ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 12 (1964)

ZGINANIE ŁUKÓW FALISTYCH

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Zagadnienie zginania łuków o przekroju kołowym (rury zakrzywionej) było rozpatrywane najpierw przez A. BANTLINA, [1]. Autor ten zajmował się zginaniem tzw. «kompensatorów lirowych», stwierdzając że przemieszczenia, obliczone na podstawie równania różniczkowego dla prętów zakrzywionych

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \approx \frac{M}{EJ} \tag{1.1}$$

w przypadku przekrojów pierścieniowych, są w porównaniu z przemieszczeniami wyznaczonymi na drodze doświadczalnej kilkakrotnie mniejsze.

Pierwszym, który uwzględnił zmianę przekroju poprzecznego zginanego łuku (spłaszczenie przekroju), był T. KÁRMÁN, [9]. Posługując się metodą Ritza–Rayleigha i przyjmując, że składowa przemieszczenia stycznego może być przyjęta w postaci szeregu

$$w_t = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin 2n\varphi, \tag{1.2}$$

T. KÁRMÁN otrzymał równanie różniczkowe osi odkształconej łuku w postaci

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \frac{M}{KEJ}. \tag{1.3}$$

Występująca we wzorze (1.3) liczba $K \leqslant 1$ uwzględnia zmniejszenie sztywności łuku w stosunku do rury prostej. Liczbę tę, zależną od ilości wyrazów szeregu (1.2), nazywa się dzisiaj powszechnie liczbą Kármána. W porównaniu z wynikami A. Bantlina, wyniki T. Kármána odbiegały już tylko o 20% od danych doświadczalnych.

Następne lata przyniosły bardzo dużą liczbę publikacji. Obszerny przegląd prac do lat 1949-1955 można znaleźć w literaturze, [2, 6, 7, 13].

Obecnie przejdziemy do omówienia nowszych prac poświęconych temu zagadnieniu. W ostatnich latach badaniami doświadczalnymi zajmowali się J. H. FORD i C. E. TURNER, [5], oraz A. G. KAMERSZTEIN, [24]. Jak wynika z pracy [24] dla łuków o dużej krzywiźnie istnieją rozbieżności między danymi doświadczalnymi, a wynikami np. Clarka–Reissnera. Dalsze więc prace nad zagadnieniem zginania

łuków o dużej krzywiźnie są niezbędne. Dalsze prace dotyczące tego zagadnienia poszły w kierunku rozwinięcia metod asymptotycznego całkowania, zagadnień niejednorodnych (obciążenie ciśnieniem zewnętrznym lub wewnętrznym), stanów sprężysto-plastycznych, teorii nieliniowej i pewnych prób obliczeń z uwzględnieniem pełzania.

W kierunku teorii nieliniowej poszły prace Reissnera i Clarka. Obszerne omówienie wyników tych autorów znajduje się w artykule Reissnera, [10]. Należy wymienić również dalsze prace Reissnera, [11] i [12], dotyczące rozpatrywania tego zagadnienia w ramach teorii nieliniowej.

Za kontynuację prac Reissnera można uważać prace E. L. Akselrada. W pracy [15] rozpatrzono zagadnienie zginania łuku przy dużych ugięciach dla profilu otwartego, w [16] zaś uzyskano równania dla łuku o dowolnym przekroju i dla dużych ugięć. Praca [17] zajmuje się przypadkiem zginania łuku o przekroju kołowym w świetle teorii nieliniowej. Wreszcie w pracy [18] rozpatrzono przypadek obciążeń zewnętrznych (ciśnienie).

Łuki obciążone ciśnieniem od wewnątrz były również rozpatrywane przez CLARKA, [10], oraz przez P. G. KAFKĘ i M. B. DUNNA, [8].

Dla przekrojów zbliżonych do kołowego i obciążonych ciśnieniem, istnieją rozwiązania D. L. Kostowieckiego w ramach teorii liniowej [25] oraz dla dużych ugięć, [26]. Przypadek utraty stateczności dla przekrojów zbliżonych do kołowego został rozpatrzony przez KOSTOWIECKIEGO w pracy [27].

Ciekawy sposób ogólniejszego podejścia do omawianego tutaj zagadnienia (uwzględnienie ogólniejszych obciążeń brzegowych) przedstawia K. F. CZERNYCH w pracy [20].

Dalsze rozwinięcie metod asymptotycznego całkowania można znaleźć w pracy S. A. Tumarkina, [30]; stabelaryzowanie pewnych funkcji podstawowych w tej metodzie znajduje się w pracy L. N. Nosowej i S. A. Tumarkina, [28].

Za próbę analitycznego wyznaczenia naprężeń w łukach segmentowych można uważać pracę M. I. Estrina, [21].

Zginanie tzw. rurek (sprężyn Bourdona), rozpatrywane również przez FIEODOSJEWA, omówiła L. E. ANDREJEWA w pracy [14].

W pracach L. M. Kaczanowa [22] oraz W. S. Turkina [31] zostało rozpatrzone zagadnienie zginania sprężysto-plastycznego, a w pracy L. M. Kaczanowa, [23], rozpatrzono pełzanie łuków zginanych.

Istnieją wreszcie zagadnienia bliskie z punktu widzenia teorii powłok zagadnieniu Kármána: są to powłoki toroidalne otwarte lub zamknięte, które w zastosowaniach praktycznych spotyka się np. przy budowie korpusów turbin wodnych lub parowych. Zagadnienia te są przedmiotem osobnej grupy prac, z których najistotniejsze zostały omówione przez W. W. NOWOŻIŁOWA, [29]. Z powyższym problemem wiąże się również praca W. N. Bułgakowa, [19].

W niniejszej pracy postawiono sobie za cel wyznaczenie liczby Kármána oraz podanie wzorów na naprężenia występujące w łukach falistych. Ze względu na bardzo skomplikowany kształt takich łuków zrezygnowano z dokładnego opisania powierzch-

ni środkowej łuku przyjmując powierzchnię toroidalną pofałdowaną sinusoidalnie. W pracy stosuje się następujące założenia dotyczące samej powierzchni:

1) powierzchnia środkowa łuku jest powierzchnią toroidalną o promieniach $r = r_1 + (H_w + H_z)/4$, $R = R_1 - (H_w - H_z)/4$, gdzie r_1 i R_1 są promieniami łuków giętych bez pofałdowania,

2) pofałdowanie jest sinusoidalne,

3) wszystkie fałdy są jednakowe,

4) wysokość pofałdowania zmienia się zgodnie z zależnością (2.8),

5) nie uwzględnia się zmian grubości materiału (spęczenia), powstałych w czasie wykonywania łuku,

6) zakłada się, że istnieje ortotropia konstrukcyjna scharakteryzowana funkcjami k_1 i k_2.

Inne założenia upraszczające będą omówione kolejno w miarę rozwiązywania zagadnienia.

Jest rzeczą oczywistą, że w świetle przyjętych uproszczeń wzory określające naprężenia mają charakter wyłącznie orientacyjny.

Trudność uwzględnienia w badaniach teoretycznych skomplikowanej powierzchni takiego łuku wydaje się być główną przyczyną braku prac na ten temat. Pewne badania doświadczalne były jednak przeprowadzone przez E. T. COPEGO i E. A. WERTA, [3], oraz R. L. DENNISONA, [13]. Tak np. R. L. DENNISON badał doświadczalnie łuki pofałdowane o średnicy 150 mm i otrzymał liczbę Kármána $K = 0{,}165$. Z badań Copego i Werta wynika, że badane przez nich łuki faliste, wykonane z rury o średnicy zewnętrznej 14'', są 2-2,5 krotnie mniej sztywne niż analogiczne łuki gładkie. Przytoczone powyżej liczby nie należy uogólniać na każdy łuk falisty, gdyż są one słuszne tylko dla łuków badanych przez powyższych autorów.

W zakończeniu podkreślamy, że podane tutaj rozwiązanie jest uogólnieniem rozwiązania Kármána, [9], oraz Clarka i Reissnera, [2], na przypadek zginania łuku ortotropowego (ortotropia konstrukcyjna).

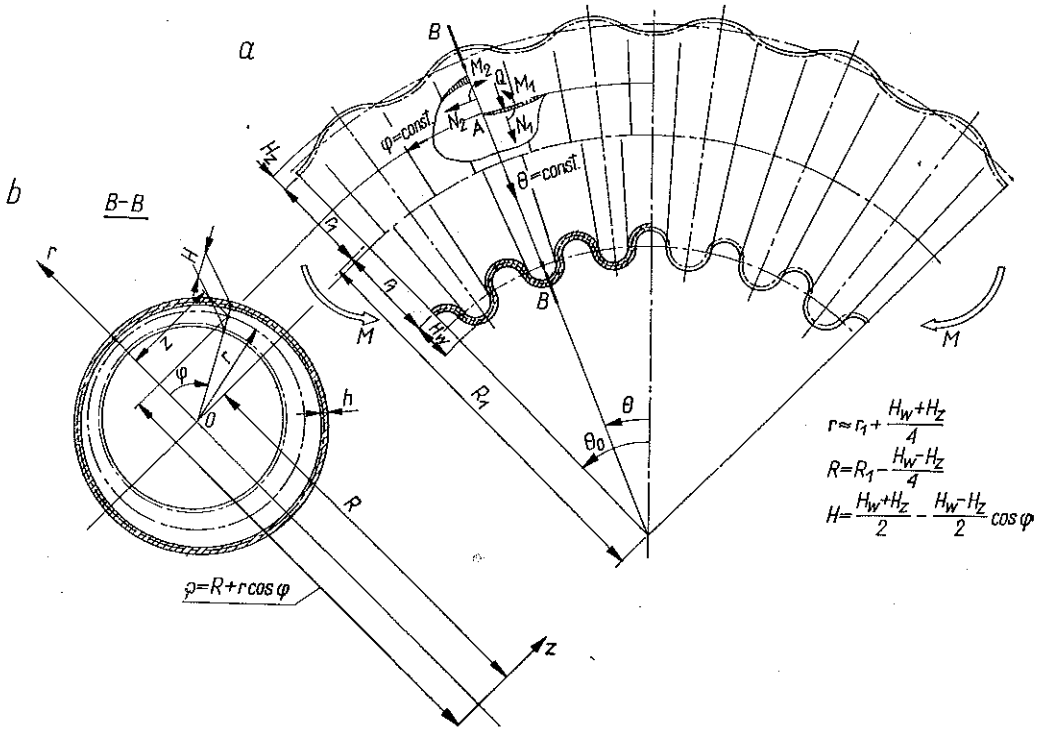
2. Wyznaczenie funkcji ortotropii k_1 i k_2

Podstawowe zależności między siłami wewnętrznymi a składowymi stanu odkształcenia — w przypadku gdy materiał powłoki jest ortotropowy (ortotropia konstrukcyjna różna dla rozciągania i zginania) — ustala się za pomocą następujących wzorów:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{E_{1r}h}{1-\nu_{1r}\nu_{2r}}(\varepsilon_1+\nu_{2r}\varepsilon_2), & N_2 &= \frac{E_{2r}h}{1-\nu_{1r}\nu_{2r}}(\varepsilon_2+\nu_{1r}\varepsilon_1),\\
M_1 &= \frac{E_{1z}h^3}{12(1-\nu_{1z}\nu_{2z})}(\varkappa_1+\nu_{2z}\varkappa_2), & M_2 &= \frac{E_{2z}h^3}{12(1-\nu_{1z}\nu_{2z})}(\varkappa_2+\nu_{1z}\varkappa_1).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

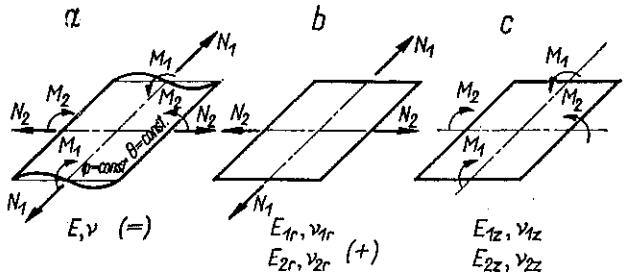
W powyższych równaniach symbol N oznacza siły normalne, symbol M momenty zginające (rys. 1a). Symbole ε i $\varkappa$ oznaczają odkształcenie podłużne i zmianę krzywizny, E_1, (E_2) moduł Younga w kierunku linii współrzędnej $\theta = \text{const}$ ($\varphi = \text{const}$),

ν_1, (ν_2) jest współczynnikiem Poissona w kierunku prostopadłym do linii $\theta = \text{const}$ ($\varphi = \text{const}$). Indeks r, (z) w równaniach (2.1) oznacza, iż dana wielkość odnosi się do rozciągania (zginania).



Rys. 1

Jeżeli w rozpatrywanej powłoce toroidalnej wytniemy przekrojami θ i $\theta+d\theta$ oraz φ i $\varphi+d\varphi$ element powierzchniowy (rys. 2) i obciążymy go odpowiednimi siłami, to pod wpływem tych sił element ten zacznie odkształcać się jak element



Rys. 2

ortotropowy. Odpowiednie funkcje ortotropii będą wynosić ν_1, ν_2; E_1, E_2. Jeżeli teraz te dwa elementy (jeden izotropowy o powierzchni falistej, drugi ortotropowy

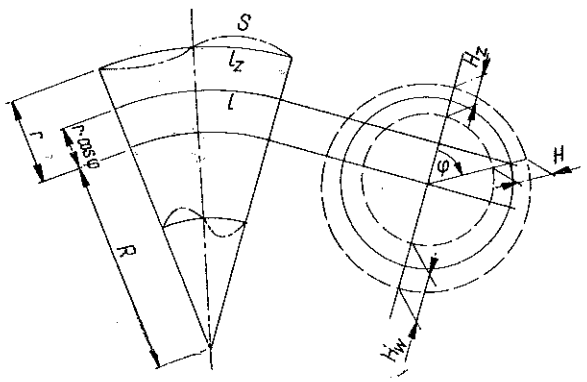
o powierzchni gładkiej) obciążymy układem sił jak na rys. 2, to wychodząc z warunków równości odkształceń tych elementów możemy ustalić zależności między stałymi ν, E a wielkościami ν_1, ν_2; E_1, E_2. W ten sposób dochodzimy do pewnych funkcji charakteryzujących pracę tych dwóch elementów przy rozciąganiu i zginaniu.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że powierzchnię środkową elementu pofałdowanego tworzy powierzchnia toroidalna o promieniu $r = r_1 + (H_w + H_z)/4$ w przekroju $\theta = \text{const}$ (rys. 1b). Względem tej powierzchni będą występowały pofałdowania.

Jeżeli dla wyciętych elementów, które potraktujemy jako małe w stosunku do innych wymiarów łuku falistego, przyjmiemy, że ich środkowe powierzchnie są elementami płaskimi, to będziemy mogli zastosować dla rozpatrywanego tutaj zagadnienia wzory podane w pracy [14]:

$$
\begin{aligned}
&E_{1r} = k_1 E, \qquad E_{2r} = \frac{E}{k_2}, \qquad E_{1z} = Ek_2, \qquad E_{2z} = \frac{E}{k_1}, \\
&\nu_{1r} = \nu_{1z} = \nu, \qquad \nu_{2r} = \nu_{2z} = \frac{\nu}{k_1 k_2}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Warto tutaj przy sposobności nadmienić, że tak określoną ortotropię konstrukcyjną w przypadku powłoki walcowej przyjmował już wcześniej L. H. DONNELL, [4].



Rys. 3

Jeśli pofałdowanie powierzchni jest sinusoidalne o amplitudzie H (rys. 3), to dla dowolnego przekroju określonego kątem $\varphi = \text{const}$ (linia $\varphi = \text{const}$) funkcje k_1 i k_2 mają postać, [14],

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{s}{l} = \frac{2E(a)}{\pi\sqrt{1-a^2}}, \\
k_2 &= \left(\frac{H}{h}\right)^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) K(a) + \left(2 - \frac{1}{a^2}\right) E(a)\right] + \frac{2}{\pi}\sqrt{1-a^2}\, K(a).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Po prostych przekształceniach funkcję k_2 przedstawimy za pomocą wzoru

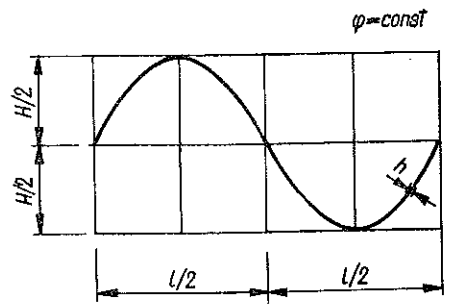
$$k_2 = \left(\frac{l}{h}\right)^2 g_1(a) + g_2(a), \tag{2.4}$$

gdzie

$$g_1(a) = \frac{2}{\pi^3}(1-a^2)^{-\frac{3}{2}}\{K(a) - E(a) + a^2[2E(a) - K(a)]\},$$
$$g_2(a) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-a^2}\,K(a), \quad a^2 = \frac{(\pi H/l)^2}{1+(\pi H/l)^2}. \tag{2.5}$$

We wzorach (2.3) i (2.5) symbolami $K(a)$ i $E(a)$ oznaczono całki eliptyczne zupełne pierwszego i drugiego rodzaju. Znaczenie pozostałych symboli podane jest na rys. 4.

Posługując się tutaj funkcjami k_1 i k_2 musimy pamiętać o założeniach, na podstawie których zostały one wyprowadzone w pracy [14] oraz o przyjętej płaskości elementu powłoki. Ostatnie założenie jest równoznaczne przyjęciu powłoki walcowej (o zmiennej tworzącej, której przekrój poprzeczny jest wielobokiem) zamiast występującego w rzeczywistości wycinka powłoki toroidalnej.



Rys. 4

Funkcje k_1 i k_2 określone za pomocą wzorów $(2.3)_1$ i (2.4) nie nadają się w tej postaci do dalszych obliczeń i muszą być zastąpione prostszymi funkcjami. W tym celu sporządzono wykresy funkcji $(2.3)_1$ $(2.5)_1$ i $(2.5)_2$, a następnie otrzymane krzywe aproksymowano parabolami typu $A(H/l)^2+B$. Aproksymację przeprowadzono w taki sposób, aby odchylenia od krzywej rzeczywistej były jak najmniejsze (są rzędu 5%). Wybrany typ równania paraboli $A(H/l)^2+B$ okazuje się w dalszych obliczeniach bardzo korzystny. Przybliżone wzory określające funkcje k_1 i k_2 mają teraz zgodnie z rys. 6 postać następującą:

$$k_1 \approx 1+1{,}75\,(H/l)^2, \quad k_2 \approx 1+1{,}75\,(H/h)^2 - (H/l)^2. \tag{2.6}$$

Równania (2.6) należałoby właściwie ustalać dla każdego łuku osobno; zwiększyłoby to oczywiście dokładność samej aproksymacji. W niniejszej pracy zrezygnowano z tego sposobu zadowalając się przybliżonymi równaniami. Występujące w $(2.6)_2$ wyrażenie $1{,}75\,(H/h)^2 - (H/l)^2 = 1{,}75\,(H/h)^2[1-(1/1{,}75)\,(h/l)^2]$ może być ze względu na to, że $h/l < 1/10$ zastąpione wyrazem $1{,}75\,(H/h)^2$ i wtedy z $(2.6)_2$ otrzymamy

$$k_2 \approx 1+1{,}75\,(H/h)^2. \tag{2.7}$$

Załóżmy, iż wysokość pofałdowania H zmienia się według następującej funkcji:

$$H = H_1 - H_2\cos\varphi, \quad \text{gdzie} \quad H_1 = \frac{H_w+H_z}{2}, \quad H_2 = \frac{H_w-H_z}{2}. \tag{2.8}$$

Pozostaje teraz ustalić funkcję zmiany długości l. Z rysunku 3 otrzymujemy

$$l = l_z \frac{1+\lambda\cos\varphi}{1+\lambda}, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{r}{R}. \tag{2.9}$$

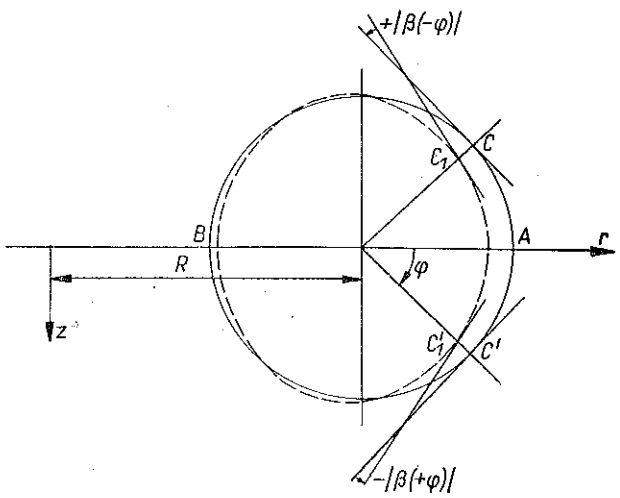
Podstawiając teraz (2.9) do $(2.3)_1$ otrzymamy

$$k_1 = p_0 \frac{1+\lambda}{1+\lambda\cos\varphi}. \tag{2.10}$$

przy czym

$$1 \leqslant p_0 = \frac{s}{l_z} < 1{,}5.$$

Powyżej skorzystaliśmy z podkreślonej części wzoru $(2.3)_1$, gdyż jest on wygodniejszy przy dalszych przekształceniach. Przyjęto również, że długość pofałdowania s jest stała (założenie 5 we wstępie). Podstawiając zaś (2.8) do (2.7) mamy



Rys. 5

$$k_2 = p_1 - p_2\cos\varphi + p_3\cos 2\varphi, \tag{2.11}$$

gdzie

$$p_1 = 1 + \frac{5{,}28}{8h^2}\left(H_w^2 + H_z^2 + \frac{2}{3}H_w H_z\right), \quad p_2 = \frac{3{,}5}{4}\frac{H_w^2 - H_z^2}{h^2},$$

$$p_3 = \frac{1{,}75}{8}\left(\frac{H_w - H_z}{h}\right)^2. \tag{2.12}$$

Ostatecznie więc funkcje k_1 i k_2 jako zależne od zmiennych φ, λ, H_w/h i H_z/h będziemy określać z równań (2.10) i (2.11).

Teraz możemy obliczyć sztywności: rozciągania

$$C_1 \approx E_{1r} h = Ehk_1, \quad C_2 \approx E_{2r} h = \frac{Eh}{k_2}, \tag{2.13}$$
$$C_{12} = \frac{E_{2r} h}{\nu_{2r}} = \frac{E_{1r} h}{\nu_{1r}} = \frac{Ehk_1}{\nu},$$

i zginania

$$D_1 = \frac{E_{1z} h^3}{12(1 - \nu_{1z}\nu_{2z})} \approx \frac{Eh^3}{12} k_2, \quad D_2 = \frac{E_{2z} h^3}{12(1 - \nu_{1z}\nu_{2z})} \approx \frac{Eh^3}{12k_1}, \tag{2.14}$$
$$D_{12} = \nu_{2z} D_1 = \nu_{1z} D_2 \approx \frac{Eh^3 \nu}{12k_1}.$$

We wzorach (2.14) przyjęto $1 - \nu_{1z}\nu_{2z} \approx 1$. Nie powoduje to istotnego błędu, a znacznie upraszcza całkowanie równania różniczkowego.

Uwzględniając w równaniach (2.1) zależności (2.13) i (2.14) otrzymujemy

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1}{C_1} - \frac{N_2}{C_{12}}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{N_2}{C_2} - \frac{N_1}{C_{12}}, \tag{2.15}$$
$$M_1 = D_1 \varkappa_1 + D_{12} \varkappa_2, \quad M_2 = D_2 \varkappa_2 + D_{12} \varkappa_1.$$

3. Podstawowe równania teorii powłok obrotowych ortotropowych

Przy rozpatrywaniu zginania łuku falistego będziemy stosować równania odnoszące się dla stanu kołowo-symetrycznego. Równania te zostały podane przez E. REISSNERA i E. MEISSNERA dla powłok obrotowych zamkniętych dla stanu kołowo-symetrycznego. Uogólnił te równania na powłoki ortotropowe otwarte E. REISSNER, [2]. Podstawowy układ równań różniczkowych ma postać następującą:

$$\left(\frac{\varrho D_1}{a}\beta'\right)' - \left[\frac{\varrho'^2}{a\varrho} D_2 - \left(\frac{\varrho' D_{12}}{a}\right)'\right]\beta + z'\Psi = 0, \tag{3.1}$$
$$\left(\frac{\varrho}{aC_2}\Psi'\right)' - \left[\frac{\varrho'^2}{a\varrho}\frac{1}{C_1} + \left(\frac{\varrho'}{aC_{12}}\right)'\right]\Psi - z'\beta = \varrho' k.$$

Wprowadzając do układu (3.1) wielkości określone równaniami (2.13) i (2.14) i przyjmując funkcję zespoloną $\tilde{\Psi}$ i funkcję zespoloną sprzężoną $\bar{\tilde{\Psi}}$, zmiennej rzeczywistej φ

$$\tilde{\Psi} \overset{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{12}}{Eh^2}\Psi + i\beta, \qquad \bar{\tilde{\Psi}} \overset{\text{df}}{=} \frac{\sqrt{12}}{Eh^2}\Psi - i\beta \tag{3.2}$$

otrzymamy w wyniku końcowym jedno równanie w postaci zespolonej, które łącznie z warunkami brzegowymi określać będzie funkcję $\tilde{\Psi}$:

$$\left(\frac{\varrho k_2}{a}\tilde{\Psi}'\right)' - \left(\frac{\varrho'^2}{a\varrho k_1} - z'\frac{\sqrt{12}}{h}i\right)\tilde{\Psi} - \nu\left(\frac{\varrho'}{ak_1}\right)'\bar{\tilde{\Psi}} = \varrho' k \frac{\sqrt{12}}{h}. \tag{3.3}$$

We wzorach (3.1)-(3.3) przecinkiem oznaczono pochodną względem zmiennej φ. Znaczenie symboli ϱ i z wynika wprost z rys. 1. Wartości zaś α i k wynoszą

$$\alpha^2 = \varrho'^2 + z'^2, \qquad k = \Delta k\, R. \tag{3.4}$$

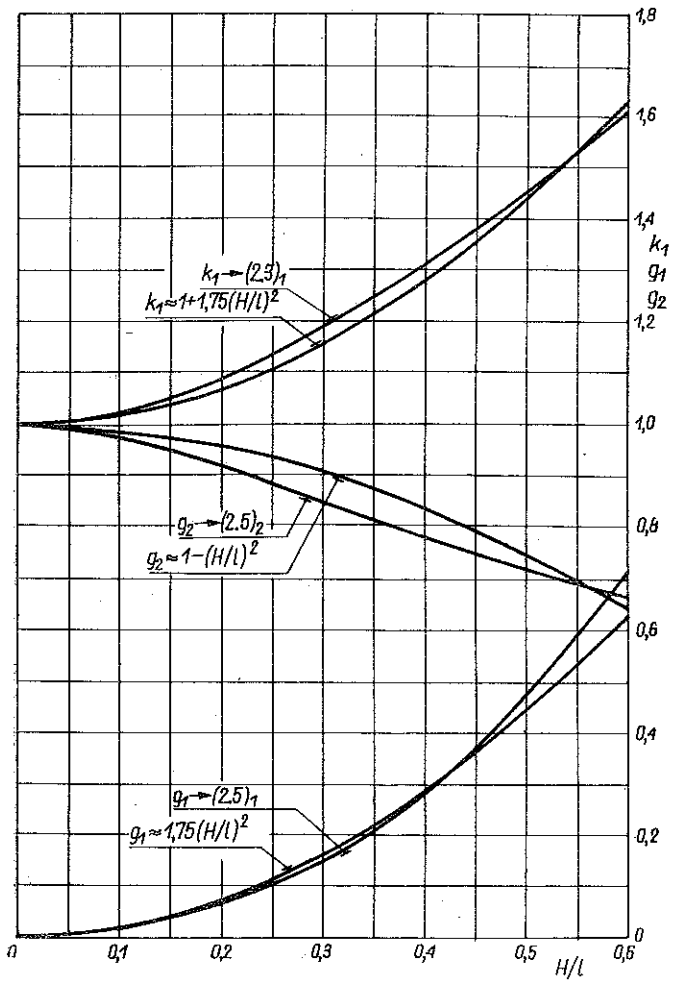
We wzorze $(3.4)_2$ $\Delta k = 1/R, -1/R$ oznacza zmianę krzywizny osi powłoki toroidalnej.

Będziemy w dalszym ciągu zakładać, że funkcja $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi}(\varphi)$ jest ciągła w całym przedziale $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Z ostatniego założenia wynika ciągłość funkcji $\Psi = (Eh^2/\sqrt{12})\,\mathrm{Re}\,\widetilde{\Psi}$ oraz $\beta = \mathrm{Im}\,\widetilde{\Psi}$.

W równaniach (3.1)-(3.3) Ψ oznacza rzeczywistą funkcję naprężeń, a β kąt zawarty między stycznymi do powłoki przed i po odkształceniu (rys. 5).

W przypadku powłoki toroidalnej o przekroju kołowym przyjmujemy

$$\begin{aligned} \varrho &= R(1+\lambda\cos\varphi), & \varrho' &= -r\sin\varphi, \\ z &= r\sin\varphi, & \alpha &= r. \end{aligned} \tag{3.5}$$



Rys. 6

Do dalszej analizy będą nam potrzebne wzory na wielkości wewnętrzne N_1, M_1 i N_2. Wielkości te obliczymy z równań

(3.6)
$$N_1 = -\frac{Eh^2}{\sqrt{12}R}\frac{\sin\varphi}{1+\lambda\cos\varphi}\operatorname{Re}\widetilde{\Psi}, \qquad M_1 = \frac{Eh^3}{12r}k_2 \operatorname{Im}\widetilde{\Psi}, \qquad N_2 = \frac{Eh^2}{\sqrt{12}r}\operatorname{Re}\widetilde{\Psi}',$$

Wzory (3.4)-(3.6) otrzymujemy z teorii Reissnera, zakładając, że $1 - \nu_1\nu_2 \approx 1$ oraz uwzględniając stosowane tutaj oznaczenia.

Wstawiając do równania (3.3) wartości określone za pomocą wzorów (2.10), (2.11), (3.4) i (3.5) otrzymamy

(3.7)
$$[(1+\lambda\cos\varphi)(p_1 - p_2\cos\varphi + p_3\cos 2\varphi)\widetilde{\Psi}']' - \left[\frac{\lambda^2}{2p_0(1+\lambda)}(1-\cos 2\varphi) - \mu^* i\cos\varphi\right]\widetilde{\Psi} + \frac{\nu\lambda}{p_0(1+\lambda)}[\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi]\widetilde{\Psi} = -\mu^* k\sin\varphi,$$

gdzie

(3.8)
$$\mu^* = \sqrt{12}\frac{r^2}{Rh}.$$

4. Całkowanie równania (3.7)

Ze względu na to, że powłoka jest zamkniętą w przekrojach $\theta = \text{const}$ funkcje β i Ψ muszą być funkcjami okresowymi o okresie 2π. Taki sam okres musi posiadać i funkcja $\widetilde{\Psi}$. Jak można wnioskować na podstawie rys. 5, funkcja β jest funkcją nieparzystą $-\beta(\varphi) = \beta(-\varphi)$ w przedziale $-\pi < \varphi < \pi$ względem punktu $A(R+r, 0)$ tj. względem $\varphi = 0$. Dodatkowo funkcja β powinna być równa zeru w punktach $\varphi = 0, \pm\pi$. Funkcja N_2 jest parzystą $[N_2(\varphi) = N_2(-\varphi)]$ względem $\varphi = 0$, gdyż elementy przekroju określone kątami $\varphi, -\varphi$ są albo rozciągane, albo ściskane. Na podstawie wzoru $(3.6)_1$ możemy wnioskować, że funkcja Ψ musi być nieparzystą względem punktu $\varphi = 0$. Biorąc więc pod uwagę to, że zarówno funkcja Ψ jak i β są nieparzyste i okresowe, możemy zespoloną funkcję $\widetilde{\Psi}$ przyjąć w postaci funkcyjnego szeregu Fouriera dla funkcji nieparzystych

(4.1)
$$\widetilde{\Psi} = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\sin n\varphi, \quad \text{gdzie} \quad \widetilde{B}_n = B_{nR} + iB_{nJ};$$
$$\overline{\widetilde{\Psi}} = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\widetilde{B}}_n\sin n\varphi, \quad \text{gdzie} \quad \overline{\widetilde{B}}_n = B_{nR} - iB_{nJ}.$$

Podstawiając (4.1) do podstawowego równania (3.7) otrzymamy na podstawie przyjętego uprzednio założenia o ciągłości funkcji $\widetilde{\Psi}$ układ n równań liniowych

o $n+3$ niewiadomych i o współczynnikach zespolonych lub rzeczywistych, który w postaci macierzowej może być przedstawiony następująco:

$$(4.2)\qquad \begin{bmatrix} A_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & A_{14} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{A}_{21} & A_{22} & \tilde{A}_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & \tilde{A}_{32} & A_{33} & \tilde{A}_{34} & A_{35} & A_{36} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ \widetilde{B}_3 \\ . \\ \widetilde{B}_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu k \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, w ostatnim wierszu wszystkie elementy są zerami oprócz A_{ni} dla $i = n \pm 3,\ n \pm 2,\ n \pm 1,\ n$. Zgodnie z (4.1) należało w równaniach (4.2) odrzucić współczynniki $\widetilde{B}_n$ z ujemnymi indeksami. Elementami macierzy prostokątnej (4.2) są następujące liczby rzeczywiste lub zespolone:

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} A_{n,n} &= f_0 n^2 + \underline{\frac{\lambda^2}{p_0(1+\lambda)}}, \\ \tilde{A}_{n,n+1} &= \tilde{A}_{n+1,n} = -\left[f_1(n+1)n + \mu^* i + \underline{\frac{\nu\lambda}{p_0(1+\lambda)}}\,\frac{\widetilde{\widetilde{B}}_{n+1}}{\widetilde{B}_{n+1}}\right], \\ A_{n,n+2} &= A_{n+2,n} = f_2 n(n+2) - \underline{\frac{\lambda^2}{2p_0(1+\lambda)}} - \underline{\frac{\nu\lambda^2}{p_0(1+\lambda)}}\,\frac{\widetilde{\widetilde{B}}_{n+2}}{\widetilde{B}_{n+2}}, \\ A_{n,n+3} &= A_{n+3,n} = f_3 n(n+3). \end{aligned}$$

Występujące w (4.3) symbole $f_0, \dots, f_3$ oznaczają

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} f_0 &= 2p_1 - \lambda p_2, & f_1 &= p_2 - \lambda\left(p_1 + \frac{1}{2}p_3\right), \\ f_2 &= p_3 - \frac{1}{2}\lambda p_2, & f_3 &= \frac{1}{2}\lambda p_3. \end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do omówienia współczynników (4.3). Zajmiemy się w szczególności wyrazami podkreślonymi. Wyrażenie $\lambda^2/p_0(1+\lambda)$ przy założeniu, że $0{,}1 < \lambda < 0{,}3$ ma największą wartość rzędu 0,05, gdy tymczasem wielkości $f_0 n^2$ lub $f_1 n(n+1)$ osiągają stosunkowo dosyć duże wartości. Jeżeli wziąć pod uwagę wyrażenie $[\nu\lambda/p_0(1+\lambda)]\,\widetilde{\widetilde{B}}_{n+1}/\widetilde{B}_{n+1}$ oraz $[\nu\lambda^2/p_0(1+\lambda)]\,\widetilde{\widetilde{B}}_{n+2}/\widetilde{B}_{n+2}$, to ze względu na to, że moduł ilorazu liczb sprzężonych $|\widetilde{\widetilde{B}}_{n+1}/\widetilde{B}_{n+1}| = |\widetilde{\widetilde{B}}_{n+2}/\widetilde{B}_{n+2}| = 1$ również wartość powyższego wyrażenia będzie bardzo mała. Możemy więc we wzorach (4.3) pominąć wyrazy podkreślone. Przyjęcie w (4.3) podkreślonych wyrażeń jako równych zeru oznacza, że w zagadnieniu ortotropowym mogą być również pominięte momenty zginające M_2 i odkształcenia ε_1, co z kolei pociąga za sobą przyjęcie $D_2 = D_{12} = 1/C_1 = 1/C_{12} = 0$. W obliczeniach łuku falistego nie ma potrzeby uwzględniać funkcji k_1. Odpowiednio wykorzystując to spostrzeżenie, możemy

podstawowe równanie, które opisuje stan naprężenia i odkształcenia ortotropowego łuku zginanego, napisać w postaci

$$\left(\frac{\varrho k_2}{a}\tilde{\Psi}'\right)' + z'\frac{\sqrt{12}}{h} i\,\tilde{\Psi} = \varrho' k \frac{\sqrt{12}}{h} \tag{4.5}$$

lub dla powierzchni toroidalnej o przekroju kołowym

$$[(1+\lambda\cos\varphi)\,k_2\,\tilde{\Psi}']' + \mu^* i\cos\varphi\,\tilde{\Psi} = -\mu^* k\sin\varphi. \tag{4.6}$$

Elementy macierzy (4.2) obliczać będziemy teraz za pomocą wzorów prostszych:

$$\begin{aligned} &A_{n,n} = f_0 n^2, \quad \tilde{A}_{n,n+1} = \tilde{A}_{n+1,n} = -f_1 n(n+1) - \mu^* i, \\ &A_{n,n+2} = A_{n+2,n} = f_2 n(n+2), \\ &A_{n,n+3} = A_{n+3,n} = f_3 n(n+3). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Rozważmy warunki brzegowe na brzegach $\theta = \theta_0$. Wobec tego, że powyżej wykazaliśmy, iż moment M_2 można przyjąć w przybliżeniu jako równy zeru, na brzegach $\theta = \theta_0$ będą występowały jedynie siły N_2, zatem wypadkowa z tych sił musi być równa zeru, moment zaś od sił N_2 musi być zrównoważony obciążeniem zewnętrznym, czyli

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} N_2\, r d\varphi = \frac{Eh^2}{\sqrt{12}}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\tilde{\Psi}'\, d\varphi = 0, \\ &M = \int_0^{2\pi} N_2 r^2\cos\varphi d\varphi = \frac{Eh^2 r}{\sqrt{12}}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\operatorname{Re}\tilde{\Psi}'\, d\varphi. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Podstawiając do (4.8) wyrażenie $(4.1)_1$ otrzymamy tożsamościowe spełnienie pierwszej równości, drugie zaś równanie daje

$$M = \frac{\pi r Eh^2}{\sqrt{12}}\operatorname{Re}\tilde{B}_1. \tag{4.9}$$

Jeżeli w (4.9) przyjmiemy

$$\operatorname{Re}\tilde{B}_1 = \mu k K, \tag{4.10}$$

to równanie (4.9) przyjmie postać równania różniczkowego osi odkształconej łuku:

$$\frac{k}{R} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} = \frac{M}{KEJ}, \quad \text{gdzie} \quad J = \pi r^3 h. \tag{4.11}$$

Równanie (4.11) jest identyczne z równaniem (1.3), stąd następujący wniosek: występująca tutaj liczba Kármána K ma analogiczne znaczenie jak w zagadnieniu zginania łuku izotropowego.

Jeżeli więc zamiast współczynników $\widetilde{B}_n$ wprowadzimy nieco inne, które zdefiniujemy równaniami

$$\frac{\widetilde{B}_n}{\mu k K} \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \widetilde{b}_1 = 1 + ib_{1J}, & \text{jeśli } n = 1 \\ \widetilde{b}_n = b_{nR} + ib_{nJ}, & \text{jeśli } n = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{4.12}$$

to korzystając z konwencji sumacyjnej możemy układ (4.2) napisać następująco:

$$A_{kl}\tilde{b}_l = c_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \ldots, n+3. \tag{4.13}$$

Układ równań (4.13) jest podstawowym układem wyjściowym, z którego wyznaczać będziemy liczbę Kármána oraz współczynniki szeregu (4.1).

5. Wyznaczanie liczby Kármána

Rozwiązując układ (4.13) musimy uwzględnić fakt, że w przypadku zachowania j wyrazów w szeregu $(4.1)_1$ współczynniki $\tilde{b}_{j+1} = \tilde{b}_{j+2} = \tilde{b}_{j+3} = 0$; wtedy zamiast (4.13) otrzymamy

$$A_{kl}\,\tilde{b}_l = c_l, \quad k, l = 1, 2, \ldots, j. \tag{5.1}$$

Jeżeli podzielimy równanie (5.1) przez l oraz przyjmiemy

$$\tilde{b}_l = \frac{\tilde{b}_l^*}{l}, \quad a_{kl} = \frac{A_{kl}}{kl}, \quad \text{(nie sumować)} \tag{5.1}'$$

to otrzymamy

$$a_{kl}\,\tilde{b}_l^* = \frac{c_k}{k}, \tag{5.1}''$$

gdzie a_{kl} są elementami macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \tilde{a}_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & a_{22} & \tilde{a}_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{jj} \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

przy czym elementami niezerowymi w ostatnim wierszu są elementy a_{ij} dla $i = j-3$, $j-2$, $j-1$, j. Przyjmujemy założenie, że macierz nie jest osobliwa. Elementy tej macierzy mają postać

$$\begin{aligned} &a_{kk} = f_0, \quad \tilde{a}_{k,k+1} = \tilde{a}_{k+1,k} = -f_1 - \frac{\mu^*}{k(k+1)}\,i, \\ &a_{k,k+2} = a_{k+2,k} = f_2, \quad a_{k,k+3} = a_{k+3,k} = f_3. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Wreszcie $\tilde{b}_l^*$, c_l są elementami macierzy jednokolumnowych

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1^* \\ \tilde{b}_2^* \\ \vdots \\ \tilde{b}_l^* \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{2}{K} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Rozwiązując równanie (5.1) otrzymamy

$$\frac{1}{2} K = \operatorname{Re} \frac{D_{11}}{D}. \tag{5.5}$$

W równaniu (5.5) przez D oznaczono wyznacznik macierzy A, a przez D_{11} minor wyznacznika D, otrzymany przez skreślenie pierwszej kolumny i pierwszego wiersza. Rozwijając w sposób wyraźny wyznaczniki D i D_{11} otrzymamy

$$D = \begin{vmatrix} f_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots 0 \\ -f_1 - \frac{\mu^*}{1\cdot 2} i & f_0 & \cdot & \cdot & \cdot \cdots 0 \\ f_2 & -f_1 - \frac{\mu^*}{2\cdot 3} i & f_0 & \cdot & \cdot \cdots 0 \\ f_3 & f_2 & -f_1 - \frac{\mu^*}{3\cdot 4} i & f_0 & \cdot \cdots 0 \\ 0 & f_3 & f_3 & -f_1 - \frac{\mu^*}{4\cdot 5} i & f_0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots f_0 \end{vmatrix} = d_3 - i d_4, \tag{5.6}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} f_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots 0 \\ -f_1 - \frac{\mu^*}{2\cdot 3} i & f_0 & \cdot & \cdot & \cdot \cdots 0 \\ f_2 & -f_1 - \frac{\mu^*}{3\cdot 4} i & f_0 & \cdot & \cdot \cdots 0 \\ f_3 & f_2 & -f_1 - \frac{\mu^*}{4\cdot 5} i & f_0 & \cdot \cdots 0 \\ 0 & f_3 & f_2 & -f_1 - \frac{\mu^*}{5\cdot 6} i & f_0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots f_0 \end{vmatrix} = d_1 - i d_2,$$

Elementy w ostatnim wierszu obu wyznaczników idąc od prawej ku lewej mają postać f_0, $-f_1 - \mu^* i/(j-1)j$, f_2, f_3. W (5.6) kropkami umieszczonymi pośrodku

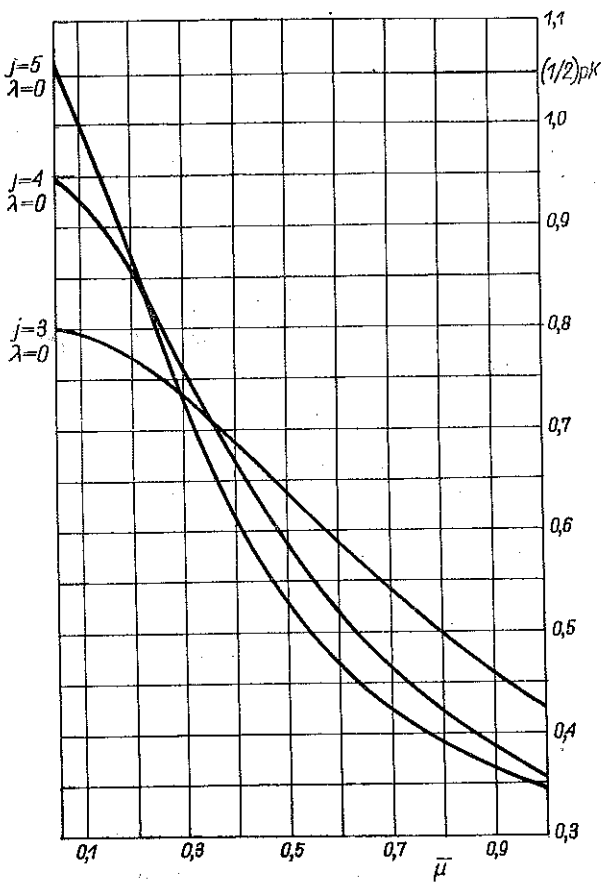
wierszy wyznaczników zaznaczono wyrazy symetrycznie położone względem głównej przekątnej.

Zagadnienie zbieżności szeregów (4.1) zostaje rozpatrzone dalej. Jeżeli więc będzie określona ilość elementów wyznaczników (5.6) (liczba j), to można obliczyć ich wartość, a następnie rozbić na część rzeczywistą i zespoloną. Jeżeli tak określone liczby $(d_3 - id_4,\ d_1 - id_2)$ podstawimy do (5.5), to otrzymamy

$$\frac{1}{2}K = \frac{d_1 d_3 + d_2 d_4}{d_3^2 + d_4^2}. \tag{5.7}$$

Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia zbieżności szeregu (4.1). Dla uproszczenia założymy, że $H_z = 0$ (pofałdowanie na stronie zewnętrznej łuku jest bardzo małe). Wtedy po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{1}{2}Kp = \frac{d_1 d_3 + d_2 d_4}{d_3^2 + d_4^2}, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{3{,}5}{8}\left(\frac{H_w}{h}\right)^2. \tag{5.8}$$



Rys. 7

Liczby $d_1, ..., d_4$ otrzymamy obliczając wartość wyznaczników (5.6). Współczynniki $f_0, ..., f_3$ będą miały teraz nieco inną postać:

$$f_0 = 3 - 2\lambda + \frac{2}{p} \approx 3 - 2\lambda.$$

$$f_1 = \frac{1}{4}(8 - 7\lambda) - \frac{\lambda}{p} \approx \frac{1}{4}(8 - 7\lambda), \tag{5.9}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} - \lambda, \quad f_3 = \frac{1}{4}\lambda, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu^*}{p}.$$

Ostatnie przybliżone równości są słuszne dla $p \gg 1$. Na rys. 7 podano wykres zależności (5.8). Wykres ten daje orientację o szybkości zbieżności szeregu. Dla $\bar{\mu} < 1$ szereg jest wolnozbieżny, natomiast dla $\bar{\mu} > 1$, a zwłaszcza dla $\bar{\mu} \gg 1$ zbieżność jest dosyć dobra i wystarczy uwzględnić dwa lub trzy wyrazy szeregu. Na rys. 7 wykresy zakończono dla wartości $\bar{\mu} = 1$.

6. Wyznaczenie wielkości wewnętrznych

Podstawiając do równań (3.6) zależności (4.1), (4.11) i (4.12) otrzymamy wzory określające naprężenie południkowe σ_{1r}, σ_{1z} i równoleżnikowe σ_{2r}. Ponieważ pomijamy naprężenia styczne (siła Q jest bardzo mała), to naprężenia $\sigma_{1r} \pm \sigma_{1z}$, σ_{2r} należy traktować jako naprężenia główne. Odpowiednie równania przedstawiają się następująco:

$$\sigma_{1r} = \frac{N_1}{h} = -\lambda\sigma \frac{\sin\varphi}{1+\lambda\cos\varphi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin n\varphi,$$

$$\sigma_{1z} = \frac{6M_1}{h^2} = \sqrt{3}\,\sigma (p_1 - p_2\cos\varphi + p_3\cos 2\varphi) \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{b}_n \cos n\varphi, \tag{6.1}$$

$$\sigma_{2r} = \frac{N_2}{h} = \sigma \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{b}_n \cos n\varphi, \quad \text{gdzie} \quad \sigma = \frac{Mr}{J}.$$

Obliczymy jeszcze wartości naprężeń (6.1) dla kąta $\varphi = \pi$:

$$\sigma_{1z} = \sqrt{3}\,\sigma (p_1 + p_2 + p_3) \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\tilde{b}_n,$$

$$\sigma_{2r} = \sigma \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \tilde{b}_n. \tag{6.2}$$

Liczby wzrostu naprężeń (w stosunku do rury prostej) południkowych i równoleżnikowych zdefiniujemy odpowiednio

$$n_1 \overset{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_{1z}}{\sigma} \right|, \quad n_2 \overset{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_{2r}}{\sigma} \right|. \tag{6.3}$$

7. Przykład liczbowy

Analizę stanu naprężeń oraz wyznaczenie liczby Kármána zilustrujemy na przykładzie łuku posiadającego następujące wymiary:

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} &R_1 = 1150 \text{ mm}, \quad r_1 = 180, \quad h = 8, \quad H_w = 24, \quad H_z = 16,\\ &R = 1148\ , \quad r = 190, \quad \mu^* = 13{,}62, \qquad\qquad \lambda = 0{,}166. \end{aligned}$$

Podstawiając H_w/h i H_z/h do równań (2.12) otrzymamy

$$(7.2)\qquad p_1 \approx 12{,}22, \quad p_2 \approx 4{,}375, \quad p_3 \approx 0{,}22.$$

Z równań (4.4) po podstawieniu (7.2) otrzymujemy

$$(7.3)\qquad f_0 \approx 23{,}71, \quad f_1 \approx 2{,}33, \quad f_2 \approx f_3 \approx 0.$$

Przyjmując w (5.1) $j = 4$ otrzymujemy

$$(7.4)\qquad \begin{bmatrix} 23{,}71 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -2{,}33 \cdot 2 - 13{,}62\, i & 23{,}71 \cdot 2^2 & \cdot & \cdot \\ 0 & -2{,}33 \cdot 6 - 13{,}62\, i & 23{,}71 \cdot 3^2 & \cdot \\ 0 & 0 & -2{,}33 \cdot 12 - 13{,}62\, i & 23{,}71 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{K} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

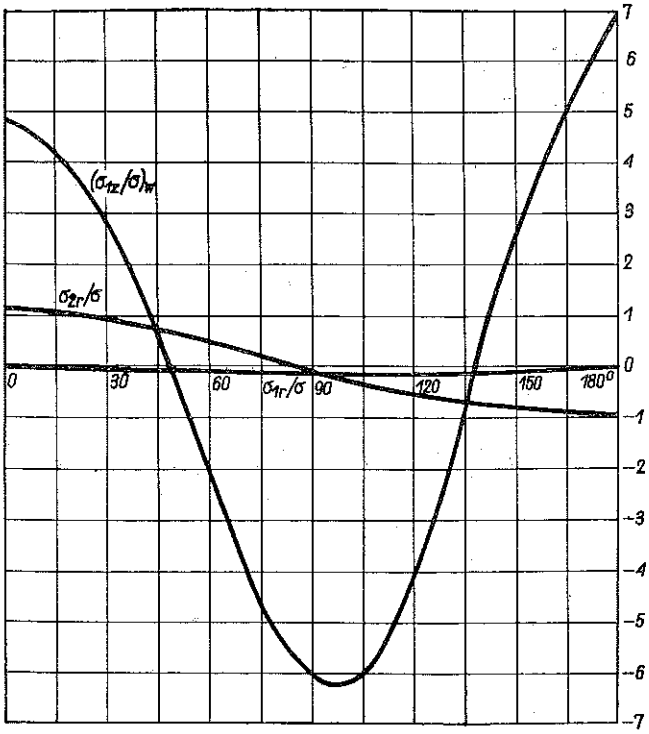
skąd

$$(7.5)\qquad \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + ib_{1J} \\ b_{2R} + ib_{2J} \\ b_{3R} + ib_{3J} \\ b_{4R} + ib_{4J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0{,}0529\, i \\ 0{,}0416 + 0{,}1462\, i \\ -0{,}0070 + 0{,}0066\, i \\ -0{,}0010 + 0{,}0006\, i \end{bmatrix}$$

oraz

$$(7.6)\qquad K = 0{,}0784.$$

Ze wzoru (7.5) wynika, że szeregi wielkości wewnętrznych są dosyć szybko zbieżne, wystarczy więc przyjąć tylko dwa wyrazy. Na podstawie równań (6.1) można już sporządzić wykresy naprężeń. Wykresy te podano na rys. 8. Z wykresów tych wynika, że liczba wzrostu naprężeń południkowych (równoleżnikowych) wynosi $n_1 = 7$ ($n_2 = 1{,}1$). Liczba Kármána wynosi $K = 0{,}078$. Analogiczne wielkości dla łuku gładkiego obliczone za pomocą wzorów asymptotycznych Clarka-Reissnera wynoszą: $n_1 = 4{,}4$, $n_2 = 1{,}94$, $K = 0{,}172$.



Rys. 8

Tak więc łuki faliste posiadają znacznie mniejszą sztywność EJK oraz znacznie większą liczbę wzrostu naprężeń południkowych. Natomiast liczba wzrostu naprężeń równoleżnikowych jest mniejsza. Bardzo małe są również naprężenia σ_{1r}. Można je zatem pominąć w obliczeniach.

8. Wnioski końcowe

1. W zagadnieniu zginania łuków falistych można pominąć momenty zginające M_2 i odkształcenia ε_1. Jest to równoznaczne z tym, że nie ma potrzeby uwzględniać funkcji ortotropii k_1. Odpowiednio uproszczone równanie określone jest zależnością (4.5). Równanie to można traktować jako równanie wyjściowe niniejszego zagadnienia.

2. Występująca tutaj liczba Kármána K ma analogiczne znaczenie jak w zagadnieniu zginania łuku izotropowego. Równanie różniczkowe osi odkształconej łuku jest takie samo jak w przypadku zagadnienia izotropowego. Wniosek ten wypływa wprost z wniosku pierwszego.

3. Podstawowe zależności, z których obliczamy liczbę Kármána K oraz współczynniki $\tilde{b}_n$ szeregów naprężeń stanowi układ równań liniowych (5.1) lub (5.1)''.

4. Wysokości pofałdowania H_w, H_z oraz średnią grubość h należy pomierzyć na łuku wykonanym. Należy pamiętać, że współczynniki $p_1, \ldots, p_3$ są zależne od kwadratów wyrazów H_w/h i H_z/h.

5. Otrzymane tutaj wyniki można by uczynić dokładniejszymi uwzględniając dokładniejszą postać funkcji k_2, to zaś z kolei wymaga ściślejszego określenia powierzchni pofałdowania. Do takiego określenia można dojść po wykonaniu serii pomiarów na łukach rzeczywistych. Jest jednak rzeczą dyskusyjną, czy ściślejszy opis powierzchni będzie mógł być uwzględniony w obliczeniach, a jeżeli nawet tak, to czy da on istotną poprawę wyników, jeżeli stać będziemy na gruncie ortotropii konstrukcyjnej.

6. Dla wyznaczenia naprężeń oraz liczby Kármána należy przyjąć pewną skończoną liczbę wyrazów szeregu (4.1). Pewną orientację odnośnie do przyjęcia ilości wyrazów daje rys. 7.

7. Współczynniki wzrostu naprężeń południkowych i równoleżnikowych w przytoczonym przykładzie wynosiły $n_1 = 7$, $n_2 = 1{,}1$. Liczba Kármána jest około dwukrotnie mniejsza od analogicznej liczby dla łuku gładkiego.

8. Stosowanie metody asymptotycznego całkowania jest ze względów czysto obliczeniowych bardzo uciążliwe. Występująca w tej metodzie podstawowa funkcja, będąca pierwszym wyrazem szeregu asymptotycznego jest określona całką, [30]:

$$u_0(\Phi) = \pm\left(\frac{3}{2}\int_0^{\Phi}\sqrt{\frac{|\sin\Phi|}{(1+\lambda\sin\Phi)(p_1 - p_2\sin\Phi - p_3\cos 2\Phi)}}\,d\Phi\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{8.1}$$

gdzie $\Phi = \pi/2 - \varphi$, która wymaga opracowania odpowiedniej tablicy. Funkcja (7.1) zależna jest od parametrów H_z/h, H_w/h i λ. Ta duża ilość parametrów, i to w dodatku zależnych od siebie w sposób trudny do ustalenia teoretycznego, bardzo utrudnia podanie w tablicy wartości tej całki. Określenie funkcji (7.1) staje się jednak możliwe dla każdego łuku indywidualnie, tj. dla przypadku, gdy określone są parametry H_z/h, H_w/h i λ. Jednak i w tym przypadku należy rozpatrzeć zagadnienie zbieżności szeregu asymptotycznego.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. BANTLIN, *Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichröhren*, Z. Ver. deut. Ing., **54** (1910), 43.

[2] R. A. CLARK, E. REISSNER, *Bending of curved tubes*, Adv. Appl. Mech., **2** (1951), 93.

[3] E. T. COPE, E. A. WERT, *Load-deflection relations for large plain corrugaded and creased pipe bends*, Trans. ASME (Fuels a. St. Pow.), 16, **54** (1932), 115.

[4] L. H. DONNELL, *The flexibility of corrugated pipes under longitudinal forces and bending*, Trans. ASME (Appl. Mech.), 11, **54** (1932), 69.

[5] H. FORD, C. E. TURNER, *Examination of the theories for calculating the stresses in pipe bends subjected to in-plane bending*, Proc. Inst. Mech. Engs, 15,**171** (1957), 513.

[6] N. GROSS, *Experiments on short-radius pipe-bends bending of curved thin-walled tubes without internal pressure*, Heat. Treat. Eng., **15** (1953), 73, 106, 134.

[7] M. T. HUBER, *Odkształcenie sprężyste rury cienkościennej o przekroju eliptycznym przy jej zginaniu*, Arch. Mech. Stos., 1, **1** (1949). 1.

[8] P. G. KAFKA, M. B. DUNN, *Stiffness of curved circular tubes with internal pressure*, J. Appl. Mech., 2, **23** (1956), 247.

[9] T. KÁRMÁN, *Über die Formänderung dünnwandiger Rohre insbesondere federnder Ausgleichrohre*, Z. Ver. deut. Ing., **55** (1911), 1889.

[10] E. Reissner, *Rotationally symmetric problems in the theory of thin elastic shells*, Proc. Th. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., (1958), 51.

[11] E. Reissner, *On the finite bendig of pressurised tubes*, J. Appl. Mech., 3, **26** (1959), 386.

[12] E. Reissner, *On finite pure bending of cylindrical tubes*, Österr. Ing.-Arch., **15** (1961), 165.

[13] *Design of Piping Systems*, (praca zbiorowa), New York 1957.

[14] Л. Е. Андреева, *Упругие элементы приборов*, Москва 1962.

[15] Э. Л. Аксельрад, *Изгиб тонкостенных стержней с разомкнутым пологим профилем при больших упругих перемещениях*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 1, 1959, 150.

[16] Э. Л. Аксельрад, *Уравнения деформации оболочек вращения и изгиба тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 4, 1960, 84.

[17] Э. Л. Аксельрад, *Изгиб тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях* Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 3, 1961, 124.

[18] Э. Л. Аксельрад, *Изгиб и потеря устойчивости тонкостенных труб при гидростатическом давлении*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 1, 1962, 98.

[19] В. Н. Булгаков, *Статика тороидальных оболочек*, Киев 1962.

[20] К. Ф. Черных, *Задача Сен-Венана для тонкостенных труб с круговой осью*, Прикл. Мат. Мех., 3, **24** (1960), 423.

[21] М. И. Эстрин, *Расчет цилиндрической оболочки, закрепленной по косому контуру*, Изв. АН СССР ОТН, 2, 1959, 151.

[22] Л. М. Качанов, *О пластическом изгибе кривых тонкостенных труб*, Изв. АН СССР ОТН, 5, 1957, 42.

[23] Л. М. Качанов, *Теория ползучести*, Москва 1960.

[24] А. Г. Камерштейн, *Гибкость и напряженное состояние колен при самокомпенсации температурных деформации в трубопроводах*, Стр. труб., 5, **4** (1959), 7.

[25] Д. Л. Костовецкий, *Об изгибе кривой тонкостенной трубы, сечение которой имеет форму, блискую к круговой, при наличии внутреннего или наружного давления*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 6, 1959, 127.

[26] Д. Л. Костовецкий, *Изгиб кривых тонкостенных труб в области больших упругих перемещений*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 3, 1960, 49.

[27] Д. Л. Костовецкий, *Об устойчивости равновесия кривой тонкостенной трубы кругового сечения, нагруженной наружным давлением*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. Маш., 1, 1961, 177.

[28] Л. Н. Носова, С. А. Тумаркин, *Таблицы обобщенных Функций Эйри для асимптотического решения дифференциальных уравнений* $\varepsilon(py')'+(q+\varepsilon r)y=f$, Москва 1961.

[29] В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз 1962.

[30] С. А. Тумаркин, *Асимптотическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переходной точкой и его приложения к расчетам торообразных оболочек и лопастей*, Прикл. Мат. Мех., 6, **23** (1959), 1083.

[31] В. С. Туркин, *Изгиб труб в упруго-пластической стадии*, Стр. труб., 3, **5** (1960), 3.

Р е з ю м е

ИЗГИБ ВОЛНООБРАЗНЫХ ТРУБ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ

Работа является попыткой аналитического определения коэффициента гибкости Кармана и величин напряжений, существующих в изгибаемой волнообразной кривой трубе (рис. 1).

Задача рассматривается с точки зрения теории ортотропных оболочек (конструкционная ортотропия), при чем в качестве исходного уравнения применяется обобщенное уравнение Э. Рейсснера [10]. Функции ортотропии k_1 и k_2 принимаются при предложении, что синусоидальная поверхность образует синусоидальные складки, согласно формулам приведенным в работе [14]. Серединная поверхность арки рассматривается как поверхность тороида. Вводя ряд упрощений, окончительные формы функции k_1 и k_2 определяются уравнениями (2.6)

и (2.7). Доказывается, что k_1 не влияет существенно на анализированное явление и ее можно не учитивать в расчетах; таким образом окончательная форма упрощенного уравнения выражается формулой (4.5). Интегрирование этого уравнения приводит к системе линейных уравнений (4.2), по которым можно определить коэффициент гибкости Кармана и коэффициенты $\tilde{b}_n$ рядов внутренних сил (6.1). Некоторый взгляд на сходимость рядов в случае когда $H_z = 0$, дает рис. 7.

В заключение приводится числовой пример, иллюстрирующий способ расчета таких арок. Конечные диаграммы напряжений даются на рис. 8.

Summary

BENDING OF CORRUGATED PIPE BENDS

This is a tentative determination of the flexibility factor and the stresses in a corrugated pipe bend (Fig. 1).

The problem is considered from the viewpoint of the theory of orthotropic shells (structural orthotropy). The fundamental equation is the generalized equation of E. Reissner, [10]. The orthotropy functions k_1 and k_2 are assumed by assuming a sinusoidally corrugated middle surface accord- ng to the equations given in [14]. The middle surface of the bend is treated as a toroidal one. After ia number of simplifications the functions k_1, k_2 are determined by the final equations (2.6) (2.7). It is shown that the function k_1 has no essential influence on the phenomenon and may be disregarded so that the simplified equation has the final form (4.5). The integration of this equation leads to a set of linear Egs. (4.2) from which the flexibility factor can be obtained as well as the coefficients $\tilde{b}_n$ of the series of internal forces (6.1). A certain view of the convergence of these series may be H_z gained by means of Fig. 7 in the case where $H_z = 0$.

In conclusion a numerical example is given to illustrate the way of computation of such arcs. The end diagrams of stresses are those of Fig. 8.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 czerwca 1963 r.