

30 ca/47/3		
v/pl. 9 STY 65		
S.	101.	i. W.
L. B.		my

**EKSTREMUM PEWNEGO FUNKCJONAŁU LINIOWEGO
Z JEDNOSTRONNYM WARUNKIEM POBOCZNYM I JEGO INTERPRETACJA
W MECHANICE KONSTRUKCJI OKRĘTOWYCH**

JÓZEF WIĘCKOWSKI (GDAŃSK)

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

- x, ξ, η liczby rzeczywiste, zmienne niezależne, elementy pola funkcji,
 $p(x), z(x), \zeta(x)$ wartości funkcji w punkcie x ,
 $\{p(x)\}, \{z(x)\}, \{\zeta(x)\}$ funkcje jednej zmiennej, elementy pola funkcjonału, zmienne niezależne funkcjonału,
 $\chi(\{p(x)\}), J(\{p(x)\})$ wartości funkcjonałów, funkcjonały,
 Np nośnik funkcji $\{p(x)\}$,
 Π, Γ zbiory funkcji, pola funkcjonałów,
 $I_{ab} \equiv [a, b]$ przedziały domknięte,
 $\{P_{z, \Gamma}^+(x)\}$ ekstremala funkcjonału $\chi(\{p(x)\})$ w zbiorze Γ , funkcji $\{p(x)\}$ dla integralnego maksimum,
 $\{P_{z, \Gamma}^-(x)\}$ ekstremala funkcjonału $\chi(\{p(x)\})$ w zbiorze Γ funkcji $\{p(x)\}$ dla integralnego minimum,
 $\Pi \cup \Gamma$ suma zbiorów Π i Γ ,
 $\Pi \cap \Gamma$ iloczyn zbiorów Π i Γ ,
 $\Pi \setminus \Gamma$ różnica zbiorów Π i Γ ,
 $\Pi \subset \Gamma$ jest podzbiorem Γ .

1

Podstawowym czynnikiem w ocenie sił wewnętrznych kadłuba okrętu przy zgięciu ogólnym jest właściwe określenie zbioru możliwych obciążeń zewnętrznych okrętu w procesie eksploatacji, wynikających między innymi z istnienia różnych stanów załadowania, stanów zapasów, balastu i obciążenia ciężarem konstrukcji i wyposażenia.

W pracach [1-5] rozpatrywano szereg problemów tego rodzaju dających możliwość stosunkowo szybkiego obliczenia obwiednic sił wewnętrznych dla uproszczonego modelu kadłuba o burtach prostopadłych (kadłub walcowy) i ładunków stałych oraz płynnych jednorodnych, [1, 2 i 5], i niejednorodnych, [3 i 4].

Dzięki założeniu walcowego kadłuba problem jest liniowy i podlega zasadzie superpozycji, co znacznie ułatwia zarówno pojęciowe, jak i numeryczne uporządkowanie zadań. W szczególności otrzymuje się wtedy np. całkowitą niezależność

momentu gnącego od fali i momentu gnącego od ładunku i zapasów, jeżeli dodatkowo przyjmijemy statyczny rozkład ciśnień w wodzie.

Wymienione wyżej opracowania rozpatrują głównie problem ekstremum sił wewnętrznych w zbiorze stanów załadowania wynikających z ustalonej geometrii ładowni i wszystkich możliwych stanów pośrednich oraz dla ładunku nieściśliwego i o nieograniczonej podzielności. Takie zbiory stanów załadowania zawierają również elementy nie występujące w praktyce. Np. stany załadowania dające przegłębienie na dziób nie są dopuszczalne chociażby ze względu na pracę śruby.

Niniejsza praca dotyczy pewnej klasy problemów wytrzymałościowych okrętu ważnych zarówno dla rachunków kontrolnych jak i projektowych, które sprowadzają się do zagadnienia ekstremum funkcjonału liniowego określanego typu w pewnym podzbiorze wszystkich możliwych stanów załadowania wyznaczonym przez dodatkowe warunki, tzn. warunki poboczne o konkretnej interpretacji technicznej określające pewne właściwości eksploatacyjne konstrukcji.

2

Niech będzie dany walcowy kadłub statku (o burtach prostopadłych) odniesiony do układu trzech osi x, y, z tak, że oś x pokrywa się zawsze z krawędzią przecięcia płaszczyzny symetrii statku z powierzchnią swobodną wody, oś z leży w płaszczyźnie symetrii statku, jest skierowana w dół, a oś y jest prostopadła do osi xz . Początek układu współrzędnych przyjmijmy tak, aby był spełniony warunek

$$(2.1) \quad \int_{L_1}^{L_2} x k(x) dx = 0,$$

gdzie L_1 i L_2 oznaczają odpowiednio współrzędne rufy i dziobu, $k(x) = \gamma_w B(x)$ sztywność hydrostatyczną podłoża, γ_w ciężar właściwy wody oraz $B(x)$ szerokość statku.

Niech $\varphi(x)$ będzie obciążeniem ciągłym od stałych ciężarów kadłuba, natomiast $F(x)$ obciążeniem ciągłym od ciężarów zmiennych. Parametry zginania kadłuba możemy wtedy przedstawić w następującej postaci:

linia ugięcia lub zanurzenia

$$(2.2) \quad v(x) = ax + \beta,$$

gdzie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{M_0}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_2} \int_{L_1}^{L_2} \xi F(\xi) d\xi, & \beta &= \frac{Q_0}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_1} \int_{L_1}^{L_2} F(\xi) d\xi, \\ Q_0 &= \int_{L_1}^{L_2} \varphi(\xi) d\xi, & M_0 &= \int_{L_1}^{L_2} \xi \varphi(\xi) d\xi, \\ \kappa_1 &= \int_{L_1}^{L_2} k(\xi) d\xi, & \kappa_2 &= \int_{L_1}^{L_2} \xi^2 k(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Moment gnący w punkcie x

$$(2.4) \quad M(x) = \int_{L_1}^{L_2} \varphi(\xi) m(\xi, x) d\xi + \int_{L_1}^{L_2} F(\xi) m(\xi, x) d\xi,$$

gdzie $m(\xi, x)$ jest funkcją wpływu postaci

$$(2.5) \quad m(\xi, x_0) = \begin{cases} x_0 - \xi - \xi \int_{L_1}^{x_0} (x_0 - \eta) \frac{\eta k(\eta)}{\kappa_2} d\eta - \int_{L_1}^{x_0} (x_0 - \eta) \frac{k(\eta)}{\kappa_2} d\eta, & \text{jeśli } \xi \leq x_0, \\ -\xi \int_{L_1}^{x_0} (x_0 - \eta) \frac{\eta k(\eta)}{\kappa_2} d\eta - \int_{L_1}^{x_0} (x_0 - \eta) \frac{k(\eta)}{\kappa_1} d\eta, & \text{jeśli } x_0 \leq \xi. \end{cases}$$

Podobnie można również przedstawić inne parametry zginania, w których część zależna od ciężarów zmiennych będzie podobnie jak zanurzenie $v(x)$ w punkcie x , kąt przegięcia α lub moment gnący postaci

$$(2.6) \quad J(\{F(\xi)\}) = \int_{L_1}^{L_2} j(\xi) F(\xi) d\xi,$$

gdzie $j(\xi)$ jest odpowiednią funkcją wpływu. Zagadnieniem ekstremów takich funkcjonalów w podzbiorach zbioru

$$(2.7) \quad \Gamma = \{F(\xi), 0 \leq F(\xi) \leq F_0(\xi)\},$$

zajmiemy się w dalszej części pracy. We wzorze tym $F_0(\xi)$ jest daną funkcją odpowiadającą obciążeniu przy wypełnianiu wszystkich pomieszczeń ładunkowych ładunkiem jednorodnym (lub zbiorników zapasami), a każda z funkcji $F(\xi) \in \Gamma$ jest całkowalna w sensie Riemanna.

3

Zajmiemy się szczególnymi podzbiorami Π zbioru Γ określonymi przy pomocy funkcjonalów typu (2.6) w następujący sposób.

Niech będzie dany funkcjonal liniowy

$$(3.1) \quad \chi(\{p(x)\}) = \int_{L_1}^{L_2} \kappa(x) p(x) dx$$

określony w zbiorze

$$(3.2) \quad \Gamma = \{p(x), 0 \leq p(x) \leq p_0(x)\},$$

gdzie $\kappa(x)$ oznacza funkcję określoną i przedziałami ciągłą w $[L_1, L_2]$, a $p(x)$ określone i całkowalne w sensie Riemanna w tym przedziale. Określmy podzbiór Π zbioru Γ następująco:

$$(3.3) \quad \Pi = \{p(x), \{p(x)\} \in \Gamma, B \leq \chi(\{p(x)\}) \leq A\},$$

gdzie A i B są to dane liczby. Oczywiście w praktyce projektowej czy eksploatacyjnej okrętu zdarzają się również przypadki, w których zachodzi konieczność wyznaczenia podzbioru Π ciągiem skończonym nierówności narzuconych na różne funkcjonały liniowe. Zbiór Π jest wtedy określony następująco:

$$(3.4) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, B_\sigma \leq \chi_\sigma(\{p(x)\}) \leq A_\sigma, \sigma = 1, 2, \dots, N \},$$

gdzie obydwie ciągi liczb $\{A_\sigma\}$ i $\{B_\sigma\}$ oraz ciąg funkcjonałów liniowych $\{\chi_\sigma\}$, $\sigma = 1, 2, \dots, N$ są dane.

Nie badając na razie warunków, przy których zbiór Π np. pokrywa się ze zbiorem Γ lub jest pusty, co ma niewątpliwie znaczenie praktyczne, gdyż rozstrzyga w pierwszym przypadku o zupełnie nieistotnych dla konstrukcji żądaniach, natomiast w drugim o niemożliwości zrealizowania konstrukcji o żądanych własnościach. Przejdziemy do przedstawienia szeregu przykładów najprostszych warunków pobocznych o konkretnej interpretacji technicznej w okrętownictwie.

W przypadku przewozu masowego ładunku jednorodnego, np. rudy, nośność statku wyczerpuje się przed pojemnością ładowni i końcowy stan załadowania nie jest jednoznaczny. Funkcjonałem χ jest tutaj ciężar przewożonego ładunku, tzn.

$$(3.5) \quad \chi(\{p(x)\}) = \int_{L_1}^{L_2} p(x) dx,$$

natomiast zbiór Π będzie

$$(3.6) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, 0 \leq \int_{L_1}^{L_2} p(x) dx \leq P_n < \int_{L_1}^{L_2} P_0(x) dx,$$

gdzie P_n oznacza nośność statku. Pytamy zwykle w tym przypadku o ekstremum sił wewnętrznych w zbiorze Π .

Często może się również zdarzyć problem konieczności ograniczenia sił wewnętrznych w kadłubie podczas eksploatacji. Stawiamy wtedy pytanie, jaki maksymalny ładunek można przewieźć danym okrętem przy ograniczeniu momentu gnącego (od góry i od dołu) w wielu punktach x_i . Ciąg funkcjonałów χ_σ będzie wtedy

$$(3.7) \quad \chi_\sigma(\{p(\xi)\}) = \int_{L_1}^{L_2} m(\xi, x_\sigma) p(\xi) d\xi,$$

natomiast zbiór Π będzie

$$(3.8) \quad \Pi \leq \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, \underline{M}_\sigma \leq \int_{L_1}^{L_2} m(\xi, x_\sigma) p(\xi) d\xi \leq \bar{M}_\sigma, \sigma = 1, 2, \dots, N \},$$

gdzie ciągi $\{\underline{M}_\sigma\}$ i $\{\bar{M}_\sigma\}$ są dane.

Po wyznaczeniu ekstremalnego ładunku Q_{\max} możemy rozpatrzeć ekstremum momentu w każdym innym punkcie $x_0 \neq x_\sigma$, $\sigma = 1, 2, \dots, N$ w podzbiorze

$$(3.9) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, \bar{M}_\sigma \leq \int_{L_1}^{L_2} m(\xi, x_\sigma) p(\xi) d\xi \leq \bar{M}_\sigma, \sigma = 1, 2, \dots, N, 0 \leq \int_{L_1}^{L_2} p(\xi) d\xi \leq Q_{\max} \},$$

otrzymując obwiednię momentów przechodzącą przez dane punkty.

Jednym z istotnych warunków dobrej pracy śruby, a zatem pewnych właściwości morskich statku, jest zapewnienie minimalnego zanurzenia rufy. Warunek ten może również eliminować ze zbioru znaczną część stanów załadowania. Sformułujemy ten warunek dla dowolnego przekroju x kadłuba żądając dodatkowo, aby był on spełniony dla każdego stanu załadowania $\{p(x)\}$ przy wszelkich stanach zapasów $\{z(x)\}$ ustalonym obciążeniu $\{\varphi(x)\}$ od konstrukcji i wyposażenia.

Niech zbiór wszystkich stanów załadowania Γ będzie

$$(3.10) \quad \Gamma = \{ \{p(x)\}, 0 \leq p(x) \leq p_0(x) \},$$

natomiast zbiór wszystkich stanów zapasów

$$(3.11) \quad Z = \{ \{z(x)\}, 0 \leq z(x) \leq z_0(x) \}.$$

Zanurzenie w dowolnym punkcie x_i będzie zgodne z (2.3), gdzie

$$(3.12) \quad F(x) = p(x) + z(x).$$

Dzięki liniowości zadania

$$(3.13) \quad v(x_i) = \frac{M_0}{\kappa_2} x_i + \frac{Q_0}{\kappa_1} + \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) z(\xi) d\xi,$$

przy czym

$$(3.14) \quad \zeta(\xi) = \frac{\xi x_i}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_1}.$$

Oznaczamy minimalne narzucone zanurzenie w punkcie x_i przez v_{\min} . Mamy wtedy

$$(3.15) \quad v(x_i) \geq v_{\min}.$$

Podstawiając (3.13) do (3.15), otrzymujemy łatwo

$$(3.16) \quad \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) p(\xi) d\xi \geq v_{\min} - \frac{M_0}{\kappa_2} x_i - \frac{Q_0}{\kappa_1} - \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) z(\xi) d\xi.$$

Ponieważ warunek ten ma być spełniony dla każdej funkcji ustalonej $\{p(x)\} \in \Gamma$ przy wszelkich $\{z(x)\} \in Z$, zatem potrzeba i wystarcza, aby był spełniony dla przypadku, gdy funkcjonal

$$(3.17) \quad \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) z(\xi) d\xi,$$

osiąga minimum w Z .

Zamiast (3.16) otrzymujemy zatem

$$(3.18) \quad \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) p(\xi) d\xi \geq A,$$

gdzie

$$(3.19) \quad A = v_{\min} - \frac{M_0}{\kappa_2} x_1 - \frac{Q_0}{\kappa_1} - \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 - \operatorname{sgn} \zeta(\xi)}{2} z_0(\xi) d\xi.$$

Wprowadzając zatem oznaczenie

$$(3.20) \quad \chi(\{p(\xi)\}) \equiv \int_{L_1}^{L_2} \zeta(\xi) p(\xi) d\xi,$$

możemy określić zbiór Π następująco:

$$(3.21) \quad \Pi = \{ \{p(\xi)\}, \{p(\xi)\} \in \Gamma, \chi(\{p(\xi)\}) \leq A \}$$

i rozpatrywać ekstremum innego interesującego nas parametru w tym zbiorze.

Analogicznie można wyprowadzić warunki dla określenia zbioru Π ograniczonego tangensa kąta przegłębienia α , który np. w procesie eksploatacji na morzu nie może prowadzić do dużych przegłębień na dziób. Napiszemy tutaj również ten warunek dla wszelkich stanów załadowania $\{p(x)\}$ i wszelkich stanów zapasów $\{z(x)\} \in Z$ analogicznie jak w poprzednim przypadku.

Przyjmując dolne i górne ograniczenie tangensa kąta przegłębienia α_1 i α_2 i korzystając z równań (2.2) i (2.3) otrzymujemy łatwo w podobny sposób jak poprzednio

$$(3.22) \quad \underline{A} \leq \chi(\{p(\xi)\}) \leq \bar{A},$$

gdzie

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \chi(\{p(\xi)\}) &\equiv \int_{L_1}^{L_2} \xi p(\xi) d\xi, \\ \underline{A} &= \kappa_2 \alpha_1 - M_0 - \int_{L_1}^{L_2} \xi z_0(\xi) d\xi, \\ \bar{A} &= \kappa_2 \alpha_2 - M_0 - \int_0^{L_2} \xi z_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Podzbiór Π będzie zatem określony w następujący sposób:

$$(3.24) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, \underline{A} \leq \chi(\{p(x)\}) \leq \bar{A} \}.$$

Ważnym zagadnieniem w szczególności dla statków śródlądowych jest problem wytrzymałości dna na obciążenie ładunkiem i obciążenie hydrostatyczne. Wyznamy zbiór Π dla przypadku ograniczonego obciążenia dna danego w przedziale $[x_1, x_2]$; oznaczając przez $h(x)$ ciężar własny dna możemy zgodnie z p. 2 napisać obciążenie ciągle dna w punkcie $x \in [x_1, x_2]$ w postaci

$$(3.25) \quad q(x) = p(x) + h(x) - k(x) \vartheta(x),$$

gdzie zakładamy, że w rozpatrywanym przedziale nie ma np. zbiorników z zapasami.

Niech Q oznacza całkowite obciążenie dna. Dokonując podstawień zgodnie z p. 2 otrzymujemy łatwo

$$(3.26) \quad Q = \int_{x_1}^{x_2} p(\xi) d\xi + \int_{x_1}^{x_2} h(\xi) d\xi - \int_{x_1}^{x_2} k(\xi) \left(\frac{M_0}{\kappa_2} \xi + \frac{Q_0}{\kappa_1} \right) d\xi - \\ - \int_{L_1}^{L_2} \left[\int_{x_1}^{x_2} k(x) \left(\frac{\xi x}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_1} \right) dx \right] (p(\xi) + z(\xi)) d\xi.$$

Wprowadźmy następujące funkcje wpływu:

$$(3.27) \quad u(\xi) = \begin{cases} - \int_{x_1}^{x_2} k(x) \left(\frac{\xi x}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_1} \right) dx, & \text{jeśli } \begin{matrix} \xi \in [L_1, L_2], \\ \xi \in [x_1, x_2]; \end{matrix} \\ 1 - \int_{x_1}^{x_2} k(x) \left(\frac{x\xi}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_1} \right) dx, & \text{jeśli } \xi \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

oraz

$$(3.28) \quad w(\xi) = \int_{x_1}^{x_2} k(x) \left(\frac{x\xi}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_1} \right) dx.$$

Możemy napisać (3.28) w postaci

$$(3.29) \quad Q = \int_{L_1}^{L_2} u(\xi) P(\xi) d\xi + \int_{L_1}^{L_2} w(\xi) z(\xi) d\xi + \int_{x_1}^{x_2} a(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$(3.30) \quad a(\xi) = h(\xi) - k(\xi) \left(\frac{M_0 \xi}{\kappa_2} + \frac{Q_0}{\kappa_1} \right).$$

Narzucając teraz dolne i górne ograniczenie obciążenia dna \underline{Q}_0 i \overline{Q}_0 dla każdej funkcji $\{p(x)\}$ przy wszelkich $\{z(x)\} \in Z$ otrzymujemy następujący podzbiór Π zbioru Γ :

$$(3.31) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, A \leq \chi(\{p(x)\}) \leq B \},$$

gdzie

$$(3.32) \quad \chi(\{p(\xi)\}) \equiv \int_{L_1}^{L_2} u(\xi) p(\xi) d\xi, \\ A = \overline{Q}_0 - \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 - \operatorname{sgn} w(\xi)}{2} z_0(\xi) d\xi - \int_{x_1}^{x_2} a(\xi) d\xi, \\ B = \overline{Q}_0 - \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn} w(\xi)}{2} z_0(\xi) d\xi - \int_{x_1}^{x_2} a(\xi) d\xi.$$

Problem powyższy jest istotny również z innego punktu widzenia. Wiadomo z praktyki okrętowej, że obliczenia wytrzymałości dna dokonuje się niezależnie od zgięcia ogólnego i dla zgięcia dna narzuca się zupełnie osobne kryteria. W ujęciu przedstawionym w niniejszej pracy kryterium wytrzymałości dna może być połączone z zagadnieniem wytrzymałości ogólnej. Zbudujemy ogólny warunek pomocniczy dla tego przypadku obejmujący zarówno problem dla statków morskich jak również dla statków śródlądowych.

Niech $\{p(\xi)\}$ będzie obciążeniem od ładunku $\{p(\xi)\} \in \Gamma$, $\{z(\xi)\}$ obciążeniem od zapasów $\{z(\xi)\} \in Z$, $\{\varphi(\xi)\}$ stałym obciążeniem konstrukcji i wyposażenia, $m(\xi, x)$ funkcją wpływu momentu dla statku w przekroju x oraz $w_k(x)$ wskaźnikiem przekroju kadłuba dla dna. Wtedy naprężenia rozciągające lub ściskające wzdłużnik denny będą zależne od zgięcia ogólnego w przekroju x :

$$(3.33) \quad \sigma_1 = \frac{M(x)}{W_k(x)} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m(\xi, x)}{W_k(x)} [p(\xi) + z(\xi) + \varphi(\xi)] d\xi.$$

Ponieważ rozpatrujemy tutaj jedynie symetryczne obciążenia dna względem płaszczyzny symetrii statku, przeto zadanie jest jednowymiarowe, a współrzędna y będzie jedynie parametrem.

Niech $\{h(\xi)\}$ oznacza stałe obciążenie dna jego ciężarem konstrukcji i wyposażenia, $r(\xi, x, y)$ — funkcję wpływu momentu dla dna w punkcie o współrzędnych x, y , $V(\xi, x)$ — funkcję wpływu zanurzenia w przekroju x oraz $W_r(x, y)$ wskaźnik przekroju dla wybranych włókien skrajnych wzdłużnika. Niech wreszcie $\{p(\xi)\}$ i $\{z(\xi)\}$ obciążają dno bezpośrednio. Wtedy naprężenia we wzdłużniku dennym wyniosą

$$(3.34) \quad \sigma_2 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{r(\xi, x, y)}{W_R(x, y)} \left\{ p(\xi) + z(\xi) + h(\xi) - \int_{L_1}^{L_2} V(\eta, \xi) [p(\eta) + z(\eta) + \varphi(\eta)] d\eta \right\} d\xi,$$

co po uporządkowaniu daje

$$(3.35) \quad \int_{L_1}^{L_2} \left\{ \frac{r(\xi, x, y)}{W_R(x, y)} - \int_{L_1}^{L_2} \frac{r(\eta, x, y)}{W_R(x, y)} k(\eta) V(\xi, \eta) d\eta \right\} (p(\xi) + z(\xi)) d\xi + \int_{L_1}^{L_2} \frac{r(\xi, x, y)}{W_R(x, y)} h(\xi) d\xi - \int_{L_1}^{L_2} \left[\int_{L_1}^{L_2} \frac{r(\eta, x, y)}{W_R(x, y)} k(\eta) V(\xi, \eta) d\eta \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Przy sztywnościach wzdłużników spotykanych w konstrukcjach okrętowych obydwa zadania podlegają zasadzie superpozycji, tzn. całkowite naprężenia we wzdłużniku w miejscu x, y i we włóknach skrajnych wynoszą $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

lub

$$(3.36) \quad \sigma = \int_{L_1}^{L_2} u_0(\xi, x, y) p(\xi) d\xi + \int_{L_1}^{L_2} u_0(\xi, x, y) z(\xi) d\xi + \\ + \int_{L_1}^{L_2} u_1(\xi, x, y) \varphi(\xi) d\xi + \int_{L_1}^{L_2} u_2(\xi, x, y) h(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$(3.37) \quad u_0(\xi, x, y) = \frac{m(\xi, x)}{W_k(x)} + \frac{r(\xi, x, y)}{W_R(x, y)} - \int_{L_1}^{L_2} \frac{r(\eta, x, y)}{W_R(x, y)} k(\eta) V(\xi, \eta) d\eta, \\ u_1(\xi, x, y) = \frac{m(\xi, x)}{W_k(x)} - \int_{L_1}^{L_2} \frac{r(\eta, x, y)}{W_R(x, y)} k(\eta) V(\xi, \eta) d\eta, \\ u_2(\xi, x, y) = \frac{r(\xi, x, y)}{W_R(x, y)}.$$

Możemy teraz narzucić łączny warunek, aby wypadkowe naprężenia σ w dnie mieściło się w granicach danych naprężeń dopuszczalnych, tzn. aby

$$(3.38) \quad \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma},$$

gdzie $\bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ są dane. Zakładając, że warunek ten ma być spełniony dla każdej ustalonej funkcji $\{p(\xi)\}$ w zbiorze wszelkich $z(\xi) \in Z$ mamy

$$(3.39) \quad \underline{A} \leq \chi(\{p(\xi)\}) \leq \bar{A},$$

gdzie

$$(3.40) \quad \chi(\{p(\xi)\}) = \int_{L_1}^{L_2} u_0(\xi, x, y) p(\xi) d\xi.$$

Natomiast

$$(3.41) \quad \bar{A} = \bar{\sigma} - \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn} u_0}{2} u_0(\xi, x, y) z_0(\xi) d\xi - \\ - \int_{L_1}^{L_2} [u_1(\xi, x, y) \varphi(\xi) + u_2(\xi, x, y) h(\xi)] d\xi,$$

$$(3.42) \quad \bar{A} = \bar{\sigma} - \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 - \operatorname{sgn} u_0}{2} u_0(\xi, x, y) z_0(\xi) d\xi - \\ - \int_{L_1}^{L_2} [u_1(\xi, x, y) \varphi(\xi) + u_2(\xi, x, y) h(\xi)] d\xi.$$

Istnieje również wiele zagadnień, które wymagają spełnienia warunków pobocznych w postaci nieliniowej. Tak np. łatwo wykazać, że odległość środka ciężkości kadłuba od dna (niezbędna dla oceny stateczności poprzecznej) jest funkcjonalem nieliniowym obciążenia zmiennego $\{F(x)\}$ kadłuba okrętu. Pewne

warunki poboczne nieliniowe dają się jednak po odpowiednich przekształceniach sprowadzić do liniowych. Np. mogą to być warunki postaci

$$(3.43) \quad C_1 \leq \frac{A + \chi_1(\{F(x)\})}{B + \chi_2(\{F(x)\})} \leq C_2,$$

gdzie A , B , C_1 i C_2 są to dane stałe, a χ_1 i χ_2 funkcjonały liniowe typu rozpatrywanego w pracy. Należy tutaj zbadać znak mianownika $B + \chi_2(\{F(x)\})$ w zbiorze Γ i istnienie miejsc zerowych, a następnie rozwiązać nierówność (3.43) mnożąc ją przez $B + \chi_2(\{F(x)\})$ i rozwiązując względem odpowiednich kombinacji liniowych funkcjonałów χ_1 i χ_2 .

Przykładem technicznym takiego zadania byłoby badanie obwiednich momentów w zbiorze stanów załadowania ograniczających od góry i od dołu iloraz momentów gnących w przekroju ustalonym x_0 i przekrojach x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, zapewniających zatem równomierny wzrost obciążenia kadłuba przy jego ładowaniu.

Oznaczając jak poprzednio przez $\{\varphi(\xi)\}$ ciężary stałe, $\{F(\xi)\}$ ciężary zmienne i przez $m(\xi, x)$ funkcję wpływu momentu, dostajemy

$$(3.44) \quad B_1 \leq \frac{A_0 + \int_{L_1}^{L_2} m(\xi, x_0) F(\xi) d\xi}{A_i + \int_{L_1}^{L_2} m(\xi, x_i) F(\xi) d\xi} \leq B_2,$$

gdzie

$$(3.45) \quad A_i = \int_{L_1}^{L_2} m(\xi, x_i) \varphi(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

4

Niech będzie dany funkcjonał

$$(4.1) \quad J(\{p(x)\}) = \int_{L_1}^{L_2} j(x) p(x) dx,$$

gdzie $j(x)$ jest funkcją przedziałami ciągłą w $[L_1, L_2]$ a $\{p(x)\} \in \Gamma$, przy czym

$$(4.2) \quad \Gamma = \{\{p(x)\}, 0 \leq p(x) \leq p_0(x)\},$$

są określone i całkowne w sensie Riemanna, a $\{p_0(x)\}$ jest funkcją przedziałami ciągłą i ustaloną.

Weźmy pod uwagę drugi funkcjonał

$$(4.3) \quad \chi(\{p(x)\}) = \int_{L_1}^{L_2} \kappa(x) p(x) dx$$

określony w zbiorze Γ i taki, że funkcja $\kappa(x)$ jest przedziałami ciągłą w przedziale $[L_1, L_2]$ oraz $\kappa(x)$ i $j(x)$ są liniowo niezależne w każdym przedziale zawartym w noś-

niku N_{P_0} funkcji $\{p_0(x)\}$. Zbadajmy zagadnienie ekstremum funkcjonału (4.1) w zbiorze

$$(4.4) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \quad \{p(x)\} \in \Gamma, \quad \underline{A} \leq \chi(\{p(x)\}) \leq \bar{A} \}.$$

Wskażemy przypadki, kiedy warunek boczny jest nieistotny, tzn. gdy

$$(4.5) \quad \Pi \equiv \Gamma$$

oraz gdy wprowadzie

$$(4.6) \quad \Pi \subset \Gamma,$$

jednakże

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \max_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] &= \max_{\{p(x)\} \in \Gamma} [J(\{p(x)\})], \\ \min_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] &= \min_{\{p(x)\} \in \Gamma} [J(\{p(x)\})]. \end{aligned}$$

Znajdziemy ekstrema integralne funkcjonału χ w zbiorze Γ . Otrzymujemy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \chi_{\max} &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn} \kappa(x)}{2} \kappa(x) p_0(x) dx, \\ \chi_{\min} &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 - \operatorname{sgn} \kappa(x)}{2} \kappa(x) p_0(x) dx. \end{aligned}$$

Jest rzeczą oczywistą, że jeżeli

$$(4.9) \quad \bar{A} \in [\chi_{\max}, \infty) \quad \text{i} \quad \underline{A} \in (-\infty, \chi_{\min}],$$

to zachodzi przypadek (4.5).

Aby zachodził przypadek (4.6), wystarczy zapewnić, aby ekstremalne funkcjonału J dla ekstremum integralnego należały do zbioru Π . Ekstremalne te będą następujące

$$(4.10) \quad P_J^+(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} j(x)}{2} p_0(x)$$

dla przypadku maksimum;

$$(4.11) \quad P_J^-(x) = \frac{1 - \operatorname{sgn} j(x)}{2} p_0(x)$$

dla przypadku minimum. Oznaczmy przez

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \bar{B} &= \max \{ \chi(\{P_J^-(x)\}), \quad \chi(\{P_J^+(x)\}) \}, \\ \underline{B} &= \min \{ \chi(\{P_J^-(x)\}), \quad \chi(\{P_J^+(x)\}) \}. \end{aligned}$$

Oczywiście mamy spełnioną nierówność

$$(4.13) \quad \chi_{\min} \leq \underline{B} \leq \bar{B} \leq \chi_{\max}.$$

Przypadek (4.6) zajdzie więc, jeżeli przynajmniej jedna z liczb \bar{B} lub \underline{B} będzie należała do przedziału $[\underline{A}, \bar{A}]$ oraz przynajmniej jedna z nierówności

$$(4.14) \quad \chi_{\min} < \underline{A} \quad \text{lub} \quad \bar{A} < \chi_{\max}$$

będzie spełniona.

Łatwo podać również warunek na nieistnienie rozwiązania, tzn. przypadek, gdy zbiór Π jest pusty. Łatwo wiedzieć, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to jest, aby przedział

$$(4.15) \quad [\underline{A}, \bar{A}] \cap [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$$

był pusty.

Należy tu zwrócić uwagę na to, że powyższe uwagi są słuszne niezależnie od tego, czy $\kappa(x)$ i $j(x)$ są liniowo niezależne w przedziale $[L_1, L_2]$ lub w dowolnym podprzedziale zawartym w nośniku N_{p_0} funkcji $\{p_0(x)\}$, czy też nie.

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem, w którym przyjmiemy, że

$$(4.16) \quad [\underline{A}, \bar{A}] \subset [\underline{B}, \bar{B}].$$

Funkcje $\{P_j^+(x)\}$ i $\{P_j^-(x)\}$ nie są teraz ekstremalami funkcjonału (4.1) w zbiorze Π . Przy powyżej uczynionych założeniach (4.1)–(4.4) oraz (4.16) udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Funkcjonał (4.1) osiąga w zbiorze Π maksimum i minimum, przy czym

$$(4.17) \quad \max_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] = \max_{\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]} [G(\Delta)],$$

gdzie

$$(4.18) \quad G(\Delta) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_i(\Delta) \kappa(x)]}{2} j(x) p_0(x) dx,$$

a $\lambda_i(\Delta)$ jest funkcją odwrotną funkcji

$$(4.19) \quad \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} \kappa(x) p_0(x) dx$$

w obszarze

$$(4.20) \quad D_1 = \{\Delta, \lambda, \underline{A} \leq \Delta \leq \bar{A}, -\infty < \lambda < \infty\};$$

dla przypadku minimum mamy

$$(4.21) \quad \min_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] = \min_{\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]} [H(\Delta)],$$

gdzie

$$(4.22) \quad H(\Delta) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_i(\Delta) \kappa(x)]}{2} j(x) p_0(x) dx,$$

A $\lambda_i(\Delta)$ funkcją odwrotną

$$(4.23) \quad \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 - \operatorname{sgn}[j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} \kappa(x) p_0(x) dx.$$

W obszarze L_1

$$(4.24) \quad D_2 = \{\Delta, \lambda, \underline{A} \leq \Delta \leq \bar{A}, -\infty \leq \lambda = \infty\}.$$

Do wó d (przypadek 4.17). Weźmy pod uwagę funkcjonal

$$(4.25) \quad \psi(\{p(x)\}) = J(\{p(x)\}) + \lambda [\chi(\{p(x)\}) - \Delta],$$

gdzie Δ jest dowolną ustaloną liczbą taką, że $\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]$, a λ dowolną stałą. Funkcjonał ψ określamy w zbiorze Γ . Można również napisać go w postaci

$$(4.26) \quad \psi(\{p(x)\}) = \int_{L_1}^{L_2} [j(x) + \lambda \kappa(x)] p(x) dx - \lambda \Delta.$$

Ekstremalną funkcjonału ψ w zbiorze Γ jest

$$(4.27) \quad P_{\psi}^{+}(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn}[j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} p_0(x).$$

Dobieramy tak wartość λ , aby

$$(4.28) \quad \chi(\{P_{\psi}^{+}(x)\}) = \Delta,$$

i oznaczmy przez

$$(4.29) \quad II'_{\Delta} = \{\{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, \chi(\{p(x)\}) = \Delta\}.$$

Jeżeli ten warunek będzie spełniony, to wtedy wobec tożsamości

$$(4.30) \quad \psi(\{p(x)\}) \equiv J(\{p(x)\}), \quad \text{gdy} \quad \{p(x)\} \in II'_{\Delta}$$

$\{P_{\psi}^{+}(x)\}$ jest ekstremalną funkcjonału J na zbiorze II'_{Δ} . Podstawiając (4.27) do (4.28) otrzymujemy

$$(4.31) \quad \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn}[j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} \kappa(x) p_0(x) dx.$$

Wykażemy, że przy poczynionych założeniach istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie dla λ przy wszelkich $\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]$. Weźmy bowiem pod uwagę funkcję

$$(4.32) \quad F(\lambda) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn}[j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} \kappa(x) p_0(x) dx$$

określoną w przedziale $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Posiada ona następujące własności

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) &= \chi_{\max}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) &= \chi_{\min} \end{aligned}$$

i jest funkcją ciągłą, gdyż suma długości przedziałów stałego znaku funkcji $j(x) + \lambda \varkappa(x)$ jest funkcją ciągłą. Z założenia liniowej niezależności funkcji w dowolnym przedziale $[a, b] \subset \Delta$ i N_{P_0} wynika, że nie można tak dobrać wartości λ , aby rozwiązanie równania

$$(4.34) \quad j(x) + \lambda \varkappa(x) = 0$$

prowadziło do rozwiązań wypełniających pewien przedział w N_{P_0} . Co więcej, z założenia, że funkcje $j(x)$ i $\varkappa(x)$ są przedziałami ciągłe, wynika, że ilość rozwiązań równania (4.34) w N_{P_0} jest skończona podobnie jak ilość punktów zmiany znaku w miejscach nieciągłości skokowych funkcji $j(x) + \lambda \varkappa(x)$, jeżeli takie nieciągłości istnieją i powodują zmianę znaku. Zatem suma długości przedziałów stałego znaku funkcji $j(x) + \lambda \varkappa(x)$ da się w zależności od λ przedstawić jako sumę funkcji ciągłych określonych w różnych przedziałach, które jeżeli są właściwe, to na ich krańcach funkcje określające długość przedziału ograniczonego dwoma punktami zmiany znaku są równe zeru, a jeżeli przedziały są niewłaściwe, to granica tych funkcji dla $\lambda \rightarrow \infty$ lub $-\infty$ są wspólnie ograniczone długością przedziału $[L_1, L_2]$. Liniowa zależność funkcji $j(x)$ i $\varkappa(x)$ w jakimkolwiek podprzedziale przedziału $[L_1, L_2] \setminus N_{P_0}$ nie jest istotna, gdyż dla

$$(4.35) \quad x \in [L_1, L_2] \setminus N_{P_0}$$

i dla każdej funkcji $\{p(x)\} \in \Gamma'$

$$(4.36) \quad p(x) \equiv 0.$$

Wobec własności (4.33) i ciągłości funkcji $F(\lambda)$ równanie (4.31) ma dla każdej wartości $\Delta \in [\underline{\Delta}, \bar{\Delta}]$ przynajmniej jedno rozwiązanie dla λ .

Ponieważ przy ustalonym $\Delta \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ ekstremala funkcjonału ψ znajduje się w zbiorze Π'_Δ , zatem

$$(4.37) \quad \max_{\{p(x)\} \in \Pi'_\Delta} [J(\{p(x)\})] = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn}[j(x) + \lambda_i(\Delta) \varkappa(x)]}{2} j(x) p_0(x) dx,$$

przy czym liczba po prawej stronie nie zależy od wskaźnika i przy λ , co wynika z (4.30). Warto tutaj zwrócić uwagę, że ilość rozwiązań dla λ_i może być nawet nieprzeliczalna np. w przypadku, gdy istnieje taki przedział $[\lambda_1, \lambda_2]$, że dla $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ $F(\lambda) = \text{const.}$

Łatwo teraz zauważyć, że

$$(4.38) \quad \Pi = \bigcup_{\Delta \in [\underline{\Delta}, \bar{\Delta}]} \Pi'_\Delta.$$

Zatem maksimum funkcjonału J w zbiorze Π będzie

$$(4.39) \quad \max_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] = \max_{\Delta \in [\underline{\Delta}, \bar{\Delta}]} [\max_{\{p(x)\} \in \Pi'_\Delta} J(\{p(x)\})].$$

Obierając zatem

$$(4.40) \quad G(\Delta) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_i(\Delta) \kappa(x)]}{2} j(x) p_0(x) dx$$

otrzymujemy tezę, tzn. sprowadzimy zagadnienie ekstremum funkcjonału liniowego J z warunkiem pobocznym do problemu ekstremum funkcji $G(\Delta)$ w przedziale domkniętym $\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]$.

Analogicznie dowodzi się przypadku minimum.

Wniosek 1. Niech Δ^+ oznacza wartość lub wartości Δ , dla których funkcja $G(\Delta)$ (4.18) osiąga maksimum integralne w przedziale $\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]$, a λ^+ wszystkie rozwiązania równania (4.19) względem λ dla $\Delta = \Delta^+$; wtedy zgodnie z (4.27) każda funkcja

$$(4.41) \quad p(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda^+ \kappa(x)]}{2} p_0(x)$$

jest ekstremalną funkcjonału $J(\{p(x)\})$ w zbiorze Π dla przypadku maksimum.

Wniosek 2. Niech Δ^- oznacza wartość lub wartości Δ , dla których funkcja $H(\Delta)$ (4.22) osiąga minimum integralne w przedziale $\Delta \in [\underline{A}, \bar{A}]$ a λ^- wszystkie rozwiązania równania (4.23) względem λ dla $\Delta = \Delta^-$; wtedy każda funkcja

$$(4.42) \quad p(x) = \frac{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda^- \kappa(x)]}{2} p_0(x)$$

jest ekstremalną funkcjonału $J(\{p(x)\})$ w zbiorze Π dla przypadku minimum.

Zbadamy teraz ekstremum funkcjonału (4.1) przy słabszych założeniach odnośnie funkcji $\kappa(x)$ i $j(x)$. Łatwo bowiem będzie można podać także odpowiednie przykłady o znaczeniu praktycznym dla techniki.

5

Niech w nośniku N_{p_0} funkcji $\{p_0(x)\}$ istnieje przedział $[a, b]$ taki, że $j(x)$ i $\kappa(x)$ są w tym przedziale liniowo zależne, natomiast w każdym podprzedziale przedziału $N_{p_0} \setminus I_{ab}$, gdzie oznaczono $I_{ab} \equiv [a, b]$ są liniowo niezależne.

Przy powyższym założeniu istnieją także stałe A i B , że

$$(5.1) \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

oraz

$$(5.2) \quad Aj(x) + B\kappa(x) \equiv 0 \quad \text{dla } x \in I_{ab}.$$

Istnieje więc również taka liczba λ_0 , że

$$(5.3) \quad j(x) + \lambda_0 \kappa(x) \equiv 0 \quad \text{dla } x \in I_{ab},$$

przy czym jeśli

$$(5.4) \quad \begin{array}{ll} j(x) \equiv \equiv 0 & \text{dla } x \in I_{ab}, \text{ to } \lambda_0 \neq 0, \\ j(x) \equiv 0 & \text{dla } x \in I_{ab}, \text{ to } \lambda_0 = 0. \end{array}$$

Zbadajmy własności funkcji Δ (4.19) dla przypadku maksimum i (4.23) dla przypadku minimum. Łatwo sprawdzić, że dla $\lambda = \lambda_0$ obydwie funkcje posiadają nieciągłość skokową, gdyż na skutek własności (5.3) zmienia się znak funkcji $j(x) + \lambda \kappa(x)$ dla $\lambda = \lambda_0$ w całym przedziale I_{ab} . Obliczmy wielkość nieciągłości skokowej funkcji $\Delta(\lambda)$ w punkcie λ_0 przez wyznaczenie różnicy prawostronnej i lewostronnej granicy w tym punkcie.

Weźmy pod uwagę przypadek maksimum [funkcja (4.19)] i niech

$$(5.5) \quad j(x) + \lambda \kappa(x) > 0 \quad \text{dla} \quad \lambda > \lambda_0.$$

Mamy wtedy

$$(5.6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} \Delta(\lambda) - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \Delta(\lambda) = - \int_a^b \kappa(x) p_0(x) dx,$$

natomiast dla

$$(5.7) \quad j(x) + \lambda \kappa(x) < 0 \quad \text{dla} \quad \lambda > \lambda_0$$

otrzymujemy

$$(5.8) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} \Delta(\lambda) - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \Delta(\lambda) = - \int_a^b \kappa(x) p_0(x) dx.$$

Oznaczając wielkość nieciągłości skokowej przez Δ_{ab} możemy napisać wynik rachunku w postaci jednolitej zarówno dla (4.21) jak i dla (4.23) otrzymując dla (4.19)

$$(5.9) \quad \Delta_{ab} = \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)] \int_a^b \kappa(x) p_0(x) dx$$

oraz dla (4.23)

$$(5.10) \quad \Delta_{ab} = \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)] \int_a^b \kappa(x) p_0(x) dx.$$

Zatem dla wartości funkcjonału χ leżących w przedziale nieciągłości skokowej funkcji $\Delta(\lambda)$ nie istnieją rozwiązania równań (4.19) i (4.23), co oznacza, że nie można wtedy zamieścić ekstremum integralnego funkcjonału ψ w zbiorze II'_Δ . Kiedy właśnie ten przypadek ma miejsce, wyznaczmy przedziały wartości Δ .

Wprowadzając oznaczenie

$$(5.11) \quad I_L \equiv [L_1, L_2]$$

otrzymamy dla przypadku (4.19)

$$(5.12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \Delta = \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]}{2} \kappa(x) p_0(x) dx + \\ + \frac{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} \int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx,$$

a dla przypadku (4.23)

$$(5.13) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \Delta = \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]}{2} \kappa(x) p_0(x) dx + \\ + \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)]}{2} \int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx,$$

przy czym we współczynniku przed drugą z całek w obydwu wzorach $x \in I_{ab}$. Wprowadzając teraz jednolite dla obydwu przypadków oznaczenia

$$(5.14) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \Delta \equiv \underline{\Delta}_{ab}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} \Delta \equiv \bar{\Delta}_{ab},$$

możemy napisać, że

$$(5.15) \quad \bar{\Delta}_{ab} = \underline{\Delta}_{ab} + \Delta_{ab}.$$

Weźmy teraz pod uwagę dwie liczby

$$(5.16) \quad \bar{\Delta}'_{ab} = \min [\bar{\Delta}_{ab}, \underline{\Delta}_{ab}], \\ \bar{\Delta}''_{ab} = \max [\bar{\Delta}_{ab}, \underline{\Delta}_{ab}]$$

i wprowadźmy oznaczenia

$$(5.17) \quad d_A \equiv [\underline{\Delta}, \bar{\Delta}]$$

oraz

$$(5.18) \quad d_{ab} = [\Delta'_{ab}, \Delta''_{ab}].$$

Można wtedy przedział d_A przedstawić w postaci

$$(5.19) \quad d_A = d_1 + d_2,$$

gdzie

$$(5.20) \quad d_1 = d_{ab} \cap d_A, \quad d_2 = \overline{d_A \setminus d_1}.$$

Łatwo zauważyć, że w przedziale d_2 istnieją funkcje $G(\Delta)$ i $H(\Delta)$, zatem twierdzenie I można tutaj zastosować, natomiast jeżeli d_1 nie jest pusty, nie można zbudować w nim funkcji $G(\Delta)$ i $H(\Delta)$, gdyż równania (4.19) i (4.23) nie mają rozwiązania. Do rozwiązania tego przypadku posłużymy nam teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Funkcjonał (4.1) osiąga w zbiorze

$$(5.21) \quad \Pi = \{\{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, \chi(\{p(x)\}) \in d_{ab}\},$$

maksimum i minimum, przy czym

$$(5.22) \quad \max_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] = \max_{\Delta \in d_{ab}} [G(\Delta)],$$

gdzie

$$(5.23) \quad G(\Delta) = -\lambda_0 \Delta + \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]}{2} p_0(x) dx,$$

a λ_0 wyznacza się z równania

$$(5.24) \quad j(x) + \lambda_0 \kappa(x) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad x \in I_{ab},$$

natomiast

$$(5.25) \quad \min_{\{p(x)\} \in \Pi} [J(\{p(x)\})] = \min_{\Delta \in d_{ab}} [H(\Delta)],$$

gdzie

$$(5.26) \quad H(\Delta) \equiv -\lambda_0 \Delta + \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]}{2} p_0(x) dx,$$

a λ_0 wyznacza się z (5.24),Dowód (dla przypadku maksimum). Przedstawiamy funkcjonały J i χ w postaci

$$(5.27) \quad \begin{aligned} J &= \int_{I_L \setminus I_{ab}} j(x) p(x) dx + \int_{I_{ab}} j(x) p(x) dx, \\ \chi &= \int_{I_L \setminus I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx + \int_{I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

Korzystając z równania (5.3) możemy teraz wyrugować $j(x)$ z drugiej całki w (5.27) i poszukiwać ekstremum funkcjonału J (5.27) w zbiorze Π'_Δ . Otrzymujemy wtedy

$$(5.28) \quad J = \int_{I_L \setminus I_{ab}} j(x) p(x) dx - \lambda_0 \int_{I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx$$

i warunek wyznaczający zbiór Π'_Δ

$$(5.29) \quad \int_{I_L \setminus I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx + \int_{I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx = \Delta.$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcjonal

$$(5.30) \quad \theta[\{p(x)\}] = \int_{I_L \setminus I_{ab}} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)] p(x) dx - \lambda_0 \Delta.$$

Funkcjonał ten jest określony w zbiorze Γ dla każdego Δ , a w zbiorze Π'_Δ mamy

$$(5.31) \quad \theta[\{p(x)\}] \equiv J(\{p(x)\}),$$

gdyż rugując drugą z całek w (5.28) przy pomocy (5.29) otrzymujemy (5.30). Funkcjonał (5.30) osiąga w zbiorze Γ ekstremum (maksimum) dla każdej funkcji

$$(5.32) \quad p_0^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} p_0(x) & \text{dla} \quad x \in I_L \setminus I_{ab}, \\ p_{ab}^+(x) & \text{dla} \quad x \in I_{ab}, \end{cases}$$

gdzie $P_{ab}^+(x)$ oznacza część dowolnej funkcji $\{p(x)\} \in \Gamma$ w przedziale I_{ab} . Powstaje pytanie, czy można tak dobrać gałąź $P_{ab}^+(x)$, aby $p_0^+(x) \in \Pi'_\Delta$. W tym celu wystarczy spełnić warunek (5.28). Po podstawieniu (5.32) do (5.31) otrzymujemy

$$(5.33) \quad \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} \kappa(x) p_0(x) dx + \int_{I_{ab}} \kappa(x) P_{ab}^+(x) dx = \Delta.$$

Rozstrzygniemy istnienie rozwiązania tego równania względem $P_{ab}^+(x)$ w zbiorze Γ . Pisząc (5.33) w postaci

$$(5.34) \quad \int_{I_{ab}} \kappa(x) P_{ab}^+(x) dx = \Delta - \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)]\} \kappa(x) p_0(x) dx$$

i pamiętając, że $\Delta \in d_{ab}$, możemy znaleźć krańcowe wartości C_1 i C_2 liczby po prawej stronie równania (5.34), wykorzystując równania (5.9)–(5.18). Prosty rachunek daje

$$(5.35) \quad C_1 = \int_{I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)]\}_{\lambda > \lambda_0} \kappa(x) p_0(x) dx,$$

$$C_2 = \int_{I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda \kappa(x)]\}_{\lambda > \lambda} \kappa(x) p_0(x) dx.$$

Łatwo sprawdzić, że jedna z liczb C_1 lub C_2 jest zerem, druga natomiast $\int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx$.

Ponieważ zachodzą nierówności

$$(5.36) \quad \frac{1}{2} \int_{I_{ab}} [1 - \operatorname{sgn} \kappa(x)] p_0(x) dx = \min_{\{p(x)\} \in \Gamma} \int_{I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx \leq$$

$$\leq C_i \leq \max_{\{p(x)\} \in \Gamma} \int_{I_{ab}} \kappa(x) p(x) dx = \int_{I_{ab}} \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn} \kappa(x)] p_0(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

to istnienie rozwiązania (5.33) względem $P_{ab}^+(x)$ jest dla każdego $\Delta \in d_{ab}$ zapewnione. Oznacza to więc, że dla każdego $\Delta \in d_{ab}$ można znaleźć taką ekstremalę $P_0^+(x)$, że

$$(5.37) \quad \{P_0^+(x)\} \in \Pi'_\Delta.$$

Możemy więc napisać wobec (5.31) i zgodnie z (5.30), że

$$(5.38) \quad \max_{\{p(x)\} \in \Pi'_\Delta} [\theta(\{p(x)\})] = \max_{\{p(x)\} \in \Pi'_\Delta} [J(\{p(x)\})] \equiv G(\Delta) =$$

$$= -\lambda_0 \Delta + \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} p_0(x) dx,$$

a ponieważ

$$(5.39) \quad \Pi = \bigcup_{\Delta \in d_{ab}} \Pi'_\Delta,$$

przeto otrzymujemy tezę. Podobnie dowodzi się przypadku minimum.

Wniosek 1. Ze wzorów (5.32) i (5.36) wynika, że istnieje nieskończenie wiele ekstremali $P_0^+(x)$ dla każdej wartości $\Delta \in d_{ab}$. Niech Δ^+ oznacza tę wartość $\Delta \in d_{ab}$, dla której funkcja $G(\Delta)$ (5.23) osiąga maksimum integralne w d_{ab} . Wtedy zgodnie z (5.32) i (5.34) każda funkcja $\{P_J^+(x)\}$ jest ekstremalną funkcjonau J dla przypadku maksimum w zbiorze II , jeżeli

$$(5.40) \quad P_J^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} p_0(x) & \text{dla } x \in I_L \setminus I_{ab}, \\ P_{ab}^+(x) & \text{dla } x \in I_{ab}, \end{cases}$$

gdzie funkcja $\{P_{ab}^+(x)\}$ określona w I_{ab} spełnia warunek

$$(5.41) \quad \int_{I_{ab}} \kappa(x) P_{ab}^+(x) dx = \Delta^+ - \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} \kappa(x) p_0(x) dx.$$

W zastosowaniach będziemy używali zamiast całego zbioru ekstremalnego elementu

$$(5.42) \quad P_{ab}^+(x) = \delta^+ p_0(x),$$

gdzie musi być

$$(5.43) \quad 0 \leq \delta^+ \leq 1.$$

Istotnie podstawiając (5.41) do (5.42) otrzymujemy dla

$$(5.44) \quad \int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx \neq 0,$$

$$(5.45) \quad \delta^+ = \frac{\Delta^+ - \int_{I_L \setminus I_{ab}} \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} \kappa(x) p_0(x) dx}{\int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx}.$$

Wobec własności liczb C_1 i C_2 (5.35) zapewnia to warunek (5.43). Jeżeli natomiast

$$(5.46) \quad \int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx = 0,$$

to wartość δ^+ może być zupełnie dowolna w granicach określonych równością (5.43) gdyż prawa strona równania (5.41) jest zerem dla każdego $\Delta \in d_{ab}$, co wynika z (5.35).

Wniosek 2. Niech Δ^- oznacza tę wartość $\Delta \in d_{ab}$, dla której funkcja $H(\Delta)$ (5.26) osiąga minimum integralne w d_{ab} . Wtedy każda funkcja $\{P_J^-(x)\}$ jest ekstremalą funkcjonau J dla przypadku minimum w zbiorze II , jeżeli

$$(5.47) \quad P_J^-(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} p_0(x) & \text{dla } x \in I_L \setminus I_{ob}, \\ P_{ob}^-(x) & \text{dla } x \in I_{ob}, \end{cases}$$

gdzie funkcja $\{P_{ob}^-(x)\}$ jest określona w I_{ob} i spełnia warunek

$$(5.48) \quad \int_{I_{ob}} \kappa(x) P_{ob}^-(x) dx = \Delta^- - \frac{1}{2} \int_{I_L \setminus I_{ob}} \{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} \kappa(x) p_0(x) dx.$$

Analogicznie jak poprzednio można i tutaj w zastosowaniach obierać jedynie pewien element zbioru ekstremali w zbiorze przyjmując

$$(5.49) \quad P_{ab}^-(x) = \delta^- p_0(x),$$

gdzie

$$(5.50) \quad \delta^- = \frac{\Delta^- - \frac{1}{2} \int_{I_L/I_{ab}} \{1 - \operatorname{sgn} [j(x) + \lambda_0 \kappa(x)]\} dx}{\int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx} \kappa(x) P_0(x) dx,$$

gdy

$$(5.51) \quad \int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx \neq 0$$

i δ^- jest dowolną liczbą z przedziału $[0,1]$, gdy

$$(5.52) \quad \int_{I_{ab}} \kappa(x) p_0(x) dx = 0.$$

Oczywiście również wartości δ^- według (5.50) należą do przedziału $[0,1]$.

6

Rozpatrzone przypadki ekstremum funkcjonału J z warunkiem bocznym określonym funkcjonałem χ mogą być łatwo uogólnione zarówno dla silnego warunku bocznego (p. 4 pracy, liniowa niezależność funkcji wpływu $j(x)$ i $\kappa(x)$ w dowolnym podprzedziale przedziału $[L_1, L_2]$) jak i słabego warunku pobocznego (p. 5 pracy, liniowa zależność funkcji $j(x)$ i $\kappa(x)$ w przedziale $[a, b] \subset [L_1, L_2]$). I tak np.:

1. Można zbudować analogiczne twierdzenia do twierdzeń 1 i 2 dla przypadku skończonej ilości warunków pobocznych.

2. Można również rozpatrywać zadania wielowymiarowe, w szczególności konstrukcje płaskie i przestrzenne. Dla zastosowań praktycznych istotne są również przypadki szczególne. Np. rozpatrując zagadnienie ekstremum funkcjonału J w zbiorze ciągów skończonych, wspólnie ograniczonych, z warunkiem pobocznym określonym za pomocą funkcjonału χ również w zbiorze tych ciągów, możemy np. interpretować także zadania problemem ekstremalnych parametrów zginania okrętu w zbiorze stanów załadowania określonych jednorodnym ładunkiem masowym przy jego równomiernym (stałym) rozkładzie w ładowniach, [1, 2 i 5].

Przypadki te przedstawimy w osobnych opracowaniach.

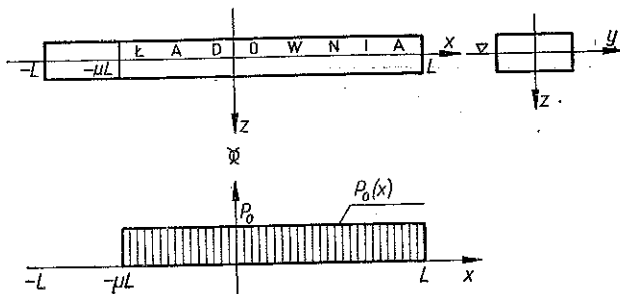
7

W zakończeniu pracy podamy dwa przykłady zastosowań twierdzeń 1 i 2. Ponieważ rachunek jest elementarny, ograniczymy się jedynie do założeń i wyników rachunku.

Przykład 1. Weźmy pod uwagę belkę pryzmatyczną sztywną pływającą na spokojnej wodzie (rys. 1). Załóżmy, że belka ta jest nieważka i absolutnie sztywna. Niech

pomieszczenie ładunkowe znajduje się w przedziale $[\mu L, L]$ gdzie $\mu \in (0,1)$, a obciążenie $p_0(x)$ przy wypełnionych ładowniach niech będzie stałe. Mamy zatem

$$(7.1) \quad p_0(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-L, -\mu L], \\ P_0 & x \in [-\mu L, L]. \end{cases}$$



Rys. 1

Przedział $[-\mu L, L] = N_{P_0}$ jest nośnikiem funkcji $\{p_0(x)\}$. Zbiór Γ wszystkich możliwych stanów załadowania będzie następujący:

$$(7.2) \quad \Gamma = \{ \{p(x)\}, 0 \leq p(x) \leq p_0(x), x \in [-L, L] \}$$

i $p(x)$ jest całkowalne w sensie Riemanna. Oznaczmy przez

$$(7.3) \quad J(\{p(x)\}) = \int_{-L}^L p(x) dx$$

funkcjonał ładunku, natomiast przez

$$(7.4) \quad \chi(\{p(x)\}) = \int_{-L}^L \frac{x}{\kappa_2} p(x) dx$$

funkcjonał tangensa kąta przegięcia. Znajdziemy ekstrema funkcyjonału J w zbiorze Π takim, że

$$(7.5) \quad \Pi = \{ \{p(x)\}, \{p(x)\} \in \Gamma, \underline{A} \leq \chi(\{p(x)\}) \leq \bar{A} \}.$$

Przy czym stałe \underline{A} i \bar{A} spełniają warunek

$$(7.6) \quad [\underline{A}, \bar{A}] \cap [\chi_{\min}, \chi_{\max}] \subset [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$$

$\{p(x)\} \in \Gamma \quad \{p(x)\} \in \Gamma \quad \{p(x)\} \in \Gamma \quad \{p(x)\} \in \Gamma$

oraz

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \chi(\{P_{J,\Gamma}^+(x)\}) &\notin [\underline{A}, \bar{A}], \\ \chi(\{P_{J,\Gamma}^-(x)\}) &\notin [\underline{A}, \bar{A}]. \end{aligned}$$

Zbadamy zatem przypadek rozwiązań nietrywialnych. Ponieważ

$$(7.8) \quad j(x) = 1, \quad \kappa(x) = \frac{x}{\kappa_2},$$

to funkcje wpływu są liniowo niezależne w każdym podprzedziale przedziału $[-L, L]$ i twierdzenie 1 wystarczy do rozwiązania zadania.

Przeprowadzając obliczenia zgodnie z twierdzeniem 1 otrzymujemy dla przypadku maksimum

$$(7.9) \quad \Delta(\lambda) = \begin{cases} \frac{P_0}{2\kappa_2} \left(\frac{\kappa_2^2}{\lambda^2} - \mu^2 L^2 \right), & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\infty, -\frac{\kappa_2}{L} \right], \\ \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\frac{\kappa_2}{L}, \frac{\kappa_2}{\mu L} \right], \\ \frac{P_0}{2\kappa_2} \left(L^2 - \frac{\kappa_2^2}{\lambda^2} \right), & \text{jeżeli } \lambda \in \left[\frac{\kappa_2}{\mu L}, \infty \right]. \end{cases}$$

Przy czym łatwo się przekonać, że $\Delta(\lambda)$ jest funkcją ciągłą oraz

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \Delta(\lambda) &= -\frac{P_0 \mu^2 L^2}{2\kappa_2} = \chi_{\min}, & \{p(x)\} \in \Gamma \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta(\lambda) &= \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} = \chi_{\max}. & \{p(x)\} \in \Gamma \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie (7.9) i obliczając $G(\Delta)$ według (4.19) dostajemy

$$(7.11) \quad G(\Delta) = \begin{cases} \int_{-L}^L \frac{1 + \operatorname{sgn} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{L^2 - \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right]}{2} p_0(x) dx, & \text{jeżeli } \Delta \in \left[\frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \chi_{\max} \right], \\ \int_{-L}^L \frac{1 + \operatorname{sgn}(1)}{2} p_0(x), & \text{jeżeli } \Delta = \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \\ \int_{-L}^L \frac{1 + \operatorname{sgn} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{\mu^2 L^2 + 2 \frac{\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right]}{2} p_0(x) dx, & \text{jeżeli } \Delta \in \left[\chi_{\min} \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \right]. \end{cases}$$

Po wykonaniu rachunków otrzymujemy

$$(7.12) \quad G(\Delta) = \begin{cases} P_0 \left(\sqrt{\mu^2 L^2 + \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta} + \mu L \right), & \text{jeżeli } \Delta \in \left[\chi_{\min} \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \right], \\ P_0 L (1 + \mu), & \text{jeżeli } \Delta = \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \\ P_0 \left(\sqrt{L^2 - \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta} + L \right), & \text{jeżeli } \Delta \in \left[\frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \chi_{\max} \right]. \end{cases}$$

Zgodnie z równaniem [4.41] łatwo napisać ekstremale $P_{J, H'_A}^+(x)$ w zależności od Δ , otrzymując

$$(7.13) P_{J, H'_A}^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{L^2 - \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right) \right] p_0(x), & \text{jeżeli } \Delta \in \left[\frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \chi_{\max} \right], \\ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(1 + \lambda \frac{x}{\kappa_2} \right) \right] p_0(x), & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\frac{\kappa_2}{L}, \frac{\kappa_2}{\mu L} \right], \Delta = \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2), \\ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\mu^2 L^2 + \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right) \right] p_0(x), & \text{jeżeli } \Delta \in \left[\chi_{\min} \frac{P_0 L^2}{2\kappa_2} (1 - \mu^2) \right]. \end{cases}$$

Analogicznie przypadek minimum daje

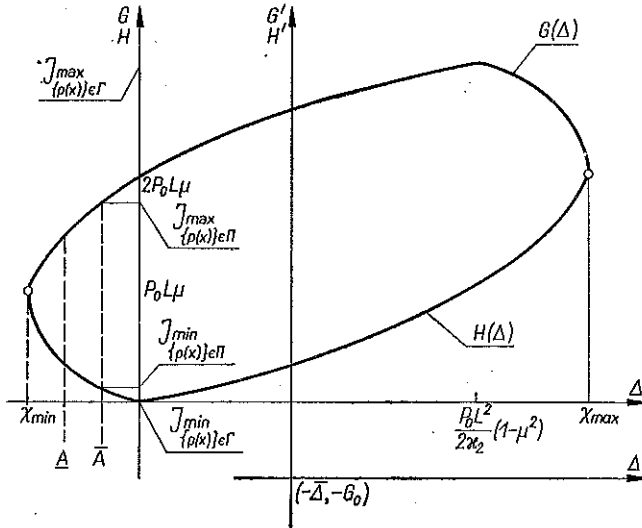
$$(7.14) H(\Delta) = \begin{cases} \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\mu^2 L^2 + 2 \frac{\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right) \right] p_0(x) dx, & \text{jeżeli } \Delta \in [\chi_{\min}, 0], \\ \int_{-L}^L \frac{1 - \operatorname{sgn} [1]}{2} p_0(x), & \text{jeżeli } \Delta = 0, \\ \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{L^2 - 2 \frac{\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right) \right] p_0(x) dx, & \text{jeżeli } \Delta \in [0, \chi_{\max}]. \end{cases}$$

$$(7.15) P_{J, H'_A}^-(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\mu^2 L^2 + \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right) \right] p_0(x), & \text{jeżeli } \Delta \in [\chi_{\min}, 0], \\ \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(1 + \lambda \frac{x}{\kappa_2} \right) \right] p_0(x), & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\frac{\kappa_2}{L}, \frac{\kappa_2}{\mu L} \right] \text{ i } \Delta = 0, \\ \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{L^2 - \frac{2\kappa_2}{P_0} \Delta}} \right) \right] p_0(x), & \text{jeżeli } \Delta \in [0, \chi_{\max}]. \end{cases}$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy funkcji $G(\Delta)$ i $H(\Delta)$. Jak widać z wykresu zachodzą związki

$$(7.16) \quad G(\chi_{\max}) = H(\chi_{\max}), \quad G(\chi_{\min}) = H(\chi_{\min}),$$

które są oczywiste, gdyż zbiory $\Pi'_{\chi_{\min}}$ i $\Pi'_{\chi_{\max}}$ zawierają po jednym elemencie zbioru I .



Rys. 2

Wykres na rys. 2 może być z łatwością przystosowany do przypadku istnienia stałych ciężarów na statku. Niech ciężar konstrukcji i wyposażenia będzie G_0 , a tangens kąta przegłębienia od ciężarów stałych $\bar{\Delta}$. Wystarczy dokonać wtedy równoległego przesunięcia całego układu, umieszczając początek nowego układu w punkcie o współrzędnych $(-\bar{\Delta}, -G_0)$. Nowy przesunięty układ współrzędnych Δ', G' lub Δ', H' pokazano na rys. 2. Na osi pionowej nowego układu otrzymuje się chwilową wyporność okrętu na osi poziomej całkowity tangens kąta przegłębienia.

Na rysunku 2 pokazano również jak przy danych wartościach \underline{A} i \bar{A} , tzn. przy określonym zbiorze $\Pi \subset I$ znaleźć $J_{\max}^{\{p(x)\} \in \Pi}$ i $J_{\min}^{\{p(x)\} \in \Pi}$.

Przykład 2. Weźmy teraz pod uwagę belkę pryzmatyczną, pływającą na spokojnej wodzie z przykładu 1 i oznaczmy przez

$$(7.17) \quad J(\{p(x)\}) = \int_{-L}^L p(x) dx,$$

funkcjonał ładunku, natomiast przez

$$(7.18) \quad \chi(\{p(x)\}) = \int_{-L}^L \kappa(x) p(x) dx,$$

funkcjonał całkowitego obciążenia dna w przedziale, gdzie jest łatwo sprawdzić

$$(7.19) \quad \kappa(x) = \begin{cases} 1 - \mu, & \text{jeżeli } x \in [-\mu L, [\mu L], \\ \mu, & \text{jeżeli } x \in [-L, -\mu L] + [\mu L, L]. \end{cases}$$

znajdziemy ekstremum funkcyjonału J w zbiorze Π określonym podobnie jak w przykładzie 1 [wzory od (7.5) do (7.7)]. Wprowadźmy dla skrócenia zapisu oznaczenia

$$(7.20) \quad [-\mu L, \mu L] \equiv I_1 \quad [-L, -\mu L] + [\mu L, L] \equiv I_2.$$

Ponieważ

$$(7.21) \quad j(x) \equiv 1,$$

to funkcje $\kappa(x)$ i $j(x)$ są liniowo zależne w przedziałach I_1 i I_2 ; mamy bowiem

$$(7.22) \quad \begin{aligned} j(x) - \frac{1}{1-\mu} \kappa(x) &\equiv 0 & \text{dla } x \in I_1, \\ j(x) + \frac{1}{\mu} \kappa(x) &\equiv 0 & \text{dla } x \in I_2. \end{aligned}$$

Należy zatem zastosować tutaj twierdzenie 2. Prościej dochodzi się jednak do celu wyznaczając wszystkie możliwe do wyznaczenia punkty funkcji $G(\Delta)$ i $H(\Delta)$ oraz stosując twierdzenie 1, a następnie korzystając z tego twierdzenia 2, że są to liniowe funkcje Δ w pewnych przedziałach.

Przypadek maksimum. Obliczając funkcję $\Delta(\lambda)$ otrzymujemy po wykonaniu elementarnych rachunków

$$(7.23) \quad \Delta(\lambda) = \begin{cases} -P_0 L \mu (1 - \mu) = \chi_{\min}, & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\infty, -\frac{1}{1-\mu} \right], \\ P_0 L \mu (1 - \mu), & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\frac{1}{1-\mu}, \frac{1}{\mu} \right], \\ 2 P_0 L \mu (1 - \mu) = \chi_{\max}, & \text{jeżeli } \lambda \in \left[\frac{1}{\mu}, \infty \right]. \end{cases}$$

Funkcja $\Delta(\lambda)$ jest więc nieciągła i pozwala wyznaczyć $G(\Delta)$ jedynie dla trzech wartości. Oznaczmy je kolejno przez Δ_1, Δ_2 i Δ_3 tak, że $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \Delta_3$. Łatwo zauważyć, że wartości $\Delta(\lambda)$ określają zgodnie z p. 5 pracy przedziały

$$(7.24) \quad d_{I_1} = [\Delta_1, \Delta_2], \quad d_{I_2} = [\Delta_2, \Delta_3],$$

będące odpowiednikami przedziału d_{ab} w twierdzeniu 2. Wystarczy zatem obliczyć funkcję $G(\Delta)$ w punktach Δ_i , $i = 1, 2, 3$ i połączyć te punkty linią prostą; otrzymujemy cały wykres $G(\Delta)$, ponieważ

$$(7.25) \quad d_{I_1} + d_{I_2} = [\chi_{\min}, \chi_{\max}].$$

Prosty rachunek prowadzi do następujących wartości:

$$(7.26) \quad G(\Delta_1) = P_0 L (1 - \mu), \quad G(\Delta_2) = P_0 L (1 + \mu), \quad G(\Delta_3) = 2 P_0 L \mu.$$

Przypadek minimum. Funkcję $\Delta(\lambda)$ otrzymujemy tutaj w postaci

$$(7.27) \quad \Delta(\lambda) = \begin{cases} 2 P_0 L \mu (1 - \mu) = \chi_{\max}, & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\infty, -\frac{1}{1 - \mu} \right], \\ 0, & \text{jeżeli } \lambda \in \left[-\frac{1}{1 - \mu}, \frac{1}{\mu} \right], \\ -P_0 L \mu (1 - \mu) = \chi_{\min}, & \text{jeżeli } \lambda \in \left[\frac{1}{\mu}, \infty \right]. \end{cases}$$

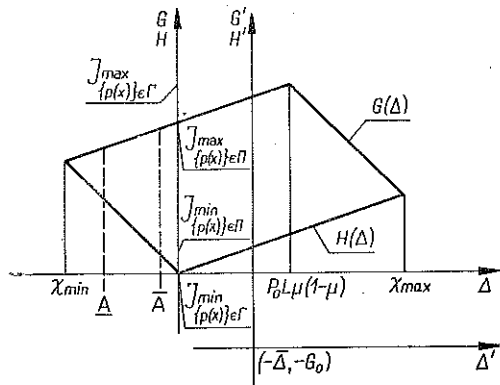
Podobnie jak dla przypadku maksimum oznaczając trzy jej wartości przez Δ_1, Δ_2 i Δ_3 tak, że $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \Delta_3$ otrzymujemy

$$(7.28) \quad d_{I_1} = [\Delta_2, \Delta_3], \quad d_{I_2} = [\Delta_1, \Delta_2],$$

przy czym spełnione jest równanie (7.25). Wartości funkcji $H(\Delta)$ w punktach Δ_i , $i = 1, 2, 3$, są odpowiednio równe

$$(7.29) \quad H(\Delta_1) = P_0 L (1 - \mu), \quad H(\Delta_2) = 0, \quad H(\Delta_3) = 2 P_0 L \mu.$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia 2 funkcja $H(\Delta)$ jest liniowa w d_{I_1} i d_{I_2} przeto wystarczy na wykresie połączyć otrzymane punkty linią prostą. Wykres funkcji $G(\Delta)$ i $H(\Delta)$ przedstawiono na rys. 3, przy czym stosuje się tutaj również wszystkie uwagi odnośnie uwzględnienia ciężarów stałych i metod wykorzystania tego wykresu podane w przykładzie 1. Nieco odmienny jest w tym przypadku sposób wyznaczania ekstremali, gdyż w przypadku gdy $\Delta \in d_{I_1}$ ekstremala nie jest wyznaczona jednoznacznie w przedziale I_1 , natomiast gdy $\Delta \in d_{I_2}$ ekstremala nie jest wyznaczona jednoznacznie w przedziale I_2 .



Rys. 3

Wyznamy jedynie element należący do zbioru ekstremali dla tego przypadku zgodnie z określeniami (5.42) i (5.49), obliczając mnożniki δ^+ i δ^- według (5.45) i (5.50) dla przedziałów I_1 i I_2 .

Łatwo zauważyć, że można rozszerzyć określenie np. mnożnika $\delta_{I_1}^+$ na cały przedział $\Delta \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ i że jest on stały w przedziale $[\chi_{\min}, \chi_{\max}] \setminus d_{I_1}$ i ciągły w całym przedziale:

$$(7.30) \quad P_{J, H'}^{\pm}(x) = \begin{cases} \delta_{I_1}^+(\Delta) p_0(x), & \text{jeżeli } x \in I_1, \\ \delta_{I_2}^+(\Delta) p_0(x), & \text{jeżeli } x \in I_2, \end{cases}$$

$$P_{J, H'}^{\pm}(x) = \begin{cases} \delta_{I_1}^-(\Delta) p_0(x), & \text{jeżeli } x \in I_1, \\ \delta_{I_2}^-(\Delta) p_0(x), & \text{jeżeli } x \in I_2, \end{cases}$$

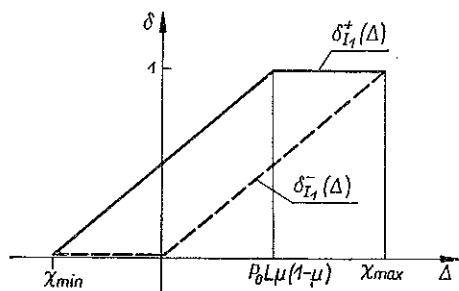
gdzie

$$(7.31) \quad \delta_{I_1}^+(\Delta) = \begin{cases} \frac{\Delta + P_0 L \mu (1 - \mu)}{2 P_0 L \mu (1 - \mu)}, & \text{jeżeli } \Delta \in [\chi_{\min}, P_0 L \mu (1 - \mu)], \\ 1, & \text{jeżeli } \Delta \in [P_0 L \mu (1 - \mu), \chi_{\max}], \end{cases}$$

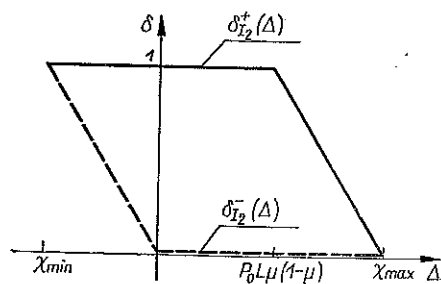
$$\delta_{I_2}^+(\Delta) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \Delta \in [\chi_{\min}, P_0 L \mu (1 - \mu)], \\ \frac{2 P_0 L \mu (1 - \mu) - \Delta}{P_0 L \mu (1 - \mu)}, & \text{jeżeli } \Delta \in [P_0 L \mu (1 - \mu), \chi_{\max}]; \end{cases}$$

$$\delta_{I_1}^-(\Delta) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \Delta \in [\chi_{\min}, 0], \\ \frac{\Delta}{2 P_0 L \mu (1 - \mu)}, & \text{jeżeli } \Delta \in [0, \chi_{\max}], \end{cases}$$

$$\delta_{I_2}^-(\Delta) = \begin{cases} -\frac{\Delta}{P_0 L \mu (1 - \mu)}, & \text{jeżeli } \Delta \in [\chi_{\min}, 0], \\ 0, & \text{jeżeli } \Delta \in [0, \chi_{\max}]. \end{cases}$$



Rys. 4



Rys. 5

Na rysunkach 4 i 5 podano wykresy funkcji (7.31). Potrafimy teraz łatwo wyznaczyć dla każdej wartości Δ stopień wypełnienia ładowni δ^+ lub δ^- , gdyż zgodnie z p. 5 pracy

$$(7.32) \quad 0 \leq \delta_j^{\pm} \leq 1, \quad j = I_1, I_2,$$

a indeks i należy zastąpić odpowiednio znakiem plus lub minus.

Literatura cytowana w tekście

- [1] J. WIĘCKOWSKI, *Własności ekstremalne pewnego funkcjonału liniowego i ich interpretacja w mechanice konstrukcji okrętowych*, Bull. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 11, 11 (1963).
- [2] J. WIĘCKOWSKI, *Ekstremalne siły wewnętrzne w kadłubie statku sztywnego na wodzie spokojnej przy zgięciu ogólnym*, Zesz. Nauk. P. Gd. Bud. Okt. IV, 1964.
- [3] J. WIĘCKOWSKI, *Wpływ niejednorodności ładunku z jedną tworzącą na parametry zginania kadłuba okrętu*, Arch. Mech. Stos., 4, 1964.
- [4] J. WIĘCKOWSKI, *Basic problems of ship's hull bending caused by heterogeneous cargo*, Bull. Acad. Polon. Sci., Techn., 7, 12 (1964).
- [5] J. WIĘCKOWSKI, *Przykłady analityczne i liczbowe wyznaczania obwiednich parametrów zginania kadłuba okrętu*, Biul. Wewnętrzny Katedry Mechaniki Ustrojów Okrętowych, nr 12, 1963.

Резюме

ЭКСТРЕМУМ НЕКОТОРОГО ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ОДНОСТОРОННИМ ПОБОЧНЫМ УСЛОВИЕМ И ЕГО ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В МЕХАНИКЕ КОРАБЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Обсуждается вопрос определения интегрального экстремума функционала формы (2.6) определенного в множестве совместно ограниченных функций с побочным условием, данным в форме функционала (3.1). Функционал (3.1) определяется также в Γ , а побочное условие определяет некоторую часть множества Γ , подмножество Π (3.3).

После исследования случаев несуществования решения или тривиальных решений, дается метод определения интегрального экстремума в множестве Π , в случае когда функция влияния функционалов J и χ являя независимо линейными в каждом подинтервале, заключающимся в интервале интегрирования (теорема 1 п. 4), а также в случае когда существует интервал линейной зависимости функции влияния (теорема 2 п. 5).

Указывается ряд технических интерпретаций задачи в механике корабельных конструкций (п. 3) и некоторые обобщения и частные случаи специально важные для технической практики (п. 6).

В заключение иллюстрируется применение обеих теорем на простом, с математической точки зрения, примере призматической жесткой плавающей балки.

Summary

THE EXTREMUM PROBLEM OF A CERTAIN LINEAR FUNCTIONAL WITH ONE-SIDE LATERAL CONDITION AND ITS INTERPRETATION IN SHIP MECHANICS

This paper is devoted to the problem of finding the extremum of the integral functional (2.6) defined in a set Γ of functions having common bounds and a lateral condition imposed by means of the functional (3.1). The functional (3.1) is also defined in Γ , the lateral condition determining a sub-set of the set Γ (the sub-set Π (3.3)).

After investigating the case of non-existence of solution and that of trivial solutions a method is indicated for determining the integral extremum in the set Π in the case where the influence functions of the functional J and χ are linearly independent in every sub-region contained within the integration bounds (Theorem 1, Sec. 4) and also in the case of existence of an interval of linear dependency between these functions (Theorem 2, Sec. 5).

A number of technical interpretations are indicated concerning ship mechanics (Sec. 3) as well as some generalizations and particular cases important for the engineering practice (Sec. 6).

In conclusion some applications of the two theorems are illustrated by means of the simple example of a floating rigid prismatic beam.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dn. 11 listopada 1963 r.