ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 12 (1964)

ZASTOSOWANIE OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH DO ZADAŃ Z TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

JERZY SUŁOCKI (SZCZECIN)

1. Wstęp

Klasyczna liniowa teorii zginania cienkich płyt sprężystych oparta jest, jak wiadomo, na założeniach przybliżonych. Polegają one między innymi na pominięciu wpływu sił poprzecznych na stan odkształcenia płyty, nieuwzględnieniu wydłużalności płyty w kierunku grubości, przyjęciu liniowego rozkładu naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy} i przemieszczeń u, v na grubości płyty.

Przy rozwiązywaniu zagadnień płyt zachodzi konieczność potraktowania w sposób przybliżony całkowych warunków brzegowych przez zastąpienie trzech występujących wielkości statycznych (momentu zginającego, momentu skręcającego i siły poprzecznej) jedynie dwoma (momentem zginającym oraz zastępczą siłą poprzeczną).

Stwierdzono, że jakkolwiek teoria może być uznana za dostatecznie technicznie dokładną dla cienkich płyt, to jednak równocześnie na skutek przyjętych uproszczeń poza zasięgiem rozważań pozostaje wiele zagadnień, które wymagają ściślejszego ujęcia.

Powyższe okoliczności stały się bodźcem do opracowania *dokładniejszej teorii* cienkich płyt izotropowych, której podstawy dał E. REISSNER w latach 1945–47. W dwóch podstawowych pracach, [1 i 2], przedstawił problem zginania płyt z uwzględnieniem wpływu sił poprzecznych. Nie rezygnując z założenia o liniowym rozkładzie naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy} i przemieszczeń u, v do rozważań wprowadzony został pewien średni kąt odkształcenia postaciowego przekroju, wpływający na ostateczną wartość ugięcia pionowego w. W efekcie uzyskano poprawne matematycznie sformułowanie zagadnienia zginania cienkiej płyty, określone równaniem różniczkowym cząstkowym szóstego rzędu z sześcioma warunkami brzegowymi na dwóch przeciwległych krawędziach konturu.

Idąc podobną drogą M. SCHÄFER, [3], przedstawił rozwiązanie oparte na rozważaniach elementarnych, wywodzących się z analizy wpływu sił poprzecznych na zginanie belek prostych. Zastąpił on równanie różniczkowe cząstkowe szóstego rzędu dwoma: pierwsze z nich dla średniej wartości ugięcia (w punkcie płyty) zachowuje postać biharmoniczną, a dodatkowe równanie jednorodne drugiego rzędu typu eliptycznego, określające wprowadzoną funkcję naprężeń, umożliwia (wspólnie z poprzednim) spełnienia wszystkich trzech całkowych warunków brzegowych płyty.

Na podobnych założeniach wyjściowych J. MOSSAKOWSKI, [5], oraz niezależnie K. GIRKMANN, [4], podali dokładniejszą teorię zginania cienkich płyt ortotropowych.

Nieco wcześniej w dysertacji doktorskiej (złożonej na uniwersytecie w Kalifornii) S. J. MEDWADOWSKI, [6], przedstawił bardziej dokładną teorię równoczesnego zginania ze ściskaniem płyty ortotropowej, przy czym układ równań został oparty na nieliniowej geometrycznie teorii KÁRMÁNA. Linearyzując zagadnienie autor otrzymał także przypadki szczególne rozwiązania [4 i 5]. Rozważono tam również pewne zagadnienia dynamiczne; niektóre z nich znalazły rozwiązanie dopiero przez wprowadzenie dokładniejszej teorii płyt (np. drgania płyty odkształcającej się jedynie postaciowo).

Kilka prac z dokładniejszej liniowej teorii E. REISSNERA w ujęciu tensorowym opracowali A. E. GREEN i W. ZERNA, [7].

Założenie o liniowym rozkładzie naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy} i przemieszczeń u, v ogranicza zakres zastosowań do płyt cienkich, a niekiedy w przybliżeniu do płyt średniej grubości.

Z tego względu zasługują na uwagę dalsze prace oparte na ogólniejszych założeniach. Punktem wyjścia są zwykle przemieszczeniowe równania klasycznej liniowej teorii sprężystości (ciał izotropowych lub o określonym typie anizotropii). Rozkład przemieszczeń w kierunku grubości zakłada się z góry np. w postaci szeregu nieskończonego. Współczynniki rozwinięcia (jako funkcje położenia badanego punktu płyty) wyznacza się z warunków brzegowych na płaszczyznach $z = \text{const}$, ograniczających płytę od góry i od dołu. Stosuje się przy tym niekiedy rozdzielenie ogólnego zadania na przypadek symetrii i antysymetrii obciążeń i przemieszczeń, co prowadzi do dwóch odrębnych zadań: wyznaczenia zginania płyty oraz symetrycznego (względem $z = 0$) odkształcenia warstwy sprężystej, ograniczonej konturem. Pełne rozwiązanie zagadnienia ogólnego bez takiego podziału jest oczywiście również możliwe.

E. KOPPE, [8], posiłkując się analizą tensorową podał tok postępowania dla rozwiązania obydwóch zadań przy pewnych szczególnych typach obciążenia powierzchniowego. W pierwszym zadaniu otrzymał biharmoniczne równanie ugięcia warstwy środkowej płyty oraz grupę równań uzupełniających, z których każde jest równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu. Wykazano, że przy biharmonicznym rozkładzie obciążenia zewnętrznego wyniki uproszczonej teorii M. SCHÄFERA niewiele odbiegają od rezultatów pierwszego przybliżenia obliczonego według E. KOPPEGO. W omawianej pracy zanalizowano również zadanie dotyczące warstwy sprężystej dla pewnego obciążenia symetrycznego (względem płaszczyzny środkowej) o rozkładzie harmonicznym.

A. I. ŁURIE w monografii [9] podał rozwiązanie dla nieograniczonej warstwy sprężystej oraz dla płyty grubej posiłkując się liniowymi operatorami różniczkowymi. Wyprowadzone równania różniczkowe problemu są rzędu nieskończonego. Dla przeprowadzenia obliczeń szczegółowych autor zaleca przyjęcie określonego stopnia przybliżenia przez skreślenie części składników występujących w operatorach, przy czym w miarę wzrostu grubości płyty należy stosować coraz wyższy rząd równania różniczkowego. Rozwiązanie jednorodne podane przez ŁURIEGO, [9], wyprowadzone jest jedynie przy wykorzystaniu przybliżonych całkowych warunków

brzegowych klasycznej teorii płyt izotropowych, chociaż sposób postawienia zagadnienia umożliwiał poprawniejsze ich sformułowanie. Mianowicie wzięto pod uwagę po dwa całkowe warunki brzegowe na poszczególnych odcinkach konturu zamiast trzech. Powyższa niekonsekwencja wynikła z niepełnego rozwiązania równania jednorodnego problemu zginania płyty. Bliższe wyjaśnienie istoty tego zagadnienia znajduje się w niniejszej pracy przy omawianiu jednorodnych rozwiązań dla płyt.

Podobnie wykorzystując liniowe operatory różniczkowe nieskończonego rzędu W. Z. WŁASOW i N. N. LEONTIEW, [10], podali odpowiedni algorytm dostosowany do zagadnienia statycznego dla płyt grubych i warstw sprężystych, przy czym autorzy ci zajmowali się głównie rozwiązaniami dla obszarów nieograniczonych w kierunkach x i y. Wprowadzając macierz operatorów oraz jej przekształcenie odwrotne uzyskali równania stanu naprężeń w postaci określonych nieskończonych różniczkowych operacji liniowych na sześciu funkcjach (dwóch zmiennych x i y) przy określonych warunkach brzegowych na płaszczyznach poziomych ograniczających płytę. Wprowadzone następnie funkcje dwóch zmiennych określają stan naprężeń i przemieszczeń na płaszczyźnie $z = 0$; z tego względu zostały one nazwane funkcjami brzegowymi.

Efektywne przejście od nieskończonych operacji różniczkowych do rozwiązań ścisłych uzyskuje się jedynie przez wprowadzenie nieskończonych podwójnych szeregów trygonometrycznych. Stopień przybliżenia rozwiązania zależy wtedy od liczby przyjętych wyrazów szeregu. Podobnie jak A. I. ŁURIE, również W. Z. WŁASSOW i N. N. LEONTIEW wskazują na możliwość korzystania z uproszczonych operatorów liniowych (przyjęcie tylko kilku pierwszych składników). Tok postępowania prowadzi wtedy do równań różniczkowych cząstkowych, których liczbę ustala się w zależności od warunków brzegowych.

Zalecenia tych autorów poparte są przykładem, jednakże propozycje skreślenia części składników nieskończonych operatorów różniczkowych nie mogą być przyjęte bez bliższej analizy i powinny być przy tym podane stosowne reguły. W naszej pracy zajęliśmy się sprawą poprawnego rozwiązania tego zagadnienia.

Zagadnienia dynamiczne teorii sprężystości dla ciał izotropowych i anizotropowych obok innych zagadnień są tematem obszernej monografii S. KALISKIEGO, [11]. Autor podał tok postępowania dla rozwiązywania zagadnień drgań prostopadłościanów, przy czym efektywność rozwiązań została uzyskana głównie dzięki wprowadzeniu funkcji przemieszczeń, a w niektórych przypadkach funkcji naprężeń. Pewne zagadnienia zostały równolegle rozwiązane przy użyciu analizy wektorowej. Obciążenia wymuszające drgania mogą posiadać charakter sił objętościowych.

Opierając się na monografii [11] R. SOLECKI podał ogólne rozwiązanie drgań prostopadłościanu ortotropowego, [12], stosując rozwinięcie funkcji przemieszczeń według funkcji własnych określonego układu podstawowego (w którym poszczególne ścianki pionowe mogą się odkształcać jedynie w kierunkach stycznych).

Zagadnieniem obliczania przestrzennych zadań mechaniki stosowanej przy wykorzystaniu metod pracy wirtualnej zajmował się I. E. MILEJKOWSKI, [13]. Autor sprowadza trójwymiarowe zagadnienia teorii sprężystości do dwu lub jednowymiarowych przez przyjęcie określonych układów podstawowych, charakteryzujących

się skończoną liczbą stopni swobody w jednym kierunku (lub dwóch kierunkach) oraz ciągłością w pozostałych kierunkach. Przedstawiony tok postępowania stanowi rozwinięcie metod W. Z. Własowa, [14].

Przedstawione powyżej metody można umownie podzielić na pewną liczbę grup.

Do pierwszej grupy zaliczymy techniczne metody rozwiązania płyt i warstw sprężystych. Przy ich stosowaniu na wstępie wprowadza się pewne hipotezy robocze przyjęte z wytrzymałości materiałów. W toku rozwiązania operuje się uśrednionymi przemieszczeniami spełniając całkowe warunki równowagi. Postępowanie nie jest poparte analizą rzeczywistego stanu przemieszczeń.

W drugiej grupie znajdą się metody obliczania obiektów przestrzennych (dających się opisać za pomocą modelu dyskretno-ciągłego) przy użyciu znanych z mechaniki budowli twierdzeń o pracy wirtualnej. Skończoną liczbę stopni swobody przypisuje się wtedy kierunkowi o mniejszych wymiarach geometrycznych obiektu (np. grubości) przy zachowaniu ciągłości ośrodka w pozostałych kierunkach. Opisana tu metoda postępowania bywa niekiedy określana jako wariacyjna metoda teorii sprężystości.

Trzecia grupa metod dotyczy obiektów posiadających wymiary tego samego rzędu we wszystkich trzech kierunkach. Model ciała posiada potrójnie nieskończoną liczbę stopni swobody, a stan naprężeń i przemieszczeń podlega wyznaczeniu na podstawie pełnego układu równań klasycznej teorii sprężystości.

W każdej z wymienionych grup stosuje się odrębny tok postępowania i dotychczas ogólna metodyka rozwiązania podanych wyżej zagadnień nie została opracowana, chociaż takie ujęcie dla zastosowań mechaniki posiada duże znaczenie.

Praca nasza stanowi syntezę dotychczasowych metod i jej celem jest rozwiązanie zagadnień, należących do trzech podanych wyżej grup, za pomocą jednolitego toku postępowania. Metoda ta np. w odniesieniu do płyt pozwala dokonać obliczeń płyt cienkich, średnich i grubych na podstawie tego samego algorytmu. Przejście od jednego stopnia przybliżenia do następnego wymaga zwiększenia liczby stopni swobody (w kierunku grubości płyty) bez zmiany metody rozwiązania.

2. Statyczne zadania brzegowe teorii sprężystości

Przedstawimy tutaj rozwiązanie zagadnienia stanu naprężeń i przemieszczeń warstwy sprężystej, obciążonej (w sposób dowolny) na jej płaszczyznach ograniczających przy uwzględnieniu działania sił objętościowych. Wywody oparte są na pracach [9 i 10] (z pewnymi uzupełnieniami).

Równania równowagi elementu przestrzennego ciała izotropowego w przemieszczeniach posiadają następującą postać, [9]:

$$
\begin{aligned}
&[d^2+D^2+\partial_1^2 c]\,u(x,y,z)+c\partial_1\,\partial_2\,v(x,y,z)+c\partial_1\,dw(x,y,z) = -\frac{X(x,y,z)}{G},\\
&c\partial_1\,\partial_2\,u(x,y,z)+[d^2+D^2+\partial_2^2 c]\,v(x,y,z)+c\partial_2\,dw(x,y,z) = -\frac{Y(x,y,z)}{G},\\
&c\partial_1\,du(x,y,z)+c\partial_2\,dv(x,y,z)+[D^2+(1+c)\,d^2]\,w(x,y,z) = -\frac{Z(x,y,z),}{G},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

gdzie

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad d = \frac{\partial}{\partial z}, \quad c = \frac{1}{1-2\mu};$$

$X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ są siłami objętościowymi μ, $G = E/2(1+\mu)$ charakterystykami ośrodka oraz $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ przemieszczeniami odpowiednio w kierunkach x, y, z.

Operatorowy wyznacznik układu równań jednorodnych dla przemieszczeń jest symetryczny względem głównej przekątnej:

$$\bar{L} = \begin{vmatrix} d^2+D^2+\partial_1^2\, c & c\partial_1\,\partial_2 & c d\partial_1 \\ c\partial_1\,\partial_2 & d^2+D^2+\partial_2^2\, c & c d\partial_2 \\ c\partial_1\, d & c\partial_2\, d & D^2+(1+c)\, d^2 \end{vmatrix} = [d^2+D^2]^3. \tag{2.2}$$

Wyliczając kolejne podwyznaczniki operatorowe otrzymuje się

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11} &= (d^2+D^2)\,[(d^2+D^2)(1+c) - c\partial_1^2], \\ \bar{L}_{12} &= \bar{L}_{21} = (d^2+D^2)\, c\partial_1\,\partial_2, \\ \bar{L}_{13} &= \bar{L}_{31} = -(d^2+D^2)\, c\partial_1\, d, \\ \bar{L}_{22} &= (d^2+D^2)\,[(d^2+D^2)(1+c) - c\partial_2^2], \\ \bar{L}_{23} &= \bar{L}_{32} = (d^2+D^2)\, c\partial_2\, d, \\ \bar{L}_{33} &= (d^2+D^2)\,[d^2+D^2(1+c)]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wszystkie operatory $\bar{L}$, $\bar{L}_{ik}$ posiadają wspólny czynnik $\nabla^2 = d^2+D^2$. Rozwikłane równania różniczkowe, wynikające z (2.1)–(2.3) można przedstawić w uproszczonej postaci:

$$\begin{aligned} Lu &= (-L_{11}\, X + L_{12}\, Y - L_{13}\, Z)\frac{1}{G}, \\ Ly &= (L_{21}\, X - L_{22}\, Y + L_{23}\, Z)\frac{1}{G}, \\ Lw &= (-L_{31}\, X + L_{32}\, Y - L_{33}\, Z)\frac{1}{G}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

przy czym

$$\begin{aligned} L &= (d^2+D^2)^2, \quad L_{11} = d^2(1+c) + (D^2+c\partial_2^2), \\ L_{12} &= L_{21} = c\partial_1\,\partial_2, \quad L_{13} = L_{31} = -c\partial_1\, d, \\ L_{22} &= d^2(1+c) + (D^2+c\partial_1^2), \\ L_{23} &= L_{32} = c\partial_2\, d, \quad L_{33} = d^2+D^2(1+c). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Po przyjęciu funkcji przemieszczeń, spełniających równania

$$Lf_1 = -\frac{X}{G}, \quad Lf_2 = -\frac{Y}{G}, \quad Lf_3 = -\frac{Z}{G} \tag{2.6}$$

przemieszczenia określone będą za pomocą wzorów

$$
\begin{aligned}
u &= L_{11} f_1 - L_{12} f_2 + L_{13} f_3, \\
v &= -L_{21} f_1 + L_{22} f_2 - L_{23} f_3, \\
w &= L_{31} f_1 - L_{32} f_2 + L_{33} f_3.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Funkcje $f_i(x, y, z)$ składają się z całek ogólnych $f_i^\circ(x, y, z)$ oraz całek szczególnych $F_i(x, y, z)$ $(i = 1, 2, 3)$

$$f_i(x, y, z) = f_i^\circ(x, y, z) + F_i(x, y, z).$$

Całki ogólne spełniają równania

$$Lf_i^\circ(x, y, z) = (d^2 + D^2)^2 f_i^\circ(x, y, z) = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Rozwiązanie równań typu (2.8) może być uzyskane przez rozwiązanie ich względem zmiennej z przy potraktowaniu symbolu D^2 jako parametru liczbowego. Widoczne jest, że otrzymuje się wtedy:

$$
\begin{aligned}
f_i^\circ(x, y, z) = \sin zD\,[A_{1i}(x, y) + zA_{2i}(x, y)] + \\
+ \cos zD\,[B_{1i}(x, y) + zB_{2i}(x, y)], \qquad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

W dalszym ciągu dla uproszczenia przyjmiemy

$$A_{ik}(x, y) = A_{ik}, \qquad B_{ik}(x, y) = B_{ik}.$$

Przez różniczkowanie względem z otrzymuje się kolejno:

$$
\begin{aligned}
df_i &= \sin zD\,(A_{2i} - DB_{1i} - zDB_{2i}) + \cos zD\,(B_{2i} + DA_{1i} + zDA_{2i}) + dF_i, \\
d^2 f_i &= D\,[\sin zD\,(-2B_{2i} - DA_{1i} - zDA_{2i}) + \\
&\qquad + \cos zD\,(2A_{2i} - DB_{1i} - zDB_{2i})] + d^2 F_i, \\
d^3 f_i &= D^2\,[\sin zD\,(-3A_{2i} + DB_{1i} + zDB_{2i}) + \\
&\qquad + \cos zD\,(-3B_{2i} - DA_{1i} - zDA_{21})] + d^3 F_i.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Podstawiając (2.10) do (2.7) otrzymuje się po przekształceniach:

$$
\begin{aligned}
u(x, y, z) = U(x, y, z) - c\partial_1 \Bigg\{ &\sin zD \left[\partial_1 A_{11} + \partial_2 A_{12} - DB_{13} + \right. \\
&\left. + 2\left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{D}{\partial_1} B_{21} + A_{23} + z(\partial_1 A_{21} + \partial_2 A_{22} - DB_{23}) \right] + \\
&+ \cos zD \left[\partial_1 B_{11} + \partial_2 B_{12} + DA_{13} - 2\left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{D}{\partial_1} A_{21} + \right. \\
&\left. + B_{23} + z(\partial_1 B_{21} + \partial_2 B_{22} + DA_{23}) \right] \Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x,y,z) = V(x,y,z) - c\partial_2 \Big\{ &\sin zD \Big[\partial_1 A_{11} + \partial_2 A_{12} - DB_{13} + \\
&+ 2\Big(1+\frac{1}{c}\Big)\frac{D}{\partial_2} B_{22} + A_{23} + z(\partial_1 A_{21} + \partial_2 A_{22} - DB_{23}) \Big] + \\
&+ \cos zD \Big[(\partial_1 B_{11} + \partial_2 B_{12} + DA_{13} - 2\Big(1+\frac{1}{c}\Big)\frac{D}{\partial_2} A_{22} + \\
&+ B_{23} + z(\partial_1 B_{21} + \partial_2 B_{22} + DA_{23}) \Big] \Big\},
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) = W(x,y,z) + cD \Big\{ &\sin zD \Big[\partial_1 B_{11} + \partial_2 B_{12} + DA_{13} - \\
&- \frac{1}{D}(\partial_1 A_{21} + \partial_2 A_{22}) - \frac{2}{c} B_{23} + z(\partial_1 B_{21} + \partial_2 B_{22} + DA_{23}) \Big] - \\
&- \cos zD \Big[\partial_1 A_{11} + \partial_2 A_{12} - DB_{13} + \frac{1}{D}(\partial_1 B_{21} + \partial_2 B_{22}) - \\
&- \frac{2}{c} A_{23} + z(\partial_1 A_{21} + \partial_2 A_{22} - DB_{23}) \Big] \Big\}.
\end{aligned}
$$

We wzorach powyższych przyjęliśmy oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
U(x,y,z) &= [(1+c)\,d^2 + (D^2 + c\partial_2^2)]\, F_1(x,y,z) - c\partial_1\,\partial_2\, F_2(x,y,z) - \\
&\quad - c\partial_1\, dF_3(x,y,z), \\
V(x,y,z) &= -c\partial_1\,\partial_2\, F_1(x,y,z) + [(1+c)\,d^2 + (D^2 + c\partial_1^2)]\, F_2(x,y,z) - \\
&\quad - c\partial_2\, dF_3(x,y,z), \\
W(x,y,z) &= -c\partial_1\, dF_1(x,y,z) - c\partial_2\, dF_2(x,y,z) + \\
&\quad + [d^2 + (1+c)\,D^2]\, F_3(x,y,z).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

W związkach $(2.11)_1$ i $(2.11)_2$ występuje dwanaście funkcji A_{ik}, B_{ik}, natomiast do ich wyznaczenia dysponuje się sześcioma warunkami brzegowymi na płaszczyznach poziomych $z = \text{const}$, ograniczających płytę. Istnieją jednakże związki pomiędzy poszczególnymi funkcjami i drogą stosownych przekształceń wprowadzimy sześć nowych funkcji zastępujących poprzednie.

W tym celu na podstawie (2.11) wyznaczamy przy $z = 0$ wartości różnicy przemieszczeń, uzyskanej z całek ogólnych i szczególnych:

$$
\begin{aligned}
u_s &= u(x,y,o) - U(x,y,o) = -c\partial_1 \Big[\partial_1 B_{11} + \partial_2 B_{12} + DA_{13} + \\
&\quad + B_{23} - 2\Big(1+\frac{1}{c}\Big)\frac{D}{\partial_1} A_{21} \Big], \\
v_s &= v(x,y,o) - V(x,y,o) = -c\partial_2 \Big[\partial_1 B_{11} + \partial_2 B_{12} + DA_{13} + \\
&\quad + B_{23} - 2\Big(1+\frac{1}{c}\Big)\frac{D}{\partial_2} A_{22} \Big],
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

$$(2.13)\quad w_s = w(x,y,o) - W(x,y,o) = -cD\left[\partial_1 A_{11}+\partial_2 A_{12} - DB_{13} - \frac{2}{c}A_{23} + \frac{1}{D}(\partial_1 B_{21}+\partial_2 B_{22})\right].$$

[c. d.]

Rożniczkując (2.11) względem z i wstawiając następnie $z = 0$, znajdziemy dalsze związki

$$u_s' = d\,[u(x,y,z) - U(x,y,z)]_{z=0} = -c\partial_1 D\left[\partial_1 A_{11}+\partial_2 A_{12} - DB_{13} + A_{23} + 2\left(1+\frac{1}{c}\right)\frac{D}{\partial_1}B_{21} + \frac{1}{D}(\partial_1 B_{21}+\partial_2 B_{22}+DA_{23})\right],$$

$$(2.14)\quad v_s' = d\,[v(x,y,z) - V(x,y,z)]_{z=0} = -c\partial_2 D\left[\partial_1 A_{11}+\partial_2 A_{12} - DB_{13} + A_{23} + 2\left(1+\frac{1}{c}\right)\frac{D}{\partial_2}B_{22} + \frac{1}{D}(\partial_1 B_{21}+\partial_2 B_{22}+DA_{23})\right],$$

$$w_s' = d\,[w(x,y,z) - W(x,y,z)]_{z=0} = cD^2\left[\partial_1 B_{11}+\partial_2 B_{12}+DA_{13} - \frac{1}{D}(\partial_1 A_{21}+\partial_2 A_{22}) - \frac{2}{c}B_{23} - \frac{1}{D}(\partial_1 A_{21}+\partial_2 A_{22} - DB_{23})\right].$$

Wprowadźmy oznaczenia, [9]:

$$(2.15)\quad \vartheta_s = \partial_1 u_s+\partial_2 v_s+w_s', \qquad \vartheta_s' = \partial_1 u_s'+\partial_2 v_s' - D^2 w_s.$$

Przez odpowiednie przekształcenie związków (2.13) i (2.14) otrzymuje się

$$\partial_1 A_{21}+\partial_2 A_{22} - DB_{23} = \frac{\vartheta_s}{2D},$$

$$(2.16)\quad \partial_1 B_{21}+\partial_2 B_{22}+DA_{23} = -\frac{\vartheta_s'}{2D^2(1+c)}.$$

Wzory (2.11) przybierają następującą postać:

$$u(x,y,z) = U(x,y,z)+\cos zD\,u_s(x,y,z)+\frac{\sin zD}{D}u_s'(x,y)+ -\frac{z\sin zD}{D}\frac{c\partial_1\vartheta_s(x,y)}{2}+\left(\frac{z\cos zD}{D^2}-\frac{\sin zD}{D^3}\right)\frac{\partial_1\vartheta_s'(x,y)}{2\left(1+\frac{1}{c}\right)},$$

$$v(x,y,z) = V(x,y,z)+\cos zD\,v_s(x,y,z)+\frac{\sin zD}{D}v_s'(x,y)+$$

$$(2.17)\qquad -\frac{z\sin zD}{D}\frac{c\partial_2\vartheta_s(x,y)}{2}+\left(\frac{z\cos zD}{D^2}-\frac{\sin zD}{D^3}\right)\frac{2\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\partial_2\vartheta_s'(x,y)},$$

$$w(x,y,z) = W(x,y,z) + \cos zD\, w_s(x,y) + \frac{\sin zD}{D} w_s'(x,y) + \tag{2.17}$$
[c. d.]
$$- \frac{z \sin zD}{D} \frac{\vartheta_s'(x,y)}{2\left(1+\frac{1}{c}\right)} + \left(\frac{\sin zD}{D} - z\cos zD\right)\frac{c\vartheta_s(x,y)}{2}.$$

W wyprowadzonych zależnościach występuje jedynie sześć funkcji, które można określić z warunków brzegowych.

Podobną budowę równań na przemieszczenia otrzymał ŁURIE ([9], str. 152) rozważając zagadnienie warstwy sprężystej (lecz bez sił objętościowych).

Można z kolei wykorzystać związki pomiędzy stanem naprężeń i przemieszczeń:

$$\sigma_z = 2Gc[(1-\mu)\, dw + \mu(\partial_1 u + \partial_2 v)] = G[(c+1)\, dw + \tag{2.18}$$
$$+ (c+1)(\partial_1 u + \partial_2 v)],$$
$$\tau_{xz} = G(du + \partial_1 w), \qquad \tau_{yz} = (dv + \partial_2 w)\, G.$$

Wstawiając (2.17) otrzymujemy

$$\sigma_z(x,y,z) = \Phi_z(x,y,z) + G\left\{-2D\sin zD w_s(x,y) - \left(\frac{1}{1+c}\frac{\sin zD}{D} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{c}{1+c} z\cos zD\right)\vartheta_s'(x,y) + 2\cos zD w_s'(x,y) + [(c-1)\cos zD + \right.$$
$$\left. + c\, zD \sin zD]\,\vartheta_s(x,y)\right\},$$

$$\tau_{xz}(x,y,z) = \Phi_{xz}(x,y,z) + G\left\{\cos zD[u_s'(x,y) + \partial_1 w_s(x,y)] - \right.$$
$$- \frac{cz\sin zD\partial_1 \vartheta_s'(x,y)}{D(1+c)} - \frac{\sin zD}{D}[D^2 u_s(x,y) - \partial_1 w_s'(x,y)] - \tag{2.19}$$
$$\left. - cz\cos zD\partial_1 \vartheta_s(x,y)\right\},$$

$$\tau_{yz}(x,y,z) = \Phi_{yz}(x,y,z) + G\left\{\cos zD[v_s'(x,y) + \partial_2 w_s(x,y)] - \right.$$
$$- \frac{cz\sin zD\vartheta_s'(x,y)\,\partial_2}{(1+c)D} - \frac{\sin Dz}{D}[D^2 v_s(x,y) - \partial_2 w_s'(x,y)] -$$
$$\left. - cz\cos zD\partial_2 \vartheta_s(x,y)\right\},$$

Funkcje $\Phi_z(x,y,z)$, $\Phi_{xz}(x,y,z)$ i $\Phi_{yz}(x,y,z)$ określone są za pomocą następujących wzorów:

$$\Phi_z(x,y,z) = G\{[(c-1)D^2 - (c+1)d^2][\partial_1 F_1(x,y,z) + \partial_2 F_2(x,y,z)] +$$
$$+ [(c+1)d^2 + (3c+1)D^2]\, dF_3(x,y,z)\},$$
$$\Phi_{xz}(x,y,z) = G\{[(c+1)(d^2+D^2) - 2c\partial_1^2]\, dF_1(x,y,z) - 2c\partial_1\partial_2\, dF_2(x,y,z) + \tag{2.20}$$
$$+ [(c+1)D^2 - (c-1)d^2]\,\partial_1 F_3(x,y,z)\},$$
$$\Phi_{yz}(x,y,z) = G\{-2c\partial_1\partial_2\, dF_1(x,y,z) + [(c+1)(d^2+D^2) -$$
$$- 2c\partial_2^2]\, dF_2(x,y,z) + [(c+1)D^2 - (c-1)d^2]\,\partial_2 F_3(x,y,z)\}.$$

Na płaszczyźnie $z = 0$ naprężenia wynoszą:

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^0 &= \sigma_z(x, y, 0) = \Phi_z(x, y, o) + G[2w_s'(x, y) + (c-1)\vartheta_s(x, y)] = \\
&= \Phi_z(x, y, 0) + G\{(c-1)[\partial_1 u_s(x, y) + \partial_2 v_s(x, y)] + (c+1) w_s'(x, y)\}, \\
\tau_{xz}^0 &= \tau_{xz}(x, y, 0) = \Phi_{xz}(x, y, 0) + G[u_s'(x, y) + \partial_1 w_s(x, y)], \\
\tau_{yz}^0 &= \tau_{yz}(x, y, 0) = \Phi_{yz}(x, y, 0) + G[v_s'(x, y) + \partial_2 w_s(x, y)].
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Stany przemieszczeń (2.17) oraz naprężeń (2.19) określone są stosownymi operacjami różniczkowymi na funkcjach

$$u_s(x, y), \quad v_s(x, y), \quad w_s(x, y), \quad u_s'(x, y), \quad v_s'(x, y) \text{ i } w_s'(x, y).$$

W praktyce korzystniej jest zastąpić funkcje $u_s'(x, y)$, $v_s'(x, y)$, $w_s'(x, y)$ przez naprężenia występujące na płaszczyźnie $z = 0$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\tau_{xz}^s = \tau_{xz}^0 - \Phi_{xz}(x, y, o), \quad \tau_{yz}^s = \tau_{yz}^0 - \Phi_{yz}(x, y, o), \quad \sigma_z^s = \sigma_z^0 - \Phi_z(x, y, o). \tag{2.22}$$

Z (2.21) wynikają wzory

$$
\begin{aligned}
u_s' &= \frac{\tau_{xz}^s}{G} - \partial_1 w_s, \quad v_s' = \frac{\tau_{yz}^s}{G} - \partial_2 w_s, \quad w_s' = \frac{1}{1+c}\frac{\sigma_z^s}{G} + \frac{1-c}{1+c}(\partial_1 u_s + \partial_2 v_s), \\
\vartheta_s &= \frac{2}{1+c}(\partial_1 u_s + \partial_2 v_s) + \frac{1}{1+c}\frac{\sigma_z^s}{G}, \quad \vartheta_s' = \frac{1}{G}(\partial_1 \tau_{xz}^s + \partial_2 \tau_{yz}^s) - 2D^2 w_s.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Zależności (2.17) i (2.19) można teraz napisać w formie układu równań:

$$
\begin{aligned}
u(x, y, z) &= U(x, y, z) + L_{UU} u_s(x, y) + L_{UV} v_s(x, y) + L_{UW} w_s(x, y) + \\
&\quad + L_{UZ}\frac{\sigma_z^s(x, y)}{G} + L_{UY}\frac{\tau_{yz}^s(x, y)}{G} + L_{UX}\frac{\tau_{xz}^s(x, y)}{G}, \\
v(x, y, z) &= V(x, y, z) + L_{VU} u_s(x, y) + L_{VV} v_s(x, y) + L_{VW} w_s(x, y) + \\
&\quad + L_{VZ}\frac{\sigma_z^s(x, y)}{G} + L_{VY}\frac{\tau_{yz}^s(x, y)}{G} + L_{VX}\frac{\tau_{xz}^s(x, y)}{G}, \\
w(x, y, z) &= W(x, y, z) + L_{WU} u_s(x, y) + L_{WV} v_s(x, y) + L_{WW} w_s(x, y) + \\
&\quad + L_{WZ}\frac{\sigma_z^s(x, y)}{G} + L_{WY}\frac{\tau_{yz}^s(x, y)}{G} + L_{WX}\frac{\tau_{xz}^s(x, y)}{G};
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z(x, y, z) &= \Phi_z(x, y, z) + GL_{ZU} u_s(x, y) + GL_{ZV} v_s(x, y) + GL_{ZW} w_s(x, y) + \\
&\quad + L_{ZZ}\sigma_z^s(x, y) + L_{ZY}\tau_{yz}^s(x, y) + L_{ZX}\tau_{xz}^s(x, y), \\
\tau_{yz}(x, y, z) &= \Phi_{yz}(x, y, z) + GL_{YU} u_s(x, y) + GL_{YV} v_s(x, y) + GL_{YW} w_s(x, y) + \\
&\quad + L_{YZ}\sigma_z^s(x, y) + L_{YY}\tau_{yz}^s(x, y) + L_{YX}\tau_{xz}^s(x, y), \\
\tau_{xz}(x, y, z) &= \Phi_{xz}(x, y, z) + GL_{XU} u_s(x, y) + GL_{XV} v_s(x, y) + GL_{XW} w_s(x, y) + \\
&\quad + L_{XZ}\sigma_z^s(x, y) + L_{XY}\tau_{yz}^s(x, y) + L_{XX}\tau_{xz}^s(x, y).
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

We wzorach występuje trzydzieści sześć liniowych operatorów różniczkowych rzędu nieskończonego, zamieszczonych w tablicy 1. Zgodnie z zasadą Bettiego o wzajemności oddziaływań operatory leżące w tablicy symetrycznie względem przekątnej (biegnącej od prawej strony z góry do lewej w dół) są sobie równe.

Podobną budowę równań uzyskali na innej drodze rachunkowej W. Z. WŁASOW i N. N. LEONTIEW, [10] [1], wyprowadzając podstawowe zależności dla elementu ciała bez uwzględnienia sił objętościowych. Gdy przyjąć we wzorach (2.25), że siły objętościowe są równe zeru, to całki szczególne $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$, $\Phi_z(x, y, z)$, $\Phi_{yz}(x, y, z)$ i $\Phi_{xz}(x, y, z)$ są równe zero i wtedy $u_s(x, y) = u_0(x, y, 0)$ itd. i równania (2.25) przechodzą w rozwiązanie W. Z. Własowa, N. N. Leontiewa.

Biorąc pod uwagę wzory

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{2G}{1-2\mu}\left[(1-\mu)\,\partial_1 u + \mu\,(\partial_2 v + dw)\right],\\
\sigma_y &= \frac{2G}{1-2\mu}\left[(1-\mu)\,\partial_2 v + \mu\,(\partial_1 u + dw)\right],\\
\tau_{xy} &= G\left[\partial_2 u + \partial_1 v\right]
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

można wyrazić te naprężenia za pomocą funkcji brzegowych $u_s(x, y), \ldots, \tau^s_{xz}(x, y)$.

Uzyskane wzory na σ_x, σ_y, τ_{xy} podane są u dołu tablicy 1, przy czym całki szczególne $\Phi_x(x, y, z)$, $\Phi_y(x, y, z)$, $\Phi_{xy}(x, y, z)$ wyznacza się (po określeniu $F_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$) ze wzorów (2.12) i (2.26); otrzymujemy w ten sposób

$$
\Phi_x = \frac{2G}{1-2\mu}\left\{\left[(2-\mu)(d^2+D^2) - \partial_1^2\right]\partial_1 F_1 + \left[\mu(d^2+D^2) - \partial_1^2\right](\partial_2 F_2 + dF_3)\right\},
$$

$$
\Phi_y = \frac{2G}{1-2\mu}\left\{\left[(2-\mu)(d^2+D^2) - \partial_2^2\right]\partial_2 F_2 + \left[\mu(d^2+D^2) - \partial_2^2\right](\partial_1 F_1 + dF_3)\right\},
$$

$$
\Phi_{xy} = \frac{2G}{1-2\mu}\left\{\left[(1-\mu)(d^2+D^2) - \partial_1^2\right]\partial_2 F_1 + \left[(1-\mu)(d^2+D^2) - \partial_2^2\right]\partial_1 F_2 - \partial_1\partial_2\, dF_3\right\}.
$$

Podana w tablicy 1 macierz różniczkowych nieskończonych operatorów liniowych przedstawia stan naprężeń i przemieszczeń ciała izotropowego, poddanego działaniu obciążeń objętościowych.

Dla rozwiązania konkretnego problemu wystarcza sprecyzowanie warunków brzegowych na płaszczyznach $z = \text{const}$ ograniczających badany obiekt.

W szczególności na podstawie tablicy 1 można rozwiązać zadanie zginania płyty, którym zajmiemy się w następnym rozdziale.

---

[1] W pracy [10], str. 364, wzory (2.7) występuje błąd przy $L_{ZZ} = L_W$ podobnie na str. 370 w tablicy 23 błędnie podany wzór na L_{WW}. Poprawne wartości podaje tablica 1 niniejszej pracy.

Tablica 1. Stan przemieszczenia i naprężenia przestrzen-

(zastosowanie nieskończonych

		$Gu_s(x, y)$	$Gv_s(x, y)$
$u(x, y, z)\, G$	$U(x, y, z)\, G$	$L_{UU} = \cos zD - \frac{\partial_1^2}{2(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$	$L_{UV} = -\frac{\partial_1 \partial_2}{2(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$
$v(x, y, z)\, G$	$V(x, y, z)\, G$	$L_{VU} = -\frac{\partial_1 \partial_2}{2(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$	$L_{VV} = \cos zD - \frac{\partial_2^2}{2(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$
$w(x, y, z)\, G$	$W(x, y, z)\, G$	$L_{WU} = \frac{\partial_1}{2(1-\mu)} \left[(1-2\mu) \times \frac{\sin zD}{D} - z \cos zD\right]$	$L_{WV} = \frac{\partial_2}{2(1-\mu)} \left[(1-2\mu) \times \frac{\sin zD}{D} - z \cos zD\right]$
$\sigma_z(x, y, z)$	$\Phi_z(x, y, z)$	$L_{ZU} = \frac{\partial_1}{(1-\mu)} zD \sin zD$	$L_{ZV} = \frac{\partial_2}{(1-\mu)} zD \sin zD$
$\tau_{yz}(x, y, z)$	$\Phi_{yz}(x, y, z)$	$L_{YU} = \frac{-\partial_1 \partial_2}{(1-\mu)} \left[\mu \frac{\sin zD}{D} + z \cos zD\right]$	$L_{YV} = -\partial_1^2 \frac{\sin zD}{D} - \frac{\partial_2^2}{1-\mu} \left(\frac{\sin zD}{D} + z \cos zD\right)$
$\tau_{xz}(x, y, z)$	$\Phi_{xz}(x, y, z)$	$L_{XU} = -\partial_2^2 \frac{\sin zD}{D} - \frac{\partial_1^2}{(1-\mu)} \left(\frac{\sin zD}{D} + z \cos zD\right)$	$L_{XV} = L_{YU}$
$\sigma_x(x, y, z)$	$\Phi_x(x, y, z)$	$\frac{2\partial_1}{(1-\mu)} \cos zD - \frac{\partial_1^2}{(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$	$\frac{2\mu\partial_2}{(1-\mu)} \cos zD - \frac{\partial_1^2 \partial_2}{(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$
$\sigma_y(x, y, z)$	$\Phi_y(x, y, z)$	$\frac{2\mu\partial_1}{(1-\mu)} \cos zD - \frac{\partial_1 \partial_2^2}{(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$	$\frac{2\partial_2}{(1-\mu)} \cos zD - \frac{\partial_2^3}{(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$
$\tau_{xy}(x, y, z)$	$\Phi_{xy}(x, y, z)$	$\partial_2 \cos zD - \frac{\partial_1^2 \partial_2}{(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$	$\partial_1 \cos zD - \frac{\partial_1 \partial_2^2}{(1-\mu)} \frac{z \sin zD}{D}$

liniowych operatorów różniczkowych)

$Gw_s(x,y)$	$\sigma_z^s(x,y)$	$\tau_{yz}^s(x,y)$	$\tau_{xz}^s(x,y)$
$L_{UW}=-\frac{\partial_1}{2(1-\mu)}\times$ $\times\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{D}+z\cos zD\right]$	$L_{UZ}=-\frac{\partial_1}{4(1-\mu)}\frac{z\sin zD}{D}$	$L_{UY}=\frac{\partial_1\partial_2}{4(1-\mu)}\times$ $\times\left(\frac{z\cos zD}{D^2}-\frac{\sin zD}{D^3}\right)$	$L_{UX}=\frac{\sin zD}{D}+\frac{\partial_1^2}{4(1-\mu)}\times$ $\times\left(\frac{z\cos zD}{D^2}-\frac{\sin zD}{D^3}\right)$
$L_{VW}=-\frac{\partial_2}{2(1-\mu)}\times$ $\times\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{D}+z\cos zD\right]$	$L_{VZ}=-\frac{\partial_2}{4(1-\mu)}z\sin zD$	$L_{VY}=\frac{\sin zD}{D}+\frac{\partial_2^2}{4(1-\mu)}\times$ $\times\left(\frac{z\cos zD}{D^2}-\frac{\sin zD}{D^3}\right)$	$L_{VX}=L_{UY}$
$L_{WW}=\cos zD+$ $+\frac{1}{2(1-\mu)}Dz\sin zD$	$L_{WZ}=\frac{1}{4(1-\mu)}\left[(3-4\mu)\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin zD}{D}-z\cos zD\right]$	$L_{WY}=L_{VZ}$	$L_{WX}=L_{UZ}$
$L_{ZW}=\frac{D}{(1-\mu)}\times$ $\times(Dz\cos zD-\sin zD)$	$L_{ZZ}=L_{WW}$	$L_{ZY}=L_{VW}$	$L_{ZX}=L_{UW}$
$L_{YW}=L_{ZV}$	$L_{YZ}=L_{WV}$	$L_{YY}=L_{VV}$	$L_{YX}=L_{UV}$
$L_{XW}=L_{ZU}$	$L_{XZ}=L_{WU}$	$L_{XY}=L_{VU}$	$L_{XX}=L_{UU}$
$-\frac{(\partial_1^2+2\mu\partial_2^2)}{(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D}-$ $-\frac{\partial_1^2}{(1-\mu)}z\cos zD$	$\frac{\mu}{(1-\mu)}\cos zD-$ $-\frac{\partial_1^2}{2(1-\mu)}\frac{z\sin zD}{D}$	$\frac{\partial_2(2D^2\mu-\partial_1^2)}{2(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D^3}+$ $+\frac{\partial_1^2\partial_2}{2(1-\mu)}\frac{z\cos zD}{D^2}$	$\frac{\partial_1^3}{2(1-\mu)}\frac{z\cos zD}{D^2}+$ $+\frac{\partial_1[(2-\mu)2D^2-\partial_1^2]}{2(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D^3}$
$-\frac{(\partial_2^2+2\mu\partial_1^2)}{(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D}-$ $-\frac{\partial_2^2}{(1-\mu)}z\cos z$	$\frac{\mu}{1-\mu}\cos zD-$ $-\frac{\partial_2^2}{2(1-\mu)}z\sin zD$	$\frac{\partial_2^3}{2(1-\mu)}\frac{z\cos zD}{D^2}+$ $+\frac{\partial_2[(2-\mu)2D^2-\partial_2^2]}{2(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D^3}$	$\frac{\partial_1(2D^2\mu-\partial_2^2)}{2(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D^3}+$ $+\frac{\partial_1\partial_2^2}{2(1-\mu)}\frac{z\cos zD}{D^2}$
$-\frac{\partial_1\partial_2}{(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin zD}{D}+z\cos zD\right]$	$-\frac{\partial_1\partial_2 z}{2(1-\mu)}\frac{\sin zD}{D}$	$\partial_1\frac{\sin zD}{D}-\frac{\partial_1\partial_2^2}{2(1-\mu)}\times$ $\times\left[\frac{\sin zD}{D^3}-\frac{z\cos zD}{D^2}\right]$	$\partial_2\frac{\sin zD}{D}-\frac{\partial_1^2\partial_2}{2(1-\mu)}\times$ $\times\left[\frac{\sin zD}{D^3}-\frac{z\cos zD}{D^2}\right]$

3. Ogólne rozwiązania dla płyt izotropowych

Na podstawie wywodów poprzedniego rozdziału można opracować zadanie zginania płyty o stałej grubości $H = 2h$.

Założymy na razie dla uproszczenia, że obciążenie objętościowe nie występuje, natomiast na płaszczyznach $z = \pm h$ działają siły powierzchniowe $t_x(x, y)$, $t_y(x, y)$ i $p(x, y)$ o rozkładzie antysymetrycznym względem płaszczyzny środkowej $z = 0$.

W tym przypadku ze względu na brak obciążeń objętościowych spełnione są następujące związki:

$$
\begin{aligned}
&u_s(x, y) = u_0(x, y), \qquad v_s(x, y) = v_0(x, y), \qquad w_s(x, y) = w_0(x, y),\\
&\tau^s_{xz}(x, y) = \tau^0_{xy}(x, y), \qquad \tau^s_{yz}(x, y) = \tau^0_{yz}(x, y), \qquad \sigma^s_z(x, y) = \sigma^0_z(x, y),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

a ze względu na antysymetrię obciążenia zewnętrznego

$$
u_0(x, y) = v_0(x, y) = \sigma^0_z(x, y) = 0. \tag{3.2}
$$

Stan naprężeń i przemieszczeń płyty określony będzie za pośrednictwem funkcji $w_0(x, y)$, $\tau^0_{xz}(x, y)$ i $\tau^0_{yz}(x, y)$.

Układ równań spełniających warunki brzegowe wynika wprost z tablicy 1. Przyjmując skierowanie osi z w dół otrzymuje się dla $z = h$ następujący układ równań:

$$
\begin{aligned}
&G L_{ZW} w_0 + L_{ZY} \tau^0_{yz} + L_{ZX} \tau^0_{xz} = p,\\
&G L_{YW} w_0 + L_{YY} \tau^0_{yz} + L_{YX} \tau^0_{xz} = t_y,\\
&G L_{XW} w_0 + L_{XY} \tau^0_{yz} + L_{XX} \tau^0_{xz} = t_x.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Operatorowy wyznacznik układu równań oraz poszczególne podwyznaczniki, napisane na podstawie tablicy pierwszej są następujące:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{D^2 h}{1-\mu}\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\cos hD,\\
K_{11} &= \cos hD\left[\cos hD - \frac{Dh}{2(1-\mu)}\sin hD\right],\\
K_{12} &= \frac{hD}{1-\mu}\partial_2 \sin hD \cos hD,\\
K_{13} &= -\frac{hD}{1-\mu}\partial_1 \sin hD \cos hD;\\
K_{21} &= -\frac{h}{2(1-\mu)}\partial_2\left[(1-2\mu)\frac{\sin hD}{hD} + \cos hD\right]\cos hD,\\
K_{22} &= \frac{D^2 h}{1-\mu}\left(\cos hD - \frac{\sin hD}{hD}\right)\cos hD + \frac{h}{1-\mu}\partial_1^2 \sin^2 hD,\\
K_{23} &= \frac{h}{1-\mu}\partial_1 \partial_2 \sin^2 hD;\\
K_{31} &= \frac{h}{2(1-\mu)}\partial_1 \cos hD\left[(1-2\mu)\frac{\sin hD}{hD} + \cos hD\right],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$K_{32}=\frac{h}{1-\mu}\partial_1\partial_2\sin^2 hD,$$

(3.4) [c. d.]

$$K_{33}=\frac{D^2 h}{1-\mu}\left(\cos hD-\frac{\sin hD}{hD}\right)\cos hD+\frac{h}{1-\mu}\partial_2^2\sin^2 hD.$$

Wprowadźmy nowe funkcje $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ i $\psi_3(x, y)$, które powinny spełnić równania

$$K\psi_1(x, y)=p(x, y),\qquad K\psi_2(x, y)=t_y(x, y),\qquad K\psi_3(x, y)=t_x(x, y). \tag{3.5}$$

Każda z funkcji $\psi_1(x, y)$, $(i=1, 2, 3)$ będzie sumą rozwiązania ogólnego i szczególnego:

$$\psi_i(x, y)=\psi_{i0}(x, y)+\Psi_i(x, y). \tag{3.6}$$

Rozwiązania ogólne powinny spełniać równania

$$K\psi_{i0}(x, y)=\frac{D^2 h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\cos hD\,\psi_{i0}(x, y)=0. \tag{3.7}$$

Po wyznaczeniu funkcji $\psi_i(x, y)$ przemieszczenie $w_0(x, y)$ oraz naprężenia $\tau^0_{yz}(x, y)$ i $\tau^0_{xz}(x, y)$ określa się ze wzorów:

$$G w_0(x, y)=\begin{vmatrix}\psi_1 & L_{ZY} & L_{ZX}\\ \psi_2 & L_{YY} & L_{YX}\\ \psi_3 & L_{XY} & L_{XX}\end{vmatrix}=K_{11}\psi_1-K_{21}\psi_2+K_{31}\psi_3,$$

$$\tau^0_{yz}(x, y)=-K_{12}\psi_1+K_{22}\psi_2-K_{32}\psi_3, \tag{3.8}$$

$$\tau^0_{xz}(x, y)=K_{13}\psi_1-K_{23}\psi_2+K_{33}\psi_3.$$

Po rozwinięciu tych wzorów otrzymuje się

$$Gw_0(x, y)=\left[\cos hD-\frac{Dh}{2(1-\mu)}\sin hD\right]\cos hD\psi_1(x, y)+$$
$$+\frac{h}{2(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\frac{\sin hD}{hD}+\cos hD\right]\cos hD\,[\partial_2\psi_2(x, y)+\partial_1\psi_3(x, y)],$$

$$\tau^0_{yz}(x,y)=-\frac{hD}{1-\mu}\partial_2\sin hD\cos hD\,\psi_1(x, y)+ \tag{3.9}$$
$$+\frac{D^2 h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\psi_2(x, y)-$$
$$-\frac{h}{1-\mu}\partial_2\sin^2 hD[\partial_2\psi_2(x, y)+\partial_1\psi_3(x, y)],$$

$$\tau^0_{xz}(x, y)=-\frac{hD}{1-\mu}\partial_1\sin hD\cos hD\,\psi_1(x, y)- \tag{3.10}$$
$$-\frac{h}{1-\mu}\partial_1\sin^2 hD\,[\partial_2\psi_2(x, y)+\partial_1\psi_3(x, y)]+$$
$$+\frac{D^2 h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\psi_3(x, y).$$

Stan naprężenia i przemieszczenia określają równania (napisane na podstawie tablicy 1)

$$\tau_{yz}(x,y,z) = \frac{zD}{1-\mu}\partial_2 \sin zDw_0\, G + \left[\cos zD - \frac{z}{2(1-\mu)}\partial_2^2 \frac{\sin hD}{D}\right]\tau_{yz}^0 -$$

$$- \frac{z}{2(1-\mu)}\partial_1\partial_2 \frac{\sin zD}{D}\tau_{xz}^0 = -\frac{h}{1-\mu}\partial_2\left(\cos zD \sin hD - \right.$$

$$\left. - \frac{z}{h}\sin zD\cos hD\right)[D\cos hD\,\psi_1 + \sin hD\,(\partial_2\psi_2 + \partial_1\psi_3)] +$$

$$+ \frac{D^2 h}{1-\mu}\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\cos zD\,\psi_2,$$

$$\tau_{xz}(x,y,z) = -\frac{h}{1-\mu}\partial_1\left(\cos zD\sin hD - \frac{z}{h}\sin zD\cos hD\right)\times$$

$$\times [D\cos hD\psi_1 + \sin hD\,(\partial_2\psi_2 + \partial_1\psi_3)] +$$

$$+ \frac{D^2 h}{1-\mu}\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\cos zD\,\psi_3,$$

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{D^2 h}{1-\mu}\left[\sin zD\sin hD + \right.$$

$$\left. + \cos hD\left(\frac{z}{h}\cos zD - \frac{\sin zD}{hD}\right)\right]\cos hD\psi_1 -$$

$$- \frac{Dh}{1-\mu}\left(\sin zD\cos hD - \frac{z}{h}\cos zD\sin hD\right)\cos hD\,(\partial_2\psi_2 + \partial_1\psi_3),$$

(3.11)
$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{h}{1-\mu}\left\{\partial_2^2\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD\sin hD + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right] - D^2\left[\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD\sin hD + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right]\right\}\cos hD\,\psi_1 - \frac{h}{1-\mu}\left\{\partial_1^2\left[(1+\sin^2 hD)\frac{\sin zD}{D} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + z\cos zD\cos hD\frac{\sin hD}{hD}\right] + \partial_2^2 2\mu\frac{\sin zD}{D}\frac{\sin hD}{hD}\cos hD\right\}(\partial_2\psi_2 + \partial_1\psi_3) +$$

$$+ \frac{2Dh}{1-\mu}\sin zD\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\partial_1\psi_3,$$

$$\sigma_y(x,y,z) = \frac{h}{1-\mu}\left\{\partial_1^2\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD\sin hD + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right] - D^2\left[\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD\sin hD + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right]\right\}\cos hD\,\psi_1 -$$

$$-\frac{h}{1-\mu}\left\{\partial_2^2\left[(1+\sin^2 hD)\frac{\sin zD}{D}+z\cos zD\cos hD\,\frac{\sin hD}{hD}\right]+\right.$$
$$\left.+\,\partial_1^2\cdot 2\mu\frac{\sin zD}{D}\frac{\sin hD}{hD}\cos hD\right\}(\partial_2\psi_2+\partial_1\psi_3)+$$
$$+\frac{2Dh}{1-\mu}\frac{\sin zD}{D}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\partial_2\psi_2,$$

$$\tau_{xy}(x,y,z)=-\frac{h}{1-\mu}\partial_1\partial_2\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD+\sin zD\sin hD+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right]\cos hD\,\psi_1+$$
$$+\frac{h}{1-\mu}\partial_1\partial_2\left[\frac{\sin 2hD}{2hD}\left(2\mu\frac{\sin zD}{D}-z\cos zD\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin zD}{D}(1+\sin^2 hD)\right](\partial_2\psi_2+\partial_1\psi_3)+$$
$$+\frac{D^2h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\frac{\sin zD}{D}(\partial_1\psi_2+\partial_2\psi_3);$$

$$Gu(x,y,z)=-\frac{h}{2(1-\mu)}\partial_1\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD+\sin zD\sin hD+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right]\cos hD\,\psi_1+$$
$$+\frac{h}{2(1-\mu)}\partial_1\left[\frac{\sin 2hD}{2hD}\left(2\mu\frac{\sin zD}{D}-z\cos zD\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin zD}{D}(1+\sin^2 hD)\right](\partial_2\psi_2+\partial_1\psi_3)+\frac{D^2h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\frac{\sin zD}{D}\psi_3,$$

$$Gv(x,y,z)=-\frac{h}{2(1-\mu)}\partial_2\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD+\sin zD\sin hD+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{h}\cos zD\cos hD\right]\cos hD\,\psi_1+$$
$$+\frac{h}{2(1-\mu)}\partial_2\left[\frac{\sin 2hD}{2hD}\left(2\mu\frac{\sin zD}{D}-z\cos zD\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin zD}{D}(1+\sin^2 hD)\right](\partial_2\psi_2+\partial_1\psi_3)+\frac{D^2h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\frac{\sin zD}{D}\psi_2,$$

(3.12)

$$Gw(x,y,z)=\left[\cos zD\cos hD-\frac{Dh}{2(1-\mu)}\left(\cos zD\sin hD-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{z}{h}\sin zD\cos hD\right)\right]\cos hD\,\psi_1+$$

(3.12) [c.d.]
$$+\frac{h}{2(1-\mu)}\left[\cos zD\cos hD+(1-2\mu)\cos zD\frac{\sin hD}{hD}+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{h}\sin zD\sin hD\right]\cos hD\,(\partial_2\psi_2+\partial_1\psi_3).$$

Równania (3.11) i (3.12) mogą być uproszczone w przypadku, gdy mamy do czynienia jedynie z całkami ogólnymi równań (3.5). Wprowadzimy wtedy nowe funkcje

(3.13)
$$\frac{h}{1-\mu}\cos hD\,\psi_{10}=\varphi_1,$$
$$\frac{D^2h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\psi_{20}=\varphi_2,\qquad \frac{D^2h}{1-\mu}\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\psi_{30}=\varphi_3.$$

Jeżeli wprowadzimy dodatkowy warunek

(3.14)
$$\partial_2\psi_2+\partial_1\psi_3=0,$$

to obydwie funkcje φ_2 i φ_3 można zastąpić funkcją $\varphi(x,y)$ spełniającą warunki

(3.15)
$$\varphi_2(x,y)=\partial_1\varphi(x,y)\qquad \varphi_3(x,y)=-\partial_2\varphi(x,y).$$

Wstawiając (3.13)–(3.15) do (3.10) otrzymujemy

$$Gw_0=\left(\frac{1-\mu}{h}\cos hD-\frac{D}{2}\sin hD\right)\varphi_1,$$

(3.16)
$$\tau^0_{yz}=\partial_1\varphi-\partial_2 D\sin hD\,\varphi_1,$$
$$\tau^0_{xz}=-\partial_2\varphi-\partial_1 D\sin hD\,\varphi_1.$$

Występujące w (3.16) funkcje wyznacza się z następujących równań różniczkowych:

(3.17)
$$D^2\left(1-\frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\varphi_1=0,$$
$$\cos hD\,\varphi=0.$$

Równanie $(3.17)_2$ umożliwi równoczesne spełnienie związków

(3.18)
$$\partial_1\cos hD\,\varphi=0,\qquad -\partial_2\cos hD\,\varphi=0.$$

Zastępując ψ_1, ψ_2 i ψ_3 przez φ i φ_1 w (3.11) i (3.12) otrzymuje się wzory na stan naprężeń i przemieszczeń o następującej postaci:

(3.19)
$$\sigma_x=-\left\{\partial_1^2\left[\sin zD\sin hD+\frac{z}{h}\cos zD\cos hD+(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD\right]+\right.$$
$$\left.+2\mu D^2\frac{\sin zD}{hD}\cos hD\right\}\varphi_1-2\frac{\sin zD}{D}\partial_1\partial_2\varphi,$$

$$\sigma_y = -\left\{\partial_2^2\left[\sin zD \sin hD + \frac{z}{h}\cos zD \cos hD + (1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD\right] + 2\mu D^2 \frac{\sin zD}{hD}\cos hD\right\}\varphi_1 + 2\frac{\sin zD}{D}\partial_1 \partial_2 \varphi,$$

(3.19) [c.d.]

$$\sigma_z = D^2\left(\sin zD \sin hD + \frac{z}{h}\cos zD \cos hD - \frac{\sin zD}{hD}\cos hD\right)\varphi_1,$$

$$\tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD \sin hD + \frac{z}{h}\cos zD \cos hD\right]\varphi_1 + (\partial_1^2 - \partial_2^2)\frac{\sin zD}{D},$$

$$\tau_{yz} = h\left(\frac{z}{h}\frac{\sin zD}{hD}\cos hD - \cos zD \frac{\sin hD}{hD}\right)\partial_2 D^2 \varphi_1 + \cos zD\, \partial_1 \varphi,$$

$$\tau_{xz} = h\left[\frac{z}{h}\frac{\sin zD}{hD}\cos hD - \cos zD \frac{\sin hD}{hD}\right]\partial_1 D^2 \varphi_1 - \cos zD\, \partial_2 \varphi;$$

$$Gu = -\frac{1}{2}\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD \sin hD + \frac{z}{h}\cos zD \cos hD\right]\partial_1 \varphi_1 - \frac{\sin zD}{D}\partial_2 \varphi,$$

(3.20)

$$Gv = -\frac{1}{2}\left[(1-2\mu)\frac{\sin zD}{hD}\cos hD + \sin zD \sin hD + \frac{z}{h}\cos zD \cos hD\right]\partial_2 \varphi_1 + \frac{\sin zD}{D}\partial_1 \varphi,$$

$$Gw = \frac{1}{2h}[2(1-\mu)\cos zD \cos hD - hD \cos zD \sin hD + zD \sin zD \cos hD]\,\varphi_1.$$

Podkreślone wyrazy w (3.19) i (3.20) stanowią uzupełnienie rozwiązania zagadnienia jednorodnego płyt, podanego przez ŁURIEGO, ([9], str. 157–158).

Równania (3.19) i (3.20) znajdują bezpośrednie zastosowanie również w przypadku, gdy na płytę działa jedynie obciążenie pionowe, rozłożone antysymetrycznie względem płaszczyzny $z = 0$. Wtedy funkcję φ_1 wyznacza się z równania

$$D^2\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right)\varphi_1 = p, \tag{3.21}$$

otrzymując obok całki ogólnej rozwiązanie szczególne, natomiast funkcja φ jest określona nadal za pomocą równania $(3.17)_2$.

Posługując się wzorami (3.19) i (3.20) można przedstawić całkowe wielkości statyczne na konturze płyty:

$$M_x = \int_{-h}^{h} \sigma_x z dz, \qquad M_y = \int_{-h}^{h} \sigma_y z dz, \qquad M_{xy} = \int_{-h}^{h} \tau_{xy} z dz,$$

$$Q_x = \int_{-h}^{h} \tau_{xz} dz, \qquad Q_y = \int_{-h}^{h} \tau_{yz} dz. \tag{3.22}$$

Przy obliczeniach występują następujące całki:

$$\int_{-h}^{h} z \sin zD\, dz = \frac{2}{D^2}(\sin hD - hD \cos hD),$$

$$\int_{-h}^{h} z^2 \sin zD dz = \int_{-h}^{h} z \cos zD dz = 0,$$

$$\int_{-h}^{h} z^2 \cos zD dz = \frac{2}{D^3}[2hD \cos hD + (h^2 D^2 - 2) \sin hD],$$

$$\int_{-h}^{h} \cos zD\, dz = \frac{2}{D} \sin hD, \quad \int_{-h}^{h} \sin zD\, dz = 0.$$

Po wykonaniu całkowania i uwzględnieniu równań $(3.17)_2$ i (3.21) otrzymuje się

$$M_x = -\frac{2}{D^4}[(\partial_1^2 - 2\mu\partial_2^2)\, p + 2\mu\partial_2^2 D^2 \sin^2 hD\, \varphi_1 + \underline{2D\partial_1 \partial_2 \sin hD\varphi)}],$$

$$M_y = -\frac{2}{D^4}[(\partial_2^2 - 2\mu\partial_1^2)\, p + 2\mu\partial_1^2 D^2 \sin^2 hD\, \varphi_1 - \underline{2D\partial_1 \partial_2 \sin hD\varphi}],$$

$$M_{xy} = -\frac{2}{D^4}[(1+2\mu)\, \partial_1 \partial_2 p - 2\mu D^2 \partial_1 \partial_2 \sin^2 hD\varphi_1 - \underline{(\partial_1^2 - \partial_2^2) D \sin hD\varphi}], \tag{3.23}$$

$$Q_x = -\frac{2}{D^2}(\partial_1 p + \underline{D\partial_2 \sin hD\varphi}),$$

$$Q_y = -\frac{2}{D^2}(\partial_2 p - \underline{D\partial_1 \sin hD\varphi}).$$

Znalezione dodatkowe wyrazy rozwiązania jednorodnego wpływają na formułowanie warunków brzegowych na konturze płyty. Można łatwo sprawdzić, że dla wyciętego elementu płyty po uwzględnieniu wzorów (3.23) spełnione są całkowe równania równowagi:

$$\partial_1 Q_x + \partial_2 Q_y + 2p = 0,$$

$$\partial_1 M_x + \partial_2 M_{xy} - Q_x = 0, \tag{3.24}$$

$$\partial_1 M_{xy} + \partial_2 M_y - Q_y = 0.$$

4. Dynamiczne zadanie brzegowe teorii sprężystości dla ciał izotropowych

Dla określenia algorytmu dla zagadnienia dynamicznego wystarczy uzupełnić układ (2.1) siłami masowymi, wymuszającymi drgania oraz wprowadzić siły bezwładności zgodnie z zasadą d'Alemberta.

Zastąpimy zatem siły objętościowe siłami masowymi wymuszającymi drgania, zastępując w (2.1) funkcje $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ odpowiednio funkcjami $P_x(x, y, z, t), \ldots$.

Ponadto po lewej stronie równań wprowadzamy siły bezwładności

$$-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

gdzie m oznacza masę na jednostkę objętości ciała. Oznaczając drugie pochodne względem czasu przez $-k^2$ oraz $m/G = \varrho$ podstawowy układ równań przedstawiamy następująco:

$$\begin{aligned}
&(d^2+D^2+\partial_1^2 c+\varrho k^2)\, u(x, y, z, t)+c\partial_1\, \partial_2 v(x, y, z, t)+c\partial_1\, dw(x, y, z, t) = \\
&\qquad = -\frac{P_x(x, y, z, t)}{G}, \\
&c\partial_1\, \partial_2 u(x, y, z, t)+[d^2+D^2+\partial_2^2 c+\varrho k^2]\, v(x, y, z, t)+c\partial_2\, dw(x, y, z, t) = \\
&\qquad = -\frac{P_y(x, y, z, t)}{G}, \\
&c\partial_1\, du(x, y, z, t)+c\partial_2\, dv(x, y, z, t)+[D^2+(1+c)\, d^2+\varrho k^2]\, w(x, y, z, t) = \\
&\qquad = -\frac{P_z(x, y, z, t)}{G}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Operatorowy wyznacznik układu równań jednorodnych oraz jego podwyznaczniki są następujące:

$$\begin{aligned}
\bar{L} &= (D^2+d^2+\varrho k^2)^2\, [(1+c)\, (D^2+d^2)+\varrho k^2], \\
\bar{L}_{11} &= (D^2+d^2+\varrho k^2)\, [(1+c)\, (d^2+D^2) - \partial_1^2 c+\varrho k^2], \\
\bar{L}_{22} &= (D^2+d^2+\varrho k^2)\, [(1+c)\, (D^2+d^2) - \partial_2^2 c+\varrho k^2], \\
\bar{L}_{33} &= (D^2+d^2+\varrho k^2)\, [(1+c)\, (D^2+d^2) - d^2 c+\varrho k^2], \\
\bar{L}_{12} &= (D^2+d^2+\varrho k^2)\, c\partial_1\, \partial_2, \\
\bar{L}_{13} &= -(D^2+d^2+\varrho k^2)\, c\partial_1\, d, \\
\bar{L}_{23} &= (D^2+d^2+\varrho k^2)\, c\partial_2\, d.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ze wzorów (4.2) wynika, że można wyłączyć wspólny operator i wtedy równania różniczkowe (4.1) po rozwikłaniu otrzymają postać:

$$\begin{aligned}
L u &= (-L_{11} P_x+L_{12} P_y - L_{13} P_z)\frac{1}{G}, \\
L v &= (L_{21} P_x - L_{22} P_y+L_{23} P_z)\frac{1}{G}, \\
L w &= (-L_{31} P_x+L_{32} P_y - L_{33} P_z)\frac{1}{G},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
L &= (D^2+d^2+\varrho k^2)\,[(1+c)\,(D^2+d^2)+\varrho k^2],\\
L_{11} &= (1+c)\,(D^2+d^2) - \partial_1^2\, c+\varrho k^2,\\
L_{22} &= (1+c)\,(D^2+d^2) - \partial_2^2\, c+\varrho k^2,\\
L_{33} &= (1+c)\,(D^2+d^2) - d^2\, c+\varrho k^2,\\
L_{21} &= L_{12} = c\partial_1\,\partial_2, \qquad L_{31} = L_{13} = -c\partial_1\, d,\\
L_{32} &= L_{23} = c\partial_2\, d.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Wprowadzimy funkcje przemieszczeń, spełniające równania

$$
\begin{aligned}
Lg_1(x,y,z,t) &= -\frac{P_x(x,y,z,t)}{G},\\
Lg_2(x,y,z,t) &= -\frac{P_y(x,y,z,t)}{G},\\
Lg_3(x,y,z,t) &= -\frac{P_z(x,y,z,t)}{G}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Przemieszczenia są wtedy określone za pomocą wzorów

$$
\begin{aligned}
u &= L_{11}\,g_1 - L_{12}\,g_2+L_{13}\,g_3,\\
v &= -L_{21}\,g_1+L_{22}\,g_2 - L_{23}\,g_3,\\
w &= L_{31}\,g_1 - L_{32}\,g_2+L_{33}\,g_3.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Funkcje $g_i(x,y,z,t)$ składają się z całek ogólnych $g_i^0(x,y,z,t)$ oraz całek szczególnych $G_i(x,y,z,t)$. Całki ogólne są to rozwiązania równań

$$
(D^2+d^2+\varrho k^2)\,[(1+c)\,(D^2+d^2)+\varrho k^2]\,g_i^0(x,y,z,t) = 0. \tag{4.7}
$$

Rozwiązania względem zmiennej z będą miały postać

$$
\begin{aligned}
g_i^0(x,y,z,t) = {} & \sin z\sqrt{D^2+\varrho k^2}\,A_i(x,y,z,t)+\cos z\sqrt{D^2+\varrho k^2}\,B_i(x,y,t)+\\
& +\sin z\sqrt{D^2+\frac{\varrho k^2}{1+c}}\,C_i(x,y,t)+\cos z\sqrt{D^2+\frac{\varrho k^2}{1+c}}\,D_i(x,y,t).
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$
\alpha_1 = \sqrt{D^2+\varrho k^2}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{D^2+\frac{\varrho k^2}{1+c}}.
$$

Kolejne różniczkowanie względem z daje

$$
\begin{aligned}
g_i^0 &= \sin z\alpha_1\,A_i+\cos z\alpha_1\,B_i+\sin z\alpha_2\,C_i+\cos z\alpha_2\,D_i,\\
dg_i^0 &= \cos z\alpha_1\,(\alpha_1\,A_i) - \sin z\alpha_1\,(\alpha_1\,B_i)+\\
&\qquad + \cos z\alpha_2\,(\alpha_2\,C_i) - \sin z\alpha_2\,(\alpha_2\,D_i),\\
d^2 g_i^0 &= -\sin z\alpha_1\,(\alpha_1^2\,A_i) - \cos z\alpha_1\,(\alpha_1^2\,B_i) -\\
&\qquad - \sin z\alpha_2\,(\alpha_2^2\,C_i) - \cos z\alpha_2\,(\alpha_2^2\,D_i),\\
d^3 g_i^0 &= -\cos z\alpha_1\,(\alpha_1^3\,A_i)+\sin z\alpha_1\,(\alpha_1^3\,B_i) -\\
&\qquad - \cos z\alpha_2\,(\alpha_2^3\,C_i) + \sin z\alpha_2\,(\alpha_2^3\,D_i).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Zajmiemy się na razie rozwiązaniem jednorodnego układu równań (4.1), przedstawionego w rozwikłanej formie (4.6). Wstawimy tam całki ogólne $g_i^0(x, y, z, t)$ na miejsce $g_i(x, y, z, t)$.

Będziemy pisać w skrócie $A_i(x, y, t) = A_i$ itd. Biorąc pod uwagę, że

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c(\partial_1^2 - \alpha_2^2) = -c\partial_2^2, \qquad (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c(\partial_2^2 - \alpha_2^2) = -c\partial_1^2,$$
$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c(D^2 - \alpha_2^2) = 0, \qquad (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + cD^2 = c\alpha_2^2,$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = {} & \sin z\alpha_1 [c(\partial_2^2 - \alpha_1^2) A_1 - c\partial_1 \partial_2 A_2 + c\partial_1 \alpha_1 B_3)] + \\ & + \cos z\alpha_1 [c(\partial_2^2 - \alpha_1^2) B_1 - c\partial_1 \partial_2 B_2 - c\partial_1 \alpha_1 A_3] + \\ & + \sin z\alpha_2 [-c\partial_1^2 C_1 - c\partial_1 \partial_2 C_2 + c\partial_1 \alpha_2 D_3] + \\ & + \cos z\alpha_2 [-c\partial_1^2 D_1 - c\partial_1 \partial_2 D_2 - c\partial_1 \alpha_2 C_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 = u(x, y, 0, t) = {} & c(\partial_2^2 - \alpha_1^2) B_1(x, y, t) - \\ & - c\partial_1 \partial_2 B_2(x, y, t) - c\partial_1 \alpha_1 A_3(x, y, t) - \\ & - c\partial_1^2 D_1(x, y, t) - c\partial_1 \partial_2 D_2(x, y, t) - \\ & - c\partial_1 \alpha_2 C_3(x, y, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0' = u'(x, y, 0, t) = {} & \alpha_1 [c(\partial_2^2 - \alpha_1^2) A_1(x, y, t) - \\ & - c\partial_1 \partial_2 A_2(x, y, t) + c\partial_1 \alpha_1 B_3(x, y, t)] - \\ & - \alpha_2 [-c\partial_1^2 C_1(x, y, t) - c\partial_1 \partial_2 C_2(x, y, t) + c\partial_1 \alpha_2 D_3(x, y, t)], \end{aligned}$$

(4.10)
$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) = {} & \sin z\alpha_1 [-c\partial_1 \partial_2 A_1 + c(\partial_1^2 - \alpha_1^2) A_2 + c\partial_2 \alpha_1 B_3] + \\ & + \cos z\alpha_1 [-c\partial_1 \partial_2 B_1 + c(\partial_1^2 - \alpha_1^2) B_2 - c\partial_2 \alpha_1 A_3] + \\ & + \sin z\alpha_2 (-c\partial_1 \partial_2 C_1 - c\partial_2^2 C_2 + c\partial_2 \alpha_2 D_3) + \\ & + \cos z\alpha_2 (-c\partial_1 \partial_2 D_1 - c\partial_2^2 D_2 - c\partial_2 \alpha_2 C_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 = v(x, y, 0, t) = {} & -c\partial_1 \partial_2 B_1(x, y, t) + c(\partial_1^2 - \alpha_1^2) B_2(x, y, t) - \\ & - c\partial_2 \alpha_1 A_3(x, y, z) - c\partial_1 \partial_2 D_1(x, y, t) - \\ & - c\partial_2^2 D_2(x, y, t) - c\partial_2 \alpha_2 C_3(x, y, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0' = v'(x, y, 0, t) = {} & \alpha_1 [-c\partial_1 \partial_2 A_1(x, y, t) + c(\partial_1^2 - \alpha_1^2) A_2(x, y, t) + \\ & + c\partial_2 \alpha_1 B_3(x, y, t)] + \alpha_2 [-c\partial_1 \partial_2 C_1(x, y, t) - \\ & - c\partial_2^2 C_2(x, y, t) + c\partial_2 \alpha_2 D_3(x, y, t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) = {} & \sin z\alpha_1 (c\partial_1 \alpha_1 B_1 + c\partial_2 \alpha_1 B_2 + cD^2 A_3) + \\ & + \cos z\alpha_1 (-c\partial_1 \alpha_1 A_1 - c\partial_2 \alpha_1 A_2 + cD^2 B_3) + \\ & + \sin z\alpha_2 (c\partial_1 \alpha_2 D_1 + c\partial_2 \alpha_2 D_2 + c\alpha_2^2 C_3) + \\ & + \cos z\alpha_2 (-c\partial_1 \alpha_2 C_1 - c\partial_2 \alpha_2 C_2 + c\alpha_2^2 D_3), \end{aligned}$$

$$w_0 = w(x, y, 0, t) = -c\partial_1 \alpha_1 A_1(x, y, t) - c\partial_2 \alpha_1 A_2(x, y, t) + cD^2 B_3(x, y, t) - c\partial_1 \alpha_2 C_1(x, y, t) - c\partial_2 \alpha_2 C_2(x, y, t) + c\alpha_2^2 D_3(x, y, t),$$

(4.10) [c.d.]

$$w_0' = w'(x, y, 0, t) = \alpha_1 [c\partial_1 \alpha_1 B_1(x, y, t) + c\partial_2 \alpha_1 B_2(x, y, t) + cD^2 A_3(x, y, t)] + \alpha_2 [c\partial_1 \alpha_2 D_1(x, y, t) + c\partial_2 \alpha_2 D_2(x, y, t) + c\alpha_2^2 C_3(x, y, t)].$$

Wprowadźmy oznaczenia pomocnicze:

$$\delta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0' = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[\partial_1 D_1(x, y, t) + \partial_2 D_2(x, y, t) + \alpha_2 C_3(x, y, t)],$$

4.11)
$$\delta_0' = \partial_1 u_0' - \partial_2 v_0' - D^2 w_0 = (D^2 - \alpha_1^2)[c\partial_1 \alpha_1 A_1(x, y, t) + c\partial_2 \alpha_1 A_2(x, y, t) - cD^2 B_3(x, y, t)].$$

Widoczne jest, że

$$c(\partial_2^2 - \alpha_1^2) B_1 - c\partial_1 \partial_2 B_2 - c\partial_1 \alpha_1 A_3 = u_0 + \frac{c}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \partial_1 \delta_0,$$

$$c(\partial_2^2 - \alpha_1^2) A_1 - c\partial_1 \partial_2 A_2 + c\partial_1 \alpha_1 B_3 = \frac{1}{\alpha_1}\left(u_0' - \partial_1 w_0 - \frac{\partial_1 \delta_0'}{D^2 - \alpha_1^2}\right),$$

$$-c\partial_1 \partial_2 B_1 + c(\partial_1^2 - \alpha_1^2) B_2 - c\partial_2 \alpha_1 A_3 = v_0 + \frac{c}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \partial_2 \delta_0,$$

(4.12)
$$-c\partial_1 \partial_2 A_1 + c(\partial_1^2 - \alpha_1^2) A_2 + c\partial_2 \alpha_1 B_3 = \frac{1}{\alpha_1}\left(v_0' - \partial_2 w_0 - \frac{\partial_1 \delta_0'}{D^2 - \alpha_1^2}\right),$$

$$-c\partial_1 \alpha_2 C_1 - c\partial_2 \alpha_2 C_2 + c\alpha_2^2 D_3 = w_0 + \frac{1}{D^2 - \alpha_1^2} \delta_0',$$

$$c\partial_1 \alpha_1 B_1 + c\partial_2 \alpha_1 B_2 + cD^2 A_3 = \frac{1}{\alpha_1}\left(w_0' - \frac{c\alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right) \delta_0.$$

Wstawiając powyższe do $(4.10)_1$, $(4.10)_4$ i $(4.10)_7$ otrzymuje się

(4.13)
$$u(x, y, t) = \cos z\alpha_1 u_0(x, y, t) + \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} u_0'(x, y, t) + \left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right) \partial_1 w_0(x, y, t) + \frac{c}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}(\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2) \times \partial_1 \delta_0(x, y, t) + \frac{1}{D^2 - \alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right) \partial_1 \delta_0'(x, y, t),$$

$$
\begin{aligned}
v(x,y,z,t) &= \cos z\alpha_1\, v_0(x,y,t) + \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} v_0'(x,y,t) + \\
&+ \left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right)\partial_2 w_0(x,y,t) + \frac{c}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}(\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2)\times \\
&\times \partial_2\,\delta_0(x,y,t) + \frac{1}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right)\partial_2\,\delta_0', \\
w(x,y,z,t) &= \cos z\alpha_2\, w_0(x,y,t) + \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} w_0'(x,y,t) + \\
&+ \frac{c\alpha_2^2}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}\left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right)\delta_0(x,y,t) + \\
&+ \frac{1}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_2 - \cos z\alpha_1)\,\delta_0'(x,y,t).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

[c.d.]

Otrzymaliśmy przemieszczenia uzależnione jedynie od sześciu funkcji określonych na płaszczyźnie $z = 0$.

Biorąc pod uwagę związki

$$
\begin{aligned}
u_0' &= \frac{\tau_{xz}^0}{G} - \partial_1 w_0, \qquad v_0' = \frac{\tau_{yz}^0}{G} - \partial_2 w_0, \\
w_0' &= \frac{\sigma_z^0}{G(1+c)} - \frac{(c-1)}{(c+1)}(\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0), \\
\delta_0 &= \frac{\sigma_z^0}{G(1+c)} + \frac{2}{1+c}(\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0), \\
\delta_0' &= \frac{1}{G}(\partial_1 \tau_{xz}^0 + \partial_2 \tau_{yz}^0) - 2D^2 w_0,
\end{aligned}
$$

po rozwinięciu operatorów względem funkcji $u_0, v_0, w_0, \sigma_z^0, \tau_{yz}^0, \tau_{xz}^0$ układ (4.13) można zastąpić (po przekształceniach) przez następujący układ równań:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= K_{UU}u_0 + K_{UV}v_0 + K_{UW}w_0 + K_{UZ}\frac{\sigma_z^0}{G} + K_{UY}\frac{\tau_{yz}^0}{G} + K_{UX}\frac{\tau_{xz}^0}{G}, \\
v(x,y,z,t) &= K_{VU}u_0 + K_{VV}v_0 + K_{VW}w_0 + K_{YZ}\frac{\sigma_z^0}{G} + K_{VY}\frac{\tau_{yz}^0}{G} + K_{VX}\frac{\tau_{xz}^0}{G}, \\
w(x,y,t) &= K_{WU}u_0 + K_{WY}v_0 + K_{WW}w_0 + K_{WZ}\frac{\sigma_z^0}{G} + K_{WY}\frac{\tau_{yz}^0}{G} + K_{WX}\frac{\tau_{xz}^0}{G}, \\
\sigma_z(x,y,t,z) &= GK_{ZU}u_0 + GK_{ZY}v_0 + GK_{ZW}w_0 + K_{WZ}\sigma_z^0 + K_{WY}\tau_{yz}^0 + K_{WX}\tau_{xz}^0, \\
\tau_{yz}(x,y,z,t) &= GK_{YU}u_0 + GK_{YV}v_0 + GK_{YW}w_0 + K_{YZ}\sigma_z^0 + K_{YY}\tau_{yz}^0 + K_{YX}\tau_{xz}^0, \\
\tau_{xz}(x,y,t,z) &= GK_{XU}u_0 + GK_{XV}v_0 + GK_{XW}w_0 + K_{XZ}\sigma_z^0 + K_{XY}\tau_{yz}^0 + K_{XX}\tau_{xz}^0.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Występujące w (4.14) operatory różniczkowe zestawione są w tablicy 2. Posiada ona budowę symetryczną, co wskazuje na spełnienie twierdzeń o wzajemności oddziaływań.

Tablica 2. Stan przemieszczenia i naprężenia przestrzen-

(zastosowanie nieskończonych liniowych

		$Gu_s(x, y, t)$	$Gv_s(x, y, t)$
$Gu(x, y, z, t)$	$G\Psi_u(x, y, z, t)$	$K_{UU} = \cos z\alpha_1 + \frac{2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_2 - \cos z\alpha_1)$	$K_{UV} = \frac{2\partial_1\partial_2}{D^2-\alpha_1^2} \times (\cos z\alpha_2 - \cos z\alpha_1)$
$Gv(x, y, z, t)$	$G\Psi_v(x, y, z, t)$	$K_{VU} = \frac{2\partial_1\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_2 - \cos z\alpha_1)$	$K_{VV} = \cos z\alpha_1 + \frac{2\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2} \times (\cos z\alpha_2 - \cos z\alpha_1)$
$Gw(x, y, z, t)$	$G\Psi_w(x, y, z, t)$	$K_{WU} = \frac{\partial_1}{D^2-\alpha_1^2}\left[(D^2+\alpha_1^2) \times \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} - 2\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{WV} = \frac{\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\left[(D^2+\alpha_1^2) \times \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} - 2\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$
$\sigma_z(x, y, z, t)$	$\Psi_z(x, y, z, t)$	$K_{ZU} = \frac{2\partial_1(D^2+\alpha_1^2)}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2)$	$K_{ZV} = \frac{2\partial_2(D^2+\alpha_1^2)}{D^2-\alpha_1^2} \times (\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2)$
$\tau_{yz}(x, y, z, t)$	$\Psi_{yz}(x, y, z, t)$	$K_{YU} = \frac{\partial_1\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\left[(3\alpha_1^2+D^2) \times \frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} - 4\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{YV} = -\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2} \times \left[(3\alpha_1^2+D^2)\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} - 4\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$
$\tau_{xz}(x, y, z, t)$	$\Psi_{xz}(x, y, z, t)$	$K_{XU} = -\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2} \times \left[(3\alpha_1^2+D^2)\frac{\sin 2\alpha_1}{\alpha_1} - 4\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{XV} = K_{YU}$
$\sigma_x(x, y, z, t)$	$\Psi_x(x, y, z, t)$	$K_{AU} = 2\partial_1\left[\left(1 - \frac{2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\right) \times (\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2) + \frac{1}{1-\mu}\cos z\alpha_2\right]$	$K_{AV} = 2\partial_2\left[-\frac{2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2) + \frac{\mu}{1-\mu}\cos z\alpha_2\right]$
$\sigma_y(x, y, z, t)$	$\Psi_y(x, y, z, t)$	$K_{BU} = 2\partial_1\left[-\frac{2\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2} \times (\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2) + \frac{\mu}{1-\mu}\cos z\alpha_2\right]$	$K_{BV} = 2\partial_2\left[\left(1 - \frac{2\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2}\right)(\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2) + \frac{1}{1-\mu}\cos z\alpha_2\right]$
$\tau_{xy}(x, y, z, t)$	$\Psi_{xy}(x, y, z, t)$	$K_{CU} = \partial_2\left[\cos z\alpha_1 - \frac{4\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2} \times (\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2)\right]$	$K_{CV} = \partial_1\left[\cos z\alpha_1 - \frac{4\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2} \times (\cos z\alpha_1 - \cos z\alpha_2)\right]$

nego dynamicznego zadania teorii sprężystości

operatorów różniczkowych)

$Gw_s(x, y, t)$	$\sigma_z^s(x, y, t)$	$\tau_{yz}^s(x, y, t)$	$\tau_{xz}^s(x, y, t)$
$K_{UW}=\frac{\partial_1}{D^2-\alpha_1^2}\left[2\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.$ $\left.-(D^2-\alpha_1^2)\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{UZ}=\frac{\partial_1}{D^2-\alpha_1^2}\times$ $\times(\cos z\alpha_2-\cos z\alpha_1)$	$K_{UY}=\frac{\partial_1\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\times$ $\times\left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}-\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right)$	$K_{UX}=\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_1}+$ $+\frac{\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\left[\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}-\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right]$
$K_{VW}=\frac{\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\left[2\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.$ $\left.-(D^2+\alpha_1^2)\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{VZ}=\frac{\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\times$ $\times(\cos z\alpha_2-\cos z\alpha_1)$	$K_{VY}=\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}+\frac{\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2}\times$ $\times\left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}-\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right)$	$K_{VX}=K_{UY}$
$K_{WW}=\cos z\alpha_2-$ $-\frac{2D^2}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_1-\cos z\alpha_2)$	$K_{WZ}=\frac{1}{D^2-\alpha_1^2}\times$ $\times\left(D^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)$	$K_{WY}=K_{VZ}$	$K_{WX}=K_{UZ}$
$K_{ZW}=\frac{1}{D^2-\alpha_1^2}\left[(D^2+\alpha_1^2)^2\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}-4D^2\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right]$	$K_{ZZ}=K_{WW}$	$K_{ZY}=K_{VW}$	$K_{ZX}=K_{UW}$
$K_{YW}=K_{ZV}$	$K_{YZ}=K_{WV}$	$K_{YY}=K_{VV}$	$K_{YX}=K_{UV}$
$K_{XW}=K_{ZU}$	$K_{XZ}=K_{WU}$	$K_{XY}=K_{VU}$	$K_{XX}=K_{UU}$
$K_{AW}=$ $=\frac{4\alpha_1^2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)-$ $-\left[2\partial_1^2+\frac{\mu(D^2+\alpha_1^2)}{1-\mu}\right]\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}$	$K_{AZ}=$ $=-\frac{2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha_1-$ $-\cos z\alpha_2)+\frac{\mu}{1-\mu}\cos z\alpha_2$	$K_{AY}=$ $=\partial_2\left[-\frac{2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)+\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{AX}=$ $=2\partial\left[\left(1-\frac{\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\right)\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)+\frac{2-\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$
$K_{BX}=$ $=\frac{2\partial_2^2\alpha_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)-$ $-\left[2\partial_2^2+\frac{\mu(D^2+\alpha_1^2)}{1-\mu}\right]\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}$	$K_{BZ}=$ $=-\frac{2\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2}(\cos z\alpha-$ $-\cos z\alpha_2)+\frac{\mu}{1-\mu}\cos z\alpha_2$	$K_{BY}=$ $=2\partial_2\left[\left(1-\frac{\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2}\right)\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)+\frac{2-\mu}{2(1-\mu)}\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{BY}=$ $=\partial_1\left[-\frac{2\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)+\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$
$K_{CW}=\frac{2\partial_1\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\left[2\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.$ $\left.-(D^2+\alpha_1^2)\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{CZ}=-\frac{2\partial_1\partial_2}{D^2-\alpha_1^2}\times$ $\times(\cos z\alpha_1-\cos z\alpha_2)$	$K_{CY}=\partial_1\left[\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.$ $\left.-\frac{2\partial_2^2}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)\right]$	$K_{CK}=\partial_2\left[\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.$ $\left.-\frac{2\partial_1^2}{D^2-\alpha_1^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)\right]$

Dla wyznaczenia pozostałych naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy} wykorzystamy związki (2.26); po podstawieniu funkcji (4.14) i przekształceniach otrzymuje się

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= GK_{AU}\,u_0+GK_{AV}\,v_0+GK_{AW}\,w_0+K_{AZ}\,\sigma_z^0+K_{AY}\,\tau_{yz}^0+K_{AX}\,\tau_{xz}^0,\\
\sigma_y &= GK_{BU}\,u_0+GK_{BV}\,v_0+GK_{BW}\,w_0+K_{BZ}\,\sigma_z^0+K_{BY}\,\tau_{yz}^0+K_{BX}\,\tau_{xz}^0,\\
\tau_{xy} &= GK_{CU}\,u_0+GK_{CV}\,v_0+GK_{CW}\,w_0+K_{CZ}\,\sigma_z^0+K_{CY}\,\tau_{yz}^0+K_{CX}\,\tau_{xz}^0,
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

przy czym występujące operatory umieszczone zostały w trzech dolnych wierszach tablicy 2.

Poprawność obliczeń operatorów z tablicy 2 została sprawdzona przez spełnienie równań równowagi wyrażonych w naprężeniach.

W przypadku występowania objętościowych sił wymuszających rozwiązanie równań (4.1) rozpoczniemy od wyznaczenia z równań (4.5) całek szczególnych $\bar{g}_1(x, y, z, t)$, $\bar{g}_2(x, y, z, t)$ i $\bar{g}_3(x, y, z, t)$.

Wprowadzamy oznaczenia

$$
\begin{aligned}
u_s(x, y, 0, t) &= u(x, y, 0, t) - \Psi_u(x, y, 0, t) = u_s,\\
v_s(x, y, 0, t) &= v(x, y, 0, t) - \Psi_v(x, y, 0, t) = v_s,\\
w_s(x, y, 0, t) &= w(x, y, 0, t) - \Psi_w(x, y, 0, t) = w_s,\\
\sigma_z^s(x, y, 0, t) &= \sigma_z(x, y, 0, t) - \Psi_z(x, y, 0, t) = \sigma_z^s,\\
\tau_{yz}^s(x, y, 0, t) &= \tau_{yz}(x, y, 0, t) - \Psi_{yz}(x, y, 0, t) = \tau_{yz}^s,\\
\tau_{xz}^s(x, y, 0, t) &= \tau_{xz}(x, y, 0, t) - \Psi_{xz}(x, y, 0, t) = \tau_{xz}^s,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$$
\Psi_u = \Psi_u(x, y, z, t) = \left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\,d^2+\frac{1}{1+2\mu}\,\partial_2^2+\alpha_1^2\right]\bar{g}_1(x, y, z, t) - \\
-\frac{\partial_1\,\partial_2}{1-2\mu}\,\bar{g}_2(x, y, z, t) - \frac{\partial_1\,d}{1-2\mu}\,\bar{g}_3(x, y, z, t),
$$

$$
\Psi_v = \Psi_v(x, y, z, t) = -\frac{\partial_1\,\partial_2}{1-2\mu}\,\bar{g}_1(x, y, z, t) + \\
+\left[\frac{1}{1-2\mu}\,\partial_1^2+\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\,d^2+\alpha_1^2\right]\bar{g}_2(x, y, z, t) - \frac{\partial_2\,d}{1-2\mu}\,\bar{g}_3(x, y, z, t),
$$

$$
\Psi_w = \Psi_w(x, y, z, t) = -\frac{\partial_1\,d}{1-2\mu}\,\bar{g}_1(x, y, z, t) - \frac{\partial_2\,d}{1-2\mu}\,\bar{g}_2(x, y, z, t) + \\
+\left(d^2+\frac{1}{1-2\mu}\,D^2+\alpha_1^2\right)\bar{g}_3(x, y, z, t),
$$

$$
\Psi_z = \Psi_z(x, y, z, t) = \frac{2G}{1-2\mu}\{[\mu\alpha_1^2-(1-\mu)\,d^2]\,[\partial_1\,\bar{g}_1(x, y, z, t) + \\
+\partial_2\,\bar{g}_2(x, y, z, t)]+[D^2+(1-\mu)\,(d^2+\alpha_1^2)]\,d\bar{g}_3(x, y, z, t)\},
$$

$$(4.17)\quad \Psi_{yz} = \Psi_{yz}(x, y, z, t) = G\left\{-\frac{2\partial_1 \partial_2}{1-2\mu}\, d\bar{g}_1(x, y, z, t) + \right.$$
$$+\left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} d^2 + \frac{\partial_1^2 - \partial_2^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2\right] d\bar{g}_2(x, y, z, t) +$$
$$\left. +\left(\frac{D^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2 - \frac{2\mu}{1-2\mu} d^2\right)\partial_2 \bar{g}_3(x, y, z, t)\right\},$$

$$\Psi_{xz} = \Psi_{xz}(x, y, z, t) = G\left\{\left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} d^2 + \frac{\partial_2^2 - \partial_1^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2\right] d\bar{g}_1(x, y, z, t) - \right.$$
$$\left. -\frac{2\partial_1 \partial_2}{1-2\mu} d\bar{g}_2(x, y, z, t) + \left(\frac{D^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2 + \frac{2\mu}{1-2\mu} d^2\right)\partial_1 \bar{g}_3(x, y, z, t)\right\},$$

$$\Psi_x = \Psi_x(x, y, z, t) = \frac{2G}{1-2\mu}\{[(2-\mu) d^2 + \partial_2^2 + (1-\mu)\alpha_1^2]\partial_1 \bar{g}_1(x, y, z, t) +$$
$$+ [\mu(d^2 + \alpha_1^2) - \partial_1^2][\partial_2 \bar{g}_2(x, y, z, t) + d\bar{g}_3(x, y, z, t)]\},$$

$$\Psi_y = \Psi_y(x, y, z, t) = \frac{2G}{1-2\mu}\{[(2-\mu) d^2 + \partial_1^2 - (1-\mu)\alpha_1^2]\partial_2 \bar{g}_2(x, y, z, t) +$$
$$+ [\mu(d^2 + \alpha_1^2) - \partial_2^2][\partial_1 \bar{g}_1(x, y, z, t) + d\bar{g}_3(x, y, z, t)]\},$$

$$\Psi_{xy} = \Psi_{xy}(x, y, z, t) = G\left\{\left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} d^2 + \frac{\partial_2^2 - \partial_1^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2\right]\partial_2 \bar{g}_1(x, y, z, t) + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} d^2 + \frac{\partial_1^2 - \partial_2^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2\right]\partial_1 \bar{g}_2(x, y, z, t) - \frac{2\partial_1 \partial_2 d}{1-2\mu} d\bar{g}_3(x, y, z, t)\right\}.$$

Rozwiązanie jest następujące:

(4.18)

$$u(x, y, z, t) = \Psi_u + K_{UU} u_s + K_{UV} v_s + K_{UW} w_s + \frac{1}{G} K_{UZ} \sigma_z^s + \frac{1}{G} K_{UY} \tau_{yz}^s + \frac{1}{G} K_{UX} \tau_{xz}^s,$$

$$v(x, y, z, t) = \Psi_v + K_{VU} u_s + K_{VV} v_s + K_{VW} w_s + \frac{1}{G} K_{VZ} \sigma_z^s + \frac{1}{G} K_{VY} \tau_{yz}^s + \frac{1}{G} K_{VX} \tau_{xz}^s,$$

$$w(x, y, z, t) = \Psi_w + K_{WU} u_s + K_{WV} v_s + K_{WW} w_s + \frac{1}{G} K_{WZ} \sigma_z^s + \frac{1}{G} K_{WY} \tau_{yz}^s + \frac{1}{G} K_{WX} \tau_{xz}^s;$$

(4.19)

$$\sigma_z(x, y, z, t) = \Psi_z + GK_{ZU} u_s + GK_{ZV} v_s + GK_{ZW} w_s + K_{ZZ}\, \sigma_z^s + K_{ZY} \tau_{yz}^s + K_{ZX} \tau_{xz}^s,$$

$$\tau_{yz}(x, y, z, t) = \Psi_{yz} + GK_{YU} u_s + GK_{YV} v_s + GK_{YW} w_s + K_{YZ}\, \sigma_z^s + K_{YY} \tau_{yz}^s + K_{YX} \tau_{xz}^s,$$

$$\tau_{xz}(x, y, z, t) = \Psi_{xz} + GK_{XU} u_s + GK_{XV} v_s + GK_{XW} w_s + K_{XZ}\, \sigma_z^s + K_{XY} \tau_{yz}^s + K_{XX} \tau_{xz}^s,$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \Psi_x + GK_{AU}\, u_s + GK_{AV}\, v_s + GK_{AW}\, w_s + K_{AZ}\, \sigma_z^s + K_{AY}\, \tau_{yz}^s + K_{AX}\, \tau_{xz}^s,\\
\sigma_y &= \Psi_y + GK_{BU}\, u_s + GK_{BV}\, v_s + GK_{BW}\, w_s + K_{BZ}\, \sigma_z^s + K_{BY}\, \tau_{yz}^s + K_{BX}\, \tau_{xz}^s,\\
\tau_{xy} &= \Psi_{xy} + GK_{CU}\, u_s + GK_{CV}\, v_s + GK_{CW}\, w_s + K_{CZ}\, \sigma_z^s + K_{CY}\tau_{yz}^s + K_{CX}\, \tau_{xz}^s.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

[c.d.]

Z budowy wzorów (4.18) i (4.19) oraz operatorów K_{RS} (tablica 2) wynika, że ścisłe spełnienie warunków brzegowych na płaszczyznach $z = 0$, $z = h$ jest możliwe. Dla każdej płaszczyzny dysponujemy trzema danymi warunkami, pozostałe można wyznaczyć z układu trzech równań dla przeciwległej płaszczyzny ograniczającej warstwę. Warunki brzegowe mogą być natury kinematycznej, statycznej bądź mieszanej; tok postępowania będzie we wszystkich tych przypadkach jednakowy. Można również sformułować warunki brzegowe sprężyste na płaszczyznach $z = \text{const}$ (np. w sformułowaniu WINKLERA).

Dla warstw nieograniczonych w kierunkach x i y przedstawione rozwiązanie nie wymaga uzupełnień. Również w nielicznych przypadkach, gdy uda się dobrać odpowiednie funkcje rozkładu w kierunkach x i y, spełniające dane warunki brzegowe na bocznym konturze ograniczającym warstwę (np. na płaszczyznach pionowych prostopadłościanu), uzyskuje się pełne rozwiązanie.

Budowa operatorów występujących przy zagadnieniach statycznych i dynamicznych wskazuje na możliwość wydzielenia zadań, w których obciążenia, stany przemieszczenia i naprężenia są symetryczne względem płaszczyzny $z = 0$ lub antysymetryczne. Uzyskuje się wtedy rozbicie ogólnego zagadnienia na płytowe zadanie warstwy (antysymetria naprężeń σ_z, σ_x, σ_y, τ_{xy} i przemieszczeń u, v; symetria naprężeń τ_{xz}, τ_{yz} i przemieszczenia w) oraz zadanie ściskania lub rozciągania warstwy (symetria naprężeń σ_z, σ_x, σ_y, τ_{xy} i przemieszczeń u, v; antysymetria τ_{xz}, τ_{yz} oraz przemieszczenia w).

Warto wreszcie zwrócić uwagę na możliwość bezpośredniego przejścia do płaskich zadań teorii sprężystości. W celu uzyskania algorytmów obliczeniowych wystarczy uwzględnić warunki brzegowe (np. dla kierunku y) płaskiego stanu odkształcenia lub naprężenia i uwzględnić je w odpowiednich operatorach różniczkowych. Dla zagadnień statycznych zadanie to zostało dokonane przez W.Z. WŁASOWA i N.N. LEONTIEWA, [10].

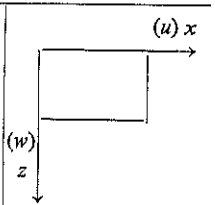
Dla zagadnień dynamicznych w płaskim stanie odkształceń przekształcenie operatorów podanych w tablicy 2 prowadzi do algorytmu zestawionego w tablicy 3.

Równania dla problemu tarcz w układzie x, y można napisać w postaci następującej:

$$
\begin{aligned}
G_u &= G\Psi_u + K_{UU}\, Gu_s + K_{UW}\, Gw_s + K_{UZ}\, \sigma_z^s + K_{UX}\, \tau_{xz}^s,\\
G_w &= G\Psi_w + K_{WU}\, Gu_s + K_{WW}\, Gw_s + K_{WZ}\, \sigma_z^s + K_{WX}\, \tau_{xz}^s,\\
\sigma_z &= \Psi_z + K_{ZU}\, Gu_s + K_{ZW}\, Gw_s + K_{ZZ}\, \sigma_z^s + K_{ZX}\, \tau_{xz}^s,\\
\tau_{xz} &= \Psi_{xz} + K_{XU}\, Gu_s + K_{XW}\, Gw_s + K_{XZ}\, \sigma_z^s + K_{XX}\, \tau_{xz}^s.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Tablica 3. Stan przemieszczenia i naprężenia dla zagadnienia dynamicznego w płaskim stanie odkształcenia

(zastosowanie nieskończonych liniowych operatorów różniczkowych)

		$Gu_s(x,t)$	$Gw_s(x,t)$	$\sigma_z^s(x,t)$	$\tau_{xz}^s(x,t)$	Oznaczenia
$Gu(x,z,t)$	$G\Psi_u(x,z,t)$	$K_{UU}=\cos z\alpha_1-\frac{2\partial_1^2}{\varrho k^2}\times$ $\times(\cos z\alpha_2-\cos z\alpha_1)$	$K_{UW}=-\frac{\partial_1}{\varrho k^2}\left[2\alpha_1^2\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-(\partial_1^2+\alpha_1^2)\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_2}\right]$	$K_{UZ}=-\frac{\partial_1}{\varrho k^2}\times$ $\times(\cos z\alpha_2-\cos z\alpha_1)$	$K_{UX}=\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\partial_1^2}{\varrho k^2}\times$ $\times\left(\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}-\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right)$	
$Gw(x,z,t)$	$G\Psi_w(x,z,t)$	$K_{WU}=\frac{-\partial_1}{\varrho k^2}\left[(\partial_1^2+\alpha_1^2)\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-2\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{WW}=\cos z\alpha_2+$ $+\frac{2\partial_1^2}{\varrho k^2}(\cos z\alpha_1-\cos z\alpha_2)$	$K_{WZ}=-\frac{1}{\varrho k^2}\times$ $\times\left(\partial_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)$	$K_{WX}=K_{UZ}$	$\partial_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $d=\frac{\partial}{\partial z}$
$\sigma_z(x,z,t)$	$\Psi_z(x,z,t)$	$K_{ZU}=-\frac{2\partial_1(\partial_1^2+\alpha_1^2)}{\varrho k^2}\times$ $\times(\cos z\alpha_1-\cos z\alpha_2)$	$K_{ZW}=-\frac{1}{\varrho k^2}\left[(\partial_1^2+\alpha_1^2)\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}-4\partial_1^2\alpha_1^2\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}\right]$	$K_{ZZ}=K_{WW}$	$K_{ZX}=K_{UW}$	$k^2=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\varrho=\frac{m}{G}$
$\tau_{zz}(x,z,t)$	$\Psi_{zz}(x,z,t)$	$K_{XU}=-\alpha_1^2\times$ $\times\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\partial_1^2}{\varrho k^2}\left[(3\alpha_1^2+\partial_1^2)\times\right.$ $\left.\times\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-4\alpha_2^2\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	$K_{XW}=K_{ZU}$	$K_{XZ}=K_{WU}$	$K_{XX}=K_{UU}$	$\alpha_1^2=\partial_1^2+\varrho k^2$ $\alpha_2^2=\partial_1^2+\varrho k^2\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$
$\sigma_x(x,z,t)$	$\Psi_x(x,z,t)$	$K_{AU}=2\partial_1\times$ $\times\left[\left(1+\frac{2\partial_1^2}{\varrho k^2}\right)(\cos z\alpha_1-\right.$ $\left.-\cos z\alpha_2)+\frac{1}{1-\mu}\cos z\alpha_2\right]$	$K_{AW}=$ $=\frac{-4\alpha_1^2\partial_1^2}{\varrho k^2}\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)$ $-\left[2\partial_1^2+\frac{\mu(\partial_1^2+\alpha_1^2)}{1-\mu}\right]\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}$	$K_{AZ}=\frac{\mu}{1-\mu}\cos z\alpha_2+$ $+\frac{2\partial_1^2}{\varrho k^2}(\cos z\alpha-\cos z\alpha_2)$	$K_{AX}=$ $=2\partial_1\left[\left(1+\frac{\partial_1^2}{\varrho k^2}\right)\left(\frac{\sin z\alpha_1}{\alpha_1}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right)+\frac{2-\mu}{2(1-\mu)}\frac{\sin z\alpha_2}{\alpha_2}\right]$	

Funkcje $\Psi(x, z, t)$ otrzymuje się z następujących wzorów różniczkowych:

$$\Psi_u(x, z, t) = \left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} d^2 + \alpha_1^2\right] G_1(x, z, t) - \frac{\partial_1 d}{1-2\mu} G_3(x, z, t),$$

$$\Psi_w(x, z, t) = -\frac{\partial_1 d}{1-2\mu} G_1(x, z, t) + \left(d^2 + \frac{1}{1-2\mu}\partial_1^2 + \alpha_1^2\right) G_3(x, z, t),$$

(4.21)
$$\Psi_z(x, z, t) = \frac{2G}{1-2\mu}\{[\mu\alpha_1^2 - (1-\mu) d^2]\,\partial_1 G_1(x, z, t) + [\partial_1^2 + (1-\mu)(d^2+\alpha_1^2)]\, dG_3(x, z, t,)]\},$$

$$\Psi_{xz}(x, z, t) = G\left\{\left[\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} d^2 - \frac{\partial_1^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2\right] dG_1(x, z, t) + \left(\frac{\partial_1^2}{1-2\mu} + \alpha_1^2 - \frac{2\mu}{1-2\mu} d^2\right)\partial_1 G_3(x, z, t)\right\},$$

$$\Psi_x(x, z, t) = \frac{2G}{1-2\mu}\{[(2-\mu) d^2 + (1-\mu)\alpha_1^2]\,\partial_1 G_1(x, z, t) + [\mu(d^2+\alpha_1^2) - \partial_1^2]\, dG_3(x, z, t)\}.$$

Funkcje $G_1(x, z, t)$ i $G_3(x, z, t)$ wyznacza się jako całki szczególne równań

(4.22)
$$(\partial_1^2 + d^2 + \varrho k^2)\left[(\partial_1^2 + d^2)\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} + \varrho k^2\right] G_1(x, z, t) = -\frac{P_x(x, z, t)}{G},$$

$$(\partial_1^2 + d^2 + \varrho k^2)\left[(\partial_1^2 + d^2)\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} + \varrho k^2\right] G_3(x, z, t) = -\frac{P_z(x, z, t)}{G}.$$

5. Drgania prostopadłościanu izotropowego

Na podstawie algorytmu wyprowadzonego w poprzednim rozdziale rozwiążemy dwa konkretne przykłady.

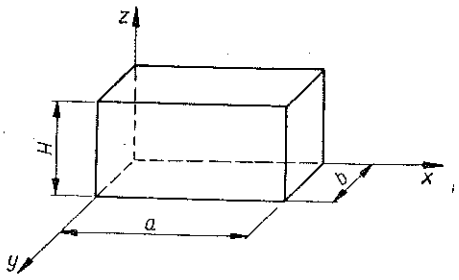
W pracy [11] S. KALISKI między innymi rozwiązał zagadnienie drgań własnych prostopadłościanów izotropowych przy następujących warunkach brzegowych:

1)
$$z = 0, \quad z = H, \quad u = v = w = 0;$$
$$x = 0, \quad x = a, \quad u = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0;$$
$$y = 0, \quad y = b, \quad v = \tau_{zy} = \tau_{yx} = 0;$$

2)
$$z = 0, \quad z = H, \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$
$$x = 0, \quad x = a, \quad u = \tau_{zx} = \tau_{yx} = 0;$$
$$y = 0, \quad y = b, \quad v = \tau_{zy} = \tau_{xy} = 0.$$

W pierwszym zadaniu na płaszczyznach $z = \text{const}$ występują przemieszczeniowe warunki brzegowe, natomiast w drugim naprężeniowe.

Podany w rozdziale czwartym algorytm dla zagadnień dynamicznych pozwala na rozwiązywanie zadań o wszelkich ciągłych warunkach brzegowych na płaszczyznach $z = \text{const}$, przy czym w każdym przypadku stosuje się ten sam tok postępowania. W szczególności można przyjąć: 1) na jednej płaszczyźnie (np. $z = 0$) warunki sformułowane dla naprężeń, natomiast na drugiej ($z = H$) dla przemieszczeń, 2) na obydwóch płaszczyznach warunki mieszane, 3) na jednej lub obydwóch płaszczyznach sprężyste warunki brzegowe sformułowane dla przemieszczeń.



Rys. 1

Swoboda formułowania warunków brzegowych na płaszczyznach pionowych prostopadłościanu jest ograniczona. Według (4.14) można rozwiązać jedynie zagadnienie dla prostopadłościanu o następujących warunkach brzegowych: dla $x = 0$ oraz $x = a$, $u = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$ i $y = 0$ oraz $y = b$, $v = \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0$; lub $x = 0$ oraz $x = a$, $\sigma_x = v = w = 0$ i $y = 0$ oraz dla $y = b$, $\sigma_y = u = w = 0$.

W przypadkach innych warunków brzegowych na płaszczyznach pionowych rozwiązanie bardzo się komplikuje i dotychczas nie ma wyników ścisłych.

Przedstawimy tutaj rozwiązanie dwóch przykładów, na których można prześledzić tok postępowania np. dla uzyskania częstości drgań własnych prostopadłościanu o masie m na jednostkę objętości ($\varrho = m/G$).

A. Dla pierwszego przykładu przyjmujemy następujące mieszane warunki brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&z = 0, \quad u = v = w = 0, \quad z = H, \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;\\
&x = 0, \quad x = a, \quad u = \tau_{zx} = \tau_{yx} = 0;\\
&y = 0, \quad y = b, \quad v = \tau_{zy} = \tau_{xy} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Dla spełnienia warunków brzegowych na ścianach pionowych przyjmujemy (przy oznaczeniach $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$)

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^0(x, y, t) &= \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\, \sigma_{mn}^z \cos \alpha_m x \cos \beta_n y,\\
\tau_{yz}^0(x, y, t) &= \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\, \tau_{mn}^{yz} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y,\\
\tau_{xz}^0(x, y, t) &= \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\, \tau_{mn}^{xz} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Zakładamy, że drgania harmoniczne mają postać:

$$
f_{mn}(t) = C_{1mn} \sin \omega_{mn} t + C_{2mn} \cos \omega_{mn} t.
\tag{5.3}
$$

Przy oznaczeniach wprowadzonych w poprzednim rozdziale symbole różniczkowania można przedstawić w sposób następujący:

$$k^2 = \omega_{mn}^2, \quad D^2 = \partial_1^2+\partial_2^2 = -(\alpha_m^2+\beta_n^2), \tag{5.4}$$

$$\alpha_1^2 = \varrho\omega_{mn}^2-(\alpha_m^2+\beta_n^2), \quad \alpha_2^2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\varrho\omega_{mn}^2-(\alpha_m^2+\beta_n^2).$$

Wobec braku wymuszających obciążeń objętościowych mamy

$$u_s = u_0, \quad v_s = v_0, \quad \sigma_z^s = \sigma_z^0 \text{ itd.}$$

Zgodnie z warunkami brzegowymi dla $z = 0$ $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, wobec czego naprężenia według tablicy drugiej tworzą następujący układ:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= K_{ZZ}(\sigma_z^0)+K_{ZY}(\tau_{yz}^0)+K_{ZX}(\tau)_{xz}^0, \\ \tau_{yz} &= K_{YZ}(\sigma_z^0)+K_{YY}(\tau_{yz}^0)+K_{YX}(\tau_{xz}^0), \\ \tau_{xz} &= K_{XZ}(\sigma_z^0)+K_{XY}(\tau_{yz}^0)+K_{XX}(\tau_{xz}^0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Biorąc pod uwagę operatory K_{RS} z tablicy 2 dla $z = H$ po pomnożeniu przez $\varrho\omega_{mn}^2$ otrzymuje się dla każdego m, n układ trzech równań jednorodnych:

$$\begin{aligned} &\Big\{[\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\cos\alpha_2 H+2(\alpha_m^2+\beta_n^2)\cos\alpha_1 H\Big\}\sigma_{mn}^z+ \\ &+\Big\{[\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\beta_n\frac{\sin\alpha_2 H}{\alpha_2}-[2\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+ \\ &+\beta_n^2)]\beta_n\frac{\sin\alpha_1 H}{\alpha_1}\Big\}\tau_{mn}^{yz}+\Big\{[\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\alpha_m\frac{\sin\alpha_2 H}{\alpha_2}- \\ &-[2\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\alpha_m\frac{\sin\alpha_1 H}{\alpha_1}\Big\}\tau_{mn}^{xz} = 0, \\ &\Big\{[\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\beta_n\frac{\sin\alpha_1 H}{\alpha_1}-\Big[\frac{1-2\mu}{1-\mu}\varrho\omega_{mn}^2- \\ &-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\beta_n\frac{\sin\alpha_2 H}{\alpha_2}\Big\}\sigma_{mn}^z+[(\varrho\omega_{mn}^2-2\beta_n^2)\cos\alpha_1 H+ \\ &+2\beta_n^2\cos\alpha_2 H]\tau_{mn}^{yz}+[2\alpha_m\beta_n(\cos\alpha_2 H-\cos\alpha_1 H)]\tau_{mn}^{xz} = 0, \\ &\Big\{[\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+\beta_n^2)]\alpha_m\frac{\sin\alpha_1 H}{\alpha_1}-\Big[\frac{1-2\mu}{1-\mu}\varrho\omega_{mn}^2-2(\alpha_m^2+ \\ &+\beta_n^2)\Big]\alpha_m\frac{\sin\alpha_2 H}{\alpha_2}\Big\}\sigma_{mn}^z+[2\alpha_m\beta_n(\cos\alpha_2 H-\cos\alpha_1 H)]\tau_{mn}^{yz}+ \\ &+[(\varrho\omega_{mn}^2-2\alpha_m^2)\cos\alpha_1 H+2\alpha_m^2\cos\alpha_2 H]\tau_{mn}^{xz} = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dla znalezienia częstości drgań własnych przyrównujemy wyznacznik układu równań (5.6) do zera. Po rozwinięciu wyznacznika i prostych przekształceniach uzyskujemy następujące równanie charakterystyczne:

$$\cos\alpha_1 H\left\{2\left[\frac{\omega_{mn}^2\varrho}{2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}-1\right]+\left[\left(\frac{\omega_{mn}^2\varrho}{2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}-1\right)^2+1\right]\cos\alpha_1 H\cos\alpha_2 H-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\alpha_m^2+\beta_n^2}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{\omega_{mn}^2\varrho}{2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}-1\right)^2+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\right]\sin\alpha_1 H\sin\alpha_2 H\right\}=0. \tag{5.7}$$

Dla prostopadłościanu, w którym $a/b = 2/1$, $H = b$, $H = 100$ cm, $\varrho = 2{,}5\cdot10^{-11}$ sek.^{2}/cm^2 oraz $\mu = 0{,}25$ częstości drgań wyznaczone w równania $\cos\alpha_1 H = 0$ wynoszą

$$\omega_{110} = 2\cdot10^3\,\pi\sqrt{1{,}5+i+i^2}\ \text{sek.}^{-1},$$

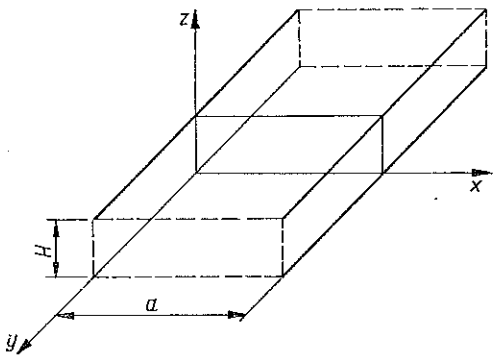
co daje kolejno $\omega_{110} = 2449\,\pi$, $3740\,\pi$, $5485\,\pi$, $7350\,\pi$ sek.$^{-1}$, ..., oraz

$$\omega_{120} = 2\cdot10^3\,\pi\sqrt{4{,}5+i+i^2},$$

co daje $\omega_{120} = 4243\,\pi$, $5099\,\pi$, $6481\,\pi$, $8124\,\pi$ sek.$^{-1}$.

Z wyrażenia zawartego w nawiasie (5.7) otrzymano dla $m = 1$, $n = 1$, $\omega_{11} = 4790\,\pi, 4950\,\pi$ sek.$^{-1}$, ..., dla $m = 1$, $n = 2$, $\omega_{12} = 7200\,\pi, 8100\,\pi, 8500\,\pi$ sek.$^{-1}$, ...

B. Rozważmy drgania prostopadłościanu, który posiada kształt ławy nieskończenie długiej w kierunku osi y (rys. 2). Założymy, że prostopadłościan stoi na podkładce sprężystej, przy czym własności sprężyste są określone parametrami C_x i C_z [kG/cm^3].



Rys. 2

Można przyjąć, że układ znajduje się w płaskim stanie odkształceń (w płaszczyźnie xz).

Warunki brzegowe zadania są następujące:

$$\begin{aligned} &\text{dla } z = 0, && \tau_{xz}^0 = C_x u_0, \quad \sigma_z^0 = C_z w_0;\\ &z = H, && \sigma_z = \tau_{xz} = 0;\\ &x = 0 \text{ oraz } x = a, && u = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Rozwiązanie przedstawimy w postaci

$$w_0 = \sum_m f_m(t)\, w_m \cos\alpha_m x, \qquad u_0 = \sum_m f_m(t)\, u_m \sin\alpha_m x, \tag{5.9}$$

gdzie

$$f_m(t) = C_{1m}\sin\omega_m t + C_{2m}\cos\omega_m t.$$

Wprowadzamy pomocnicze oznaczenia

$$k_x = \frac{C_x}{G}, \quad k_z = \frac{C_z}{G}. \tag{5.10}$$

Warunki brzegowe przy $z = H$ prowadzą do następujących równań (według tablicy 3):

$$\begin{aligned} \sigma_z(H) &= (K_{ZU}+k_x K_{ZX})(Gu_0)+(K_{ZW}+k_z K_{ZZ})(Gw_0) = 0, \\ \tau_{xz}(H) &= (K_{XU}+k_x K_{XX})(Gu_0)+(K_{XW}+k_z K_{XZ})(Gw_0) = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Poszczególne wyrazy występujące w równaniach (5.11) są następujące:

$$\begin{aligned} (K_{ZU}+k_x K_{ZX})\,Gu_0 &= \sum_m \frac{\alpha_m}{\varrho\omega_m^2}\left\{2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)(\cos H\alpha_1-\cos H\alpha_2)+\right. \\ &\left.+k_x\left[2\alpha_1^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}-(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\right]\right\} u_m f_m \cos\alpha_m x, \\ (K_{ZW}+k_z K_{ZZ})\,Gw_0 &= \sum_m \frac{1}{\varrho\omega_m^2}\left\{(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}+4\alpha_m^2\alpha_1^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}+\right. \\ &\left.+k_z\left[-2\alpha_m^2\cos H\alpha_1-(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\cos H\alpha_2\right]\right\} w_m f_m \cos\alpha_m x, \\ (K_{XU}+k_x K_{XX})Gu_0 &= \sum_m \frac{1}{\varrho\omega_m^2}\left\{(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}+4\alpha_m^2\alpha_2^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}+\right. \\ &\left.+k_x\left[-2\alpha_m^2\cos \mathrm{H}\alpha_2-(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\cos H\alpha_1\right]\right\} u_m f_m \sin\alpha_m x, \\ (K_{XW}+k_z K_{XZ})\,Gw_0 &= -\sum_m \frac{\alpha_m}{\varrho\omega_m^2}\left\{2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)(\cos H\alpha_1-\cos H\alpha_2)+\right. \\ &\left.+k_z\left[(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}-2\alpha_2^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\right]\right\} w_m f_m \sin\alpha_m x. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Tworząc dla każdego m układ równań jednorodnych a następnie wyznacznik otrzymuje się następujące równania charakterystyczne:

$$\begin{aligned} &+\alpha_m^2\left\{2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)(\cos H\alpha_1-\cos H\alpha_2)+k_x\left[2\alpha_1^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}-\right.\right. \\ &\left.\left.-(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\right]\right\}\left\{2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)(\cos H\alpha_1-\cos H\alpha_2)+\right. \\ &\left.+k_z\left[(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}-2\alpha_2^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\right]\right\}+\left\{(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}+\right. \\ &\left.+4\alpha_m^2\alpha_1^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}+k_z\left[-2\alpha_m^2\cos H\alpha_1-(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\cos H\alpha_2\right]\right\}\times \\ &\times\left\{(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}+4\alpha_m^2\alpha_2^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}+k_x\left[-2\alpha_m^2\cos H\alpha_2-\right.\right. \\ &\left.\left.-(\alpha_1^2-\alpha_m^2)\cos H\alpha_1\right]\right\}=0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Równanie (5.13) doprowadza się do postaci

$$
\begin{aligned}
&8\alpha_m^2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2(1-\cos H\alpha_1\cos H\alpha_2)+[(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^4+16\alpha_m^4\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2]\times\\
&\qquad\times\frac{\sin H\alpha_1\sin H\alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2}-k_x(\alpha_1^2+\alpha_m^2)\left[4\alpha_1^2\,\alpha_m^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}\cos H\alpha_2+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\cos H\alpha_1\right]-k_z(\alpha_1^2+\alpha_m^2)\left[4\alpha_2^2\,\alpha_m^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\cos H\alpha_1+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}\cos H\alpha_2\right]+\\
&+k_x\,k_z\left\{4\alpha_m^2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)-\alpha_m^2\,[4\alpha_1^2\,\alpha_2^2+(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2]\frac{\sin H\alpha_1\sin H\alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2}+\right.\\
&\qquad\left.+[4\alpha_m^4+(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2]\cos H\alpha_1\cos H\alpha_2\right\}=0,
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

gdzie

$$
\alpha_1^2=\varrho\omega_m^2-\alpha_m^2,\qquad \alpha_2^2=\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\varrho\omega_m-\alpha_m^2,\qquad \varrho=\frac{m}{G}.
$$

Jako przypadki szczególne można z (5.14) określić następujące równania:

a) dla nie podpartej ławy bez podkładki sprężystej ($k_x=k_z=0$)

$$
\begin{aligned}
&8\alpha_m^2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2(1-\cos H\alpha_1\cos H\alpha_2)+\\
&\qquad+[(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^4+16\alpha_m^4\,\alpha_1^2\,\alpha^2{}_2]\frac{\sin H\alpha_1\sin H\alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2}=0;
\end{aligned}
$$

b) dla ławy z podkładką sprężystą, przenoszącą jedynie naprężenia normalne ($k_x=0$)

$$
\begin{aligned}
&8\alpha_m^2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2(1-\cos H\alpha_1\cos H\alpha_2)+\;[(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^4+16\alpha_m^4\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2]\times\\
&\qquad\times\frac{\sin H\alpha_1\sin H\alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2}-k_z(\alpha_1^2+\alpha_m^2)\left[4\alpha_2^2\,\alpha_m^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\cos H\alpha_1+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}\cos H\alpha_2\right]=0.
\end{aligned}
$$

c) dla ławy z podkładką sprężystą, przenoszącą jedynie naprężenie styczne ($k_z=0$)

$$
\begin{aligned}
&8\alpha_m^2(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2(1-\cos H\alpha_1\cos H\alpha_2)+[(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^4+16\alpha_m^4\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2]\times\\
&\qquad\times\frac{\sin H\alpha_1\sin H\alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2}-k_x(\alpha_1^2+\alpha_m^2)\left[4\alpha_1^2\,\alpha_m^2\frac{\sin H\alpha_1}{\alpha_1}\cos H\alpha_2+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha_1^2-\alpha_m^2)^2\frac{\sin H\alpha_2}{\alpha_2}\cos H\alpha_1\right]=0.
\end{aligned}
$$

Częstości drgań własnych oblicza się metodą prób podobnie jak w poprzednim przykładzie.

Z przykładów widoczne jest, że opracowany algorytm pozwala na uwzględnienie różnych warunków brzegowych na płaszczyznach $z = \text{const}$ i w przejrzysty sposób prowadzi do odpowiedniego równania charakterystycznego.

6. Zastosowanie liniowych operatorów różniczkowych skończonego rzędu do statycznego zadania teorii sprężystości

W poprzednich rozdziałach zostały omówione algorytmy zbudowane z liniowych operatorów różniczkowych nieskończonego rzędu.

Przedstawione tam postępowanie może znaleźć zastosowanie w pełni do niektórych zadań teorii sprężystości (warstwy nieograniczone, prostopadłościany o specjalnie określonych warunkach brzegowych na konturze itp). Inne zagadnienia (np. techniczna teoria płyt) mogą być rozwiązane w sposób przybliżony; według zaleceń podanych w pracach [9] i [10] należy przy tym uwzględnić skończoną liczbę wyrazów w poszczególnych operatorach. Taki tok obliczeń bez bliższej analizy nie jest zadowalający, bardziej celowe okazuje się zbudowanie algorytmu opartego na liniowych operatorach różniczkowych skończonego rzędu i zbadanie konsekwencji takiego postępowania. Temu zagadnieniu poświęcony jest niniejszy rozdział.

Nawiązując do rozważań zawartych w rozdziale drugim będziemy poszukiwali rozwiązania jednorodnego układu równań (2.1) przyjmując funkcje przemieszczeń $f_i^0(x, y, z)$ $(i = 1, 2, 3)$ w postaci

$$f_i^0(x, y, z) = \sum_0^n f_{ik}^0(x, y)\frac{z^k}{(k)!}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.1}$$

Zakładamy, że siły objętościowe nie występują. Wtedy funkcje (6.1) powinny spełnić równania (2.8):

$$(d^2+D^2)^2 \quad f_i^0(x, y, z) = 0. \tag{6.2}$$

Wykonując na (6.1) operacje różniczkowe wskazane w (6.2) i porównując składniki przy jednakowych potęgach z, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{aligned}
&D^4 f_{i,n}^0 = 0,\\
&D^4 f_{i,n-1}^0 = 0,\\
&D^4 f_{i,n-2}^0 + 2D^2 f_{i,n}^0 = 0,\\
&D^4 f_{i,n-3}^0 + 2D^2 f_{i,n-1}^0 = 0,\\
&D^4 f_{i,n-4}^0 + 2D^2 f_{i,n-2}^0 + f_{i,n}^0 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D^4 f_{i,0}^0 + 2D^2 f_{i,2}^0 + f_{i,4}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Układ posiada $n+1$ równań z taką samą liczbą funkcji niewiadomych $f_{i,k}^0(x, y)$, które oznaczyliśmy symbolem $f_{i,k}^0$.

W dalszych rozważaniach będziemy rozróżniać dwa przypadki rozwinięcia funkcji $f_i(x, y, z)$: A) na nieparzystą liczbę składników ($n = 2s+1$), B) na parzystą liczbę ($n = 2s$).

A. W przypadku pierwszym, gdy $n = 2s+1$, ze związków (6.3) można przez kolejne eliminacje napisać następujące dwie grupy równań:

$$f^0_{i,2s+1} = -\frac{1}{2} D^2 f^0_{i,2(s-1)+1},$$

$$f^0_{i,2(s-1)+1} = -\frac{2}{3} D^2 f^0_{i,2(s-2)+1},$$

. . . . . .

(6.4.1)
$$f^0_{i,2(s-k)+1} = -\frac{k+1}{k+2} D^2 f^0_{i,2(s-k-1)+1},$$

. . . . . .

$$f^0_{i,3} = -\frac{s}{s+1} D^2 f^0_{i,1};$$

$$f^0_{i,2s} = -\frac{1}{2} D^2 f^0_{i,2(s-1)},$$

$$f^0_{i,2(s-1)} = -\frac{2}{3} D^2 f^0_{i,2(s-2)},$$

. . . . . .

(6.4.2)
$$f^0_{i,2(s-k)} = -\frac{k+1}{k+2} D^2 f^0_{i,2(s-k-1)}$$

. . . . . .

$$f^0_{i,2} = -\frac{s}{s+1} D^2 f^0_{i,0}.$$

Przepisując te równania w porządku odwrotnym otrzymuje się dla $n = 2s+1$ po odpowiednich przekształceniach

$$f^0_{i,3} = -\frac{s}{s+1} D^2 f^0_{i,1},$$

$$f^0_{i,5} = \frac{s(s-1)}{(s+1)s} D^4 f^0_{i,1},$$

. . . . . .

(6.5)
$$f^0_{i,2(s-k)+1} = (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} D^{2(s-k)} f^0_{i,1},$$

. . . . . .

$$f^0_{i,2s+1} = (-1)^s \frac{1}{s+1} D^{2s} f^0_{i,1}$$

oraz dla $n = 2s$

$$f^0_{i,2} = -\frac{s}{s+1} D^2 f^0_{i,0},$$

$$f^0_{i,4} = \frac{s-1}{s+1} D^4 f^0_{i,0},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^0_{i,2(s-k)} = (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} D^{2(s-k)} f^0_{i,0}, \tag{6.6}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^0_{i,2s} = (-1)^s \frac{s}{s+1} D^{2s} f^0_{i,0}.$$

Do układów (6.5) i (6.6) dochodzą dodatkowe warunki z dwóch pierwszych równań (6.3):

$$D^{2(s+2)} f^0_{i,1} = 0, \qquad D^{2(s+2)} f^0_{i,0} = 0. \tag{6.7}$$

Każda funkcja $f^0_i(x, y, z)$ spełniająca równanie biharmoniczne może być wyrażona za pomocą dwóch funkcji $f^0_{i,0}(x, y)$ oraz $f^0_{i,1}(x, y)$ i ostatecznie mamy

$$f^0_i(x, y, z) = \tag{6.8}$$
$$= \sum_0^s (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} D^{2(s-k)} \frac{z^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!} \left[f^0_{i,0}(x, y) + \frac{z}{2(s-k)+1} f^0_{i,1}(x, y) \right].$$

Funkcję tą przedstawimy w postaci

$$f^0_i(x, y, z) = C(zD) f^0_{i,0}(x, y) + \frac{S(zD)}{D} f^0_{i,1}(x, y), \tag{6.9}$$

gdzie $C(zD)$ i $S(zD)$ oznaczają następujące liniowe operatory różniczkowe skończonego rzędu:

$$C(zD) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} \frac{(Dz)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!},$$
$$S(zD) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} \frac{(Dz)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!}. \tag{6.10}$$

Różniczkowanie względem (Dz) funkcji (6.10) daje

$$C'(zD) = -\frac{1}{s+1} \sum_1^s (-1)^{s-k} k \frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!},$$
$$C''(zD) = -\frac{1}{s+1} \sum_1^s (-1)^{s-k} k \frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!}, \tag{6.11}$$
$$C'''(zD) = \frac{1}{s+1} \sum_2^s (-1)^{s-k} (k-1) \frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!};$$

$$S'(zD) = \frac{1}{s+1}\sum_{0}^{s}(-1)^{s-k}(k+1)\frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!},$$

$$S''(zD) = -\frac{1}{s+1}\sum_{1}^{s}(-1)^{s-k}k\frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!}, \tag{6.12}$$

$$S'''(zD) = -\frac{1}{s+1}\sum_{1}^{s}(-1)^{s-k}k\frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!}.$$

Ze związków (6.11) i (6.12) wynikają równości:

$$C(zD) = S'(zD), \quad C'(zD) = S''(zD), \quad C''(zD) = S'''(zD); \tag{6.13}$$

$$C'''(zD) = -S - 2S'' + \frac{1}{s+1}(-1)^s\frac{(Dz)^{2s+1}}{[2s+1]!} \tag{6.13}$$

oraz

$$C(o) = 1, \quad C'(o) = 0, \quad C''(o) = -\frac{s}{s+1}, \quad C'''(o) = 0,$$

$$S(o) = 0, \quad S'(o) = 1, \quad S''(o) = 0, \quad S'''(o) = -\frac{s}{s+1}.$$

Przez wstawienie (6.9) do (2.7) można przedstawić przesunięcia u, v, w za pomocą następujących wzorów:

(6.14)

$$u(x,y,z) = [(D^2+c\partial_2^2)C + D^2(1+c)C'']f^0_{1,0} + [(D^2+c\partial_2^2)S + D^2(1+c)S'']\frac{1}{D}f^0_{1,1} -$$
$$- c\partial_1\partial_2\left(Cf^0_{2,0} + S\frac{1}{D}f^0_{2,1}\right) - c\partial_1 D\left(C'^0 f_{3,0} + S'\frac{1}{D}f^0_{3,1}\right),$$

$$v(x,y,z) = -c\partial_1\partial_2\left(Cf^0_{1,0} + S\frac{1}{D}f^0_{1,1}\right) + [(D^2+c\partial_1^2)C + D^2(1+c)C'']f^0_{2,0} +$$
$$+ [(D^2+c\partial_1^2)S + D^2(1+c)S'']\frac{1}{D}f^0_{2,1} - c\partial_2 D\left(C'f^0_{3,0} + S'\frac{1}{D}f^0_{3,1}\right),$$

$$w(x,y,z) = -c\partial_1 D\left(C'f^0_{1,0} + S'\frac{1}{D}f^0_{1,1}\right) - c\partial_2 D\left(C'f^0_{2,0} + S'\frac{1}{D}f^0_{2,1}\right) +$$
$$+ [D^2(1+c)C + D^2C'']f^0_{3,0} + [D^2(1+c)S + D^2S'']\frac{1}{D}f^0_{3,1}.$$

Łatwo wyprowadzić następujące formuły:

$$du = u' = D[(D^2+c\partial_2^2)C' + D^2(1+c)C''']f^0_{1,0} + [(D^2+c\partial_2^2)S' + D^2(1+c)S''']f^0_{1,1} -$$
$$- c\partial_1\partial_2 D\left(C'f^0_{2,0} + S'\frac{1}{D}f^0_{2,1}\right) - c\partial_1 D^2\left(C''f^0_{3,0} + S''\frac{1}{D}f^0_{3,1}\right),$$

$$dv = v' = -c\partial_1\,\partial_2\,D\left(C' f^0_{1,0} + S'\,\frac{1}{D} f^0_{1,1}\right) + D\left[(D^2 + c\partial_1^2)\,C' + D^2\,(1+c)\,C'''\right]\times$$

$$\times f^0_{2,0} + \left[(D^2 + c\partial_1^2)\,S' + D^2\,(1+c)\,S'''\right] f^0_{2,0} - c\partial_2\,D^2\left(C' f^0_{3,0} + S''\,\frac{1}{D} f^0_{3,1}\right), \tag{6.15}$$

$$dw = w' = -c\partial_1\,D^2\left(C'' f^0_{1,0} + S''\,\frac{1}{D}\,f^0_{1,1}\right) - c\partial_2\,D^2\left(C'' f^0_{2,0} + S''\,\frac{1}{D}\,f^0_{2,1}\right) +$$

$$+ D\left[D^2\,(1+c)\,C' + D^2\,C'''\right] f^0_{3,0} + \left[D^2\,(1+c)\,S' + D^2\,S'''\right] f^0_{3,1};$$

dla $z = 0$ otrzymuje się

$$u_0 = \left[D^2 + c\partial_2^2 - D^2\,(1+c)\,\frac{s}{s+1}\right] f^0_{1,0} - c\partial_1\,\partial_2 f^0_{2,0} - c\partial_1 f^0_{3,1},$$

$$v_0 = -c\partial_1\,\partial_2 f^0_{1,0} + \left[D^2 + c\partial_1^2 - D^2\,(1+c)\,\frac{s}{s+1}\right] f^0_{2,0} - c\partial_2 f^0_{3,1}, \tag{6.16}$$

$$w_0' = c\partial_1\,D^2\,\frac{s}{s+1} f^0_{1,0} + c\partial_2 D^2\,\frac{s}{s+1} f^0_{2,0} + \left[D^2\,(1+c) + D^2\,S'''_{[0]}\right] f^0_{3,1};$$

$$u_0' = \left[D^2 + c\partial_2^2 + D^2\,(1+c)\,S'''_{[0]}\right] f^0_{1,1} - c\partial_1\,\partial_2 f^0_{2,1} + c\partial_1\,D^2\,\frac{s}{s+1} f^0_{3,0},$$

$$v_0' = -c\partial_1\,\partial_2 f^0_{1,1} + \left[D^2 + c\partial_1^2 + D^2\,(1+c)\,S'''_{[0]}\right] f^0_{2,1} + c\partial_2\,D^2\,\frac{s}{s+1} f^0_{3,0}, \tag{6.17}$$

$$w_0 = -c\partial_1 f^0_{1,1} - c\partial_2 f^0_{2,1} + \left[D^2\,(1+c) - D^2\,\frac{s}{s+1}\right] f^0_{3,0}.$$

Dwa układy równań (6.16) i (6.17) pozwalają na wyznaczenie funkcji $f^0_{1,0}$, $f^0_{2,0}$ $f^0_{3,1}$ oraz $f^0_{1,1}$, $f^0_{2,1}$, $f^0_{3,0}$.

Przy oznaczeniach

$$\delta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0', \tag{6.18}$$
$$\delta_0' = \partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - D^2 w_0$$

i przyjęciu $S'''_0 = -\dfrac{s}{(s+1)}$ znajdziemy

$$f^0_{1,0} = \frac{s+1}{c+1}\,\frac{1}{D^2}\,u_0 + \frac{c\,(s+1)^2}{c+1}\,\frac{\partial_1}{D^4}\,\delta_0,$$

$$f^0_{2,0} = \frac{s+1}{c+1}\,\frac{1}{D^2}\,v_0 + \frac{c\,(s+1)^2}{c+1}\,\frac{\partial_2}{D^4}\,\delta_0, \tag{6.19}$$

$$f^0_{3,1} = \frac{s+1}{c+1}\,\frac{1}{D^2}\,w_0' - \frac{cs\,(s+1)}{D^2\,(c+1)}\,\delta_0;$$

$$f^0_{1,1} = \frac{s+1}{c+1}\frac{1}{D^2}u_0' + \frac{(s+1)c}{(c+1)D^2}\partial_1 w_0 + \frac{(s+1)^2 c}{(c+1)D^4}\partial_1 \delta_0',$$

$$f^0_{2,1} = \frac{s+1}{c+1}\frac{1}{D^2}v_0' + \frac{(s+1)c}{(c+1)D^2}\partial_2 w_0 + \frac{(s+1)^2 c}{(c+1)D^4}\partial_2 \delta_0',$$

$$f^0_{3,0} = \frac{(s+1)^2 c}{(c+1)D^4}\delta_0' + \frac{s+1}{D^2}w_0.$$

Za pomocą związków (2.23) można określić funkcje $f^0_{i,0}$ i $f^0_{i,1}$ w zależności od $u_0, v_0, w_0, \sigma^0_z, \tau^0_{yz}$ i τ^0_{xz}:

$$f^0_{1,0} = \frac{s+1}{(c+1)D^2}\left[1 + \frac{2c(s+1)}{c+1}\frac{\partial_1^2}{D^2}\right]u_0 + \frac{2c(s+1)^2}{(c+1)^2}\frac{\partial_1\partial_2}{D^4}v_0 + \frac{c(s+1)^2}{(c+1)^2}\frac{\partial_1}{D^4}\frac{\sigma^0_z}{G},$$

$$f^0_{2,0} = \frac{2c(s+1)^2}{(c+1)^2}\frac{\partial_1\partial_2}{D^4}u_0 + \frac{s+1}{(c+1)D^2}\left[1 + \frac{2c(s+1)}{c+1}\frac{\partial_2^2}{D^2}\right]v_0 + \frac{c(s+1)^2}{(c+1)^2}\frac{\partial_2}{D^4}\frac{\sigma^0_z}{G},$$

(6.20)

$$f^0_{3,1} = \frac{(s+1)(1-c-2cs)}{(c+1)^2}\frac{\partial_1}{D^2}u_0 + \frac{(s+1)(1-c-2cs)}{(c+1)^2}\frac{\partial_2}{D^2}v_0 + \frac{(s+1)(1-cs)}{(c+1)^2 D^2}\frac{\sigma^0_z}{G},$$

$$f^0_{1,1} = -\frac{(s+1)(1+c+2cs)}{c+1}\frac{\partial_1}{D^2}w_0 + \frac{(s+1)^2 c}{c+1}\frac{\partial_1\partial_2}{D^4}\frac{\tau^0_{yz}}{G} + \frac{(s+1)}{(c+1)D^2}\left[1 + \frac{\partial_1^2}{D^2}(s+1)c\right]\frac{\tau^0_{xz}}{G},$$

$$f^0_{2,1} = -\frac{(s+1)(1+c+2cs)}{c+1}\frac{\partial_2}{D^2}w_0 + \frac{s+1}{(c+1)D^2}\left[1 + (s+1)c\frac{\partial_2^2}{D^2}\right]\frac{\tau^{0z}_y}{G} + \frac{(s+1)^2 c}{c+1}\frac{\partial_1\partial_2}{D^4}\frac{\tau^0_{xz}}{G},$$

$$f^0_{3,0} = \frac{(s+1)(1-c-2cs)}{(c+1)D^2}w_0 + \frac{(s+1)^2 c}{c+1}\frac{\partial_2}{D^4}\frac{\tau^0_{yz}}{D^4} + \frac{(s+1)^2 c}{c+1}\frac{\partial_1}{D^4}\frac{\tau^0_{xz}}{G}.$$

Warunki (6.7) prowadzą do następujących równań:

$$D^{2(s+2)}f^0_{1,0} = \frac{s+1}{c+1}\left[1 + \frac{2c(s+1)}{c+1}\frac{\partial_1^2}{D^2}\right]D^{2(s+1)}u_0 + \frac{2c(s+1)^2}{(c+1)^2}\partial_1\partial_2 D^{2s}v_0 + \frac{c(s+1)^2}{(c+1)^2}\partial_1 D^{2s}\frac{\sigma^0_z}{G} = 0,$$

(6.21)

$$D^{2(s+2)}f^0_{2,0} = \frac{2c(s+1)^2}{(c+1)^2}\partial_1\partial_2 D^{2s}u_0 + \frac{s+1}{(c+1)}\left[1 + \frac{2c(s+1)}{c+1}\frac{\partial_2^2}{D^2}\right]D^{2(s+1)}v_0 + \frac{c(s+1)^2}{(c+1)^2}\partial_2 D^{2s}\frac{\sigma^0_z}{G} = 0,$$

(6.21) [c. d.]
$$D^{2(s+2)} f^0_{3,0} = \frac{(s+1)(1-c-2cs)}{(c+1)} D^{2(s+1)} w_0 + \frac{(s+1)^2 c}{c+1} \partial_2 D^{2s} \frac{\tau^0_{yz}}{G} + \frac{(s+1)^2 c}{c+1} \partial_1 D^{2s} \frac{\tau^0_{xz}}{G} = 0,$$

$$D^{2(s+2)} f^0_{1,1} = -\frac{(s+1)(1+c+2cs)}{c+1} \partial_1 D^{2(s+1)} w_0 + \frac{(s+1)^2}{c+1} \partial_1 \partial_2 D^{2s} \frac{\tau^0_{yz}}{G} + \frac{s+1}{c+1}\left[1 + \frac{\partial_1^2}{D^2}(s+1)c\right] D^{2(s+1)} \frac{\tau^0_{xz}}{G} = 0,$$

(6.22)
$$D^{2(s+2)} f^0_{2,1} = -\frac{(s+1)(1+c+2cs)}{c+1} \partial_2 D^{2(s+1)} w_0 + \frac{s+1}{c+1}\left[1 + (s+1)c\frac{\partial_2^2}{D^2}\right] D^{2(s+1)} \frac{\tau^0_{yz}}{G} + \frac{(s+1)^2 c}{c+1} \partial_1 \partial_2 D^{2s} \frac{\tau^0_{xz}}{G} = 0,$$

$$D^{2(s+2)} f^0_{3,1} = \frac{(s+1)(1-c-2cs)}{(c+1)^2} \partial_1 D^{2(s+1)} u_0 + \frac{(s+1)(1-c-2cs)}{(c+1)^2} \partial_2 D^{2(s+1)} v_0 + \frac{(s+1)(1-cs)}{(c+1)^2} D^{2(s+1)} \frac{\sigma^0_z}{G} = 0.$$

Podstawiamy (6.20) do (6.14), a następnie wykorzystujemy związki pomiędzy składowymi stanu naprężenia i stanu przemieszczenia. Jako wynik obliczeń otrzymuje się tablicę liniowych operatorów różniczkowych skończonego rzędu, określającą stan przemieszczenia i naprężenia w statycznym zadaniu teorii sprężystości (tablica 4).

W równaniach występują funkcje brzegowe dwóch zmiennych $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $\sigma^0_z(x, y)$, $\tau^0_{yz}(x, y)$, $\tau^0_{xz}(x, y)$.

B. Przeprowadzimy teraz obliczenia dla przypadku $n = 2s$. Zamiast związków (6.4) mamy następujące:

(6.23)
$$f^0_{i,2s} = -\frac{1}{2} D^2 f^0_{i,2(s-1)},$$
$$f^0_{i,2(s-1)} = -\frac{2}{3} D^2 f_{i,2(s-2)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^0_{i,2(s-k)} = -\frac{k+1}{k+2} D^2 f^0_{i,2(s-k-1)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^0_{i,2} = -\frac{s}{s+1} D^2 f^0_{i,0};$$

(6.24)
$$f^0_{i,2s-1} = -\frac{1}{2} D^2 f^0_{i,2(s-1)-1},$$
$$f^0_{i,2(s-k)+1} = -\frac{k}{k+1} D^2 f^0_{i,2(s-k)-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

(6.24) [c.d.]
$$f^0_{i,3} = -\frac{s-1}{s} D^2 f^0_{i,1}.$$

Metodą wskazaną poprzednio wyznaczamy funkcje $f_i(x, y, z)$ spełniające równanie biharmoniczne; będą one miały postać

(6.25)
$$f_i(x, y, z) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} \frac{(Dz)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!} f^0_{i,0}(x, y) + \\ + \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k}{s} \frac{(Dz)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!} f^0_{i,1}(x, y),$$

a dodatkowe warunki.

(6.26)
$$D^{2(2+s)} f^0_{i,0}(x, y) = 0, \quad D^{2(s+1)} f^0_{i,1}(x, y) = 0.$$

Funkcje powyższe przedstawimy w postaci

(6.27)
$$f^0_i(x, y, z) = \bar{C}(zD) f^0_{i,0}(x, y) + \frac{1}{D} \bar{S}(zD) f^0_{i,1}(x, y),$$

gdzie

(6.28)
$$\bar{C}(zD) = \sum_{0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k+1}{s+1} \frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!},$$
$$\bar{S}(zD) = \sum_{1}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k}{s} \frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!}.$$

Kolejne różniczkowane (6.27) względem (Dz) daje

(6.29)
$$\bar{C}'(zD) = -\sum_{1}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k}{s+1} \frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!},$$
$$\bar{C}''(zD) = -\sum_{1}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k}{s+1} \frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!},$$
$$\bar{C}'''(zD) = \sum_{2}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k-1}{s+1} \frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!};$$

(6.30)
$$\bar{S}'(zD) = \sum_{1}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k}{s} \frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!},$$
$$\bar{S}''(zD) = -\sum_{2}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k-1}{s} \frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!},$$
$$\bar{S}'''(zD) = -\sum_{2}^{s} (-1)^{s-k} \frac{k-1}{s} \frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!}.$$

Z (6.29)–(6.30) wynikają równości

$$\bar{C}'(zD) = -\frac{s}{s+1}\bar{S}(zD), \quad \bar{C}''(zD) = -\frac{s}{s+1}\bar{S}'(zD),$$

$$\bar{C}'''(zD) = -\frac{s}{s+1}\bar{S}''(zD), \tag{6.31}$$

$$\bar{S}'''(zD) = \frac{s+1}{s}[\bar{C}(zD)+2\bar{C}''(zD)] - \frac{1}{s}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}$$

oraz

$$\bar{C}(o) = 1, \quad \bar{C}'(o) = 0, \quad \bar{C}''(o) = -\frac{s}{s+1}, \quad \bar{C}'''(o) = 0, \tag{6.32}$$

$$\bar{S}(o) = 0, \quad \bar{S}'(o) = 1, \quad \bar{S}''(o) = 0, \quad \bar{S}'''(o) = -\frac{s-1}{s}.$$

W wyniku obliczeń podobnych do wykonanych uprzednio wyznacza się składowe stanu przemieszczenia i naprężenia statycznego zadania przestrzennego (por. tablicę 5).

Występujące w tablicach 4 i 5 skończone operatory różniczkowe zawierają w niektórych rubrykach po dwa czynniki. Pierwsze, oznaczone przez L_{RS} ($\bar{L}_{RS}$), tworzą tablicę symetryczną względem przekątnej (od dołu po lewej stronie ku górze prawej strony); taka budowa świadczy o spełnieniu zasady wzajemności oddziaływań. Drugie czynniki R_{RS} ($\bar{R}_{RS}$) występują w wierszach określających składowe stanu naprężenia $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, co psuje symetrię układu.

W tablicach 4 i 5 nie zostały uwzględnione warunki uzupełniające (6.7) lub (6.26). Spełnienie ich dla niezależnych funkcji $u_0, v_0, w_0, \sigma_z^0, \tau_{yz}^0$ i τ_{xz}^0 wymaga znikania poszczególnych wyrazów w równaniach (6.7) lub (6.26). Biorąc powyższe pod uwagę uzyskuje się następujące związki dla $n = 2s+1$:

$$D^{2s+2}u_0 = D^{2s+2}v_0 = D^{2s}\sigma_z^0 = 0, \qquad D^{2s+2}w_0 = D^{2s}\tau_{yz}^0 = D^{2s}\tau_{xz}^0 = 0 \tag{6.33}$$

oraz dla $n = 2s$

$$D^{2s}u_0 = D^{2s}v_0 = D^{2s}\sigma_z^0 = 0, \qquad D^{2s}w_0 = D^{2s}\tau_{yz}^0 = D^{2s}\tau_{xz}^0 = 0. \tag{6.34}$$

Uwzględniając (6.33) i (6.34) znajdziemy

$$R_{ZW} = R_{ZY} = R_{ZX} = 0, \quad R_{YU} = R_{YV} = R_{YZ} = 0, \quad R_{XU} = R_{XY} = R_{XZ} = 0 \tag{6.35}$$

oraz

$$\bar{R}_{ZU} = \bar{R}_{ZV} = \bar{R}_{ZZ} = 0, \quad \bar{R}_{YW} = \bar{R}_{YY} = \bar{R}_{YX} = 0, \quad \bar{R}_{XW} = \bar{R}_{XY} = \bar{R}_{XX} = 0. \tag{6.36}$$

Warunki (6.33) wprowadzają także dodatkowe zmiany w budowie niektórych L_{RS} (znikanie składników zawierających D^{2s+2} lub D^{2s}).

Oznaczając ogólnie operator L_{RS}, w którym nie występuje ostatni składnik, przez $L_{\dot{R}S}$ i przy uwzględnieniu warunków (6.33), tablicę 4 przedstawimy w postaci

$$\begin{array}{llllll} L_{UU}, & L_{U\dot{V}}, & L_{UZ}, & L_{UW}, & L_{U\dot{Y}}, & L_{U\dot{X}}, \\ L_{\dot{V}U}, & L_{\dot{V}\dot{V}}, & L_{\dot{V}Z}, & L_{\dot{V}W}, & L_{\dot{V}\dot{Y}}, & L_{\dot{V}\dot{X}}, \\ L_{ZU}, & L_{Z\dot{V}}, & L_{\dot{Z}Z}, & L_{\dot{Z}W}, & L_{\dot{Z}\dot{Y}}, & L_{\dot{Z}\dot{X}}, \\ L_{WU}, & L_{W\dot{V}}, & L_{W\dot{Z}}, & L_{WW}, & L_{WY}, & L_{WX}, \\ L_{\dot{Y}U}, & L_{\dot{Y}\dot{V}}, & L_{\dot{Y}Z}, & L_{\dot{Y}W}, & L_{\dot{Y}\dot{Y}}, & L_{\dot{Y}\dot{X}}, \\ L_{\dot{X}U}, & L_{\dot{X}\dot{V}}, & L_{XZ}, & L_{\dot{X}W}, & L_{\dot{X}\dot{Y}}, & L_{\dot{X}\dot{X}}. \end{array}$$

Tablica jest prawie symetryczna (do przedostatniego elementu włącznie). Ostatnie elementy mogą różnić się od siebie, np. $L_{UU} \neq L_{\dot{X}\dot{X}}$ natomiast $L_{\dot{Y}U} = L_{\dot{X}\dot{V}}$.

Inaczej przedstawia się sprawa w przypadku $n = 2s$. Po wprowadzeniu warunków (6.34) do tablicy 5 i oznaczeniu przez $\bar{L}_{\dot{R}S}$ operatorów skróconych o ostatni składnik (zawierający D^{2s}) otrzymuje się układ operatorów:

$$\begin{array}{llllll} \bar{L}_{\dot{U}U}, & \bar{L}_{\dot{U}\dot{V}}, & \bar{L}_{UZ}, & \bar{L}_{UW}, & \bar{L}_{UX}, & \bar{L}_{UX}, \\ \bar{L}_{\dot{V}U}, & \bar{L}_{\dot{V}\dot{V}}, & \bar{L}_{\dot{V}Z}, & \bar{L}_{\dot{V}W}, & \bar{L}_{\dot{V}Y}, & \ldots \\ \bar{L}_{\dot{Z}U}, & \bar{L}_{\dot{Z}\dot{V}}, & \bar{L}_{\dot{Z}Z}, & \bar{L}_{ZW}, & \ldots, & \ldots \\ \bar{L}_{WU}, & \bar{L}_{W\dot{V}}, & \bar{L}_{WZ}, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \bar{L}_{YU}, & \bar{L}_{Y\dot{V}}, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \bar{L}_{XU}, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. \end{array}$$

Tablica wykazuje pełną symetrię, co zaznaczono przez kropki położone pod osią symetrii (zachodzą związki $\bar{L}_{\dot{U}U} = \bar{L}_{\dot{X}X}$, $\bar{L}_{UZ} = \bar{L}_{WX}$ itp.).

Z przedstawionych dwóch rozwinięć dla $n = 2s+1$ oraz dla $n = 2s$ skończonych operatorów różniczkowych za prawidłowe można uznać jedynie to, dla którego po wprowadzeniu warunków uzupełniających tablica operatorów jest symetryczna, czyli dla którego jest spełniona zasada wzajemności oddziaływań. Prawidłowe jest zatem rozwinięcie $n = 2s$ i dla niego sporządzono odpowiednią tablicę (tablica 6).

W dalszym ciągu pracy będziemy się posługiwać wyłącznie tym rozwinięciem.

Porównując budowę skończonych operatorów $\bar{L}_{RS}$ z tablicy 5 dla danego s z rozwiniętymi na szereg nieskończonymi operatorami L_{RS} z tablicy 1, stwierdzamy pełną zgodność pomiędzy kolejnymi składnikami rozwinięcia.

Z powyższego wynika, że skończone operatory $\bar{L}_{RS}$ są odpowiednikami zredukowanych (do określonej liczby początkowych wyrazów) nieskończonych operatorów różniczkowych.

Powyżej wykazaliśmy, że tablica 6 zbudowana jest częściowo z operatorów $\bar{L}_{RS}$ a częściowo ze skróconych o jeden wyraz operatorów $\bar{L}_{\dot{K}T}$. Jeżeli liczba wyrazów rozwinięcia s wzrasta do nieskończoności, to $\bar{L}_{\dot{R}S} \to \bar{L}_{RS} \to L_{RS}$, a także $\bar{R}_{RS} \to 0$, to zanika różnica pomiędzy operatorami skończonymi (z tablicy 6) i zredukowanymi operatorami nieskończonymi z tablicy 1.

Dla skończonej i niewielkiej liczby wyrazów rozwinięcia utożsamienie $\bar{L}_{\dot{R}S} = \bar{L}_{RS} = L_{RS}$ nie jest uzasadnione i prowadzi do niewłaściwych wyników.

7. Zastosowanie skończonych operatorów różniczkowych do teorii płyt

Zadanie zginania płyty, obciążonej antysymetrycznie względem płaszczyzny $z = 0$ siłami powierzchniowymi $p(x, y)$, $t_y(x, y)$ i $t_x(x, y)$ sprowadza się do powtórzenia wywodów, zawartych w rozdziale trzecim z zastosowaniem tablicy skończonych operatorów różniczkowych (tablica 6).

Warunki brzegowe na płaszczyźnie $z = h$ prowadzą do następujących równań:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{G}\sigma_z(x,y,h) = \bar{L}_{ZW}w_0+\bar{L}_{ZY}\frac{1}{G}\tau^0_{yz}+\bar{L}_{ZX}\frac{1}{G}\tau^0_{xz} = \frac{1}{G}p,\\
&\frac{1}{G}\tau_{yz}(x,y,h) = \bar{L}_{YW}w_0+\bar{L}_{YY}\frac{1}{G}\tau^0_{yz}+\bar{L}_{YX}\frac{1}{G}\tau^0_{xz} = \frac{1}{G}t_y,\\
&\frac{1}{G}\tau_{xz}(x,y,h) = \bar{L}_{XW}w_0+\bar{L}_{XY}\frac{1}{G}\tau^0_{yz}+\bar{L}_{XX}\frac{1}{G}\tau^0_{xz} = \frac{1}{G}t_x.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Operatorowy wyznacznik układu równań (7.1) ma postać

$$
\bar{K} = -\frac{2Ds(s+1)^2}{1-\mu}(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h(\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\,\bar{C}'')_h. \tag{7.2}
$$

Podwyznaczniki operatorowe wynoszą odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
\bar{K}_{11} &= \frac{(s+1)^2}{1-\mu}[(s+1-\mu)\,\bar{C}^{\bullet}+(s+2-\mu)\,\bar{C}'']_h(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h,\\
\bar{K}_{12} &= -\frac{2\partial_2(s+1)^2}{1-\mu}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h,\\
\bar{K}_{13} &= \frac{2\partial_1(s+1)^2}{1-\mu}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h,\\
\bar{K}_{21} &= -\frac{\partial_2 s(s+1)}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\,\bar{S}+(s+1-\mu)\,\bar{S}'']_h(\bar{C}+\bar{C}'')_h,\\
\bar{K}_{22} &= \frac{2Ds(s+1)}{(1-\mu)}\Big\{-[S\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\,\bar{C}'']+\\
&\qquad +\frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']\,(\bar{S}+\bar{S}'')\Big\}_h,\\
\bar{K}_{23} &= -\frac{2\partial_1\partial_2 s(s+1)}{D(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h(\bar{S}+\bar{S}'')_h,\\
\bar{K}_{31} &= \frac{\partial_1 s(s+1)}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\,\bar{S}+(s+1-\mu)\,\bar{S}'']_h(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h,\\
\bar{K}_{32} &= -\frac{2\partial_1\partial_2 s(s+1)}{D(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h(\bar{S}+\bar{S}'')_h,
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$\bar{K}_{33}=\frac{2Ds\,(s+1)}{1-\mu}\Big\{-(\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\,\bar{C}'')+ \\ +\frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}']\,(\bar{S}+\bar{S}'')\Big\}_h.$$

Funkcje $\psi_i\,(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, powinny spełniać równania

$$\bar{K}\psi_1=\frac{1}{G}\,p,\qquad \bar{K}\psi_2=\frac{1}{G}\,t_y,\qquad \bar{K}\psi_3=\frac{1}{G}\,t_x. \tag{7.4}$$

Przedstawiając rozwiązania jako sumy całek szczególnych i ogólnych

$$\psi_i=\psi_{i0}+\psi_i, \tag{7.5}$$

dla znalezienia całek ogólnych należy rozwiązać równanie

$$\bar{K}\psi_{i0}=-\frac{2Ds\,(s+1)^2}{1-\mu}(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h\,(\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\bar{C}'')_h\,\psi_{i0}=0. \tag{7.6}$$

Przemieszczenie w_0 oraz naprężenia τ^0_{yz}, τ^0_{xz} można wyrazić przez ψ_i

$$\begin{aligned} w_0&=\bar{K}_{11}\,\psi_1-\bar{K}_{21}\,\psi_2+\bar{K}_{31}\,\psi_3,\\ \frac{1}{G}\,\tau^0_{yz}&=-\bar{K}_{12}\,\psi_1+\bar{K}_{22}\,\psi_2-\bar{K}_{32}\,\psi_3,\\ \frac{1}{G}\,\tau^0_{xz}&=\bar{K}_{13}\,\psi_1-\bar{K}_{23}\,\psi_2+\bar{K}_{33}\,\psi_3; \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} w_0&=\frac{(s+1)^2}{1-\mu}[(s+1-\mu)\,\bar{C}^{\bullet}+(s+2-\mu)\,\bar{C}'']_h\,(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h\,\psi_1+\\ &\quad+\frac{s\,(s+1)}{D\,(1-\mu)}[(s-\mu)\,\bar{S}+(s+1-\mu)\,\bar{S}'']_h\,(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h\,(\partial_2\,\psi_2+\partial_1\,\psi_3),\\ \frac{1}{G}\,\tau^0_{yz}&=\frac{2\partial_2\,(s+1)^2}{1-\mu}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h\,(\bar{C}^{\bullet}+C'')_h\,\psi_1+\\ &\quad-\frac{2Ds\,(s+1)}{1-\mu}(\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\,\bar{C}'')_h\,\psi_2+\\ &\quad+\frac{2\partial_2\,s\,(s+1)}{D\,(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h\,(\bar{S}+\bar{S}'')_h(\partial_2\,\psi_2+\partial_1\,\psi_3),\\ \frac{1}{G}\,\tau^0_{xz}&=\frac{2\partial_1\,(s+1)^2}{1-\mu}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h\,(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h\,\psi_1+\\ &\quad-\frac{2Ds\,(s+1)}{1-\mu}(\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\,\bar{C}'')\,\psi_3+\\ &\quad+\frac{2\partial_1\,s\,(s+1)}{1-\mu}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\,\bar{C}'']_h\,(\bar{S}+\bar{S}'')_h\,(\partial_2\,\psi_2+\partial_1\,\partial_3). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Posługując się wzorami (7.8) oraz tablicą 6, można określić składowe stanu przemieszczenia i naprężenia w zależności od $\psi_i\,(x, y)$.

Zauważamy, że równania (7.6) oraz (7.8) mogą być znacznie uproszczone, jeżeli układ równań (7.1) jest jednorodny.

Wprowadzamy wtedy nowe funkcje

$$
\begin{aligned}
&(s+1)\,(\overline{C}^{\bullet}+\overline{C}'')_h\,\psi_{10}=\varphi_1,\\
&-\frac{2Ds\,(s+1)}{1-\mu}\,(\overline{S}\overline{C}^{\bullet}+2\overline{S}\overline{C}''+\overline{S}''\,\overline{C}'')_h\,\psi_{20}=\varphi_2,\\
&-\frac{2Ds\,(s+1)}{1-\mu}\,(\overline{S}\overline{C}^{\bullet}+2\overline{S}\overline{C}''+\overline{S}''\,\overline{C}'')_h\,\psi_{30}=\varphi_3.
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Zakładamy warunek (3.14), [9],

$$\partial_2\,\psi_{20}+\partial_1\,\psi_{30}=0,$$

co umożliwia wprowadzenie nowej funkcji

$$\varphi_2(x,y)=\partial_1\,\varphi(x,y),\qquad \varphi_3(x,y)=-\partial_2\,\varphi(x,y). \tag{7.10}$$

Równania różniczkowe jednorodne (7.5) przybierają postać

$$\frac{-(s+1)\,2Ds}{1-\mu}\,(\overline{S}\overline{C}^{\bullet}+2\overline{S}\overline{C}''+\overline{S}''\,\overline{C}'')_h\,\varphi_1=0,\qquad (s+1)\,(\overline{C}^{\bullet}+\overline{C}'')_h\,\varphi=0 \tag{7.11}$$

Dla przemieszczenia w_0 oraz składowych τ^0_{yz} i τ^0_{xz} mamy

$$
\begin{aligned}
w_0&=[(s+1-\mu)\,\overline{C}^{\bullet}+(s+2-\mu)\,\overline{C}'']_h\,\frac{s+1}{1-\mu}\,\varphi_1,\\
\frac{1}{G}\,\tau^0_{yz}&=2\partial_2\,[s\overline{C}^{\bullet}+(s+1)\,\overline{C}'']_h\,\frac{s+1}{1-\mu}\,\varphi_1+\partial_1\,\varphi,\\
\frac{1}{G}\,\tau^0_{xz}&=2\partial_1\,[s\overline{C}^{\bullet}+(s+1)\,\overline{C}'']_h\,\frac{s+1}{1-\mu}\,\varphi_1-\partial_2\,\varphi.
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Posługiwanie się funkcjami φ i φ_1 jest możliwe także w przypadku zadania niejednorodnego, gdy na płytę działa jedynie obciążenie pionowe oraz gdy dane obciążenia styczne t_y i t_x spełniają związek

$$\partial_2\,t_y+\partial_1\,t_x=0,\qquad \text{czyli}\qquad t_y=\partial_1\,t,\qquad t_x=-\partial_2\,t. \tag{7.13}$$

W takich przypadkach całki szczególne obliczamy z równań

$$-\frac{(s+1)}{1-\mu}\,2Ds\,(\overline{S}\overline{C}^{\bullet}+2\overline{S}\overline{C}''+\overline{S}''\,\overline{C}'')_h\,\Phi_1=\frac{p}{G},\qquad (s+1)\,(\overline{C}^{\bullet}+\overline{C}'')_h\Phi=\frac{t}{G}. \tag{7.14}$$

Przez podstawienie (7.12) do wzoru podanego w nagłówku tablicy 6 i po stosownych przekształceniach otrzymuje się składowe stanu przemieszczenia i naprężenia płyty wyrażone przez φ i φ_1.

Przejdziemy teraz do omówienia zagadnienia warunków brzegowych na konturze płyty.

Równanie jednorodne cząstkowe (7.6) może być przedstawione w postaci umożliwiającej określenie jego rzędu.

W tym celu wstawimy funkcje (6.28)–(6.31) do (7.6) i otrzymujemy po stosownych przekształceniach

$$(7.15)\quad (\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h = \sum_1^s (-1)^{s-k}\frac{1}{s+1}\frac{(hD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!};$$

$$-\frac{2Ds(s+1)^2}{(1-\mu)}(\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\bar{C}'')_h=$$

$$=\frac{2(s+1)}{(1-\mu)h}\left\{\sum_1^s\sum_1^s(-1)^{k+m}(m-k)\frac{(hD)^{2(2s+1-m-k)}}{[2(s-m)]![2(s-k)+1]!}\right\}.$$

Widoczne jest, że w $(7.15)_1$ najwyższy składnik $D^{2(s-1)}$ jest $(s-1)$ — harmoniczny, natomiast równanie $(7.15)_2$ zawiera najwyższy składnik $D^{2(2s-2)}$, który jest $(2s-2)$ — harmoniczny. W rezultacie równanie (7.6) jest rzędu $6(s-1)$.

Przy sprowadzeniu zagadnienia do układu równań (7.11) pierwsze równanie dla funkcji $\varphi_1(x, y)$ jest rzędu $4(s-1)$, natomiast drugie dla φ rzędu $2(s-1)$.

Przy rozwiązaniu jednorodnego równania (7.6) lub układu równań (7.11) otrzymuje się łącznie $6(s-1)$ stałych całkowania, z czego na każdy brzeg $x = \text{const}$ (lub $y = \text{const}$) przypada $3(s-1)$.

Dla uzyskania jednoznacznych rozwiązań można zatem żądać spełnienia $3(s-1)$ warunków statycznych lub przemieszczenionych na poszczególnych liniach jednego brzegu określonego w obszarze $0 \leqslant z \leqslant h$.

W pewnych przypadkach szczególnych można korzystać także z całkowych uogólnionych warunków na konturze w postaci momentów zginających, skręcających i wypadkowej siły poprzecznej. Takie postępowanie jest szczególnie celowe przy obliczaniu płyt cienkich.

8. Techniczna teoria płyt

Przez techniczną teorię płyt rozumiemy najprostsze przybliżenie rozwiązania zadania teorii sprężystości, polegające na przyjęciu minimalnej liczby wyrazów rozwinięcia skończonych operatorów różniczkowych. Z analizy dokonanej na końcu poprzedniego rozdziału wynika, że najbardziej uproszczone równanie różniczkowe cząstkowe problemu zginania płyt otrzymuje się przy $s = 2$. Jest to równocześnie pierwsze możliwe założenie, gdyż przy $s = 1$ operatory $(7.15)_2$ są tożsamościowo równe zero.

Wstawiając zatem $s = 2$ do (7.15) znajeujemy

$$(8.1)\quad (\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')_h = \sum_1^2(-1)^{2-k}\frac{1}{3}\frac{(hD)^{2(2-k)}}{[2(2-k)]!} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{h^2D^2}{2}\right),$$

$$-\frac{2Ds(s+1)^2}{(1-\mu)}[\bar{S}\bar{C}^{\bullet}+2\bar{S}\bar{C}''+\bar{S}''\bar{C}'']_h =$$

$$=\frac{6}{h(1-\mu)}\left\{\sum_1^2\sum_1^2(-1)^{k+m}(m-k)\frac{(hD)^{2(5-m-k)}}{[2(2-m)]![2(2-k)+1]!}\right\}=\frac{2h^3D^4}{(1-\mu)},$$

skąd wynikają równania problemu jednorodnego (7.6) oraz

$$\frac{2h^3 D^4}{3(1-\mu)}\left(1-\frac{h^2 D^2}{2}\right)\Psi_{i0}=0, \qquad i=1,2,3.$$

Przyjmiemy dla uproszczenia i dokonania porównania z istniejącymi rozwiązaniami dla płyt, że działa jedynie obciążenie $p(x,y)$, natomiast $t_y = t_x = 0$.

Można zatem opisać zagadnienie za pomocą dwóch funkcji $\Phi_1(x,y)$ i $\Phi(x,y)$, które powinny spełniać równania (7.14), przybierające w tym przypadku postać

$$\left(1-\frac{h^2 D^2}{2}\right)\Phi(x,y)=0, \tag{8.2}$$

$$\frac{2h^3}{3(1-\mu)}D^4\,\Phi_1(x,y)=\frac{p}{G}.$$

Dalszy tok rozwiązania prześledzimy na problemie jednorodnym. Funkcje $w_0(x,y)$, $\tau^0_{yz}(x,y)$ i $\tau^0_{xz}(x,y)$ wyrażone za pomocą wzorów (7.12) określają w tym przypadku równania

$$w_0=\left(1-\frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}\right)\Phi_{10},$$

$$\frac{1}{G}\tau^0_{yz}=-\frac{h^2}{1-\mu}\partial_2 D^2\Phi_{10}+\partial_1\Phi, \tag{8.3}$$

$$\frac{1}{G}\tau^0_{xz}=-\frac{h^2}{1-\mu}\partial_1 D^2\Phi_{10}-\partial_2\Phi.$$

Podstawienie (8.3) do nagłówka w tablicy 6 umożliwia wyprowadzenia równań na składowe przemieszczenia i naprężenia płyty (tablica 7).

Możemy z kolei określić całkowe wielkości statyczne M_x, M_y, M_{xy}, Q_x i Q_y oraz średnie składowe przemieszczenia β_x i β_y oraz $w_{śr}$.

Postępowanie takie staje się celowe, o ile uzyskane wielkości będą spełniały równania równowagi elementu płyty. Ze sprawdzenia tych warunków wynika, że w dalszych obliczeniach trzeba dokonać pewnych uproszczeń i uwzględnić tylko składniki podkreślone w ostatnich dwóch kolumnach tablicy 6. Otrzymuje się więc

$$u=-\frac{z\partial_1}{1-\mu}\left[(1-\mu)+\mu\frac{h^2 D^2}{2}\right]\Phi_{10}-z\partial_2\Phi,$$

$$v=-\frac{z\partial_2}{1-\mu}\left[(1-\mu)+\mu\frac{h^2 D^2}{2}\right]\Phi_{10}+z\partial_1\Phi, \tag{8.4}$$

$$w=\left[1-\frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}+\frac{\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{2}\right]\Phi_{10},$$

$$\tau_{yz}=-G\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\left[\frac{h^2 D^2}{1-\mu}\partial_2\Phi_{10}-\partial_1\Phi\right],$$

$$\tau_{xz} = -G\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\left[\frac{h^2 D^2}{1-\mu}\partial_1 \Phi_{10}+\partial_2 \Phi\right],$$

(8.4) [c. d.]

$$\tau_{xy} = -2Gz\,\partial_1\partial_2\left[1+\frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}\right]\Phi_{10}+Gz\,(\partial_1^2-\partial_2^2)\,\Phi,$$

$$\sigma_x = -2G\frac{z}{1-\mu}\left[\partial_1^2\left(1+\mu\frac{h^2 D^2}{2}\right)+\mu\partial_2^2\right]\Phi_{10}-2Gz\partial_1\partial_2\,\Phi,$$

$$\sigma_y = -2G\frac{z}{1-\mu}\left[\partial_2^2\left(1+\mu\frac{h^2 D^2}{2}\right)+\mu\partial_1^2\right]\Phi_{10}+2Gz\partial_1\partial_2\,\Phi.$$

Przyjmując, że sztywność płyty

$$N = \frac{4Gh^3}{3(1-\mu)}, \tag{8.5}$$

przez odpowiednie całkowanie $(8.3)_3$ uzyskujemy następujące wzory

$$Q_x = \int_{-h}^{h}\tau_{xz}\,dz = -ND^2\partial_1\,\Phi_{10}-\frac{1-\mu}{h^2}N\partial_2\,\Phi,$$

(8.6)

$$Q_y = \int_{-h}^{h}\tau_{yz}\,dz = -ND^2\partial_2\,\Phi_{10}+\frac{1-\mu}{h^2}N\partial_1\,\Phi,$$

$$M_{xy} = \int_{-h}^{h}\tau_{xy}\,zdz = -N(1-\mu)\left[1+\frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}\right]\partial_1\partial_2\,\Phi_{10}+\frac{1-\mu}{2}N(\partial_1^2-\partial_2^2)\,\Phi,$$

$$M_x = \int_{-h}^{h}\sigma_x\,zdz = -N\left[\partial_1^2\left(1+\mu\frac{h^2 D^2}{2}\right)+\mu\partial_2^2\right]\Phi_{10}-N(1-\mu)\,\partial_1\partial_2\,\Phi,$$

$$M_y = \int_{-h}^{h}\sigma_y\,zdz = -N\left[\partial_2^2\left(1+\mu\frac{h^2 D^2}{2}\right)+\mu\partial_1^2\right]\Phi_{10}+N(1-\mu)\,\partial_1\partial_2\,\Phi.$$

Wstawiając (8.6) do (8.4) można napisać

$$\sigma_x = \frac{3}{2h^2}\left(\frac{z}{h}\right)M_x, \qquad \sigma_y = \frac{3}{2h^2}\left(\frac{z}{h}\right)M_y,$$

(8.7)

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2h^2}\left(\frac{z}{h}\right)M_{xy},$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]Q_x, \qquad \tau_{yz} = \frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]Q_y.$$

Średnie składowe przemieszczenie pionowe uzyska się przez porównanie bilansu pracy wirtualnej:

$$\int_{-h}^{h}\tau_{xz}\,wdz = Q_x\,w_{śr}. \tag{8.8}$$

Po podstawieniu (8.4) i (8.7) do (8.8) i wykonaniu całkowania i porównanie stronami znajdziemy

$$w_{śr} = \left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2} + \frac{\mu}{5(1-\mu)}\frac{h^2 D^2}{2}\right]\Phi_{10}. \tag{8.9}$$

Podobnie z warunków

$$\int_{-h}^{h} \sigma_x u dz = M_x \beta_x, \qquad \int_{-h}^{h} \sigma_y v dz = M_y \beta_y \tag{8.10}$$

otrzymuje się

$$\beta_x = -\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}\right)\partial_1 \Phi_{10} - \partial_2 \Phi, \tag{8.11}$$

$$\beta_y = -\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}\right)\partial_2 \Phi_{10} + \partial_1 \Phi.$$

Równanie $(8.11)_2$ można było otrzymać także z warunku

$$\int_{-h}^{h} \tau_{xy} v dz = M_{xy} \beta_y. \tag{8.12}$$

Równania równowagi dla elementu płyty

$$\partial_1 M_x + \partial_2 M_{xy} - Q_x = 0, \quad \partial_1 M_{xy} + \partial_2 M_y - Q_y = 0, \quad \partial_1 Q_x + \partial_2 Q_y = 0, \tag{8.13}$$

są spełnione, jeżeli Φ_{10} i Φ określone są za pomocą uprzednio podanych związków

$$ND^4 \Phi_{10} = 0, \qquad \left(1 - \frac{h^2 D^2}{2}\right)\Phi = 0. \tag{8.14}$$

Jeśli występuje $p(x, y)$, to do rozwiązania dochodzą całki szczególne funkcji Φ_1 zależne od rozkładu obciążenia. Wyniki z klasycznej teorii płyt uzyskuje się przez dodatkowe uproszczenia: przyjęcie $\Phi = 0$ oraz pominięcie ostatnich spośród podkreślonych w tablicy 7 składników w wyrażeniach na u, v, σ_x, σ_y i τ_{xy}.

Przez pominięcie funkcji Φ zmniejsza się rząd równań różniczkowych, a tym samym zmniejsza się liczba stałych całkowania w rozwiązaniu ogólnym; z tego względu omówione uproszczenie jest niewskazane.

Przy ograniczeniach liczby składników w wyrażeniach na u i v nie otrzymuje się przewidywanego przejścia od składowych stanu przemieszczenia do funkcji τ_{xz} i τ_{yz} (tablica 7).

Ujęta wzorami (8.4)–(8.14) techniczna teoria płyt jest bliska dokładniejszej teorii w ujęciu SCHÄFERA; różni się parametrem liczbowym w równaniu $(8.14)_2$ oraz niektórymi składnikami we wzorach na średnie przemieszczenia i całkowe wielkości statyczne.

9. Zakończenie

Przedstawiona metoda zastosowania skończonych operatorów różniczkowych pozwoliła na zanalizowanie stosowanych dotychczas przybliżeń opartych na nieskończonych operatorach różniczkowych.

Tablica 4. Stan przemieszczenia i naprężenia przestrzennego statycznego zadania teorii sprężystości

(zastosowanie skończonych liniowych operatorów różniczkowych przy rozwinięciu $n = 2s+1$)

	$u_0(x, y)$	$v_0(x, y)$	$\frac{1}{G}\sigma_Z^0(x, y)$	$w_0(x, y)$	$\frac{1}{G}\tau_{yz}^0(x, y)$	$\frac{1}{G}\tau_{xz}^0(x, y)$
$u(x, y, z)$	$L_{UU} = (s+1)(C+C') + \frac{\partial_1^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{UV} = \frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{UZ} = \frac{\partial_1(s+1)}{D^2 2(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{UW} = -\frac{\partial_1(s+1)}{D(1-\mu)}[(s+1-\mu)S + (s+2-\mu)S'']$	$L_{UY} = \frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^3 2(1-\mu)}[sS+(s+1)S'']$	$L_{UX} = \frac{(s+1)}{D}(S+S') + \frac{\partial_1^2(s+1)}{D^3 2(1-\mu)} \times [sS+(s+1)S'']$
$v(x, y, z)$	$L_{VU} = \frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{VV} = (s+1)(C+C') + \frac{\partial_2^2(s+1)}{D^2(1-\mu)} \times [sC+(s+1)C'']$	$L_{VZ} = \frac{\partial_2(s+1)}{D^2 2(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{VW} = -\frac{\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}[(s+1-\mu)S + (s+2-\mu)S'']$	$L_{VY} = \frac{(s+1)}{D}(S+S') + \frac{\partial_2^2(s+1)}{D^3 2(1-\mu)} \times [sS+(s+1)S'']$	$L_{VX} = L_{UY}$
$\frac{1}{G}\sigma_z(x, y, z)$	$L_{ZU} = -\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{ZV} = -\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{ZZ} = (s+1)(C+C') - \frac{(s+1)}{(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$L_{ZW} = \frac{2D(s+1)}{(1-\mu)}[sS+(s+1)S'']$ $R_{ZW} = -\frac{2(s+\mu)}{(1-2\mu)}(-1)^s\frac{D(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$L_{ZY} = L_{VW}$ $R_{ZY} = \frac{(s+1)}{(1-2\mu)}(-1)^s\frac{\partial_2}{D}\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$L_{ZX} = L_{UW}$ $R_{ZX} = \frac{(s+1)}{(1-2\mu)}(-1)^s\frac{\partial_1}{D}\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$
$w(x, y, z)$	$L_{WU} = -\frac{\partial_1(s+1)}{D(1-\mu)} \times [(s+\mu)S+(s+1+\mu)S'']$	$L_{WV} = -\frac{\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}[(s+\mu)S + (s+1+\mu)S'']$	$L_{WZ} = -\frac{(s+1)}{2D(1-\mu)}[(s-1+2\mu)S + (s+2\mu)S'']$	$L_{WW} = L_{ZZ}$	$L_{WY} = L_{VZ}$	$L_{WX} = L_{UZ}$
$\frac{1}{G}\tau_{yz}(x, y, z)$	$L_{YU} = -\frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}[(2s+1+\mu)S + (2s+3+\mu)S'']$ $R_{YU} = \frac{(s+1)}{(1-\mu)}\frac{\partial_1\partial_2}{D^2}(-1)^s\frac{D(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$L_{YV} = -D(s+1)(S+S'') - \frac{\partial_2^2(s+1)}{D(1-\mu)}[2(s+1+\mu)S + (2s+3+\mu)S'']$ $R_{YV} = \left[1+\frac{\partial_2^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}\right](-1)^s\frac{D(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$L_{YZ} = L_{WV}$ $R_{YZ} = \frac{(s+1)}{2(1-\mu)}(-1)^s\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{\partial_2}{D}$	$L_{YW} = L_{ZV}$	$L_{YY} = L_{VV}$	$L_{YX} = L_{UV}$
$\frac{1}{G}\tau_{xz}(x, y, z)$	$L_{XU} = -D(s+1)(S+S'') - \frac{\partial_1^2(s+1)}{D(1-\mu)}[(2s+1+\mu)S + (2s+3+\mu)S'']$ $R_{XU} = \left[1+\frac{\partial_1^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}\right](-1)^s\frac{D(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$L_{XV} = L_{YU}$ $R_{XV} = R_{YU}$	$L_{XZ} = L_{WU}$ $R_{XZ} = \frac{(s+1)}{2(1-\mu)}\frac{\partial_1}{D}(-1)^s\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$L_{XW} = L_{ZU}$	$L_{XY} = L_{VU}$	$L_{XW} = L_{UU}$
$\frac{1}{G}\sigma_x(x, y, z)$	$\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(C+C') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(C+C') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$\frac{(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(C+C') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$-\frac{2D(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(S+S'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[(s+1-\mu)S+(s+2-\mu)S'']\right\} - \frac{2\mu(s+\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{D(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$\frac{\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}\left\{\mu(S+S'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[sS+(s+1)S'']\right\} + \frac{\mu(s+1)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{\partial_2}{D}\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$\frac{\partial_1(s+1)}{D(1-\mu)}\left\{(2-\mu)(S+S'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[sS+(s+1)S']\right\} + \frac{\mu(s+1)}{(1-\mu)(1-2\mu)}\frac{\partial_1}{D}(-1)^s\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$
$\frac{1}{G}\sigma_y(x, y, z)$	$\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(C+C') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[sC+(s+1)C']\right\}$	$\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(C+C') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$\frac{(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(C+C') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$-\frac{2D(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(S+S'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[(s+1-\mu)S+(s+2-\mu)S'']\right\} - \frac{2\mu(s+\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{D(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$\frac{\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}\left\{(2-\mu)(S+S'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[sS+(s+1)S'']\right\} + \frac{\mu(s+1)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{\partial_2}{D}\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$	$\frac{\partial_1(s+1)}{D(1-\mu)}\left\{\mu(S+S'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[sS+(s+1)S'']\right\} + \frac{\mu(s+1)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{\partial_1}{D}\frac{(Dz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$
$\frac{1}{G}\tau_{xy}(x, y, z)$	$\partial_2(s+1)\left\{(C+C') + \frac{2\partial_1^2}{(1-\mu)D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$\partial_1(s+1)(C+C') + \frac{2\partial_2^2}{(1-\mu)D^2}[sC+(s+1)C'']\right\}$	$\frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[sC+(s+1)C'']$	$-\frac{2\partial_1\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}[(s+1-\mu)S + (s+2-\mu)S'']$	$\frac{\partial_1(s+1)}{D(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(S+S'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[sS+(s+1)S'']\right\}$	$\frac{\partial_2(s+1)}{D(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(S+S'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[sS+(s+1)S'']\right\}$

Tablica 5. Stan przemieszczenia i naprężenia przestrzennego statycznego zadania teorii sprężystości

(zastosowanie skończonych liniowych operatorów różniczkowych przy rozwinięciu $n = 2s$)

	$u_0(x, y)$	$v_0(x, y)$	$\frac{1}{G}\sigma_z^0(x, y)$	$w_0(x, y)$	$\frac{1}{G}\tau_{yz}^0(x, y)$	$\frac{1}{G}\tau_{xz}^0(x, y)$
$u(x, y, z)$	$\bar{L}_{UU} = (1+s)(\bar{C}+C'') + \frac{\partial_1^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{UV} = \frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{UZ} = \frac{\partial_1(s+1)}{D^2 2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{UW} = -\frac{\partial_1 s}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\bar{S} + (s+1-\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{UY} = \frac{\partial_1\partial_2 s}{D^3 2(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$	$\bar{L}_{UX} = \frac{s}{D}(\bar{S}+\bar{S}'') + \frac{\partial_1^2 s}{D^3 2(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$
$v(x, y, z)$	$\bar{L}_{VU} = \frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{VV} = (1+s)(\bar{C}+\bar{C}'') + \frac{\partial_2^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{VZ} = \frac{\partial_2(s+1)}{D^2 2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{VW} = -\frac{\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\bar{S} + (s+1-\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{VY} = \frac{s}{D}(\bar{S}+\bar{S}'') + \frac{\partial_2^2 s}{D^3 2(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$	$\bar{L}_{VX} = \bar{L}_{UY}$
$\frac{1}{G}\sigma_z(x, y, z)$	$\bar{L}_{ZU} = -\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$ $\bar{R}_{ZU} = \frac{2(s+\mu)}{(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_1$	$\bar{L}_{ZV} = -\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$ $\bar{R}_{ZV} = \frac{2(s+\mu)}{(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_2$	$\bar{L}_{ZZ} = (s+1)(\bar{C}+\bar{C}'') - \frac{(s+1)}{(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$ $\bar{R}_{ZZ} = \frac{(s-1+2\mu)}{(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}$	$L_{ZW} = \frac{2Ds}{(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$	$\bar{L}_{ZY} = \bar{L}_{VW}$	$\bar{L}_{ZX} = \bar{L}_{UW}$
$w(x, y, z)$	$\bar{L}_{WU} = -\frac{\partial_1 s}{D(1-\mu)}[(s-1+\mu)\bar{S} + (s+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{WV} = -\frac{\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(s-1+\mu)\bar{S} + (s+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{WZ} = -\frac{s}{D2(1-\mu)}[(s-2+2\mu)\bar{S} + (s-1+2\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{WW} = \bar{L}_{ZZ}$	$\bar{L}_{WY} = \bar{L}_{VZ}$	$\bar{L}_{WX} = \bar{L}_{UZ}$
$\frac{1}{G}\tau_{yz}(x, y, z)$	$\bar{L}_{YU} = -\frac{\partial_1\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(2s-1+\mu)\bar{S} + (2s+1+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{YV} = -Ds(\bar{S}+\bar{S}'') - \frac{\partial_2^2 s}{D(1-\mu)}[(2s-1+\mu)\bar{S} + (2s+1+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{YZ} = \bar{L}_{WV}$	$\bar{L}_{YW} = \bar{L}_{ZV}$ $\bar{R}_{YW} = \frac{(s-1+2\mu)}{(1-\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_2$	$\bar{L}_{YY} = \bar{L}_{VV}$ $\bar{R}_{YY} = -(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\left[1+\frac{\partial_2^2 s}{D^2 2(1-\mu)}\right]$	$\bar{L}_{YX} = \bar{L}_{UV}$ $\bar{R}_{YX} = -(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\cdot\frac{s\partial_1\partial_2}{2(1-\mu)D^2}$
$\frac{1}{G}\tau_{xz}(x, y, z)$	$\bar{L}_{XU} = -Ds(\bar{S}+\bar{S}'') - \frac{\partial_2^2 s}{D(1-\mu)}[(2s-1+\mu)\bar{S} + (2s+1+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{XV} = \bar{L}_{YU}$	$\bar{L}_{XZ} = \bar{L}_{WU}$	$\bar{L}_{XW} = \bar{L}_{ZU}$ $\bar{R}_{XW} = \frac{(s-1+2\mu)}{(1-\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_1$	$\bar{L}_{XY} = \bar{L}_{YU}$ $\bar{R}_{XY} = -(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\frac{s\partial_1\partial_2}{2(1-\mu)D^2}$	$\bar{L}_{XX} = \bar{L}_{UU}$ $\bar{R}_{XX} = -(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\left[1+\frac{\partial_1^2 s}{D^2 2(1-\mu)}\right]$
$\frac{1}{G}\sigma_x(x, y, z)$	$\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}+\bar{C}'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\} + \frac{2\mu(s+\mu)}{1(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_1$	$\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}+\bar{C}'')\mu + \frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\} + \frac{2\mu(s+\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_2$	$\frac{(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}+\bar{C}'')\mu + \frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\} + \frac{\mu(s-1+2\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}$	$-\frac{2Ds}{(1-\mu)}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu + \frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_2 s}{(1-\mu)D}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu + \frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_1 s}{(1-\mu)D}\left\{(2-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$
$\frac{1}{G}\sigma_y(x, y, z)$	$\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}+\bar{C}'')\mu + \frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\} + \frac{2\mu(s+\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_1$	$\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}+\bar{C}'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\} + \frac{2\mu(s+\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}\partial_2$	$\frac{(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}+\bar{C}'')\mu + \frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\} + \frac{\mu(s-1+2\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}(-1)^s\frac{(zD)^{2s}}{(2s)!}$	$-\frac{2Ds}{(1-\mu)}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu + \frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_2 s}{(1-\mu)D}\left\{(2-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_1 s}{(1-\mu)D}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu + \frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$
$\frac{1}{G}\tau_{xy}(x, y, z)$	$\frac{\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{C}+\bar{C}'') + \frac{2\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{C}+\bar{C}'') + \frac{2\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$-\frac{2\partial_1\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\bar{S} + (s+1-\mu)\bar{S}'']$	$\frac{\partial_1 s}{D(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'') + \frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-1)D\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_2 s}{D(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'') + \frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$

Tablica 6. Stan przemieszczenia i naprężenia przestrzennego statycznego zadania teorii sprężystości

obliczeniowy układ operatorów skończonych

	$u_0(x,y)$	$v_0(x,y)$	$\frac{1}{G}\sigma_z^0(x,y)$	$w_0(x,y)$	$\frac{1}{G}\tau_{yz}^0(x,y)$	$\frac{1}{G}\tau_{xz}^0(x,y)$
$u(x,y,z)$	$\bar{L}^{\bullet}_{UU}=(1+s)(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_1^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}^{\bullet}_{UV}=\frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{UZ}=\frac{\partial_1(s+1)}{D^2 2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{UW}=-\frac{\partial_1 s}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']$	$L_{UY}=\frac{\partial_1\partial_2 s}{D^3 2(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$	$\bar{L}_{UX}=\frac{s}{D}(\bar{S}+\bar{S}'')+\frac{\partial_1^2 s}{D^3 2(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$
$v(x,y,z)$	$\bar{L}^{\bullet}_{VU}=\frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}^{\bullet}_{VV}=(1+s)(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_2^2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{VZ}=\frac{\partial_2(s+1)}{D^2 2(1-\mu)}[s\bar{C}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{VW}=-\frac{\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{VY}=\frac{s}{D}(\bar{S}+\bar{S}'')+\frac{\partial_2^2 s}{D^3 2(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$	$\bar{L}_{VX}=\bar{L}_{UY}$
$\frac{1}{G}\sigma_z(x,y,z)$	$\bar{L}^{\bullet}_{ZU}=-\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}^{\bullet}_{ZV}=-\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}^{\bullet}_{ZZ}=(s+1)(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')-\frac{(s+1)}{(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$\bar{L}_{ZW}=+\frac{2Ds}{(1-\mu)}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']$	$\bar{L}_{ZY}=\bar{L}_{VW}$	$\bar{L}_{ZX}=\bar{L}_{UW}$
$w(x,y,z)$	$\bar{L}_{WU}=-\frac{\partial_1 s}{D(1-\mu)}[(s-1+\mu)\bar{S}+(s+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{WV}=-\frac{\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(s-1+\mu)\bar{S}+(s+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{WZ}=-\frac{s}{D2(1-\mu)}[(s-2+2\mu)\bar{S}+(s-1+2\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{\dot{W}W}=\bar{L}_{\dot{Z}Z}$	$\bar{L}_{WY}=\bar{L}_{VZ}$	$\bar{L}_{WX}=\bar{L}_{UZ}$
$\frac{1}{G}\tau_{yz}(x,y,z)$	$\bar{L}_{YU}=-\frac{\partial_1\ \partial_2 s}{D(1-\mu)}[(2s-1+\mu)\bar{S}+(2s+1+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{YV}=-Ds(\bar{S}+\bar{S}'')-\frac{\partial_2^2 s}{D(1-\mu)}\times[(2s-1+\mu)\bar{S}+(2s+1+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{YZ}=\bar{L}_{WV}$	$\bar{L}_{\dot{Y}W}=\bar{L}_{\dot{Z}V}$	$\bar{L}_{\dot{Y}Y}=\bar{L}_{\dot{V}V}$	$\bar{L}_{\dot{Y}X}=\bar{L}_{\dot{U}V}$
$\frac{1}{G}\tau_{xz}(x,y,z)$	$\bar{L}_{XU}=-Ds(\bar{S}+\bar{S}'')-\frac{\partial_1^2 s}{D(1-\mu)}\times[(2s-1+\mu)\bar{S}+(2s+1+\mu)\bar{S}'']$	$\bar{L}_{XV}=\bar{L}_{YU}$	$\bar{L}_{XZ}=\bar{L}_{WU}$	$\bar{L}_{\dot{X}W}=\bar{L}_{\dot{Z}U}$	$\bar{L}_{\dot{X}Y}=\bar{L}_{\dot{V}U}$	$\bar{L}_{\dot{X}X}=\bar{L}_{\dot{U}U}$
$\frac{1}{G}\sigma_x(x,y,z)$	$\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')\mu+\frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$-\frac{2Ds}{(1-\mu)}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu+\frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_2 s}{(1-\mu)D}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu+\frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_1 s}{(1-\mu)D}\left\{(2-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'')+\frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$
$\frac{1}{G}\sigma_y(x,y,z)$	$\frac{2\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{2\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{(s+1)}{(1-\mu)}\left\{\mu(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$-\frac{2Ds}{(1-\mu)}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu+\frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_2 S}{(1-\mu)D}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')(2-\mu)+\frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_1 s}{(1-\mu)D}\left\{(\bar{S}+\bar{S}'')\mu+\frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$
$\frac{1}{G}\tau_{xy}(x,y,z)$	$\frac{\partial_2(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{2\partial_1^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{\partial_1(s+1)}{(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{C}^{\bullet}+\bar{C}'')+\frac{2\partial_2^2}{D^2}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']\right\}$	$\frac{\partial_1\partial_2(s+1)}{D^2(1-\mu)}[s\bar{C}^{\bullet}+(s+1)\bar{C}'']$	$-\frac{2\partial_1\partial_2 s}{D(1-\mu)}[(s-\mu)\bar{S}+(s+1-\mu)\bar{S}'']$	$\frac{\partial_1 s}{D(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'')+\frac{\partial_2^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$	$\frac{\partial_2 s}{D(1-\mu)}\left\{(1-\mu)(\bar{S}+\bar{S}'')+\frac{\partial_1^2}{D^2}[(s-1)\bar{S}+s\bar{S}'']\right\}$

$$\bar{C}=\sum_0^s(-1)^{s-k}\cdot\frac{k+1}{s+1}\cdot\frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!};\quad \bar{C}^{\bullet}=\sum_1^s(-1)^{s-k}\cdot\frac{k+1}{s+1}\cdot\frac{(zD)^{2(s-k)}}{[2(s-k)]!};\quad \bar{S}=\sum_1^s(-1)^{s-k}\cdot\frac{k}{s}\cdot\frac{(zD)^{2(s-k)+1}}{[2(s-k)+1]!}$$

Tablica 7. Stan przemieszczenia i naprężenia w technicznej teorii płyt

(rozwiązanie problemu jednorodnego określonego równaniami: $\frac{2h^3 D^4}{3(1-\mu)} \Phi_{10} = 0$, $\left(\frac{1-h^2 D^2}{2}\right) \Phi = 0$)

	$w_0 = \left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu} \frac{h^2 D^2}{2}\right] \Phi_{10}$	$\frac{1}{G} \tau^0_{yz} = -\frac{\partial_2}{1-\mu} h^2 D^2 \Phi_{10} + \partial_1 \Phi$	$\frac{1}{G} \tau^0_{xz} = -\frac{\partial_1}{1-\mu} h^2 D^2 \Phi_{10} - \partial_2 \Phi$	$\Phi_{10}(x, y)$	$\Phi(x, y)$
$u(x, y, z)$	$-\partial_1 z \left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu} \frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$-z^3 \frac{\partial_1 \partial_2}{12(1-\mu)}$	$z\left\{1 - \frac{z^2}{6}\left[D^2 + \frac{\partial_1^2}{2(1-\mu)}\right]\right\}$	$-z\partial_1\left[1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2} - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$-z\partial_2\left(1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right)$
$v(x, y, z)$	$-\partial_2 z \left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu} \frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$z\left\{1 - \frac{z^2}{6}\left[D^2 + \frac{\partial_2^2}{2(1-\mu)}\right]\right\}$	$-z^3 \frac{\partial_1 \partial_2}{12(1-\mu)}$	$-z\partial_2\left[1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2} - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$+z\partial_1\left(1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right)$
$\frac{1}{G}\sigma_z(x, y, z)$	$-\frac{z^3 D^4}{3(1-\mu)}$	$-z\partial_2\left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$-z\partial_1\left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$\frac{h^3 D^4}{3(1-\mu)}\left[3\frac{z}{h} - \left(\frac{z}{h}\right)^3\right] = 0$	0
$w(x, y, z)$	$1 + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{z^2 D^2}{2}$	$-z^2 \frac{\partial_2}{4(1-\mu)}\left[1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$-z^2 \frac{\partial_1}{4(1-\mu)}\left[1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{2} - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2}$	0
$\frac{1}{G}\tau_{yz}(x, y, z)$	$z^2 \frac{\partial_2 D^2}{1-\mu}$	$1 - \frac{z^2}{2}\left(D^2 + \frac{\partial_2^2}{1-\mu}\right)$	$-z^2 \frac{\partial_1 \partial_2}{2(1-\mu)}$	$-\frac{\partial_2 h^2 D^2}{1-\mu}\left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$	$+\partial_1\left(1 - \frac{z^2 D^2}{2}\right)$
$\frac{1}{G}\tau_{xz}(x, y, z)$	$z^2 \frac{\partial_1 D^2}{1-\mu}$	$-z^2 \frac{\partial_1 \partial_2}{2(1-\mu)}$	$1 - \frac{z^2}{2}\left(D^2 + \frac{\partial_1^2}{1-\mu}\right)$	$-\frac{\partial_1 h^2 D^2}{1-\mu}\left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$	$-\partial_2\left(1 - \frac{z^2 D^2}{2}\right)$
$\frac{1}{G}\sigma_x(x, y, z)$	$-2z\left[\partial_1^2 + \frac{\mu}{1-\mu} D^2\right] + z^3 \frac{2-\mu}{3(1-\mu)} D^2 \partial_1^2$	$z\frac{\partial_2}{1-\mu}\left[\mu - \frac{z^2}{6}(\mu D^2 + \partial_1^2)\right]$	$z\frac{\partial_1}{1-\mu}\left\{(2-\mu) - \frac{z^2}{6}[(2-\mu) D^2 + \partial_1^2]\right\}$	$-2z\left\{\frac{\mu}{1-\mu} D^2 + \partial_1^2\left[1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2} - \frac{2-\mu}{1-\mu}\cdot\frac{z^2 D^2}{6}\right]\right\}$	$-2z\,\partial_1 \partial_2\left(1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right)$
$\frac{1}{G}\sigma_y(x, y, z)$	$-2z\left[\partial_2^2 + \frac{\mu}{1-\mu} D^2\right] + z^3 \frac{2-\mu}{3(1-\mu)} D^2 \partial_2^2$	$z\frac{\partial_2}{1-\mu}\left\{(2-\mu) - \frac{z^2}{6}[(2-\mu) D^2 + \partial_2^2]\right\}$	$z\frac{\partial_1}{1-\mu}\left[\mu - \frac{z^2}{6}(\mu D^2 + \partial_2^2)\right]$	$-2z\left\{\frac{\mu}{1-\mu} D^2 + \partial_2^2\left[1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2} - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{6}\right]\right\}$	$+2z\,\partial_1 \partial_2\left(1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right)$
$\frac{1}{G}\tau_{xy}(x, y, z)$	$-2z\partial_1 \partial_2\left[1 - \frac{2-\mu}{1-\mu} \cdot \frac{z^2 D^2}{6}\right]$	$z\partial_1\left[1 - \frac{z^2 D^2}{6} - \frac{z^2 \partial_2^2}{6(1-\mu)}\right]$	$z\partial_2\left[1 - \frac{z^2 D^2}{6} - \frac{z^2 \partial_1^2}{6(1-\mu)}\right]$	$-2z\,\partial_1 \partial_2\left\{1 + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{h^2 D^2}{2} - \frac{2-\mu}{1-\mu}\frac{z^2 D^2}{6}\right\}$	$z(\partial_1^2 - \partial_2^2)\left(1 - \frac{z^2 D^2}{6}\right)$

Przejście od określonego stopnia przybliżenia do następnego uzyskuje się przez wykorzystanie jednego algorytmu, a więc bez potrzeby sięgania do innych metod obliczeniowych.

Opracowane algorytmy mogą służyć bezpośrednio do postawienia zagadnienia we właściwy sposób, a także pozwalają na ocenę prawidłowości uproszczeń przy «redukowaniu» operatorów nieskończonych wyprowadzonych w pierwszej części pracy.

Poruszono zagadnienia teorii sprężystości ciał izotropowych. Rozważania te można rozszerzyć na podstawie zadania dla ciał ortotropowych. W przypadku anizotropii ogólnej zagadnienie się komplikuje ze względu na pojawiającą się dodatkową macierz współczynników sprężystości. Ogólnie można stwierdzić, że wszędzie tam gdzie występują liniowe operatory różniczkowe, zastosowanie podanej metody jest możliwe.

Zamieszczone w pracy przykłady zastosowania operatorów nieskończonych i skończonych do teorii płyt pozwoliły na znalezienie nie podanych w pracach [9 i 10] składników rozwiązania jednorodnego. Ponadto wyjaśniono zagadnienie poprawnego formułowania zadania technicznej teorii płyt, opartej na równaniach teorii sprężystości, a nie na hipotezach zaczerpniętych z technicznej wytrzymałości materiałów.

Rozwiązanie uproszczone uzyskane przez W. Z. WŁASOWA, N. N. LEONTIEWA ze zredukowania operatorów nieskończonych w świetle naszych rozważań budzi zastrzeżenia właśnie ze względu na obniżenie rzędu równania różniczkowego problemu (przez pominięcie funkcji Φ).

Literatura cytowana w tekście

[1] E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., 2, **12** (1945).

[2] E. REISSNER, *On bending of elastic plates*, Quart. Appl. Math., 5, 1947.

[3] M. SCHÄFER, *Über eine Verfeinerung der Klassischen Theorie dünner schwag gebogener Platten*, ZAMM, B., 32, 1952.

[4] K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Dodatek do I wyd. polskiego, Arkady, Warszawa 1961.

[5] J. MOSSAKOWSKI, *Równania teorii Reissnera dla płyt ortotropowych*, Księga Jubil. prof. dr W. Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.

[6] S. J. MEDWADOWSKI, *On a refined theory of elastic orthotropic plates*, Dissert. Univer. of California, 1956.

[7] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

[8] E. KOPPE, *Die dicke Platte mit nichtlinearer Spannungsverteilung*, ZAMM, B. 37, 1957.

[9] А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва 1955.

[10] В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев, *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*, Москва 1960.

[11] S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, Warszawa 1957.

[12] R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne prostopadłościanu ortotropowego i przykład z teorii płyt grubych*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961).

[13] И. Е. Милейковский, *Расчет массивных конструкций методами строительной механики пространственных систем*. ЦНИИСК, Москва 1958.

[14] В. З. Власов, *Тонкостенные пространственные системы*, Гостехиздат, Москва 1958.

[15] В. И. Блох, *К общей теории упругих толстых плит*, Инж. Сборник, XVIII, 1954.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Работа разделена на девять пунктов. Во введении дается краткий обзор методов применяемых при формулировании технических теорий пластинок (тонких, средней толщины и толстых) и общих задач теории упругости.

Обращается внимание на то, что к отдельным задачам применяется главным образом, некоторые предварительные гипотезы, на которых основывается затем дальнейший ход исчислений.

Возникла мысль предложить одинаковый способ манипуляции всего класса вопросов основывающихся на статических, геометрических и физических уравнениях теории упругости изотропных тел.

С этой целью выводятся сперва общие формулы опирающиеся на дифференциальные операторы бесконечного порядка. Выводы, касающиеся этого вопроса, заключающиеся во втором разделе для статистической задачи теории упругости слоя разрабатывались, опираясь на существующие публикации [9, 10] с добавочным учетом объемных сил.

В третьем пункте рассматривается вопрос изгиба пластинки. Констатируется, что в существующем, однородным решении не учитываются некоторые элементы. Найдена правильная форма решения.

В четвертом пункте строится подобный, невстречаемый до сих пор в литературе алгорифм для динамической задачи. В пятом пункте в двух подробных задачах, касающихся колебаний прямоугольных параллелепипедов, предлагается применение установленного алгорифма.

Пункт шестой посвящается алгорифму, состоящему из дифференциальных операторов конечного порядка, которые рекомендуют авторы работы [10].

Такие действия пробятся, главным образом, для выяснения проблеммы допускаемости использования конечного числа в выражении в бесконечном алгорифме.

В отдельных операторах конечного порядка выделяются элементы, создающие симметрическую таблицу и добавочные решения, портящие симметрию. Подтверждается, что первые соответствуют операторам, возникающим вследствие упрощения бесконечных операторов путем сведения к конечному числу выражений, а добавочные выражения являются результатом примененного метода.

В пункте седьмом выводятся формулы, касающиеся теории пластинок. Даются формулы для напряженного состояния, в которых также существуют элементы решения однородного решения, в котором определяются элементы найденные в пункте третьем.

В пункте восьмом приводится простое представление технической теории пластинок, доказывая при этом, что ее правильная формулировка приводит к системе дифференциальных уравнений (до сих пор было принято как одно бигармоническое решение).

Summary

APPLICATION OF DIFFERENTIAL OPERATORS TO PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

The paper is divided into nine sections. The introduction contains a brief survey of methods used for developing engineer's theories of plates (thin, medium and thick) and in general problems of elasticity.

It is pointed out that for each particular problem certain fundamental assumptions are usually introduced, on which further procedure is based.

The present paper is devoted to the idea of devising a uniform procedure for the entire class of problems based on static, geometric and physical equations of the theory of isotropic bodies. To this aim general equations are first derived, based on differential operators of infinite order. The relevant argument for the static problem of elasticity of a stratum layer is contained in Sec. 2 and is based on the existing publications [9 and 10], the mass forces being taken additionally into consideration.

In Sec. 3 is considered the problem of bending of a plate. It is found that in the existing homogeneous solution [9] certain components are omitted. The correct form of the solution is found.

In Sec. 4 a similar algorithm is built up for the dynamic problems (not yet encountered in the literature).

Sec. 5 presents, in two particular problems concerning vibration of rectangular parallelepipeds, an application of a the fixed algorithm.

Sec. 6 is devoted to the construction of an algorithm composed of differential operators of finite order. Such a procedure is applied mainly to solve the problem of admissibility of using a finite number of terms in an infinite algorithm as recommended in Ref. 10.

In each particular operator of finite order are separated components constituting a symmetric table layout and additional terms of the solution perturbing the symmetry. It is found that the first correspond to operators produced by simplifying infinite operators by reducing them to a finite number of terms. The complements are a result of assuming operators of finite order.

Sec. 7 is devoted to the derivation of equations of the theory of plates. In the equations expressing the state of stress there appear also components of the homogeneous solution, similar to those found in Sec. 3.

In Sec. 8 the engineer's theory of plates is explained in a simple manner showing that if the statement is correct, it leads to a set of partial differential equations (not to a single biharmonic equation as hitherto assumed).

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 września 1963 r.