ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 12 (1964)

WYPIERANIE WODY PRZEZ GAZ WTŁACZANY DO WIELOWARSTWOWEGO POKŁADU *

KRYSTYNA SALWA i HENRYK WALDEN (WARSZAWA)

1. Wstęp

Współczesny system zaopatrzenia miast i osiedli w gaz ziemny wymaga bezpiecznych, praktycznych i ekonomicznych podziemnych zbiorników gazowych w miejscach odbioru gazu lub na trasie gazociągów dalekosiężnych.

Magazynowanie dużych ilości gazu w warstwie wodonośnej lub roponośnej jest bardziej ekonomiczne i bezpieczniejsze niż w zbiornikach naziemnych wysokiego ciśnienia.

Z problemem magazynowania gazu w pokładach wiąże się zagadnienie wypierania wody lub ropy naftowej przez gaz wtłaczany do złoża.

2. Rozkład ciśnień w strefie wodnej i ruch konturu rozgraniczającego gaz od wody

Rozpatrzmy poziomy wielowarstwowy pokład wodonośny, do którego wtłaczany jest gaz na całej głębokości pokładu pod stałym ciśnieniem p_0.

Przyjmujemy, że w każdej warstwie ruch jest prostoliniowy. Warstwy o nieznacznej miąższości posiadają różne współczynniki porowatości m i przepuszczalności k.

Zakładamy, że w strefie gazowej nie ma strat ciśnienia. Znalezienie funkcji rozkładu ciśnień $p(x, t)$ w każdej warstwie wodonośnej przy założeniu ściśliwości cieczy i sprężystości gruntu sprowadza się do rozwiązania równania typu przewodnictwa cieplnego postaci

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \text{dla} \quad 0 < x < \infty, \tag{2.1}$$

gdzie $x = \xi(t)$ określa przemieszczenie konturu rozgraniczającego gaz od wody w warstwach poziomych $i = 1, 2, 3, \ldots$ oraz

$$a_i^2 = \frac{k_i}{\mu\left(\dfrac{m_i}{K_c} + \dfrac{1}{K_s}\right)}.$$

We wzorze powyższym a_i jest współczynnikiem piezoprzewodności warstwy i, k_i współczynnikiem przepuszczalności gruntu, μ współczynnikiem lepkości dynamicz-

---

* Praca referowana na Sympozjum Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w Gdańsku w listopadzie 1962 roku.

nej wody, K_c modułem ściśliwości cieczy, K_s modułem sprężystości gruntu oraz m_i współczynnikiem porowatości danej warstwy.

Rozwiązaniem równania (2.1) będzie funkcja, [1],

$$p(x, t) = A_i + B_i \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{2.2}$$

gdzie A_i i B_i są to stałe wielkości różne dla każdej warstwy, a funkcja

$$\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-t}\, dt$$

jest rozwiązaniem podstawowym równania (2.1).

Warunki początkowe i brzegowe są następujące:

$$p(x, 0) = p_k, \qquad [p(x, t)]_{x=\xi(t)} = p_0, \qquad \lim_{x\to\infty} p(x, t) = p_k. \tag{2.3}$$

Uwzględniając warunek początkowy $(2.3)_1$ dla $t = 0$ w (2.2) otrzymamy

$$p_k = A_i + B_i. \tag{2.4}$$

Z warunku brzegowego $(2.3)_2$ wyprowadzimy drugie równanie

$$p_0 = A_i + B_i\, \Phi\left[\frac{\xi(t)}{2a_i\sqrt{t}}\right]. \tag{2.5}$$

Aby zapewnić spełnienie warunku brzegowego $(2.3)_2$ dla każdej chwili t wystarczy przyjąć w (2.5)

$$\xi(t) = \alpha_i \sqrt{t}. \tag{2.6}$$

W naszym przypadku funkcja $x = \xi(t)$, w której zmienną niezależną jest czas t, określa położenie punktu leżącego na granicy między strefą wtłaczanego gazu, a strefą wypieranej ze złoża wody.

Parametr α_i jest różny dla każdej warstwy. Uwzględniając w równaniu (2.5) zależność (2.6) znajdziemy

$$p_0 = A_i + B_i\, \Phi\left(\frac{\alpha_i}{2a_i}\right). \tag{2.7}$$

Rozwiązując układ równań (2.4) i (2.7) wyznaczymy wartości na A_i i B_i:

$$A_i = p_k + \frac{p_0 - p_k}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha_i}{2a_i}\right)}, \qquad B_i = \frac{p_k - p_0}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha_i}{2a_i}\right)}. \tag{2.8}$$

Wstawiając zależne wartości (2.8) do (2.2) otrzymamy

$$p_i(x, t, a_i) = p_k + \frac{p_0 - p_k}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha_i}{2a_i}\right)}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a_i\sqrt{t}}\right)\right], \tag{2.9}$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Funkcja (2.9) wyraża rozkład ciśnień w strefie wypieranej wody dla każdej warstwy.

Z własności funkcji $\Phi(x/2a_i\sqrt{t})$ wynika, że funkcja (2.9) spełnia także warunek $(2.3)_3$.

Funkcja (2.9) zależy od parametru α_i, który wyznaczymy z prawa Darcy

$$m_i \frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{k_i}{\mu}\frac{\partial p_i}{\partial x},$$

gdzie $x = \xi(t) = \alpha_i\sqrt{t}$.

Uwzględniając w powyższym równaniu (2.8) i (2.9) otrzymamy

$$\frac{m_i \alpha_i}{2\sqrt{t}} = \frac{k_i}{\mu}\frac{p_0 - p_k}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha_i}{2a_i}\right)}\frac{1}{2a_i\sqrt{t}}e^{\frac{\alpha_i^2}{4a_i^2}}$$

lub

$$\frac{m_i \mu a_i}{k_i(p_0 - p_k)}\alpha_i = \frac{e^{-\frac{\alpha_i^2}{4a_i^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha_i}{2a_i}\right)}.$$

Przyjmując

$$\frac{\alpha_i}{2a_i} = \beta_i, \tag{2.10}$$

otrzymamy równanie przestępne

$$\frac{2a_i^2 m_i \mu}{k_i(p_0 - p_k)}\beta_i = \frac{e^{-\beta_i^2}}{1 - \Phi(\beta_i)}. \tag{2.11}$$

Równanie (2.11) można rozwiązać metodą przybliżoną podwójnych stycznych, [2].

3. Wypieranie wody przez gaz w czterowarstwowym złożu

Rozpatrzmy złoże czterowarstwowe o różnych współczynnikach porowatości m_i i przepuszczalności k_i przyjmując następujące wartości:

$$\begin{aligned}
&m_1 = 0{,}3, && k_1 = 2 \text{ darcy} = \frac{2}{981 \cdot 10^5}\ [\text{cm}^2],\\
&m_2 = 0{,}25, && k_2 = 1 \text{ darcy} = \frac{1}{981 \cdot 10^5}\ [\text{cm}^2],\\
&m_3 = 0{,}2, && k_3 = 0{,}6 \text{ darcy} = \frac{6}{981 \cdot 10^6}\ [\text{cm}^2],\\
&m_4 = 0{,}15., && k_4 = 0{,}1 \text{ darcy} = \frac{1}{981 \cdot 10^6}\ [\text{cm}^2]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

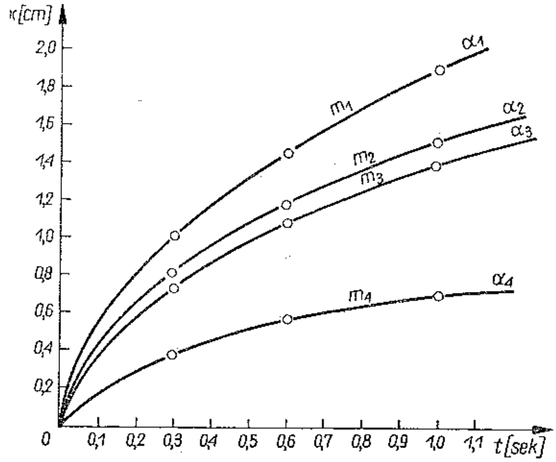
ciśnienie wtłaczanego gazu $p_0 = 10^5$ Gcm^{-2}, ciśnienie wypieranej wody dla $t = 0$ $p_k = 2\cdot 10^4$ Gcm^{-2}, współczynnik lepkości dynamicznej wody $\mu = 10^{-5}$ Gsek cm^{-2}, moduł ściśliwości cieczy $K_c = 2\cdot 10^7$ G/cm^2 oraz moduł sprężystości gruntu $K_s = 10^8$ G/cm^2.

Współczynnik piezoprzewodności wynosi

$$a_i^2 = \frac{k_i}{\mu\left(\frac{m_i}{K_c} + \frac{1}{K_s}\right)} = \frac{k_i}{10^{-3}(5m_i + 1)}\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sek.}}\right], \tag{3.2}$$

lewa zaś strona równania (2.11)

$$\frac{2a_i^2 m_i \mu}{k_i(p_0 - p_k)}\beta_i = \frac{10^2 \cdot 25\, m_i}{5m_i + 1}\beta_i = R_i\beta_i. \tag{3.3}$$



t sek / x cm		0,3	0,6	1,0
α_1		1,0215	1,478	1,910
α_2		0,810	1,244	1,579
α_3		0,756	1,078	1,405
α_4		0,383	0,546	0,715

Rys. 1

Podstawiając kolejno $m_1, m_2, m_3, m_4, k_1, k_2$ i k_3 do wzorów (3.2) i (3.3) otrzymamy:

$$\begin{aligned} R_1 &= 300, & a_1 &= 285{,}482,\\ R_2 &= 277, & a_2 &= 217{,}945,\\ R_3 &= 250, & a_3 &= 174{,}929,\\ R_4 &= 214, & a_4 &= 76{,}158. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Rozwiązanie równania (2.11) otrzymano metodą podwójnych stycznych. Obliczenie wykonano na maszynie matematycznej UMC-1. Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0{,}0033459284, & \beta_2 &= 0{,}0036248874,\\ \beta_3 &= 0{,}0040181535, & \beta_4 &= 0{,}0046976951. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Z zależności (2.10) mamy

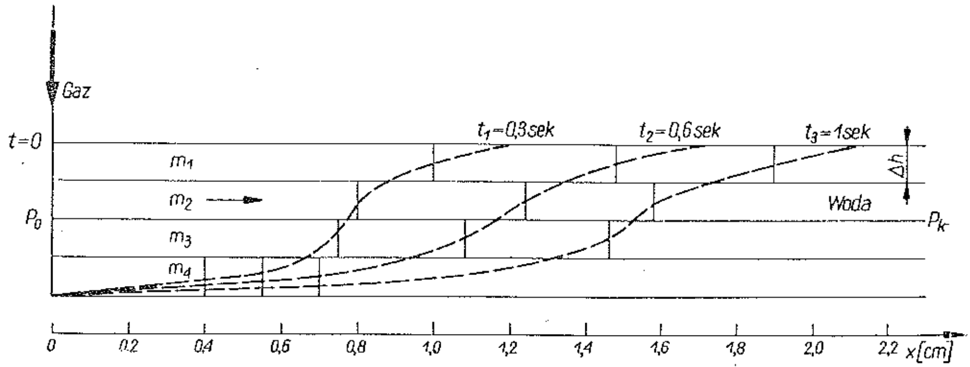
$$\alpha_i = 2a_i\,\beta_i.$$

Uwzględniając wartości (2.15) i (2.16) otrzymamy z zależności (2.14):

$$\alpha_1 = 1{,}910375064, \qquad \alpha_3 = 1{,}40559200,$$

$$\alpha_2 = 1{,}579979024, \qquad \alpha_4 = 0{,}715558432.$$

Na podstawie (2.6) $x = \alpha_i\sqrt{t}$ wykreślono na rys. 1 krzywe paraboliczne przedstawiające zależności położenia granicy wypieranej przez gaz cieczy od czasu w 4 warstwach poziomych złoża.



Rys. 2

Biorąc pod uwagę warstwy o nieznacznej miąższości otrzymamy przemieszczenie konturu oddzielającego gaz od wody w czterowarstwowym złożu w postaci łamanej linii (rys. 2).

Literatura cytowana w tekście

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Москва 1951.
[2] E. Lipiński, *O zerach i biegunach transmitacji operatorowej*, Praca doktorska, 1963.

Резюме

ВЫТЕСНЕНИЕ ВОДЫ ГАЗОМ ЗАКАЧИВАЕМОМ В МНОГОСЛОЙНЫЙ ПЛАСТ

Решая уравнение теплопроводности, с учетом соответствующих начальных и краевых условий, получено функцию распределения давления в зоне вытесняемой газом воды в многослойном пласте.

Получено трансцедентное уравнение, с помощью которого можно определить перемещение контура, отделяющего газ от воды. Трансцедентное уравнение решено с помощью так называемого приближенного метода двойных касательных, [2].

Исчисления для случая вытеснения воды газом в четырехслойном пласте проводились при использовании вычислительной машины UMC — 1.

Summary

EXPULSION OF WATER BY MEANS OF GAS PRESSED INTO A STRATIFIED MULTI-LAYER

By solving an equation of the heat conduction type, with appropriate initial and boundary conditions, a function is obtained expressing the pressure distribution in the wet zone of a multi-layer deposit.

A transcendental equation is obtained enabling the determination of the displacement of the boundary between the dry and the wet zone. This transcendental equation is solved by means of what is termed a double-tangent approximate method, [2].

Computation has been carried out for a four-layer deposit by means of the UMC–1 computer.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 listopada 1963 r.