

PROCES PRZEJŚCIOWY W HYDRAULICZNYM UKŁADZIE NIELINIOWYM

STANISŁAW BEDNARZ, STANISŁAW KASPRZYK (KRAKÓW)

W układach hydraulicznych silnik jest sterowany zaworem lub suwakiem rozdzielczym bezpośrednio, lub dodatkowymi serwomechanizmami. W związku ze stratami w zaworach lub suwakach rozdzielczych występuje nieliniowa zależność ilości przepływającej cieczy od ciśnienia. W pracy rozpatrywany jest proces przejściowy w przypadku sterowania pozycyjnego. Zależność przebiegu procesu przejściowego od parametrów układu określono metodą topologiczną na płaszczyźnie fazowej.

Równanie ruchu silnika hydraulicznego sterowanego rozdzielaczem przedstawione jest w pracy [2] bez analizy procesu przejściowego, jaki zachodzi od chwili pojawienia się impulsu sterowania do chwili ustalenia się pracy silnika. Straty ciśnienia p_1 w zaworze rozdzielczym związane są z ilością cieczy Q zależnością $Q = k\sqrt{\Delta p_1}$, gdzie k charakteryzuje zawór rozdzielczy, zależny od kształtu otworów; jest on funkcją otwarcia zaworu; dla sterowania pozycyjnego można przyjąć $k = \text{const}$; ogólnie $k = k(t)$ oznacza sygnał wejściowy układu.

Oznaczając przez Δp_2 spadek ciśnienia między wejściem i wyjściem silnika możemy stan przejściowy układu opisać równaniem przepływu:

dla silnika obrotowego

$$(1) \quad k\sqrt{\Delta p_1} = d_m \dot{\theta} + L\Delta p_2 + \frac{V}{B} \frac{d}{dt} (\Delta p_2)$$

lub dla silnika «liniowego»

$$(2) \quad k\sqrt{\Delta p_1} = S\dot{y} + L\Delta p_2 + \frac{V}{B} \frac{d}{dt} (\Delta p_2),$$

gdzie $\dot{\theta}$ oznacza prędkość kątową wału silnika, \dot{y} prędkość tłoka względem cylindra w silniku «liniowym», L współczynnik upływności, B współczynnik ściśliwości cieczy z uwzględnieniem odkształcalności przewodów, S pole powierzchni tłoka silnika postępowego, d_m przemieszczenie silnika obrotowego (w jednostkach objętości).

Równanie (1) i (2) można przekształcić uwzględniając zależności:

dla silnika obrotowego

$$d_m \Delta p_2 = I\ddot{\theta},$$

dla silnika «liniowego»

$$S\Delta p_2 = m\ddot{y}.$$

W rezultacie tego przekształcenia otrzymuje się

$$(3) \quad k \sqrt{p - \frac{I}{d_m}} \ddot{\theta} = d_m \dot{\theta} + \frac{LI}{d_m} \ddot{\theta} + \frac{V}{B} \frac{I}{d_m} \ddot{\theta}$$

oraz

$$(4) \quad k \sqrt{p - \frac{m}{S}} \ddot{y} = S \dot{y} + \frac{Lm}{S} \ddot{y} + \frac{V}{B} \frac{m}{S} \ddot{y},$$

gdzie $p = \Delta p_1 + \Delta p_2$, I oznacza moment bezwładności części obrotowych silnika obrotowego oraz m masę tłoka i części z nim związanych dla silnika postępowego.

Równania (3) i (4) są równaniami trzeciego rzędu tego samego typu i przez podstawienie $\dot{y} = x$ można napisać je w postaci równania drugiego rzędu:

$$(5) \quad \ddot{x} + a_1 \dot{x} + b_1 x - c_1 \sqrt{d_1 - \dot{x}} = 0,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$a_1 = \frac{LB}{V}, \quad c_1 = \frac{kB}{V} \sqrt{\frac{S}{m}},$$

$$b_1 = \frac{S^2 B}{m}, \quad d_1 = \frac{pS}{m}$$

dla silnika liniowego. Przy zmianie m na I i S na d_m równanie (5) słuszne jest również dla silnika obrotowego.

Za pośrednictwem transformacji $\tau = b_1 t$ równanie (5) przyjmuje postać

$$(6) \quad \ddot{x} + a \dot{x} + x - c \sqrt{d - \dot{x}} = 0,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2}, \quad a = \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} = \frac{L}{S} \sqrt{\frac{Bm}{V}} > 0,$$

$$c = \frac{c_1}{\sqrt[4]{b_1^3}} = \frac{k}{S} \sqrt[4]{\frac{Bm}{V}} > 0, \quad d = \frac{d_1}{\sqrt{b_1}} = \frac{p}{\sqrt{\frac{Bm}{V}}} > 0, \quad k = \text{const.}$$

Równanie (6) można napisać w postaci układu dwóch równań

$$(7) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_2 - x_1 + c\sqrt{d - x_2},$$

gdzie $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$.

Układ (7) posiada jeden punkt osobliwy P o współrzędnych $X_1 = c\sqrt{d}$, $X_2 = 0$. Za pomocą transformacji

$$u_1 = X_1 - c\sqrt{d}, \quad u_2 = X_2$$

sprowadzamy punkt osobliwy P do początku układu współrzędnych $u_1 O_1 u_2$.

W układzie $u_1 O_1 u_2$ równania (7) mają postać

$$(8) \quad \dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = -au_2 - u_1 - c\sqrt{d} + c\sqrt{d-u_2}.$$

Układ równań (8) rozpatruje się dla $u_2 \leq d$. Wykresy rozwiązań układu (8) można zbadać metodą topologiczną przedstawioną w pracy [3].

O wykresie rozwiązania na płaszczyźnie fazowej $u_1 u_2$ decyduje funkcja Φ , która jest iloczynem skalarnym prędkości fazowej \mathbf{v} i promienia wodzącego ρ punktu, reprezentującego ruch układu na płaszczyźnie fazowej, oraz funkcja Ψ , która jest jedyną niezerową współrzędną iloczynu wektorowego $\rho \times \mathbf{v}$.

Iloczyn skalarny Φ wynosi

$$(9) \quad \Phi = u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 = -u_2 (au_2 + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2}),$$

współrzędna zaś iloczynu wektorowego Ψ wyraża się za pomocą wzoru

$$(10) \quad \Psi = u_1 \dot{u}_2 - \dot{u}_1 u_2 = -(u_1^2 + u_2^2 + au_1 u_2 + c\sqrt{d}u_1 - cu_1 \sqrt{d-u_2}).$$

Funkcja Φ zanika tylko dla $u_2 = 0$, a poza tym jest zawsze ujemna, rys. 1.

Wszystkie rozwiązania zbliżają się do początku układu $u_1 O_1 u_2$, przecinając oś u_1 pod kątem prostym.

Istotnym zagadnieniem jest określenie warunków na to, aby proces przejściowy zanikał bez oscylacji naokoło położenia równowagi. Warunki te można ustalić po zbadaniu znaku funkcji Ψ oraz krzywych, wzdłuż których zanika ta funkcja na płaszczyźnie $u_1 O_1 u_2$.

Równanie $\Psi = 0$, tj. równanie

$$(11) \quad u_1^2 + u_1 (au_2 + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2}) + u_2^2 = 0,$$

można rozwiązać względem u_1 :

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta &= (au_2 + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2})^2 - 4u_2^2 = \\ &= [u_2(a-2) + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2}] [u_2(a+2) + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2}], \\ \Delta &= f(u_2) \varphi(u_2), \end{aligned}$$

gdzie

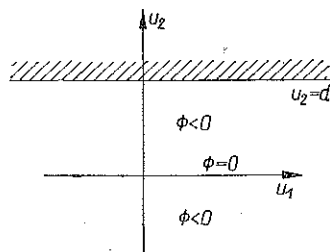
$$f(u_2) = u_2(a-2) + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2},$$

$$\varphi(u_2) = u_2(a+2) + c\sqrt{d} - c\sqrt{d-u_2}.$$

Funkcje

$$u_1^{(1)} = \frac{-au_2 - c\sqrt{d} + c\sqrt{d-u_2} + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$u_1^{(2)} = \frac{-au_2 - c\sqrt{d} + c\sqrt{d-u_2} - \sqrt{\Delta}}{2}$$



Rys. 1

mają wspólny obszar określoności:

$$u_2 \leq d, \quad \Delta \geq 0.$$

Należy zbadać, kiedy spełnione są warunki

$$\Delta = f(u_2) \varphi(u_2) \geq 0,$$

$$\varphi(u_2) = 0 \quad \text{dla} \quad u_2 = 0,$$

$$\varphi(u_2) > 0 \quad \text{dla} \quad u_2 > 0,$$

$$\varphi(u_2) < 0 \quad \text{dla} \quad u_2 < 0.$$

Przy założeniu, że $0 < a < 2$, co jest bardzo często słuszne ze względów fizykalnych, zbadano przebieg funkcji $f(u_2)$. Wyodrębniono przy tym pięć przypadków.

I. Jeśli

$$(13) \quad \frac{c}{\sqrt{d}} < 2 - a < 2,$$

to $\Delta \geq 0$ tylko dla $u_2 = 0$. Funkcja Ψ zanika w początku układu O_1 . Wykresy rozwiązań przedstawia rys 2a.

II. Jeżeli zachodzi zależność:

$$(14) \quad 2 - a = \frac{c}{\sqrt{d}},$$

to $\Delta \geq 0$ dla $u_2 = 0$ i $u_2 = d$. Funkcja Ψ zanika w początku układu O_1 i w punkcie $F(d, -ad - c\sqrt{d})$. Wykres rozwiązań przedstawia rys. 2b.

III. Jeśli

$$(15) \quad \frac{c}{2\sqrt{d}} < 2 - a < \frac{c}{\sqrt{d}},$$

to $\Delta \geq 0$ dla $u_2 \in (\dot{u}_2, d)$ i $u_2 = 0$,

gdzie

$$\dot{u}_2 = 2 \left(\frac{c}{2-a} \right)^2 \sqrt{d} \left(\frac{c}{2\sqrt{d}} + 2 - a \right).$$

Zmiana funkcji Ψ i wykresy rozwiązań przedstawione są na rys. 2c.

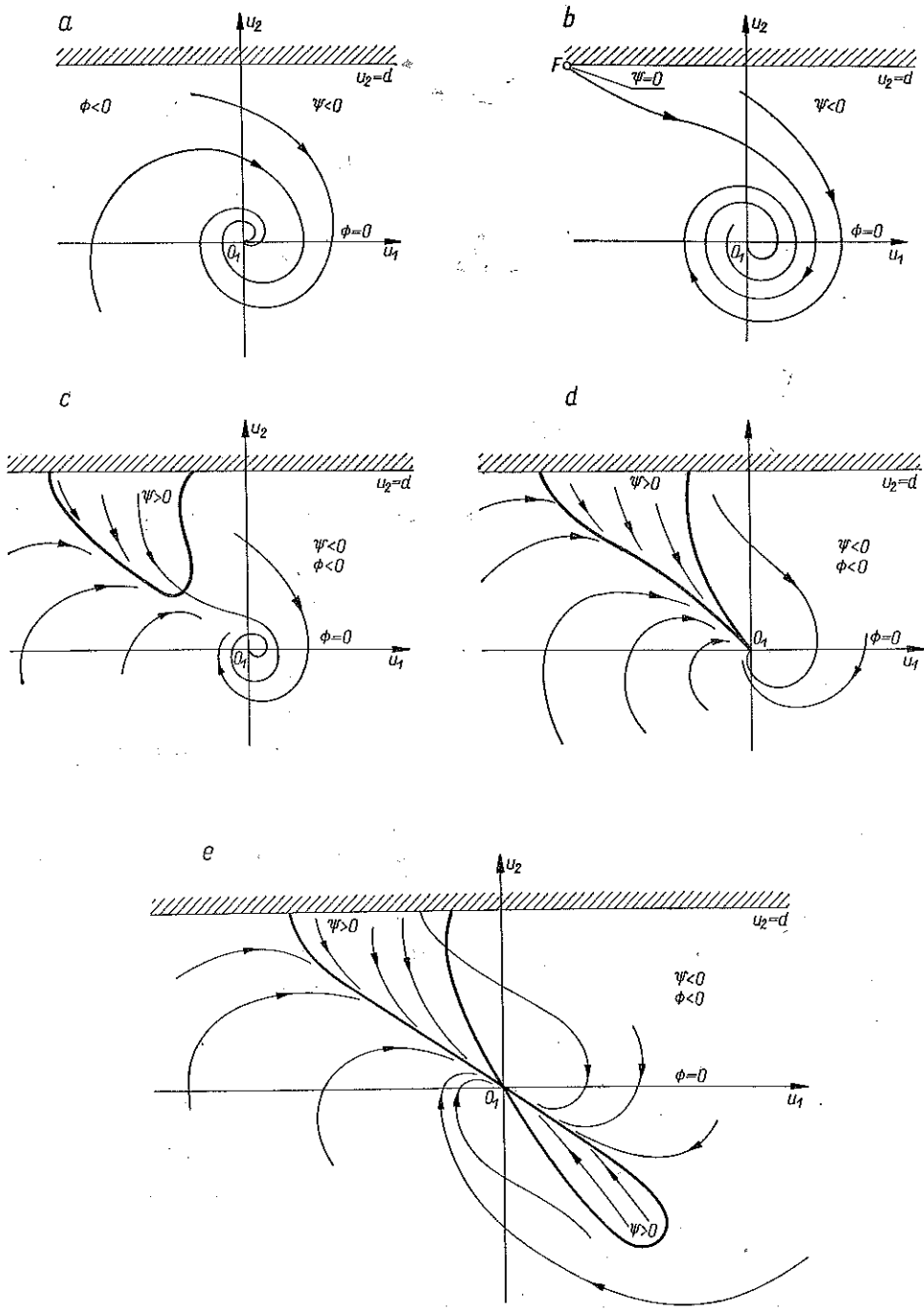
IV. Jeśli

$$(16) \quad \frac{c}{2\sqrt{d}} = 2 - a < 2,$$

to $\Delta \geq 0$ dla $u_2 \in [0, d]$. Krzywa $\Psi = 0$ ma ostrze w punkcie O_1 . Wykres y rozwiązań przedstawia rys. 2d.

V. Jeśli spełnione są warunki

$$(17) \quad 0 < 2 - a < \frac{c}{2\sqrt{d}},$$



Rys. 2

to otrzymuje się $\Delta \geq 0$ dla $u_2 \in [\hat{u}_2, d]$,

gdzie

$$\hat{u}_2 = 2 \left(\frac{c}{2-a} \right)^2 \sqrt{d} \left(-\frac{c}{2\sqrt{d}} + 2 - a \right).$$

Punkt O_1 jest punktem rozgałęzienia krzywej $\Psi = 0$. Zmiennosc funkcji Ψ oraz wykres rozwiązań przedstawia rys. 2e. Jeśli przyjąć założenie

$$(18) \quad a > 0,$$

to $\Delta \geq 0$ dla $u_2 \in [\bar{u}_2, d]$, gdzie

$$\bar{u}_2 = -\frac{c\sqrt{d} + c^2}{a-2}.$$

Wykres rozwiązań pokrywa się z wykresem przedstawionym na rys. 2e. Jak wynika z rys. 2e, przy spełnieniu warunku (17) lub (18) jest zapewniony ruch bez oscylacji ze względu na u_1 .

Warunek (17) $0 < 2 - a < c/2\sqrt{d}$ można przedstawić następująco:

$$(19) \quad \left(\frac{k}{2\sqrt{p}} + L \right) a > 2, \quad La < 2,$$

a warunek (18) w postaci

$$(20) \quad La > 2,$$

gdzie a oznacza współczynnik charakteryzujący układ hydrauliczny i silnik.

Dla silnika «postępowego»

$$a = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{Bm}{V}},$$

a dla obrotowego

$$a = \frac{1}{d_m} \sqrt{\frac{BI}{V}}.$$

Przy powrocie do zmiennych wyjściowych, np. dla silnika «postępowego», otrzymuje się

$$\dot{y} = x_1 = u_1 + c\sqrt{d}, \quad \ddot{y} = \sqrt{b_1} x_2 = \sqrt{b_1} u_2.$$

Na podstawie rys. 2e można stwierdzić, że przy zapewnieniu warunków (19) i (20) ruch ustala się przy prędkości $\dot{y} = c\sqrt{d}$ bez oscylacji około tej wartości.

Literatura cytowana w tekście

- [1] С. Н. Кожевников, *Аппаратура и механизмы гидроинervo и электроавтоматики металлургических машин*, Москва 1961.
 [2] J. C. GILLE, M. J. PELEGRIN and P. DECAULNE, *Feedback Control Systems*, London 1959 r.
 [3] W. BOGUSZ, *Determination of stability regions of dynamic non-linear systems*, Arch. Mech. Stos., 6, 11 (1959).

Резюме

ПЕРЕХОДНОЙ ПРОЦЕСС В ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

В работе проводится анализ переходного процесса сервомеханизма описанного дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + b_1 x - c_1 \sqrt{d_1 - \dot{x}} = 0,$$

где a_1, b_1, c_1, d_1 — постоянные.

Зависимость переходного процесса от параметров системы определяется топологическим методом на фазовой плоскости. Даются зависимости между параметрами в случае, когда система является стабильной, а также условия, в случае системы без осцилляции.

Summary

TRANSITION PROCESS IN A NON-LINEAR HYDRAULIC SYSTEM

This paper contains an analysis of the transition process of a servo as described by the differential equation

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + b_1 x - c_1 \sqrt{d_1 - \dot{x}} = 0,$$

where a_1, b_1, c_1, d_1 are constants.

The dependency of the transitory process on the parameters of the system are determined by means of a topologic method in the phase plane. Equations are obtained interrelating the parameters in the case where the system is stable and the conditions to be satisfied if no oscillation is to take place.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

Praca została złożona w Redakcji dn. 28 stycznia 1964 r.