki} &= -\frac{EI_s}{l} \omega(\mu) \psi. \end{aligned}$$

Z warunku

$$(2.40) \quad T_{ik} = T_{ki} = \frac{EI_s}{l} \zeta(\mu) \psi = 1$$

wyznaczamy kąt ψ , który po podstawieniu do wzorów (2.39) daje przekazywniki

$$(2.41) \quad \begin{aligned} M_{ik} &= \bar{k}_{ik} = -l \frac{\nu(\mu)}{\zeta(\mu)} = -l \frac{(\mu_i^2 - 1) - 2 \ln \mu_i}{(\mu_i - \mu_k)^2}, \\ M_{ki} &= \bar{k}_{ki} = -l \frac{\omega(\mu)}{\zeta(\mu)} = -l \frac{(\mu_k^2 - 1) + 2 \ln \mu_i}{(\mu_i - \mu_k)^2}. \end{aligned}$$

Momenty wyjściowe na końcach pręta znajdujemy ze związków

$$M_{ik}^0 = \bar{M}_{ik}^0 - \bar{k}_{ik} \bar{T}_{ki}^0 = -Pl \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2} [\xi (\mu_i^2 - 1) - \ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)],$$

$$M_{ki}^0 = \bar{M}_{ki}^0 - \bar{k}_{ki} \bar{T}_{ki}^0 = -Pl \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2} [\xi (\mu_k^2 - 1) + \ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)],$$

gdzie, podobnie jak w przypadku 2.5.2., symbole \bar{M}_{ik}^0 , \bar{M}_{ki}^0 i \bar{T}_{ki}^0 oznaczają momenty i siły wyjściowe wyrażone za pomocą wzorów (2.23).

Jeśli siła P działa w połowie rozpiętości pręta, to jest przy $\xi = \xi' = \frac{1}{2}$, wtedy wzory (2.42) przyjmują postać:

$$M_{ik}^0 = -Pl \frac{1}{2(\mu_i - \mu_k)^2} \left[\mu_i^2 - 1 - 2 \left(\ln \mu_i - \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right],$$

$$M_{ki}^0 = -Pl \frac{1}{2(\mu_i - \mu_k)^2} \left[\mu_k^2 - 1 + 2 \left(\ln \mu_i - \ln \frac{\mu_i + \mu_k}{2} \right) \right].$$

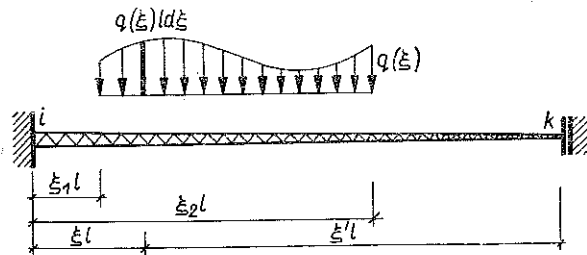
W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego wzory (2.42) sprowadzają się do następującej postaci:

$$M_{ik}^0 = -\frac{Pl}{2} \xi (2 - \xi), \quad M_{ki}^0 = -\frac{Pl}{2} \xi^2.$$

Przy $\xi = \xi' = \frac{1}{2}$ znajdujemy znane wartości

$$M_{ik}^0 = -\frac{3}{8} Pl, \quad M_{ki}^0 = -\frac{1}{8} Pl.$$

Obciążenie ciągłe na pewnym odcinku pręta (rys. 12). Przyjmując w wyrażeniach (2.42) $P = q(\xi) l d\xi$ oraz wykonując całkowanie w granicach od ξ_1 do ξ_2 otrzymujemy następujące wzory na momenty wyjściowe:



Rys. 12

$$M_{ik}^0 = -\frac{l^2}{(\mu_i - \mu_k)^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) [\xi (\mu_i^2 - 1) - \ln \mu_i + \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] d\xi,$$

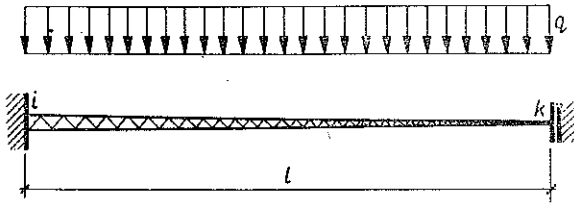
$$M_{ki}^0 = -\frac{l^2}{(\mu_i - \mu_k)^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) [\xi (\mu_k^2 - 1) + \ln \mu_i - \ln (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] d\xi.$$

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego, wzory (2.45) przyjmują postać

$$(2.46) \quad \begin{aligned} M_{ik}^0 &= -\frac{l^2}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi (2 - \xi) d\xi, \\ M_{ki}^0 &= -\frac{l^2}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) \xi^2 d\xi. \end{aligned}$$

Obciążenie równomierne na całej długości pręta (rys. 13). Przyjmując we wzorach (2.45) $q(\xi) = q$ i wykonując całkowanie w granicach $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = l$ otrzymujemy następujące wzory na siły wyjściowe

$$(2.47) \quad \begin{aligned} M_{ik}^0 &= -\frac{ql^2}{2} \frac{\mu_k}{(\mu_i - \mu_k)^3} [(\mu_i^2 - 1)(\mu_i^2 - 3) + 4 \ln \mu_i], \\ M_{ki}^0 &= -\frac{ql^2}{2} \frac{\mu_k}{(\mu_i - \mu_k)^3} [\mu_i^2 - \mu_k^2 - 4 \ln \mu_i]. \end{aligned}$$



Rys. 13

W przypadku pręta o stałym momencie bezwładności przekroju poprzecznego wzory (2.47) sprowadzają się do znanej postaci

$$M_{ik}^0 = -\frac{ql^2}{3}, \quad M_{ki}^0 = -\frac{ql^2}{6}.$$

3. Wyboczenie

3.1. Równanie różniczkowe zagadnienia. Równanie różniczkowe odkształconej przy wyboczeniu osi pręta o zmiennej sztywności zginania, jest następujące:

$$(3.1) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \left[EI(\xi) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] + Sl^2 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = 0,$$

gdzie $EI(\xi)$ oznacza sztywność zginania pręta.

Przyjmując zmienność momentu bezwładności przekroju poprzecznego według wzoru (2.1) zapisujemy równanie (3.1) w postaci:

$$(3.2) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \left[(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^2 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] + \sigma^2 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = 0,$$

gdzie

$$(3.3) \quad \sigma = \sqrt{\frac{SI^2}{EI_s}}.$$

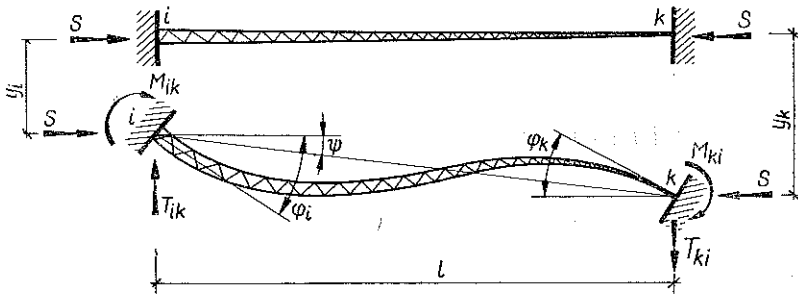
Całka ogólna równania (3.2) ma postać:

$$(3.4) \quad y(\xi) = \sqrt{\mu_i (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} \{ C_1 \sin [\varrho \ln \mu_i (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] + \\ + C_2 \cos [\varrho \ln \mu_i (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)] \} + C_3 \xi + C_4,$$

gdzie

$$(3.5) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(\mu_i - \mu_k)^2} - \frac{1}{4}}.$$

Uwzględniając następujące warunki brzegowe (rys. 14)



Rys. 14

$$(3.6) \quad y(0) = y_i, \quad y(1) = y_k, \quad y'(0) = l\varphi_i, \quad y'(1) = l\varphi_k$$

otrzymujemy stałe całkowania

$$(3.7) \quad C_1 = \frac{2l}{\Delta} \{ [1 + \mu_i (\mu_i - 2B)] \varphi_i + [(\mu_i + \mu_k) B + 2\varrho (\mu_i - \mu_k) A - 2] \varphi_k - \\ - (\mu_i - \mu_k) (\mu_i + 2\varrho A - B) \psi \}, \\ C_2 = \frac{2l}{\Delta} \{ 2\mu_i [A - \varrho (\mu_i - \mu_k)] \varphi_i - [(\mu_i + \mu_k) A - 2\varrho (\mu_i - \mu_k) B] \varphi_k - \\ - (\mu_i - \mu_k) [A + 2\varrho (B - \mu_i)] \psi \}, \\ C_3 = \frac{l}{\Delta} (\mu_i^2 - 1) \{ 2[\mu_i A + 2\varrho (1 - \mu_i B)] \varphi_i + 2[2\varrho (1 - \mu_k B) - \mu_k A] \varphi_k - \\ - (\mu_i - \mu_k) (1 + 4\varrho^2) A \psi \}, \\ C_4 = y_i - C_1 \mu_i A - C_2 \mu_i B,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \Delta = (\mu_i^2 - 1) \{ (\mu_i - \mu_k) (1 - 4\varrho^2) A + 4\varrho [2 - (\mu_i + \mu_k) B] \},$$

$$(3.9) \quad A = \sin(2\varrho \ln \mu_i), \quad B = \cos(2\varrho \ln \mu_i), \quad \psi = \frac{y_k - y_i}{l}.$$

3.2. Momenty zginające i siły poprzeczne. Momenty zginające i siły poprzeczne, występujące w końcowych przekrojach pręta, wyrażają się następującymi wzorami:

$$(3.10) \quad M_{ik} = - \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=0},$$

$$M_{ki} = \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=1},$$

$$(3.11) \quad T_{ik} = T_{ki} = - \left[\frac{d}{l d\xi} \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + S y(\xi) \right] \right]_{\xi=0}^{\xi=1}.$$

3.3. Wzory transformacyjne. 3.3.1. *Pręt obustronnie utwierdzony* (rys. 14). Po podstawieniu obliczonych stałych całkowania do funkcji (3.4) otrzymujemy na podstawie wzorów (3.10) i (3.11) następujące wzory na wielkości statyczne:

$$(3.12) \quad M_{ik} = \frac{EI_s}{l} [\alpha(\sigma, \mu) \varphi_i + \beta(\sigma, \mu) \varphi_k - \vartheta(\sigma, \mu) \psi],$$

$$M_{ki} = \frac{EI_s}{l} [\beta(\sigma, \mu) \varphi_i + \mu_k^2 \alpha(\sigma, \mu) \varphi_k - \gamma(\sigma, \mu) \psi],$$

$$T_{ik} = T_{ki} = - \frac{EI_s}{l^2} [\vartheta(\sigma, \mu) \varphi_i + \gamma(\sigma, \mu) \varphi_k - \delta(\sigma, \mu) \psi].$$

Występujące w tych wzorach funkcje $\alpha(\sigma, \mu)$, $\beta(\sigma, \mu)$, $\vartheta(\sigma, \mu)$, $\gamma(\sigma, \mu)$, $\delta(\sigma, \mu)$ wyrażają się za pomocą wzorów:

$$(3.13) \quad \alpha(\sigma, \mu) = \frac{1}{\Delta_1} \mu_i [(\mu_i + \mu_k) A - 2\varrho(\mu_i - \mu_k) B],$$

$$\beta(\sigma, \mu) = \frac{2}{\Delta_1} [\varrho(\mu_i - \mu_k) - A],$$

$$\vartheta(\sigma, \mu) = \frac{1}{\Delta_1} (\mu_i - \mu_k) [\mu_i A - 2\varrho(\mu_i B - 1)],$$

$$\gamma(\sigma, \mu) = \frac{1}{\Delta_1} \mu_k (\mu_i - \mu_k) [2\varrho(\mu_i - B) - A],$$

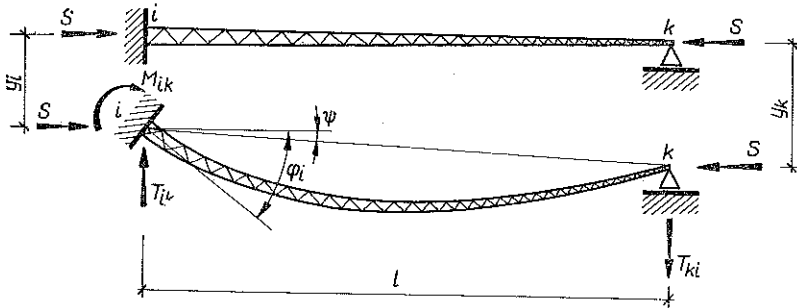
$$\delta(\sigma, \mu) = \frac{1}{2\Delta_1} (\mu_i - \mu_k)^2 (1 + 4\varrho^2) A,$$

gdzie

$$(3.14) \quad \Delta_1 = \frac{2}{(\mu_i - \mu_k)(1 + 4\varrho^2)} \{(\mu_i - \mu_k)(1 - 4\varrho^2) A + 4\varrho [2 - (\mu_i + \mu_k) B]\}.$$

We wzorach (3.13) dla skrócenia zapisów wprowadzono po lewych stronach znaków równości symbol μ , który zastępuje μ_i i μ_k .

3.3.2. Pręt utwierdzony w węźle i oraz podparty przegubowo-przesuwnie w węźle k (rys. 15). W tym przypadku z warunku przyrównania momentu M_{ki} do zera oblicza



Rys. 15

się kąt φ_k . Następnie, po podstawieniu wyznaczonego w ten sposób kąta φ_k do pozostałych wzorów (3.12), otrzymuje się następujące wzory transformacyjne

$$M_{ik} = \frac{EI_s}{l} \alpha'(\sigma, \mu) (\varphi_i - \psi), \quad (3.15)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EI_s}{l^2} [\alpha'(\sigma, \mu) \varphi_i - \delta'(\sigma, \mu) \psi],$$

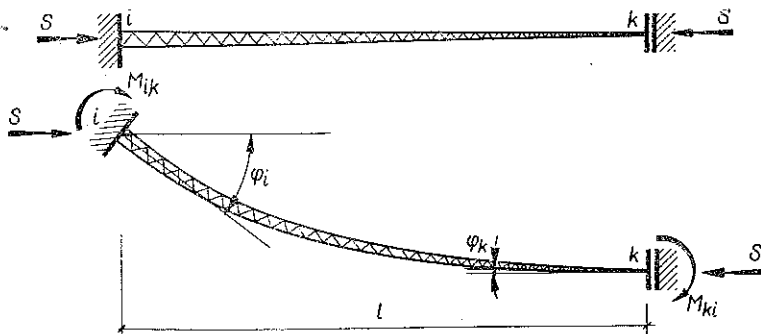
gdzie

$$\alpha'(\sigma, \mu) = \frac{1}{\Delta_2} 2\mu A, \quad \delta'(\sigma, \mu) = \frac{1}{\Delta_2} (\mu_i - \mu_k) (A + 2\varrho B), \quad (3.16)$$

przy czym

$$\Delta_2 = \frac{4}{(\mu_i - \mu_k)^2 (1 + 4\varrho^2)} [(\mu_i + \mu_k) A - 2\varrho (\mu_i - \mu_k) B]. \quad (3.17)$$

3.3.3. Pręt utwierdzony w węźle i oraz o nieobracalnej lecz przesuwnej podporze w węźle k (rys. 16). Przy tym sposobie podparcia pręta nie mogą wystąpić siły po-



Rys. 16

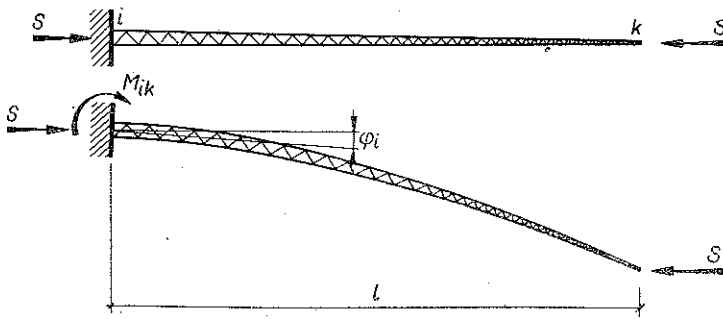
przecznę. Przyjmując $T_{ki} = 0$ i rugując w ten sposób kąt ψ otrzymujemy wzory transformacyjne

$$(3.18) \quad \begin{aligned} M_{ik} &= \frac{EI_s}{l} [\alpha''(\sigma, \mu) \varphi_i + \beta''(\sigma, \mu) \varphi_k], \\ M_{ki} &= \frac{EI_s}{l} [\beta''(\sigma, \mu) \varphi_i + \eta''(\sigma, \mu) \varphi_k], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \alpha''(\sigma, \mu) &= \frac{1}{2A} \mu_i (\mu_i - \mu_k) (2\rho B - A), \\ \beta''(\sigma, \mu) &= -\frac{1}{A} (\mu_i - \mu_k) \rho, \\ \eta''(\sigma, \mu) &= \frac{1}{2A} \mu_k (\mu_i - \mu_k) (2\rho B + A). \end{aligned}$$

3.3.4. Pręt utwierdzony w węźle i ze swobodnym końcem k (rys. 17).



Rys. 17

W tym przypadku odpowiedni wzór transformacyjny otrzymuje się na podstawie wzorów (3.15) z warunku $T_{ki} = 0$, który umożliwia wyrugowanie kąta ψ , bądź też ze wzorów (3.18), przyjmując $M_{ki} = 0$ i eliminując kąt φ_k .

Otrzymujemy wówczas

$$(3.20) \quad M_{ik} = \frac{EI_s}{l} \alpha'''(\sigma, \mu) \varphi_i,$$

gdzie

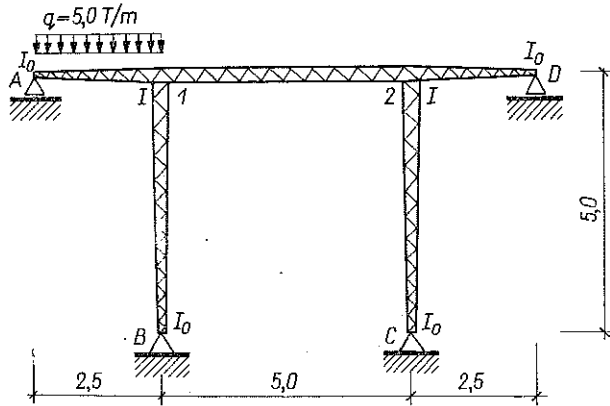
$$(3.21) \quad \alpha'''(\sigma, \mu) = -\frac{\mu_i (\mu_i - \mu_k) (1 + 4\rho^2) A}{2(2\rho B + A)}.$$

Przykład 1. Rozważmy zginanie ramy przedstawionej na rys. 18, złożonej z prętów kratowych. Moment bezwładności przekroju poprzecznego rygła na odcinku 1-2 jest stały i równy I , pozostałych zaś prętów zmienny według funkcji (2.1) od wartości I przy węzłach 1 i 2 do $I_0 = 0,0625 I$ przy podporach.

Warunki równowagi zapisujemy następująco:

$$(3.22) \quad M_{1A} + M_{1B} + M_{12} = 0, \quad M_{21} + M_{2C} + M_{2D} = 0, \quad T_{1B} + T_{2C} = 0,$$

przy czym przez M_{1A} oznaczono tu sumę $M_{1A} + M_{1A}^0$.



Rys. 18

Równania (3.22) po uwzględnieniu wzorów (2.13) oraz znanych wzorów transformacyjnych dla pręta o stałym przekroju poprzecznym (por. np. [1]), przyjmują postać:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} [0,75 \kappa'(\mu) + 4] \varphi_1 + 2\varphi_2 - 0,25 \kappa'(\mu) \psi + \frac{5}{EI} M_{1A}^0 &= 0, \\ 2\varphi_1 + [0,75 \kappa'(\mu) + 4] \varphi_2 - 0,25 \kappa'(\mu) \psi &= 0, \\ -0,25 \kappa'(\mu) \varphi_1 - 0,25 \kappa'(\mu) \varphi_2 + 0,5 \kappa'(\mu) \psi &= 0. \end{aligned}$$

Postępując się wzorami (2.2), (2.14) i (2.38) znajdujemy następujące wielkości

$$I_s = 0,25 I, \quad \mu_{1A} = \mu_{1B} = \mu_{2C} = \mu_{2D} = 2,0, \quad \mu_{A1} = \mu_{B1} = \mu_{C2} = \mu_{D2} = 0,5, \\ \kappa'(\mu) = 6,9046, \quad M_{1A}^0 = 5,459 Tm.$$

Uwzględniając znalezione wielkości zapisujemy układ równań (3.23) w następującej postaci:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} 9,1784 \varphi_1 + 2\varphi_2 - 1,726 \psi + \frac{5}{EI} 5,459 &= 0, \\ 2\varphi_1 + 9,1784 \varphi_2 - 1,726 \psi &= 0, \\ -1,726 \varphi_1 - 1,726 \varphi_2 + 3,452 \psi &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.24) otrzymujemy:

$$\varphi_1 = -0,669 \frac{5}{EI}, \quad \varphi_2 = 0,0915 \frac{5}{EI}, \quad \psi = -0,2888 \frac{5}{EI}.$$

Ze wzoru (2.13) oraz przy wykorzystaniu znanego wzoru transformacyjnego dla pręta o stałym przekroju poprzecznym i z obliczonych wielkości odkształceń znajdujemy momenty przywęzłowe:

$$M_{1A} = 3,1494 Tm,$$

$$M_{1B} = -0,6564 Tm,$$

$$M_{12} = -2,4930 Tm,$$

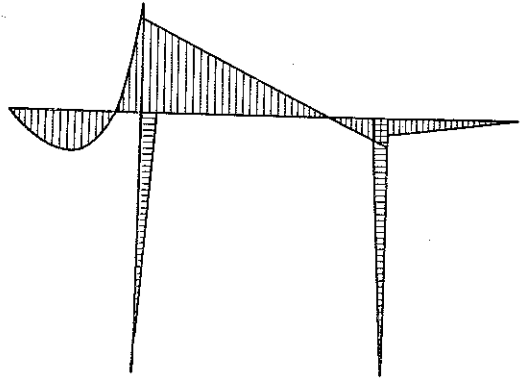
$$M_{21} = -0,9720 Tm,$$

$$M_{2C} = 0,6561 Tm,$$

$$M_{2D} = 0,3159 Tm.$$

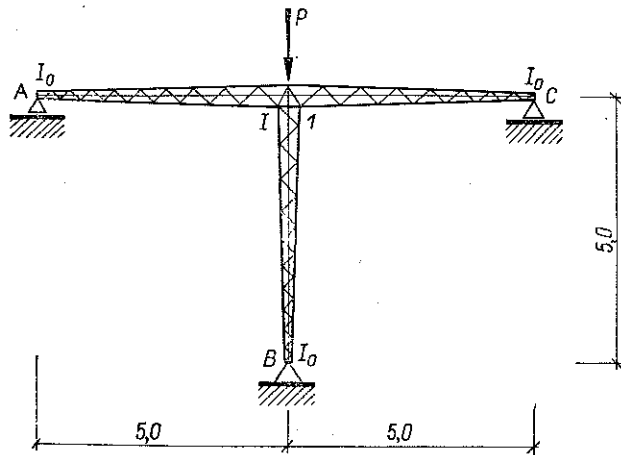
Moment w połowie rozpiętości pręta 1-A wynosi $M = 2,3315 Tm$.

Wykres momentów przedstawiono na rys. 19.



Rys. 19

Przykład 2. Rozważmy wyboczenie ustroju złożonego z prętów kratowych, przedstawionego na rys. 20. Momenty bezwładności przekrojów poprzecznych prętów zmieniają się według funkcji (2.1) od wartości I w węźle 1 do $I_0 = 0,0625 I$ przy podporach.



Rys. 20

Warunki równowagi zapisujemy następująco:

$$(3.25) \quad M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0, \quad T_{1B} = 0.$$

W oparciu o wzory (2.13) i (3.15) otrzymujemy

$$(3.26) \quad \begin{aligned} [2\kappa'(\mu) + \alpha'(\sigma, \mu)] \varphi_1 - \alpha'(\sigma, \mu) \psi &= 0, \\ -\alpha'(\sigma, \mu) \varphi_1 + \delta'(\sigma, \mu) \psi &= 0. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (2.2) i (2.14) znajdujemy

$$I_s = 0,25 I, \quad \mu_i = 2,0, \quad \mu_k = 0,5, \quad \kappa'(\mu) = 1,726.$$

Po podstawieniu obliczonego $\kappa'(\mu)$ do układu równań (3.26) i przyrównaniu do zera wyznacznika głównego otrzymujemy funkcję

$$(3.27) \quad f(\sigma) = 13,8092 \delta'(\sigma, \mu) + \alpha'(\sigma, \mu) \delta'(\sigma, \mu) - [\alpha'(\sigma, \mu)]^2 = 0,$$

która dla określonych wartości μ zależy tylko od wielkości σ .

Drogą prób, w oparciu o wzory (3.3), (3.5), (3.9), (3.16) i (3.17) znajdujemy $\sigma = 1,8$, dla którego $f(\sigma) = 14,4746$ oraz $\sigma = 2,0$, dla którego $f(\sigma) = -3,4512$. Interpolując liniowo otrzymujemy $\sigma = 1,9615$ spełniające równanie (3.27).

Zatem siła krytyczna obliczona w oparciu o wzór (3.3) wynosi

$$P_{kr} = 0,03850 EI.$$

Dla porównania wyników podajemy wielkość siły krytycznej, obliczonej przy założeniu stałych zastępczych momentów bezwładności przekrojów poprzecznych prętów określonych ze wzoru $I_z = \sqrt{I I_0}$,

$$P_{kr} = 0,0181 EI.$$

Otrzymana siła krytyczna jest o około 53% mniejsza w stosunku do siły krytycznej obliczonej w sposób ścisły. Dość znaczna różnica wyników występuje tu na skutek dużej zbieżności prętów o zmiennych sztywnościach zginania.

W przypadku obliczenia momentu zastępczego ze wzoru $I_z = (I + I_0)/2$ siła krytyczna wynosi

$$P_{kr} = 0,03855 EI$$

i jest ona większa o 1,3% w stosunku do siły obliczonej w sposób ścisły. Oczywiście ta bardzo mała różnica między obliczonymi wartościami jest tu przypadkowa.

4. Zakończenie

Przedstawiona praca stanowi kolejny etap szeroko pomyślanej rozprawy, w której autorzy zamierzają ująć szereg nowych i oryginalnych rozwiązań z zakresu ważnych dla praktyki inżynierskiej zagadnień ze statyki i stateczności sprężystej ustrojów, złożonych z elementów o różnych zmiennych sztywnościach zginania.

Następne przygotowane już do druku prace obejmą zastosowanie metody przemieszczeń do rozwiązywania zagadnień jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) ustrojów, złożonych z elementów o zmiennych przekrojach poprzecznych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN, Warszawa 1959.
- [2] W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, t. II, PWN, Warszawa 1960.
- [3] F. BLEICH, *Устойчивость металлических конструкций* (tłumaczenie z angielskiego), Moskwa 1959.
- [4] F. TÖLKE, *Über die Bemessung von Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt*, Bauingenieur, nr 29, Berlin 1930.
- [5] E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Zginanie i wyboczenie ustrojów ramowych złożonych z prętów pełnych o zmiennych przekrojach poprzecznych*, Arch. Inżyn. Łądow., 2, 1963.
- [6] E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Ramy z prętów o zmiennych przekrojach. Zginanie i wyboczenie*, Bibl. Inż. i Bud., 5 (1963).
- [7] E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Stability and bending of frames composed of bars with variable cross-sections*, Bull. Acad. Polon. Sci., 11, 1963.
- [8] E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Buckling and bending of frame structures consisting of latticed bars with variable bending rigidity*, Bull. Acad. Polon. Sci., 12 1963.
- [9] E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Ramy złożone ze zbieżnych prętów kratowych. Zginanie i wyboczenie*, Arch. Inżyn. Łądow., 4, 1963.

Резюме

ВОПРОС ИЗГИБА И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РАМ СОСТОЯЩИХ
ИЗ РЕШЕТЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ЖЕСТКОСТЯМИ ИЗГИБА

В работе вводятся формулы преобразования координат метода перемещений, дающих возможность решения задач касающихся потери устойчивости и изгиба упругих систем (многопролетных балок и рам), состоящих из часто встречаемых в инженерных конструкциях решетчатых стержней с переменной жесткостью изгиба.

Выведенные формулы можно использовать для определения сил в сечениях и критических нагрузок, в случае рам заводских цехов, рам кранов, мостовых кранов, мачт, мачт высокого направления, некоторых элементов мостов и во многих других конструкциях.

Summary

BENDING AND BUCKLING OF FRAMES COMPOSED OF LATTICE ELEMENTS
WITH VARIABLE BENDING RIGIDITY

Slope-deflection equations for the displacement method are derived thus enabling the solution of the buckling and bending problem of elastic structures (continuous beams and frames) composed of lattice elements with bending rigidities variable in usual ways.

The equations obtained may be used to determine section forces and critical loads for industrial halls, crane frames, rate cranes, masts, high tension towers, some bridge elements and many other structures.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dn. 30 stycznia 1964 r.