

WŁASNOŚCI MECHANICZNE KILKU MODELI GRUNTÓW

JEAN BIAREZ (GRENOBLE)

1. Wstęp

Materiały rozdrobnione, które będą rozpatrywane, składają się z ziaren dostatecznie małych w stosunku do wymiarów próbek, tak że można zastosować do nich metody mechaniki ośrodków ciągłych. Prawa mechaniki będą wyrażone w postaci zależności między tensorem naprężenia i tensorem odkształcenia, wyznaczanymi bezpośrednio na próbkach; jednakże wykazemy, że przeprowadzone w skali ziarna ogólne badania własności geometrycznych i mechanicznych szkieletu pozwolą przewidzieć przynajmniej jakościowo prawa mechaniki ośrodka ciągłego.

Do badań wykorzystano ziarna piasku dowolnego kształtu, jak również i kulki szklane, których prosty kształt ułatwia wyznaczanie właściwości szkieletu w skali ziaren. Oprócz tego zbadano ośrodek utworzony z nawarstwienia ułożonych równolegle wałeczków; pozwoliło to z jednej strony na łatwą i precyzyjną obserwację geometrii szkieletu podczas odkształceń, z drugiej strony, ponieważ ośrodek ten był rzeczywiście dwuwymiarowy, pozwoliło to na dokładne zweryfikowanie odpowiednich metod obliczeniowych.

Zbadano niektóre właściwości mechaniczne szkieletów o układach regularnych, ale szkielet rzeczywistych próbek został określony statystycznie (liczba styków ziaren, zorientowanie płaszczyzn stycznych). Ośrodek będzie nazywany geometrycznie izotropowym, jeżeli reprezentacja statystyczna szkieletu jest niezależna od orientacji osi wybranych w ośrodku.

Właściwości mechaniczne materiałów rozdrobnionych będą zależeć jedynie od formy szkieletu, sprężystości ziaren i kąta tarcia wewnętrznego materiału stanowiącego ziarna, jeżeli odkształcenia będą tego rzędu, że nie nastąpi skruszenie ziaren i nie wystąpi wpływ czasu.

Będą brane pod uwagę jedynie siły objętościowe wywołane ciężarem ziaren i ruchem cieczy między nimi. Ponieważ nie występuje żaden moment punktowy, tensory naprężenia i odkształcenia są określone każdy przez sześć parametrów (trzy parametry wielkości i trzy kierunku). Prawo mechaniki będziemy nazywać izotropowym, jeżeli jest niezależne od orientacji wybranych osi dla określenia tensorów.

Zobaczymy, że znajomość tensora odkształcenia nie jest ogólnie biorąc wystarczająca dla określenia odkształcenia szkieletu i właściwości badanego ciała. Prócz tego trzeba znać przebieg danego odkształcenia.

Biorąc pod uwagę złożoność historii odkształceń, prawa zostaną określone jedynie dla małego zakresu i dla odkształceń nieodwracalnych, których przebieg począwszy od stanu izotropii jest prosty. Zakłada się np., że obraz tensora w przestrzeni odkształceń przenosi się po prostej i to w jednym kierunku.

Istnieje jednak kilka prostych praw. Dla małych odkształceń odwracalnych prawo fizyczne wyraża się w postaci związku jedno-jednoznaczego między tensorami naprężenia i odkształcenia i to prawo sprężystości musi spełniać pewne warunki całkowite [2]. Dla dużych odkształceń prawo jest niezależne od odkształceń (ideałna plastyczność).

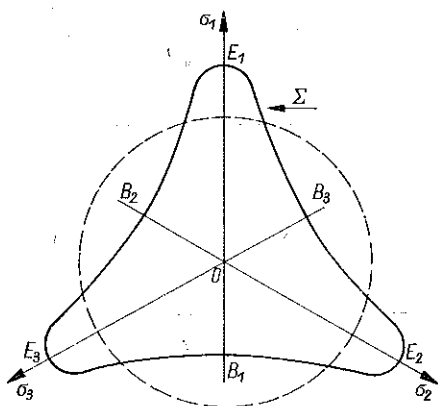
Okaże się, że próbka poddana odkształceniom nieodwracalnym, anizotropowym, będzie obrazować «anizotropię» praw mechanicznych i granice stosowalności tych praw. Tymczasem «anizotropia» prawa sprężystego bywa często pomijana wobec anizotropii granicy prawa.

Ponieważ granica prawa kształtuje się przez układ tensorów symetrycznych drugiego rzędu, może być przedstawiona w przestrzeni sześciowymiarowej. Jeżeli granica jest osiągnięta przez dany tensor naprężenia niezależnie od jego orientacji, to można ją przedstawić przez powierzchnię w przestrzeni trójwymiarowej, np. w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ale w takim przypadku możliwa jest zamiana wartości σ_1, σ_2 i σ_3 odpowiadających granicy, a więc powierzchnia powinna przedstawiać symetrię w stosunku do płaszczyzn dwusiecznych osi; w szczególności ślad powierzchni Σ na płaszczyźnie prostopadłej do prostej równonachylonej do trzech osi (oktaedrycznej) winien reprezentować symetrię potrójną w odniesieniu do rzutów osi $O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3$ (rys. 1).

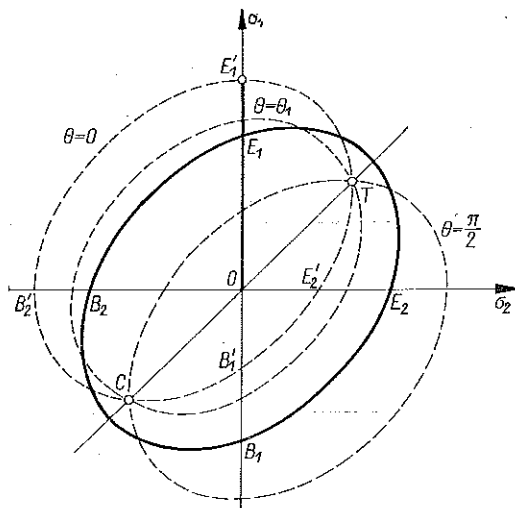
Wzmocnieniem będzie nazywana zmiana właściwości mechanicznych spowodowana odkształceniem trwałym. Okaże się, że wzmocnienie ośrodków rozdrobionych wywołane przez rozciąganie jednoosiowe podwyższa granicę sprężystości na rozciąganie i zmienia granicę sprężystości na ściskanie. Otrzyma się w ten sposób wynik analogiczny do efektu Bauschingera. Gdyby przyjąć, że nowa granica sprężystości jest izotropowa, jej ślad Σ powinien być przedstawiony przez krzywą taką, jak $OE_1 = OE_2 = OE_3$ i $OB_1 = OB_2 = OB_3$, co nie jest zgodne z ogólnie przyjętą hipotezą wypukłości krzywej Σ . Wzmocnienie wynika z nieodwracalnego odkształcenia anizotropowego prowadzi w ogólności do granicy sprężystości anizotropowej, która może być przedstawiona jedynie w przestrzeni sześciowymiarowej.

W przypadku «płaskiego stanu naprężenia» (rys. 2) granica sprężystości izotropowej jest przedstawiona przez krzywą symetryczną w stosunku do dwusiecznej na płaszczyźnie dwuwymiarowej $\sigma_1 \sigma_2$. Natomiast granica anizotropowa, np. po wzmocnieniu, musi być przedstawiona albo na płaszczyźnie trójwymiarowej $\sigma_x \sigma_y \tau\sqrt{2}$, albo przez rodzinę krzywych na płaszczyźnie $\sigma_1 \sigma_2$, jako funkcja parametru θ , który przedstawia kierunek tensora naprężenia w stosunku do stałych osi współrzędnych ośrodka; ta rodzina musi przechodzić przez punkty T i C , które przedstawiają tensory naprężeń izotropowych, «ciągnięcia» i ściskania, czyli że wzmocnienie $E_1 E'_1$ odpowiada wynikowi Bauschingera $B_1 B'_1$. Granica sprężystości dla tensorów tego samego kierunku co i tensor, który wywołał wzmocnienie, jest przedstawiona przez krzywą $E'_1 TB'_1 C$. Jeżeli wybierzemy tensory naprężeń mające

inną orientację niż tensor wzmocnienia, otrzymamy inne krzywe graniczne. Ciekawo byłoby sprawdzić, czy wzmocnienie przez «ciągnięcie» $E_1 E'_1$ powoduje zmniejszenie $E_2 E'_2$ granicy sprężystości rozciągania i powiększenie $B_2 B'_2$ granicy sprężystości ściskania w kierunku pionowym (uogólnienie efektu Bauschingera).



Rys. 1



Rys. 2

Obserwacja szkieletu wykazuje, że zmiana praw i granic praw odpowiada zmianie geometrii układu ziaren. Nieodwracalne odkształcenie anizotropowe stwarza równocześnie prawa anizotropii i układ anizotropowy; natomiast przy idealnej plastyczności można zaobserwować prawo w dużej mierze izotropowe, ale szkielet anizotropowy. W każdym razie geometria szkieletu będzie idealnie powiązana z tensorem naprężenia bez względu na jego orientację.

Wzmocnienie metali jest zależne w ogólności od nieodwracalnego odkształcenia anizotropowego, bez zmiany objętości; dla gruntów trzeba ponadto wziąć pod uwagę wzmocnienie odpowiadające odkształceniu nieodwracalnemu izotropowemu (zmiana gęstości).

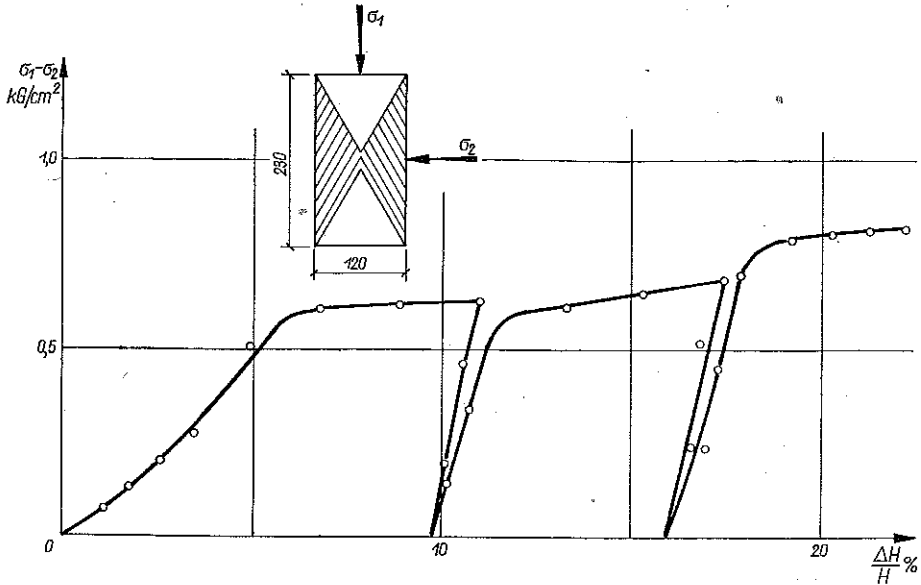
2. Uwagi o mechanicznych właściwościach materiałów rozdrobnionych

2.1. Właściwości mechaniczne ośrodka uformowanego z wałeczków o osiach równoległych. Nawarstwienie wałeczków o osiach równoległych pozwala zbadać płaski problem układu dla ośrodka spełniającego prawo Coulomba. Dokładna obserwacja właściwości kinetycznych i pomiar sił na obwodzie są nietrudne nawet dla pewnych zagadnień o skomplikowanych warunkach granicznych.

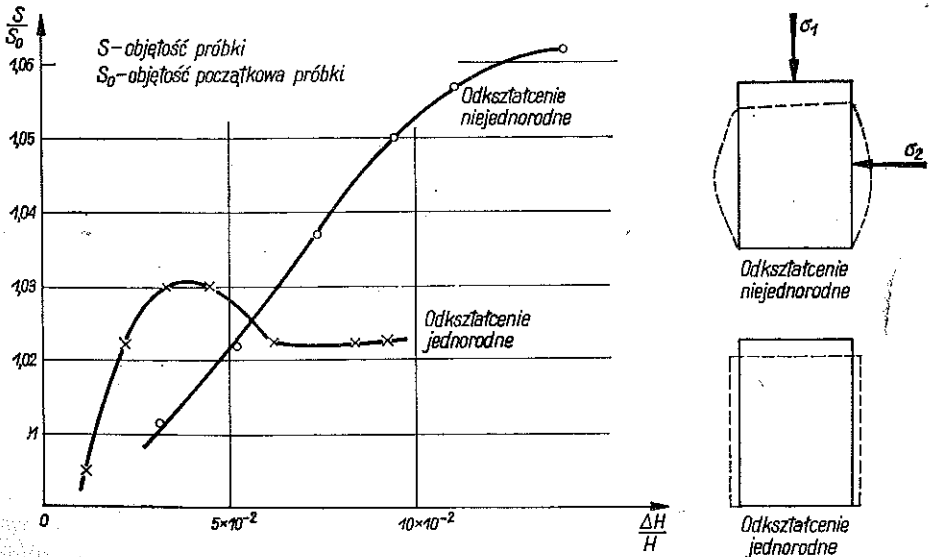
W drugiej części tego opracowania będą przedstawione zagadnienia teoretyczne i praktyczne tych modeli w celu rozwiązania niektórych problemów z zakresu mechaniki gruntów. W tym rozdziale ograniczymy się do kilku uwag na temat właściwości mechanicznych i geometrycznych takich nawarstwień. W rozdziałach

następnych, podane będą ewentualne związki między właściwościami mechanicznymi próbek z kulek lub piasku i właściwościami geometrycznymi ich układu jako uogólnienie pewnych schematów podstawowych nawarstwień wałeczków.

Model z wałeczków pozwala zbadać zasadnicze problemy jedynie w dwu wymiarach. Było to przedmiotem różnych badań w szczególności M. DANTU i SCHNEEBELI'ego, [3-6].

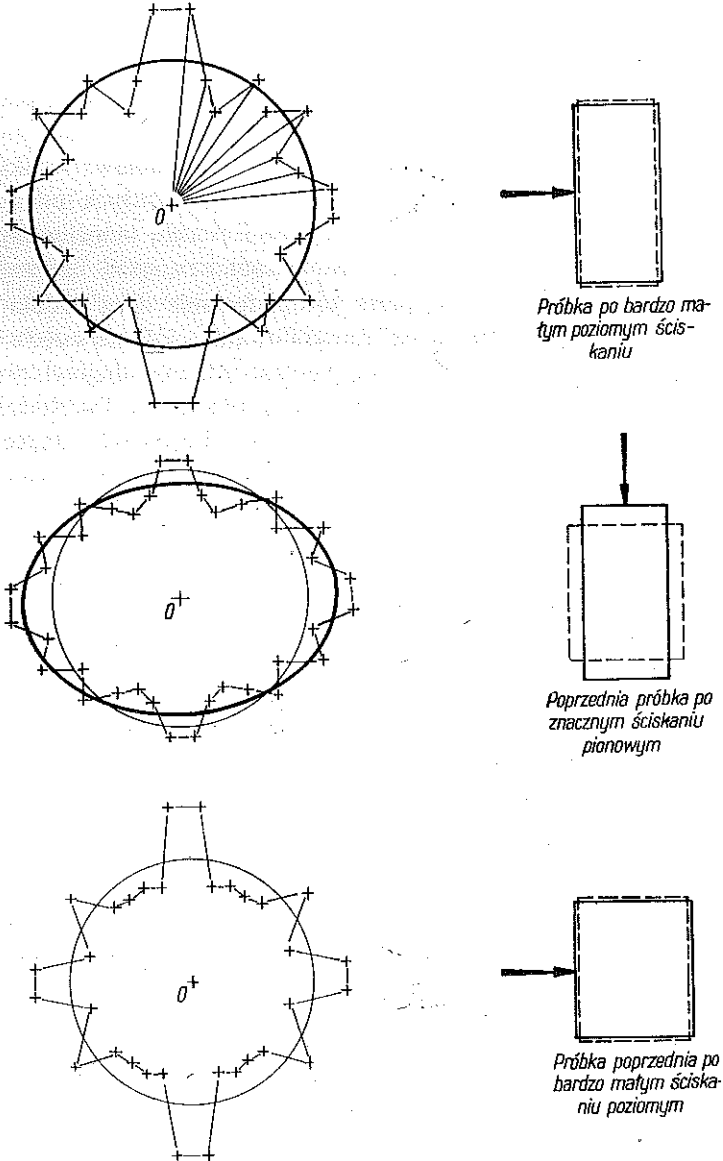


Rys. 3



Rys. 4

Pomiar niektórych właściwości mechanicznych, [3] (rys. 3, 4, 5). SCHNEEBELI wykazał, że układ okrągłych waleczków z duraluminium stanowi ośrodek podlegający prawu Coulomba. Użyte do badań w niniejszej pracy waleczki o średnicy od 3 do 5 mm mają kąt tarcia Φ równy od 26° do 27° ; kąt ten mierzony był w aparacie

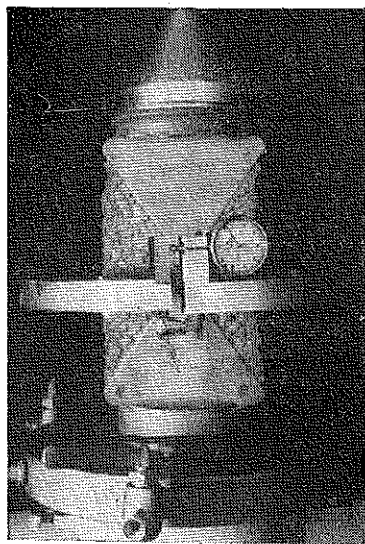


Rys. 5

cie dwuosowym, a następnie w aparacie pojedynczego ścinania (CASAGRANDE), używanym zwykle do badania gruntów. Na podstawie filmu stwierdzono, że wielkość ta odpowiadała maksymalnemu kątowi statecznego masywu, który się nachyla

stopniowo; stwierdzono również, że siła pąrcia i oporu na ścianie prostopadłej odpowiada temu samemu kątowi. Powyższe porównanie przeprowadzono z tego powodu, że wykonanie aparatu pozwalającego zbadać odkształcenia przy jednorodnym stanie naprężenia jest trudniejsze do zrealizowania dla wałeczków niż dla ośrodka trójwymiarowego, jakim jest grunt. Doświadczenia były wykonywane na próbce otoczonej cienką powłoką kauczukową, która łączyła się z metalową podstawą i głowicą próbki. Równomierny nacisk na obwodzie osiągnięto albo przez wywołanie pewnej próżni w próbce, albo przez umieszczenie jej pod kloszem, do którego wprowadzono sprężone powietrze. Stosowano ciśnienie mniejsze od 1 kG/cm^2 , w przeciwnym bowiem przypadku powłoczka gumowa wciskała się pomiędzy wałeczki i zakłócała pomiary, szczególnie przy dużych odkształceniach odwracalnych. Aparatura jest w trakcie modyfikacji w celu umożliwienia bardziej dokładnych badań (odkształcalna rama prostokątna).

Zmiany objętości mierzono albo przez fotografowanie całej próbki i pomiar powierzchni planimetrem, albo przez fotografowanie kilkudziesięciu cm^2 powierzchni i liczenie ilości wałeczków, lub mierząc zmiany długości próbki przy pomocy przyrządu o dokładności do jednej setnej milimetra. Ta ostatnia metoda była używana dla małych odkształceń osiowych, mniejszych od jednego procentu wysokości. Dla dużych odkształceń lepsza jest druga metoda, która pozwala prze-



Rys. 6

studiować strefę graniczną wewnątrz próbki, gdzie można przypuszczać, że stan naprężeń jest jednorodny. Pierwsza metoda może być używana jedynie przy jednorodnym odkształcaniu się całej próbki. Na początku odkształcenie jest pozornie jednorodne. Później jednak następuje pewne zahamowanie przy końcach próbki, gdzie znajdują się sztywne płytki. Zahamowanie to jest w danym przypadku dużo mniej zauważalne niż dla gruntów. Próbowano także realizować jednorodny stan naprężenia umieszczając na końcach próbki dwuramienne uchwyty metalowe tworzące z osią próbki kąt $\pi/4$ — $\Phi/2$ (rys. 6).

Po odkształceniu wielkości zmieniającej się zgodnie z przebiegiem obciążenia próbki uzyskano strefę plastyczności idealnej, przy której zmiany objętości są prawie równe zeru (rys. 3 i 4). Dla materiałów rozdrobnionych, idealnie plastycznych należy stosować teorie kinematyczne oparte na niezmienności objętości. Wobec

usztynienia końców i zaklinowywania się powłoczek gumowych między wałeczkami utrudnione jest przeprowadzenie dokładnych obserwacji; szczególnie przy odkształceniach większych od 5% w obszarze idealnej plastyczności. Wydaje się jednak, że podane poprzednio wyniki można uważać za dokładne, zostały one zresztą potwierdzone przez doświadczenia w ośrodkach trójwymiarowych.

Jeżeli odkształcenie nie jest jednorodne, obserwuje się ciągły przyrost objętości próbki przy stałym dewiatorze naprężenia (rys. 4). Rzeczywiście, stan naprężeń pozostanie stały, gdy strefa środkowa próbki osiągnęła plastyczność idealną. Jeżeli przedłużyć ściskanie, nowe strefy osiągną plastyczność, co spowoduje stopniowy wzrost całej objętości, przy stałej objętości w strefach znajdujących się już w stanie idealnej plastyczności. Zjawisko to można zaobserwować mierząc na fotografii gęstość małych obszarów.

Jeżeli dewiator naprężenia sprowadzić do zera i następnie spowodować nowe ściskanie, to zaobserwuje się powstanie strefy sprężystej (rys. 3). To zjawisko, analogicznie do wzmocnienia, będzie dalej badane z dużo większą dokładnością na próbkach uformowanych z kulek lub piasku. Dla pomiaru kąta tarcia ψ metalu wałeczki przesuwano jedne po drugich w kierunku równoległym do ich osi wewnątrz skrzynki bezpośredniego ścinania. Otrzymano kąt tarcia metalu zmniejszający się o kilka stopni, jeżeli stan średniego naprężenia wzrastał od zera do kilku kG/cm^2 , co odpowiada bardzo dużym naprężeniom w strefach kontaktów pomiędzy wałeczkami. Wyniki te są w trakcie weryfikacji, gdyby jednak były zupełnie dokładne, mogłyby może wytłumaczyć obserwowane zmniejszanie się kąta tarcia gruntów przy bardzo dużych stanach naprężenia.

Doświadczenie przeprowadzono na wałeczkach o przekroju kołowym lub sześciokątnym. Zaobserwowano zjawiska jakościowo takie same; dla wałeczków sześciokątnych kąt tarcia jest większy o 2° - 3° , zaś zmiany objętości występują w nieco większym rozmiarze.

Zmiany parametrów geometrycznych wałeczków podczas odkształcenia. Anizotropia struktury. Do doświadczeń użyto wałeczków o średnicy 3-5 mm. Obserwowano na fotografii powierzchnię kilkudziesięciu centymetrów kwadratowych próbki poddanej odkształceniu jednorodnemu. Własności geometryczne układu scharakteryzowano następującymi parametrami: ilością wałeczków przypadających na jednostkę pola powierzchni i średnią liczbą styków każdego wałeczka; rozrzutem liczby styków przypadających na jeden wałeczek; obrotem wałeczków; orientacją statystyczną płaszczyzn stycznych w punkcie styku wałeczków.

Na rysunku 5 zestawiono wyniki obserwacji dokonanych w czasie cyklu badań polegających na 16%-owym odkształceniu pionowym, następnie odciążeniu do stanu naprężenia izotropowego, a wreszcie na przyłożeniu małego dewiatora naprężeń prostopadłego do poprzedniego. Na początku próbka była poddana działaniu bardzo małego dewiatora ściskającego poziomo.

Doświadczenie wykazuje, że gęstość pozostaje praktycznie stała podczas dużego odkształcenia, natomiast średnia liczba styków zmniejsza się w granicach od 4,2 do 3,9 na początku odkształcenia i wzrasta powoli z powrotem do stanu izotropowego. Kąty obrotów wałeczków dookoła swych osi są małe, rzadko większe niż 30° .

Anizotropia (rys. 5). Jeżeli liczyć ilość punktów styczności pomiędzy ziarnami w każdym kierunku (praktycznie w kącie 10°) i jeżeli wykreślić wektor, którego długość jest równa ilości styków w tym kierunku, to otrzyma się krzywą, która charakteryzuje anizotropię geometryczną ośrodka. Jeżeli ta krzywa jest kołem,

mówi się o próbce, że jest statystycznie izotropowa, gdyż punkty styku są regularnie rozmieszczone we wszystkich kierunkach. Teoretyczny układ, w którym środki wałeczków tworzyłyby kwadratową kostkę, byłby odwzorowany przez krzywą zredukowaną do dwóch odcinków prostych prostopadłych.

Jeżeli utworzy się próbkę składając wałeczki o jednakowych średnicach w polu ciężkości, to powstaje układ prawie regularny typu najbardziej zagęszczonego; krzywa anizotropii posiada sześć bardzo wyraźnych garbów, które mają tendencję przechodzenia w trzy odcinki proste przy lekkich wstrząsach modelu. Dla otrzymania próbek izotropowych konieczne jest stosowanie wałeczków o różnych średnicach.

Dla rozpatrywanych próbek początkowa krzywa (rys. 5) przedstawiająca anizotropię na ogół przedstawia koło z wyjątkiem kierunku pionowego, w którym obserwuje się ponad 30% więcej styków niż w innych kierunkach; należy poza tym pamiętać, że próbka w czasie przygotowywania była poddana lekkiemu ścisnaniu w kierunku osi poziomej.

Natychmiast po rozpoczęciu ścisnania pionowego liczba styków w płaszczyźnie poziomej wzrasta, zaś w płaszczyźnie pionowej maleje. Gdy wysokość próbki zmniejszy o 15%, krzywa anizotropii (rys. 5) ulega wyraźnemu spłaszczeniu; zanotowano np., że średnią liczbą styków przypadającą na wałeczek w dwóch przeciwległych ćwiartkach koła (górną i dolną) wynosi 1,68, gdy w ćwiartkach bocznych 2,11. W tym przypadku krzywa zbliża się do elipsy, jednakże posiada ona zawsze lekki garb w kierunku pionowym i wklęsłość z każdej strony.

Jeżeli dewiator zmniejsza się, występują natychmiast pionowe płaszczyzny styczności, zaś na krzywej uwydatniają się dwie wyraźne wypukłości w kierunku pionowym.

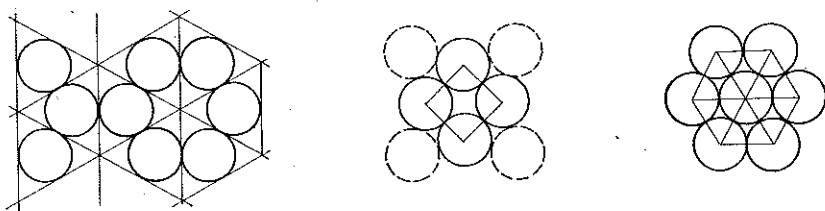
Widać więc, że nawet bardzo mały dewiator naprężenia powoduje anizotropię układu. Płaszczyzny styczne między wałeczkami mają tendencję do ustawienia się prostopadle do większego głównego naprężenia. Powrót do stanu izotropowego wywołuje małe odkształcenia nieodwracalne, które nieznacznie zmieniają poprzednio nabytą anizotropię.

Krzywa przedstawiająca anizotropię geometryczną jest symetryczna względem środka. Kształt tej krzywej zależy od wykresu odkształceń nieodwracalnych. Przy plastyczności idealnej krzywa ta posiada dwie osie symetrii, które pokrywają się z głównymi kierunkami stanu naprężenia. Możliwe jest, że krzywa ta ma podobny kształt niezależnie od «przeszłości» próbki. Jeżeli wywołamy odkształcenie przebiegające w tym samym kierunku, poczynając od stanu izotropowego, krzywa anizotropii będzie miała te same osie symetrii, co odkształcenie. Lecz jeżeli odkształcenie zmieni kierunek, to krzywa nie będzie symetryczna względem środka O . Aby zlikwidować anizotropię istniejącą i uzyskać krzywą o dwóch osiach symetrii, należy wywołać dostatecznie duże odkształcenie o stałym kierunku.

Wobec skomplikowanego kształtu krzywej przedstawiającej anizotropię geometryczną nie można generalnie wykorzystać tensora drugiego rzędu dla przedstawienia anizotropii szkieletu, chyba w przypadku plastyczności idealnej.

Sily w stykach między wałeczkami i odkształcenie układu. W dalszej treści przy omawianiu zastosowanych naprężeń będzie zawsze pomijany ciężar. Określenie sił w stykach między wałeczkami stanowi trudny problem hiperstatyczny z wyjątkiem przypadku, gdy własności geometryczne układu są szczególnie proste i jeżeli nie następuje żadne przesunięcie. Pewne obliczenia elementarne na układach prostych pozwolą lepiej zrozumieć właściwości mechaniczne ośrodków rozdrobnionych.

Dla wałeczków o jednakowych średnicach cechy geometryczne układu mogą być zdefiniowane przez układ środków wałeczków; próbka nazywa się geometrycznie jednorodną, jeżeli może być podzielona na strefy takie, że każdą z nich można otrzymać przez translację jednej z nich. Wektor przemieszczenia jest kombinacją liniową o dowolnych całkowitych współczynnikach przemieszczeń elementarnych, charakteryzujących badany układ. Najprostsze układy tego typu uzyskuje się przez przemieszczenie wałeczka mającego sześć styków regularnie rozłożonych na obwodzie albo cztery styki symetryczne w stosunku do dwóch osi prostokątnych (rys. 7 i 8). Inny układ jednorodny można utworzyć przez przemieszczenie jednej grupy sześciu wałeczków, których linia środków stanowi sześciokąt regularny.



Rys. 7

Będziemy określać siły w punktach i pomiędzy wałeczkami w próbkach geometrycznie jednorodnych, poddanych równomiernemu naciskowi, a następnie naciskom równomiernym, różnym na dwóch płaszczyznach prostopadłych. Ponieważ próbka jednorodna uformowana jest ze stref, które wszystkie dadzą się otrzymać przez przemieszczenie jednej z nich, wystarczy przestudiować jedną z tych stref. Przyjęto, że naprężenia średnie na obwodzie tych stref są takie same jak w jednorodnym ośrodku ciągłym. Jeżeli przetnie się ośrodek prostą, to można przyjąć, że istnieje równowaga między naprężeniem równomiernie rozłożonym jednorodnego ośrodku ciągłego a siłami przyłożonymi do każdego wałeczka, przeciętego przez prostą. Dla pewnych układów problem upraszcza się. Jeżeli wykreślimy styczne w punktach styczności wałeczka, to otrzymamy wielobok zamknięty. Układ nazywa się regularnym, jeżeli wieloboki zamknięte są regularne (rys. 7). W układach regularnych o 3, 4 i 6 stykach trzeba zastąpić każdy wałeczek przez jego wielobok zamknięty, co w rezultacie daje płaszczyznę utworzoną z wielokątów. Jeżeli wałeczki są sztywne i nacisk zewnętrzny równomierny, to siła w styku będzie wynikiem naprężeń na odpowiednim boku wielokąta zamkniętego, charakteryzującego przekrój jednorodnego ośrodku ciągłego.

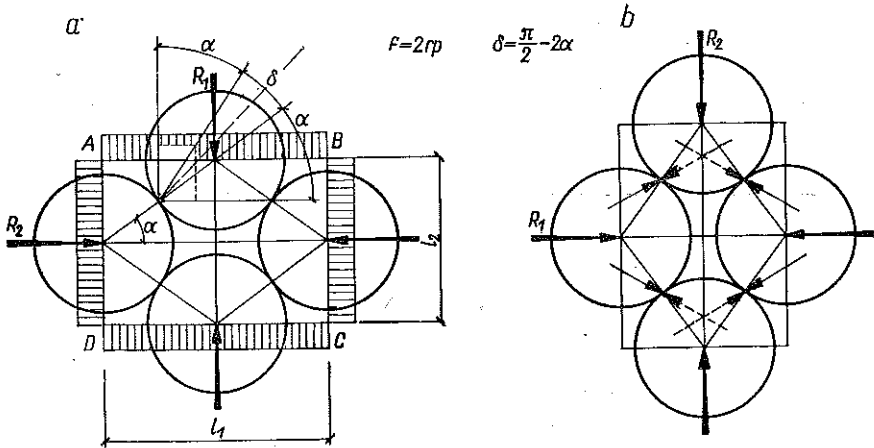
Obliczając wypadkową naprężeń działających na wielobok zamknięty każdego wałeczka o promieniu r otrzymujemy następujące siły w stykach:

Tablica 1

Ilość styków wałeczka	3	4	6
Wielobok zamknięty	Trójkąt równoboczny	Kwadrat	Sześciobok
Siła w styku f	$2r \sqrt{3} p$	$2rp$	$\frac{2r}{\sqrt{3}} p$

Tablica wykazuje, że im większa jest gęstość próbki, tym siły w stykach są mniejsze. A więc odkształcenie każdego wałeczka jest mniejsze, jeżeli jest on traktowany jako sprężysty. W następnym rozdziale wykażemy, że zbiór kulek sprężystych może być traktowany jako ośrodek podlegający prawu sprężystości nieliniowej.

Układ jednorodny o czterech stykach, może być określony dla danego r przez kąt 2α , który tworzą kierunki punktów styczności (rys. 8). Jako strefy elementarne



Rys. 8

można przyjąć prostokąty $ABCD$, których boki są równoległe do osi układu i przechodzą przez środki czterech sąsiadujących wałeczków. Wypadkowe siły na obwodzie tych stref wynoszą odpowiednio

$$R_1 = pl_1 = 4pr \cos \alpha, \quad R_2 = pl_2 = 4pr \sin \alpha.$$

Wobec symetrii styków w stosunku do osi układu składowe przypadające na każdą oś wynoszą $R_1/2$ i $R_2/2$. W ten sposób otrzymuje się

$$f = 2rp, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

Należy stwierdzić, że przy obciążeniu równomiernym siły w stykach nie są prostopadłe do wałeczków, lecz tworzą z prostopadłą kąt δ . Poza tym nachylenie sił w stykach jest niezależne od obciążenia, nie może więc tam wystąpić ruch kulki, jeżeli nawet obciążenie ulegnie zmianie.

Wartość kąta α jest zawarta między 30° i 60° , a więc δ zmienia się od -30° do 30° . Jeżeli kąt tarcia ψ metalu wałeczków jest mniejszy od 30° (co się często zdarza), to pewne rodzaje układów są nietrwale w stanie naprężenia izotropowego. Równowaga istnieje jedynie wtedy, jeżeli α jest zawarte między dwoma następującymi kątami:

$$\alpha' = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}, \quad \alpha'' = \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}.$$

Należy podkreślić, że siły w stykach są niezależne od α , z wyjątkiem $\alpha = 30^\circ$ lub 60° , gdyż wtedy tworzy się nowy styk i otrzymuje się przypadek poprzednio omawiany, w którym występują sześcioboki zamknięte.

Przyjmijmy, że dowolny układ jest uformowany z zestawienia różnych układów jednorodnych. Można twierdzić, że pod obciążeniem równomiernym siły styczne między wałeczkami mają wielkość i odchylenie inne w każdym punkcie styczności, ponieważ pewne układy lokalne mogą być niestateczne po przyłożeniu obciążenia równomiernego na obwodzie próbki. Wskutek tego następuje małe odkształcenie trwałe po zdjęciu dewiatora naprężenia.

Jeżeli wałeczki są odkształcalne, to ściśliwość zależna jest od typu układu. Zwykła próbka jest uformowana ze stref, które posiadają różne własności sprężyste, wobec tego obciążenie równomierne na obwodzie próbki nie spowoduje równomiernego obciążenia na obwodzie każdej strefy. Każda ze stref będzie posiadała inne warunki graniczne, które będą się zmieniać zależnie od zewnętrznego obciążenia, co spowoduje zmianę nachylenia sił występujących w stykach i przesunięcie niektórych wałeczków. Zmiana równomiernego obciążenia na obwodzie może więc spowodować trwałe odkształcenie.

Rozważono próbkę prostokątną poddaną ciśnieniu jednostajnemu p_1 wzdłuż jednej ścianki i p_2 wzdłuż drugiej.

Rozważmy układ jednorodny (występują cztery styki) mający te same osie co i obciążenia p_1 i p_2 . Wypadkowe obciążenia na ścianki prostokątów poprzednio określonych będą następujące:

$$R_1 = 4p_1 r \cos \alpha, \quad R_2 = 4p_2 r \sin \alpha.$$

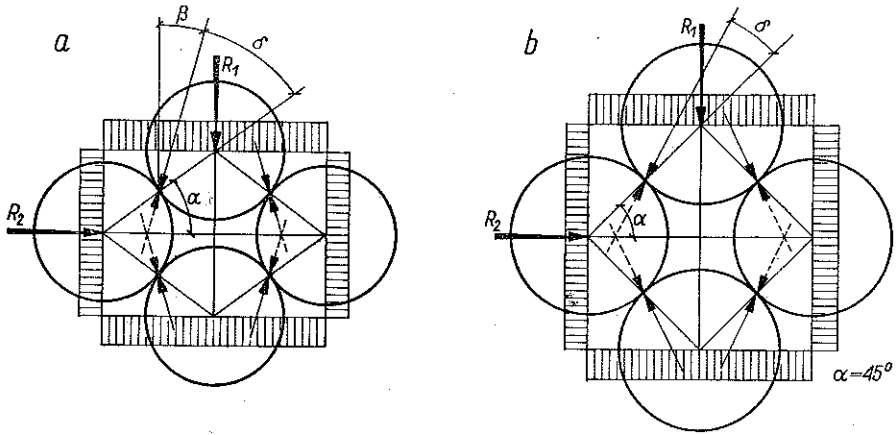
Ponieważ siły w stykach są symetryczne względem osi układu, to możemy napisać

$$f = 2r \sqrt{p_1^2 \cos^2 \alpha + p_2^2 \sin^2 \alpha}, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$$

oraz

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p_2}{p_1} \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{p_1}{p_2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha + \delta).$$

Nachylenie sił w styku δ rośnie wraz ze stosunkiem obciążeń p_1/p_2 aż do chwili, gdy $\delta = \psi$. Taki układ może być poddany dewiatorowi naprężeń tym większych, im a jest większe bez wywołania odkształceń trwałych. Zniszczenie zależne jest tylko od stosunku p_1/p_2 . Można więc powiedzieć, że plastyczność doskonała ośrodków



Rys. 9

ków sypkich mogłaby być określona przez prawo analogiczne do prawa Coulomba ($p_1/p_2 = \text{const}$).

Układy niestateczne znajdujące się pod ciśnieniem jednostajnym ($a < a'$, $a > a''$) mogą być stateczne, jeżeli znajdują się w stanie naprężenia dewiacyjnego; a zatem przechodząc ze stanu dewiacyjnego do stanu izotropowego można wywołać odkształcenie trwałe. Poniżej zobaczymy, że rzeczywiście daje się to zauważyć na próbkach z kulek szklanych.

Rozważmy układ jednorodny mający osie nachylone w stosunku do obciążeń kierunków p_1 i p_2 . Przyjęto układ o czterech stykach, których osie tworzą kąt θ z kierunkami obciążeń p_1 i p_2 na obwodzie próbki, naprężenia σ_1 i σ_2 są nachylone o γ_1 i γ_2 do ścianek prostokątów elementarnych. Przy tych założeniach

$$R_1 = \sigma_1 l_1 = [(p_1 + p_2) \cos \gamma_1 + (p_1 - p_2) \cos (2\theta - \gamma_1)] 2r \cos \alpha,$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \sin (2\theta - \gamma_1).$$

Tak samo określić można R_2 i γ_2 .

Własności geometryczne zbioru i warunki graniczne na obwodzie prostokąta elementarnego są symetryczne w stosunku do środka prostokąta. Zatem siły w stykach są równe parami. Próbka jest w równowadze, jeżeli wypadkowe R_1 i R_2 są

przekątnymi równoległoboku zbudowanego z sił w stykach; znając wielkości i kierunki R_1 i R_2 można otrzymać siły w stykach:

$$f_1 = 2r \sqrt{p_1^2 \cos^2 (\alpha + \theta) + p_2^2 \sin^2 (\alpha + \theta)},$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta_1,$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{(p_1 + p_2) \sin \alpha - (p_1 - p_2) \sin (2\theta + \alpha)}{(p_1 + p_2) \cos \alpha + (p_1 - p_2) \cos (2\theta + \alpha)} = \frac{p_2}{p_1} \operatorname{tg} (2\theta + \alpha) \frac{\cos (\theta + \alpha)}{\cos (\theta - \alpha)},$$

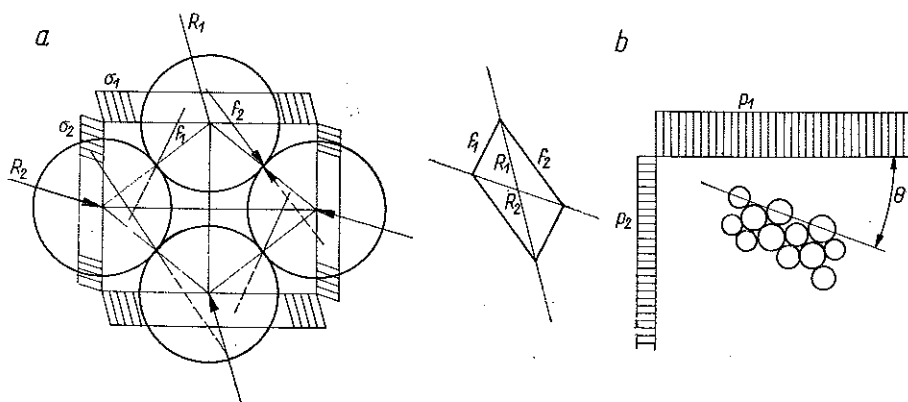
$$f_2 = 2r \sqrt{p_1^2 \cos^2 (\alpha - \theta) + p_2^2 \sin^2 (\alpha - \theta)},$$

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta_2,$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{(p_1 + p_2) \sin \alpha + (p_1 - p_2) \sin (2\theta - \alpha)}{(p_1 + p_2) \cos \alpha + (p_1 - p_2) \cos (2\theta - \alpha)},$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \operatorname{tg} (\theta \pm \alpha) \operatorname{tg} (\delta \pm \alpha - \theta).$$

Równowaga jest zachwiana, jeżeli $\delta = \psi$. Stąd wniosek, że na zniszczenie nie wpływa wielkość tensora naprężenia, a tylko stosunek naprężeń głównych p_1/p_2 (prawo Coulomba). Można zauważyć, że dla ośrodka tego typu o strukturze geometrycznej anizotropowej granica odkształceń sprężystych jest wyrażona przez sto-



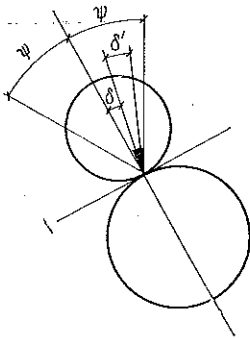
Rys. 10

sunek p_1/p_2 , który zależy od orientacji θ tensora naprężenia w stosunku do ośrodka.

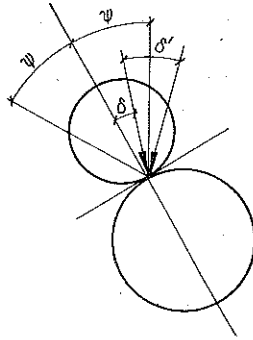
Wykazano poprzednio, że mogą wystąpić przy jednostajnym obciążeniu wszystkie możliwe kierunki siły w styku zależnie od typu układu. A więc w układzie statycznym izotropowym znajdującym się pod obciążeniem jednostajnym nachylenie sił może zmieniać się od ψ do $-\psi$.

Jeżeli na obwodzie poprzedniej próbki powstaje stan naprężenia dewiacyjnego D , wywołamy zmiany wielkości każdej z N sił w styku i zmiany nachylenia δ' , różne

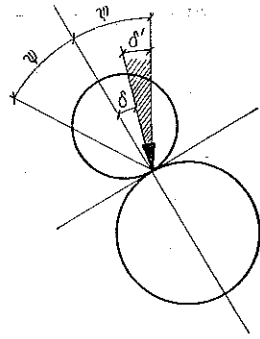
w różnych punktach, ale tego samego znaku (rys. 11) z wyjątkiem pewnej liczby punktów xN , w których nachylenie $\delta + \delta'$ jest większe od kąta tarcia ψ metalu (rys. 12). Można przyjąć jako pierwsze przybliżenie, że odkształcenie próbki pochodzi od sprężystego odkształcenia wałeczków w $(1 - x)N$ stykach i od trwałych odkształceń w punktach styku, gdzie $\delta > \psi - \delta'$. Jeżeli próbka jest statystycznie izotropowa, a wartości δ są zawarte w przedziale $(\psi, -\psi)$, to występuje odkształ-



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

cenie trwałe w przypadku powstania za pierwszym razem nawet najmniejszego stanu naprężenia dewiacyjnego. Jeżeli powrócimy do obciążenia jednostajnego, to siły w stykach powrócą w przybliżeniu do swojej pozycji początkowej w $(1 - x)N$ stykach sprężystych (rys. 13), natomiast dla xN nowych styków możliwe jest, że mała liczba $y(xN)$ ulegnie odkształceniu trwałemu; widzieliśmy więc np., że jest to możliwe, gdy $a > a''$ albo $a < a''$.

Jeżeli utworzy się nowy stan dewiacji tej samej orientacji, ale mniejszy albo równy D , siły w stykach wykonają obrót w ogólności o $\delta'_0 \leq \delta'$. Spowoduje to bardzo małą liczbę odkształceń trwałych $z(yxN)$, w nowych stykach yxN powstałych przy powrocie do obciążenia jednostajnego. Ponieważ y jest bardzo małe, a z prawdopodobnie mniejsze niż x , wystąpi dla tego drugiego dewiatora jak również dla następnych odkształcenie niemal odwracalne. Różnica między pierwszym i drugim cyklem będzie tym większa, im x będzie większe, tzn. im początkowy dewiator będzie większy. Prowadzi to do zjawiska odpowiadającego wzmocnieniu, które obserwowano na próbkach utworzonych z kulek lub piasku.

To wzmocnienie odpowiada nadciśnieniu styków mniej stabilnych względem danego dewiatora, co prowadzi do anizotropii układu jak to zaobserwowano za pomocą fotografii. Mechanizm wzmocnienia jest oczywiście inny dla metali, jednakże obserwowano tu dwa zjawiska podobne. Z jednej strony obserwowano lokalne odkształcenia trwałe w okolicy przemieszczeń najmniej stabilnych dla rozważanego stanu naprężenia, z drugiej strony — anizotropię orientacji siatek spowodowaną tym odkształceniami.

Jeżeli drugi dewiator ma orientację odmienną od pierwszego, to obrót sił w stykach będzie różny co do wielkości i niekiedy co do kierunku od obrotu δ' przy istnieniu

pierwszego dewiatora. Wystąpią więc odkształcenia trwałe w $(1-x)N$ stykach, które poprzednio nie poruszały się, jak również w xN nowych stykach. Odkształcenie trwałe będzie tym większe, im drugi dewiator jest bardziej nachylony od pierwszego. Odpowiada to zmniejszeniu modułu odkształcenia i granicy «sprężystej», stąd otrzymujemy zjawisko odpowiednie do efektu Bauschingera i wyjaśnienie kształtu cykli histerezy. Na przykładzie kulek szklanych zobaczymy, jak strefa sprężystości przy rozrywaniu zostaje zlikwidowana przez duże ściskanie i odwrotnie.

Jeżeli drugi dewiator jest mniejszy od pierwszego i ma inny kierunek, to otrzymamy anizotropię nie mającą już dwóch uprzywilejowanych kierunków. Przeciwnie, jeżeli drugi dewiator jest większy, obserwacje fotograficzne i schematy poprzednie wykazują, że zaciera on prawie całkowicie efekt pierwszego dewiatora. Jeżeli dewiator dalej wzrasta, to otrzymujemy krzywą siła-odkształcenie, mającą tę samą granicę co krzywa, którą otrzymano dla próbki początkowo statystycznie izotropowej. Odkształcenia następne zmieniają tylko układ pod względem geometrycznym, a nie właściwości wałeczków, jest zatem prawdopodobne, że przy plastyczności idealnej pojawi się zawsze ten sam typ układu, zatem ta sama wytrzymałość mechaniczna, jakakolwiek będzie orientacja dewiatora końcowego. Można więc przypuszczać, że pomimo anizotropii ośrodka zależność między naprężeniami przy plastyczności idealnej będzie krzywą symetryczną względem dwusiecznej na płaszczyźnie $\sigma_1 \sigma_2$. Przeciwnie, stosunek między naprężeniami odpowiadającymi granicy sprężystości zależy od orientacji dewiatora, jeżeli próbka jest początkowo anizotropowa. Nie można zatem przedstawić powierzchni granicznej sprężystości za pomocą jednej krzywej w układzie dwuwymiarowym, chyba że granica sprężystości ośrodka o dwóch wymiarach jest zależna tylko od stosunku σ_1/σ_2 .

Wnioski. Powyższe schematyczne studia właściwości geometrycznych i mechanicznych szkieletu prowadzą do następujących hipotez dotyczących właściwości rozpatrywanego ośrodka «ciągłego».

1. Zmiana równomiernego obciążenia próbki może spowodować odkształcenie trwałe, czasami nawet anizotropowe. Kierunek sił w stykach zmienia się wraz ze zmianą obciążenia równomiernego.

2. Wywołanie dewiatora naprężeń nawet bardzo małego powoduje częściowo odkształcenia trwałe próbki statystycznie izotropowej, utworzonej z wałeczków okrągłych. Odkształcenie to stwarza anizotropię, która ulegnie zmianie przy powstaniu dewiatora o innym kierunku i może być prawie zlikwidowana, gdy przyłożyc dewiator większy.

3. Wywołanie dewiatorów tej samej orientacji, mniejszych lub równych pierwszemu, powoduje odkształcenia prawie całkowicie odwracalne, czyli że pierwszy dewiator stwarza obszar sprężysty (wzmocnienie).

4. Powrót do stanu naprężenia izotropowego powoduje bardzo niewielkie odkształcenia trwałe.

5. Odwracalność jest zmniejszona dla dewiatorów o orientacji odwrotnej do orientacji tego, który wywołał wzmocnienie.

6. Wzmocnienie jest spowodowane przerwami lokalnymi, które umożliwiają stworzenie układu anizotropowego, bardziej odpornego na działanie zastosowanego tensora naprężenia.

7. Anizotropia materiałów posiada takie same płaszczyzny symetrii jak tensor naprężenia, jeżeli ten ostatni zachowa ten sam kierunek podczas odkształcenia. Poza tym materiał powinien być początkowo izotropowy lub odkształcenie nieodwracalne lub dostatecznie duże, aby wyeliminować poprzednie anizotropie. Przy plastyczności idealnej anizotropia jest stosunkowo prosta.

8. Anizotropia struktury prowadzi do anizotropowego prawa sprężystości. Poza tym stopień odwracalności odkształceń musi zależeć od kierunku tensora naprężenia, co może prowadzić do powstania różnych modułów zależnie od kierunków.

9. Granica sprężystości może być przedstawiona w przestrzeni dwuwymiarowej jedynie dla ośrodka izotropowego, w razie wzmocnienia granica sprężystości musi być przedstawiona w przestrzeni trójwymiarowej z uwzględnieniem kierunku tensora naprężeń.

10. Pomimo anizotropii geometrycznej prawo idealnej plastyczności może być izotropowe.

2.2. Właściwości mechaniczne próbki z kulek szklanych. Posługując się teorią sprężystości można dowieść, że zmiany naprężeń wywołanych w układzie kulek są proporcjonalne do odkształcenia względnego w potęgę $3/2$. Ta sprężystość półsześcienna¹ może być zweryfikowana doświadczalnie.

Odształcenie sprężyste dwóch kulek określa prawo Hertza

$$(2w)^{3/2} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \left(\frac{1 - \eta_1^2}{E_1} + \frac{1 - \eta_2^2}{E_2} \right) f,$$

gdzie $2w$ oznacza odkształcenie dwóch kulek, f siłę przyciągania między kulkami, R_1 i R_2 promienie kulek, η_1 i η_2 współczynniki Poissona każdej kulki oraz E_1 i E_2 moduły sprężystości każdej kulki.

W tym sformułowaniu zakłada się, że powierzchnia kontaktowa dwóch kulek jest dostatecznie mała w stosunku do wymiaru kulki, aby można było zastosować wzory Boussinesq'a dla ośrodków w półpłaszczyźnie.

W dalszym ciągu doświadczeń zbadano kulki szklane, których średnice zmieniają się od 0,1 do 0,5 mm. Dla zmierzenia modułu szkła odkształcono kulkę o promieniu 1,4 mm między dwiema równoległymi płytami stalowymi. Przesunięcie tych płyt mierzono przy pomocy przyrządu pomiarowego o działce mikronowej. Przyjmując, że moduł sprężystości stali jest $2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², a współczynnik Poissona bliski 0,3 dla stali i szkła, otrzymano moduł sprężystości w przybliżeniu taki, jaki został podany przez DANTU dla szkła: $7 \cdot 10^5$ kG/cm².

Jeżeli przeprowadzi się płaszczyznę styczną przez każdy punkt styku kulek, otrzyma się wielościan połączony z każdą kulką; rozpatrzone będą tylko układy

¹W oryginale «élasticité semi-cubique» (przyp. tłum.).

kulek odpowiadające następującym wielościanom regularnym: trójscian, ośmiościan, dwunastościan. Każdemu układowi odpowiada pewien związek między objętością próżni i objętością wypełnioną, co można scharakteryzować przez jeden z następujących parametrów: porowatość η , gęstość $n' = 1 - n = \gamma_d/G$, ciężar właściwy szkła $G = 2,9$, ciężar właściwy pozorny grupy kulek suchych γ_d .

Jeżeli między wszystkimi stykami kulek istnieje jednakowa siła f , można przyjąć naprężenia pozorne $\sigma = f/S$ na każdej płaszczyźnie wielościanów (powierzchni S). Ponieważ są one regularne, naprężenie jest stałe na wszystkich płaszczyznach i stanowi naprężenie izotropowe. Powierzchnia jest proporcjonalna do kwadratu promienia kulki; stosunek $K = S/R^2$ zależy od typu układu. Jego wartość jest podana w załączonej tablicy. Siła ma wartość $f = KR^2 \sigma$.

Wzór Hertza stosowany dla dwóch kulek o jednakowej średnicy i jednakowego materiału pozwala obliczyć odkształcenie każdej kulki w punkcie styku:

$$(w)^{3/2} = \frac{3}{4\sqrt{R}} \left(\frac{1 - \eta_v^2}{E_v} \right) f.$$

Jeżeli założy się, że kulka nie wykazuje odkształceń poza powierzchnią styku, można zastosować ten wzór dla kulki mającej więcej styków; można wtedy obliczyć odkształcenia układu regularnego; zamieniając każdą siłę f na jej wartość obliczoną w zależności od nacisku izotropowego σ , otrzymuje się

$$\xi = \frac{\sigma}{(w/R)^{3/2}} = \frac{4}{3K} \frac{E_v}{1 - \eta_v^2}.$$

Wielkość ξ nazywamy modulem sprężystości półsześciennej², jego wartość zależy jedynie od rodzaju układu kulek (K) oraz od właściwości sprężystych materiału tworzącego kulki ($E_v \eta_v$).

Odształcenie względne w/R jest jednakowe we wszystkich kierunkach prostopadłych do powierzchni wielościanu regularnego. Jest to odkształcenie izotropowe układu grupy kulek; a więc odległość L_0 dwóch punktów przechodzi w L_1 :

$$\xi = \frac{\sigma}{\left(\frac{L_1 - L_0}{L_0} \right)^{3/2}}.$$

Odształcenie grupy kulek sprężystych jest odkształceniem odwracalnym, ale nieliniowym, ponieważ stany na granicach reprezentowane przez powierzchnie styku między kulkami zmieniają się w zależności od stanu naprężenia.

Dla małej zmiany stanu naprężenia można obliczyć zwykły moduł sprężystości liniowej E lub izotropowej $E_i = E/(1 - 2\eta)$, jednak moduł ten zwiększa się wraz ze wzrostem nacisku średniego:

$$E_i = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\left(\frac{w}{r}\right)} = \frac{3}{2} \xi^{2/3} \sqrt[3]{\sigma}.$$

² W oryginale «module d'élasticité semi-cubique» (przyp. tłum).

SIRIEYS (1957) podał dla głównych typów układów regularnych następujące wartości:

Tablica 2

Liczba styków kulek	4		6		8		12		
Rodzaj wielościanu	czworościan		sześcián		ośmiościan		dwunastościan		
Gęstość n'	$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0,302$		$\frac{\pi}{6} = 0,524$		$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,605$		$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,748$		
γ_a	0,88		1,52		1,75		2,17		
Porowatość n	0,7		0,48		0,4		0,25		
K	$\frac{27}{8}\sqrt{3} = 5,85$		4		$\frac{3\sqrt{2}}{2} = 2,55$		$\sqrt{2} = 1,41$		
Dla układu kulek, gdy	ξ (kG/cm ²)	185 000		270 000		425 000		765 000	
		E	E_i	E	E_i	E	E_i	E	E_i
$E_v = 740000$ kG/cm ² , $\eta_v = 0,3$, $\eta = 0,3$	kG/cm ²								
	$\sigma = 0,2$	1140	2840	1465	3660	1980	4950	2940	7350
	$\sigma = 0,5$	1540	3860	1980	4950	2690	6730	4000	10000
	$\sigma = 1$	1940	4850	2500	6250	3380	8450	5050	12600
	$\sigma = 2$	2440	6100	3150	7880	4250	10600	6350	15900
	$\sigma = 4$	3080	7700	3980	9950	5370	13450	8000	20000
$\sigma = 8$	3880	9700	5000	12500	6760	16900	10000	25200	

DANTU wykonał wartościowe badania na regularnych układach najbardziej zgęszczonych.

Działanie obciążenia równomiernego na powierzchni granicznej próbki wywołuje jednakowe siły wzajemnie prostopadłe w punktach styków układu regularnego. Jeżeli układ jest dowolny, siły w stykach są dowolnie skierowane wewnątrz stożka tarcia.

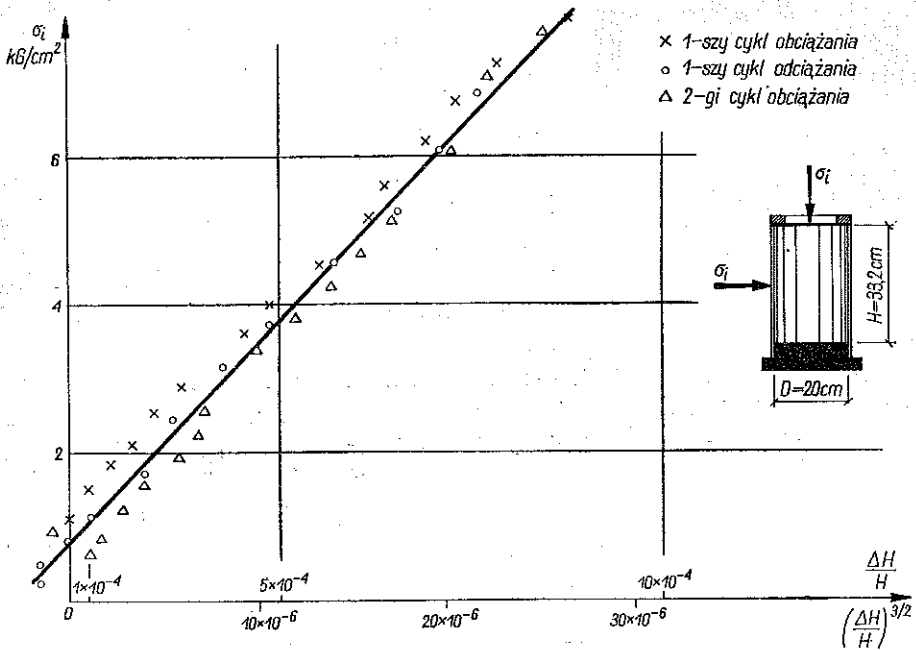
W tym p. próbkę będziemy nazywać izotropową, jeżeli wytrzyma średnie odkształcenie izotropowe przy zmianie równomiernego obciążenia zewnętrznego. W praktyce w próbce tego rodzaju układ nie jest typu regularnego i zmienia się od jednego

punktu do drugiego, można więc powiedzieć, że jest on statystycznie izotropowy, zaś siły w stykach są rozłożone w całym kącie stożka tarcia.

Próbkę izotropową można osiągnąć przez wibrację przy izotropowym stanie naprężenia albo przez kilkakrotne silne zmiany obciążenia (cykle od 1 do 10 kG/cm²).

Doświadczenia zostały m.in. wykonane na próbkach cylindrycznych o wysokości 40 cm, umieszczonych w powłóczkach gumowych o grubości 1 mm, zakończonych sztywnymi płytkami metalowymi lub zwykłą membraną gumową. Odształcenia były mierzone z dokładnością do 0,01 mm wzdłuż osi i dwóch kierunków prostopadłych. Wykonano liczne badania szczegółowe dla uwzględnienia odształceń gumy i wpływu sztywnych płytek (rys. 15).

Rysunek 14 wykazuje, że naprężenia są proporcjonalne do odształcenia, odpowiadającego potędze 3/2 dla układu kulek o średnicy 1 mm. Gęstość próbki



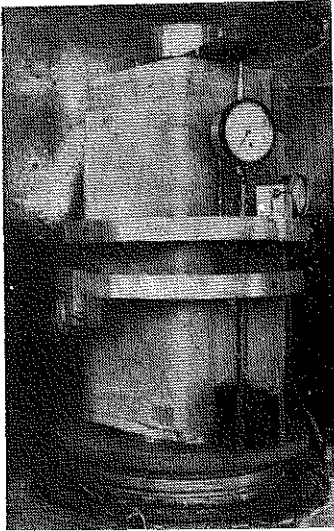
Rys. 14

wynosi 1,87; gęstość ta jest nieco wyższa w układzie typu oktaedrycznego. Gdyby można było dokonać interpolacji między układami regularnymi poprzednio zbadanymi, otrzymałoby się moduł sprężystości i półsześciennej ξ wyższy od 500 000 kG/cm²; jednak doświadczenie dało wartość rzędu 300 000 kG/cm².

Fakt, że układ kulek może być bardziej zagęszczony niż to wykazują obliczenia, pochodzi prawdopodobnie stąd, że układ rzeczywisty jest nieregularny; powstaje, być może, siatka linii, wzdłuż których naprężenia są większe, jak to wykazał DANTU przy pomocy elasto-optyki.

Inne doświadczenia przeprowadzone na kulkach o średnicy 0,1 mm i gęstości 1,78 dały współczynnik półsześcienny 250 000 kG/cm², jednak po kilku cyklach

odkształceń i poważnych wstrząsów, moduł izotropowy powiększył się znacznie dla tej samej gęstości. Gęstość nie wystarcza więc do określenia wytrzymałości materiału. Trzeba oprócz tego znać typ układu istniejącego w każdym punkcie. Jeżeli zróżnicowanie typów układów istniejących w próbce jest mniejsze, zbliżamy się do układu regularnego. Dla tej samej gęstości układ regularny jest prawdopodobnie najbardziej wytrzymały. Zróżnicowanie układu może wyrazić się przez rozrzut liczby styków kulek.

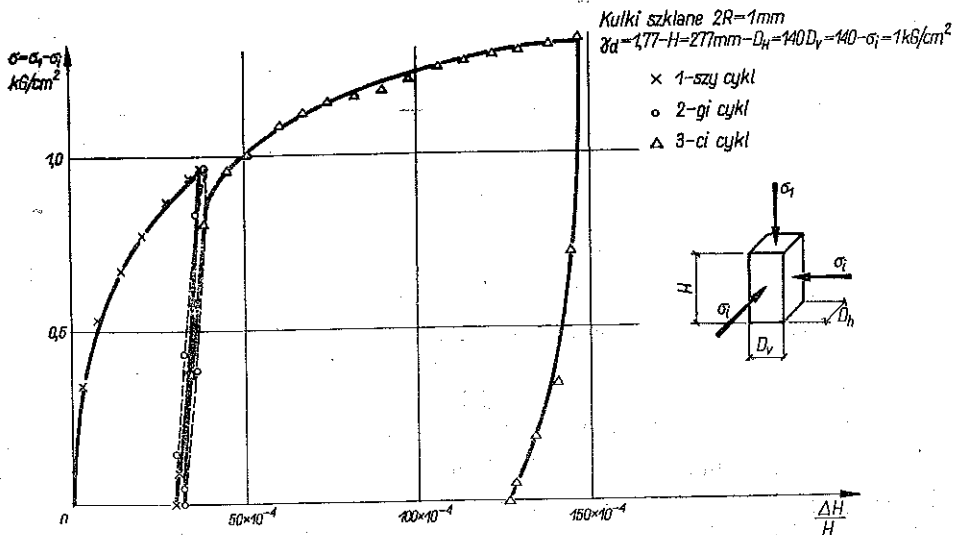


Rys. 15

Zmiana obciążenia zewnętrznego nie spowodowałaby żadnej zmiany kierunku sił w stykach, gdyby kulki były nieodkształcalne. W rzeczywistości odkształcenie sprężyste kulek tworzy różne strefy ściskania w zależności od rozmieszczenia układu lokalnego. Stąd powstają stany naprężenia anizotropowego w tych strefach. Wyjaśnia to odkształcenia trwałe, które można zaobserwować w czasie pierwszego przyrostu obciążenia. Cykle następne są na ogół odwracalne w ponad 95% i nawet w 100% w granicach błędów doświadczalnych.

Można zaobserwować odkształcenia odwracalne z modułem sprężystości półsześciennej różnym co do kierunków (anizotropia prawa sprężystości).

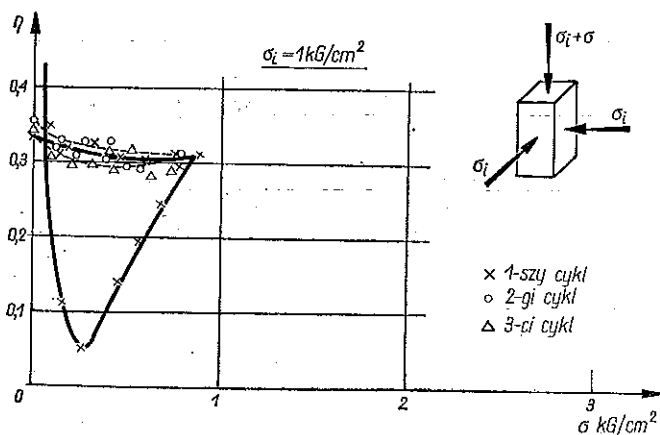
Wpływ dewiatora naprężenia — wzmocnienie. Rysunek 16 przedstawia kształt krzywej naprężenie-odkształcenie przy zmianie głównego naprężenia osiowego po kilku cyklach pod obciążeniem równomiernym. Jeżeli spowodujemy wzrost



Rys. 16

tego naprężenia dla pierwszego cyklu, to odkształcenie osiowe będzie znacznie większe niż przy cyklach następnych. Można przyjąć, że małe odchylenie naprężenia głównego powoduje zmianę kierunku sił stykowych między kulkami. Siły te będą statystycznie rozrzucone w całym stożku tarcia i pewna ich ilość będzie rozmieszczona na jego powierzchni, spowoduje to przemieszczenie kulek i lekkie odkształcenia układu. Wydaje się, że pierwszy dewiator, nawet bardzo mały, powoduje zawsze odkształcenia jednoczesne odwracalne i trwałe. Jeżeli naprężenie główne rośnie, to większa liczba kulek przemieści się przez poślizg a czasami przez obrót, skutkiem czego próbka przechodzi stopniowo w stan plastyczny. Większa ilość przemieszczeń kulek może być uważana jako nieodwracalna; rzeczywiście, jeżeli zmniejszymy naprężenie osiowe, zauważymy pewne słabe rozszerzenie w kierunku działania tego naprężenia.

Powtórny przyrost naprężenia do wartości poprzedniej powoduje odkształcenie plastyczne znacznie mniejsze, ponieważ wszystkie kulki bliskie równowagi granicznej dla tego stanu odchylenia zostały przedtem przemieszczone. Otrzymuje się wtedy krzywą naprężenie–odkształcenie przedstawiającą bardzo wyraźne załamanie dla maksymalnego naprężenia głównego pierwszego cyklu. Naprężenie to nazwiemy granicznym sprężystym lub przekonsolidującym. Dla naprężenia mniejszego niż w pierwszym cyklu odkształcenia są bardzo małe i odwracalne, dla naprężenia większego są one w dużej części trwałe, gdy tylko przekroczy się naprężenie maksymalne pierwszego cyklu. Otrzymuje się w ten sposób materiał, który reaguje w sposób natychmiastowy według uproszczonych praw ciała sprężysto–plastycznego.



Rys. 17

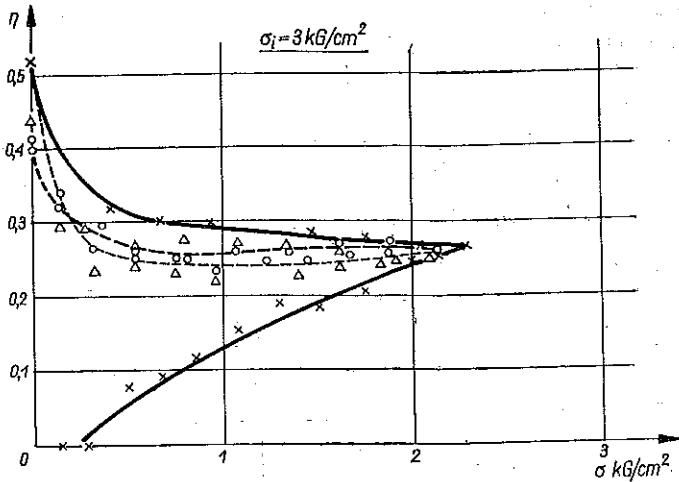
Odształcenie anizotropowe nieodwracalne powoduje zmianę właściwości mechanicznych podobnie jak wzmocnienie. Zjawisko to jest wywoływane wyłącznie zmianami geometrycznymi w układzie kulek. Układ ten nie jest już statystycznie izotropowy, co zostało stwierdzone przy badaniu układu wałeczków.

Doświadczenie wykazało, że nawet mały dewiator naprężeń powoduje zawsze odkształcenia trwałe, a więc następuje wzmocnienie próbki statystycznie izotro-

powej; jednak jeżeli układ był regularny, to próbka mogłaby przeciwstawić się dewiatorowi naprężeń bez odkształcenia trwałego. Otrzymałoby się ciało idealnie sprężysto-plastyczne od chwili pierwszego odkształcenia.

Odwracalne odkształcenia anizotropowe. Jeżeli wykonamy kilka cykli obciążenia zgodnie z osią próbki, to odkształcenia, począwszy od drugiego cyklu, są praktycznie odwracalne, lecz nie całkowicie pokrywające się. Widocznie zachodziły tam małe poślizgi kulek o takiej samej amplitudzie w obu kierunkach (rys. 16).

Zmiana naprężeń głównych pozostaje w przybliżeniu proporcjonalna do odkształcenia osiowego w potęgę $3/2$. Tym niemniej, jeżeli próbka wytrzymałe małe zmiany naprężenia osiowego w porównaniu z wartością obciążenia średniego, to można zawsze przyjąć, że odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia. Moduł sprężystości liniowej zmienia się w przybliżeniu tak, jak pierwiastek trzeciego stopnia z obciążenia średniego. Zmienia się on od 1 500 do 3 000, jeżeli obciążenie średnie zmienia się od 1 do 6 kG/cm^2 . Edometr daje wartości bardzo zbliżone.



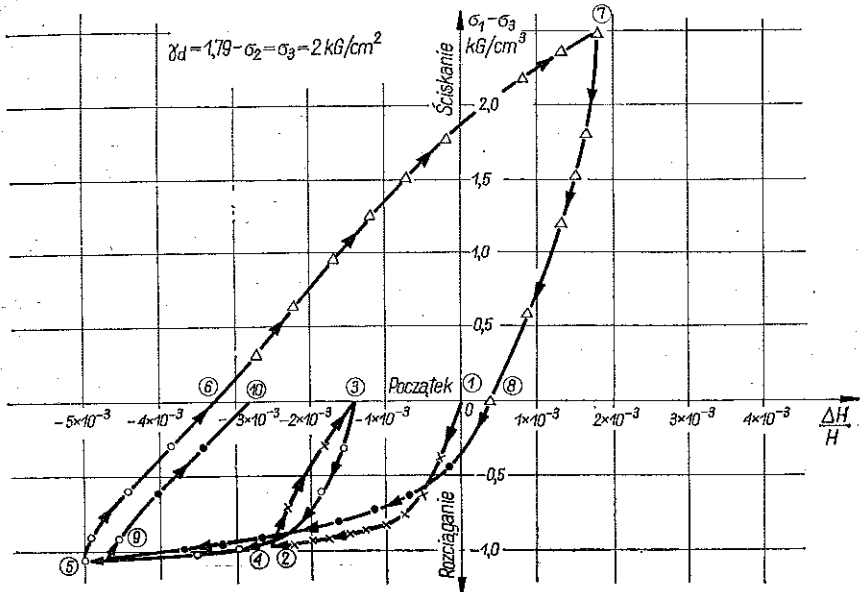
Rys. 18

Jeżeli wyrazimy współczynnik Poissona stosunkiem odkształcenia boczego do odkształcenia osiowego, to otrzymamy dla odkształceń odwracalnych współczynnik bliski 0,25 (rys. 17 i 18). Zmniejsza się on nieco, jeżeli obciążenie zewnętrzne σ_i wzrasta — wartość jego wynosi 0,3 dla $\sigma_i = 1 \text{ kG/cm}^2$ i 0,2 dla $\sigma_i = 6 \text{ kG/cm}^2$. Wartości te otrzymano dla odkształcenia osiowego odwracalnego rzędu 1:1000, co odpowiada przyrostowi naprężenia osiowego od 50% do 80% obciążenia średniego.

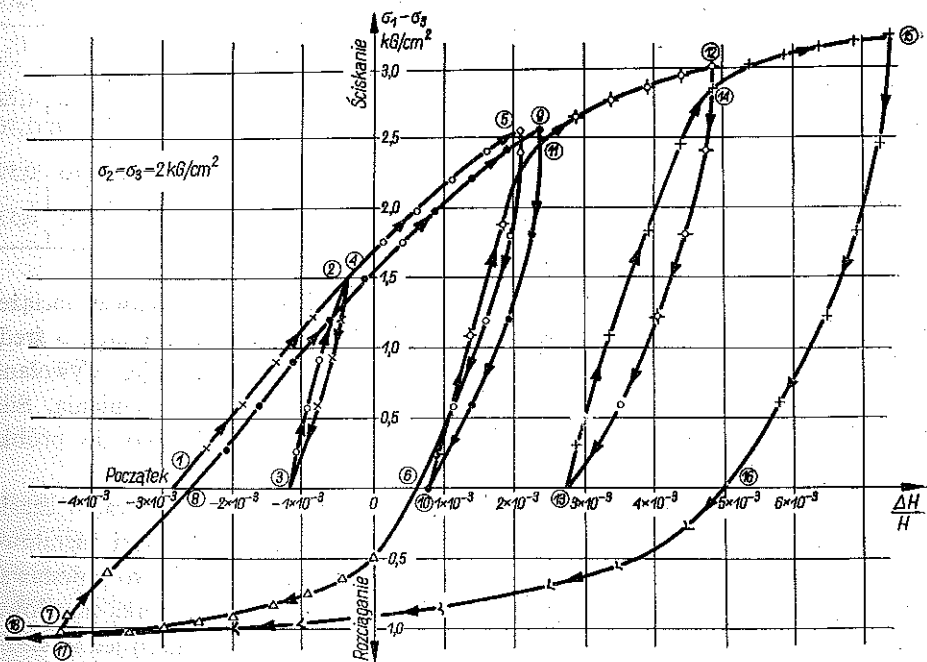
Podczas odkształceń trwałych pierwszego cyklu współczynnik Poissona jest dużo mniejszy, wzrasta on równomiernie z dewiatorem począwszy od wartości bliskiej zeru.

Histeresa cykli (rozciąganie-ściskanie-wzmocnienie). Próbkę trójosiową pod ciśnieniem równomiernym poddano lekkiemu «rozciąganiu» (punkty 1-2 na rys. 19)

dla spowodowania wzmocnienia; na krzywej 3-4-5 stwierdzono, że wytworzyła się strefa sprężysta 3-4. Jeżeli wykonamy natychmiast lekkie ściskanie 6-7, zlikwiduje się strefa sprężysta, która nie wystąpi więcej na krzywej 8-9. To samo widać na rys. 20, gdzie strefa sprężysta 3-4 ściskania jest wyeliminowana.



Rys. 19



Rys. 20

Wynik ten jest analogiczny do tego, który BAUSCHINGER podał dla metali; chodzi tu w danym przypadku o zjawisko ogólne, którego zasadę podano rozpatrując wałeczki. W rezultacie jeżeli stosuje się dewiator mający kierunki rozbieżne z poprzednim, to wywołuje się zmianę nachylenia sił w stykach, która będzie miała wartość i czasami kierunek niezgodny ze zmianą wywołaną przez pierwszy dewiator. Zaobserwujemy więc nowe odkształcenia trwałe. Jeżeli przejdziemy od rozciągania do ściskania, to zastosujemy dewiator odkształcenia prostopadły do pierwszego, co powoduje maksymalne zmiany w anizotropii ośrodka.

Krzywa 8-9 jest równoległa do krzywej 4-5, wracamy więc do poprzednich właściwości mechanicznych. Możemy przyjąć, że wzmocnienie nie modyfikuje właściwości mechanicznych dla większych dewiatorów, a zwłaszcza wytrzymałości na rozrywanie, jeżeli obciążenie średnie pozostaje stałe (punkty 16, 17 i 18).

2.3. Anizotropia próbek zwykłych. Zmiana obciążenia jednostajnego działającego na krawędziach próbki powoduje ogólnie odkształcenie anizotropowe. Stosunek pomiędzy najmniejszymi i największymi odkształceniami zgodnymi z kierunkami naprężeń głównych nazywamy współczynnikiem anizotropii (a).

Tablica 3. Anizotropia wypełniania; wpływ wstrząsów
(Wyniki badań M. Wiendiecka z Uniwersytetu w Grenoble)

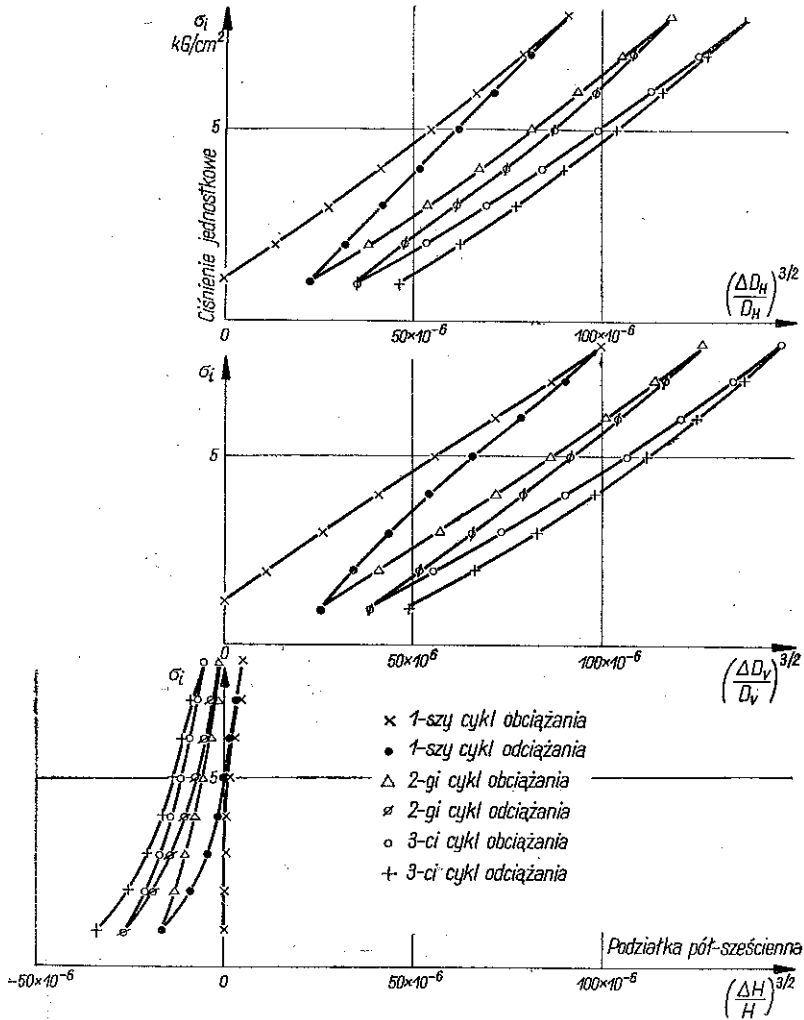
	Kulki szklane				Kulki szklane				Piasek			
	$\Phi = 0,1$ mm				$\Phi = 1,0$ mm				50% 1 mm ; 50% 0,4 mm			
	bez wstrząsów		przy wstrząsach		bez wstrząsów		przy wstrząsach		bez wstrząsów		przy wstrząsach	
	F_1	F_2	E_1	E_2	B_1	B_2	A_1	A_2	D_1	D_2	C_1	C_2
γ_a przy $\sigma_i = 0,6$ kG/cm ²	1,75	1,75	1,84	1,87	1,73	1,73	1,84	1,84	1,48	1,48	1,72 (1,70)	1,72 (1,70)
$a = (\Delta H/H)/(\Delta D/D)$; przy $\sigma_i = 0$, (ekstrapolacja)	0,74	0,77	0,97	0,99	0,54	0,58	0,66	0,68	0,28	0,22	0,63	0,59
	0,64	0,60	0,82	1,15	0,53	0,56	0,63	0,65	0,09	0,11	0,61	0,57

Dla kulek wsypanych zwyczajnie do formy obserwujemy w sąsiedztwie obciążenia izotropowego 0,6 kG/cm² współczynnik anizotropii 0,55 przy kulkach o średnicy 1 mm, zaś 0,75 przy kulkach o średnicy 0,1 mm. Anizotropia ta jest wywołana wpływem siły ciężkości, odkształcenia są mniejsze w kierunku napelniania. Siła ciężkości gra rolę analogiczną do dewiatora naprężenia przyłożonego do próbki izotropowej (rys. 21 i 15).

Pomiary były przeprowadzone z dokładnością do setnej części milimetra. W czasie pomiaru powłoczka kauczukowa była uchwycona między dwie płytki metalowe o powierzchni kilku centymetrów kwadratowych, aby w kauczuku łatwo powstawał stan naprężenia izotropowego i aby kształt kulek nie miał wpływu. Płytki metalowe wewnętrzna wydaje się niepotrzebna, jeżeli kulki mają średnicę poniżej jednej dziesiątej grubości powłoczki. W pierwszych pomiarach głowica próbki była wklęsła,

aby wszystkie przyrządy pomiarowe mogły oprzeć się na kulkach za pośrednictwem powłoczki w celu usunięcia wpływu tej ostatniej.

Można mieć wątpliwości co do tego, że pomiary poprzednie były wykonane na próbkach, w których kierunek wypełnienia odpowiadał szczególnemu kierunkowi próbki, w którym znajdowały się sztywne zakończenia. Dla usunięcia tych wą-

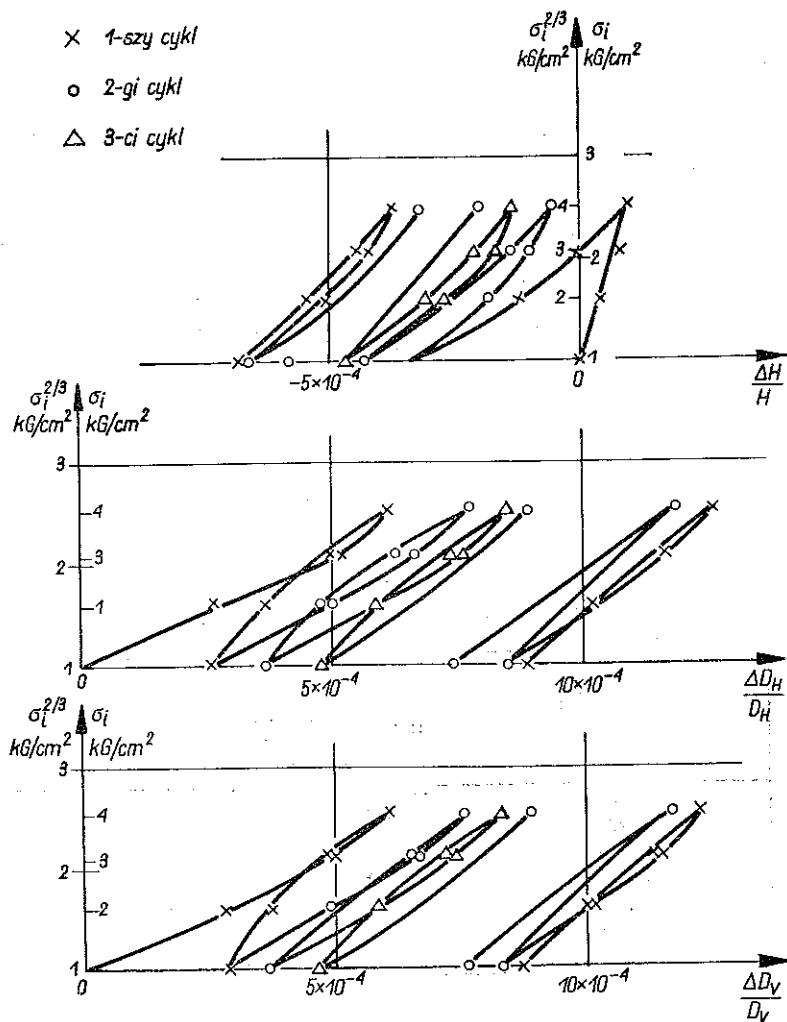


Rys. 21

pliwości wykonano próbki cylindryczne o przekroju kwadratowym, które były wypełnione zgodnie z normalnym kierunkiem osi. W tym drugim typie doświadczenia końce sztywne mają jednakowy wpływ na dwa kierunki prostopadłe do osi próbki. Doświadczenie wykazuje, że najmniejsze odkształcenie występuje w nowym kierunku wypełnienia. Zauważono oprócz tego, że w dwóch innych kierunkach odkształcenia są prawie równe. Można wywnioskować, że wpływ sztywnych koń-

ców jest praktycznie równy zero dla próbek mało ściśliwych pod obciążeniem równomiernym. Przestaje to być słuszne dla dużych odkształceń przy dowolnym stanie naprężenia.

Można wywnioskować, że naturalny zbiór materiałów rozdrobnionych jest anizotropowy, nawet jeżeli cząstki są kuliste. Prawdopodobnie ta anizotropia jest



Rys. 22

bardzo słaba, jeśli cząstki są bardzo małe. Kulki o średnicy 0,1 mm wykazują już słabą anizotropię, gdyż istnieją między cząstkami siły wiązania, znaczne w stosunku do ich ciężaru własnego.

Na próbkach, które wytrzymały zgniecenie rzędu 1%, np. w aparacie trójosiowym, obserwujemy odkształcenie anizotropowe, jeżeli spowodujemy zmianę jednostajnego obciążenia zewnętrznego. Odkształcenie jest dużo mniejsze w kierunku po-

przedniego większego naprężenia głównego. Można nawet zaobserwować pęcznienie w tym kierunku po każdym cyklu zmiany obciążenia, jeżeli ściskanie początkowe było dosyć duże (rys. 22). Sukcesywne cykle prowadzą stopniowo do odkształceń izotropowych próbki. Anizotropię można jeszcze zauważyć przy ścisaniu osiowym, jeżeli wypełnianie było wykonane w kierunku pionowym. Pęcznienie jest wtedy w tym kierunku większe.

Można zauważyć, że anizotropia może być osłabiona przez cykle zmian obciążenia równomiernego. Jeżeli próbkę wibrujemy pod obciążeniem równomiernym, to wynik jest lepszy. Anizotropię eliminuje się przez wibrację tak samo, jak usuwa się naprężenia metali przez podgrzewanie. Odwrotnie, jeżeli próbkę wibruje się lekko przy stanie naprężenia anizotropowego, to zwiększa się anizotropię odpowiadającą stanowi aktualnego naprężenia.

Równowaga graniczna próbek z kulek szklanych. Po odkształceniu osiowym od 3 do 7% w zależności od tego, czy gęstość jest duża, czy mała, dewiator naprężenia osiąga maksimum. Obwiednie kół Mohra stanowi dokładnie prosta.

Tablica 4

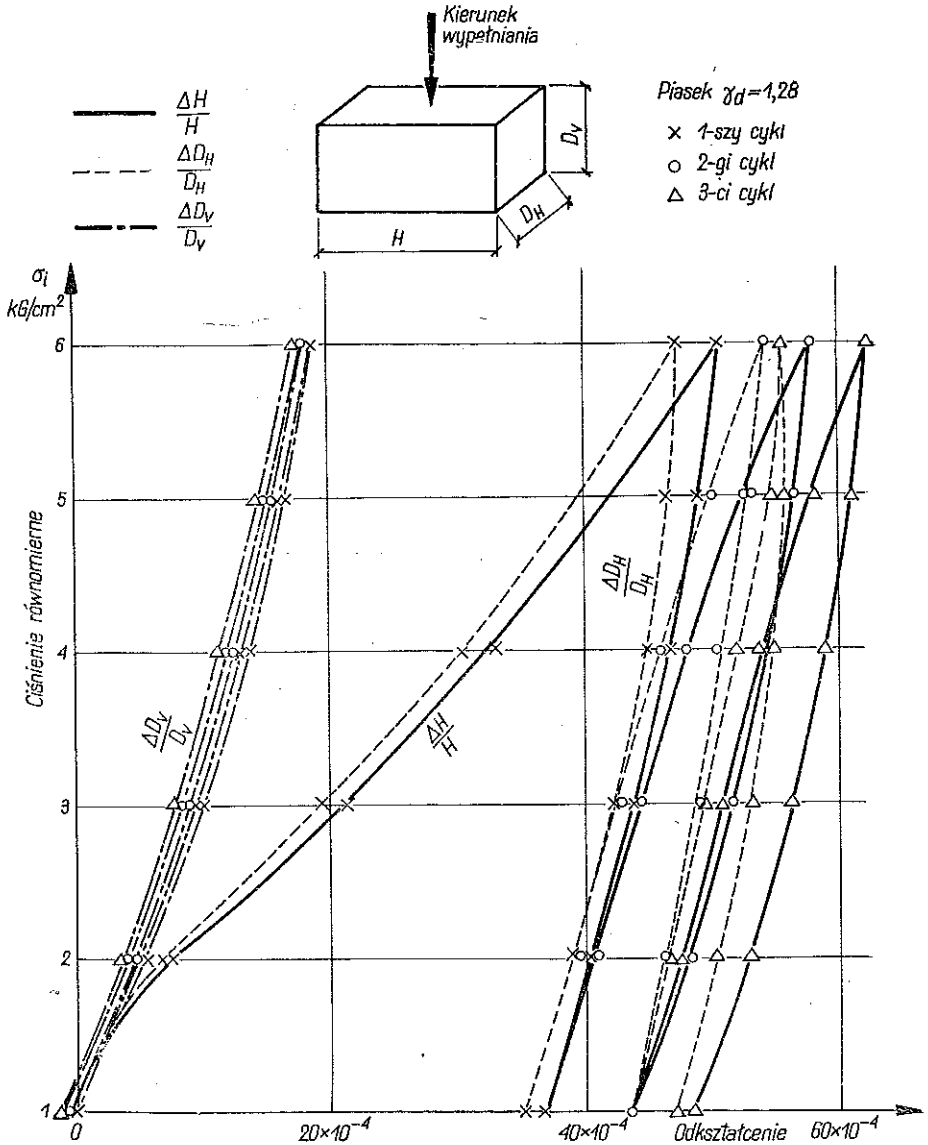
γ_a	1,75	1,85
Kulki 1 mm	24°	28°30'
Kulki 0,1 mm	26°	30°

Dla odkształceń większych od poprzednich dewiator i gęstość pozostaną stałe. Gęstość ta wzrasta wraz z naprężeniem średnim. Wszystkie doświadczenia w aparacie trójosiowym wykazują, że dewiator pozostaje stały w końcowej fazie zgniatania; natomiast rzadko obserwuje się stałą objętość próbek podczas tego okresu. Jak wykazano w przypadku wałeczków, pochodzi to od wzmocnienia spowodowanego sztywnymi końcówkami, które powoduje stan naprężenia i odkształcenia niejednorodny w próbce. Stan plastyczny przejawia się przede wszystkim w strefie środkowej próbki, która zwiększa się stopniowo. Zauważono więc zmiany objętości wskutek występowania strefy uplastycznienia, która stopniowo rośnie. Aby uniknąć tego, skonstruowano aparat z podstawami stożkowymi o kącie wewnętrznym $\pi/2 - \Phi$, które pozwalają na powstawanie pola jednorodnego naprężenia podczas całego ściskania.

2.4. Własności mechaniczne piasku. Przeprowadzono doświadczenia na dwóch typach uziarnienia: na piasku 0,1 mm lub na piasku 0,4 mm zmieszany z piaskiem 1 mm. Próbki miały wymiary $14 \times 14 \times 25$ cm.

Na rysunku 23 widać, że piasek bardzo wyraźnie podlega półsześciennemu prawu sprężystości. Moduł półsześcienny jest rzędu 80 000 kG/cm² dla piasku 0,1 mm o gęstości 1,3 i 160 000 kG/cm² dla gęstości 1,6 dla drugiego typu uziarnienia. Ścisłość piasku jest wyraźnie większa niż kulek szklanych. Zjawisko to jest spowodowane przez styki na krawędziach, gdzie promienie krzywizn są bardzo małe.

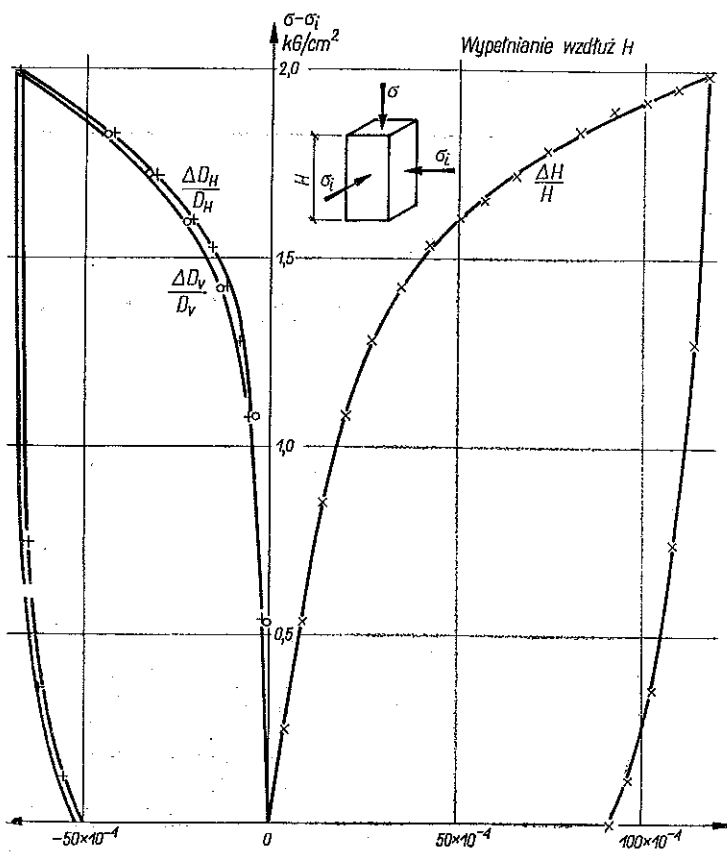
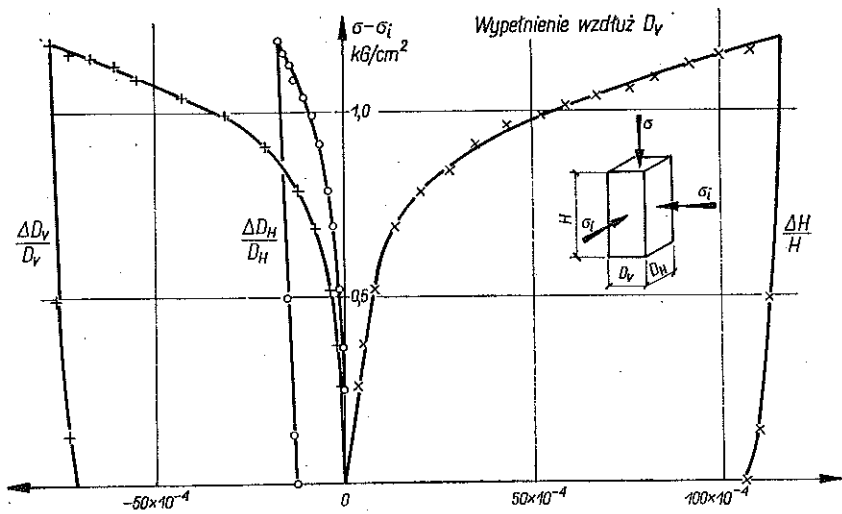
Jeżeli spowodujemy wzrost obciążenia jednostajnego przyłożonego do próbki zaraz po jej uformowaniu, to obserwujemy wyraźnie mniejsze odkształcenie w kierunku wypełniania. Aby wyeliminować wszelki błąd wynikający z metody pomiaru



Rys. 23

oraz kształtu próbki i wpływu ograniczających płytek, wypełnienie było wykonywane nie tylko zgodnie z osią H (rys. 25), ale także w kierunku prostopadłym.

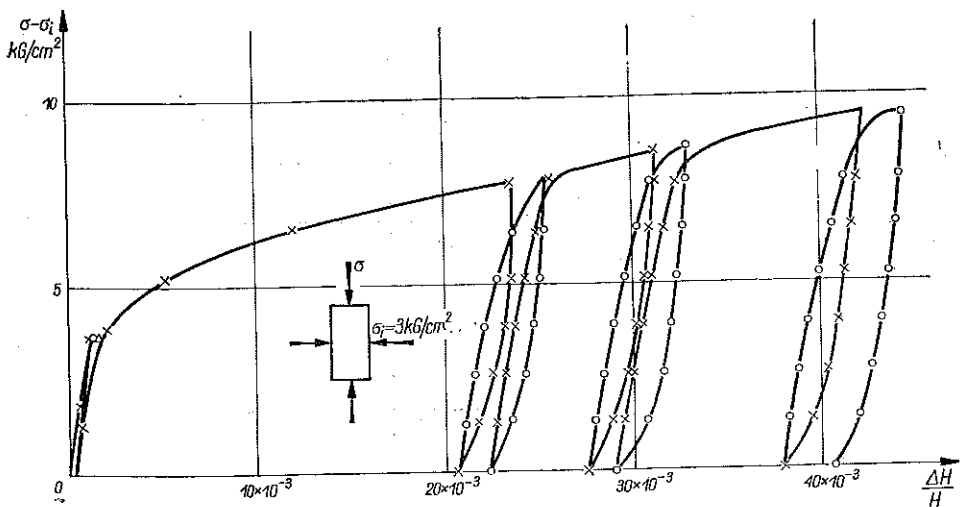
W drugim lub trzecim cyklu odkształcenie staje się prawie odwracalne i izotropowe. Jeżeli jednak wykonamy ściskanie osiowe, to zaobserwujemy odkształcenia



trwałe różne w dwóch kierunkach prostopadłych. Jeżeli nasypywanie było przeprowadzone z boku, to odkształcenie jest większe w tym ostatnim kierunku, co ma tendencję do spowodowania izotropii próbki w płaszczyźnie prostopadłej do osi, gdzie naprężenia są izotropowe. Stwierdzono więc ponownie, że odkształcenia trwałe w polu naprężeń izotropowych sprzyjają izotropii materiału. Stwierdzono oprócz tego, że próbka może wykazywać sprężystość izotropową pod obciążeniem jednorodnym i zachować mimo to układ geometrycznie anizotropowy, który przejawia się w odkształceniach trwałych, np. podczas ściskania osiowego. Pod obciążeniem jednostajnym, występuje jednak zawsze nieznaczna anizotropia odkształceń odwracalnych, która zależy od przebiegu odkształceń trwałych.

Jeżeli ściśniemy próbkę wzdłuż jej osi wywołując skrócenie rzędu około 1%, to wywołamy anizotropię, którą możemy zaobserwować zmieniając potem obciążenia jednostajne na obwodzie.

W miarę jak obciążenie wzrasta, odkształcenie jest dużo mniejsze w kierunku większego naprężenia głównego poprzedniego tensora. Jeżeli znowu przyłożymy początkowe obciążenie izotropowe, to stwierdzimy nawet rozciąganie w kierunku uprzywilejowanym. Następne cykle prowadzą stopniowo do odkształcenia sprężystego w przybliżeniu izotropowego.



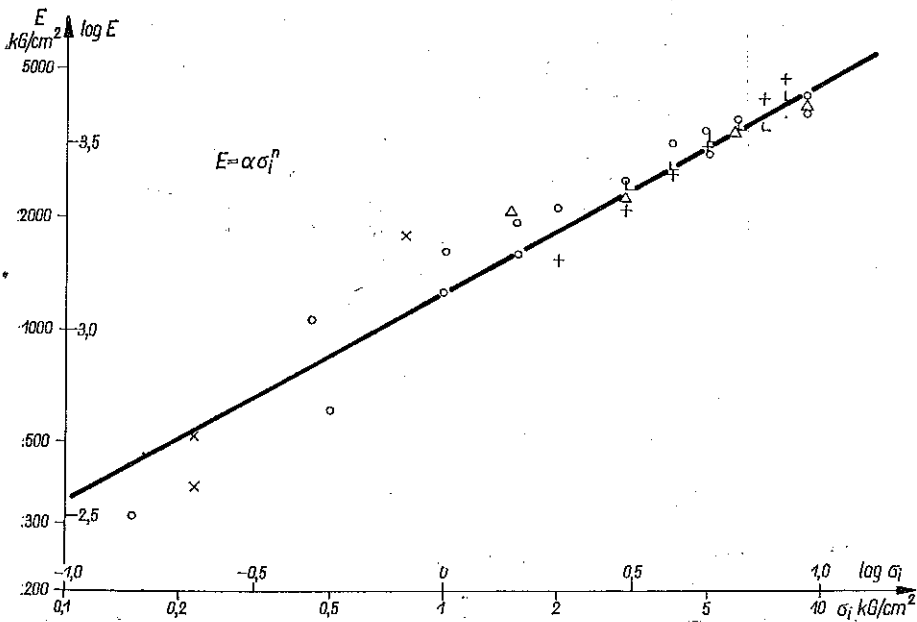
Rys. 26

Obserwuje się zjawisko wzmocnienia po przyłożeniu dewiatora podobnie jak przy próbkach z kulek (rys. 26). W przypadku kulek doświadczenia i rozważania teoretyczne wykazały, że dewiator mający orientację różną od poprzedniego powoduje zawsze odkształcenia trwałe. Widocznie dla piasku istnieje ogólnie strefa sprężysta, niezależnie od kierunku kolejnych dewiatorów, jeżeli rozdziela je przynajmniej jeden cykl izotropowy. W rezultacie doświadczenie wskazuje na to, że próbka wykazująca anizotropię powstałą na skutek wypełniania bocznego, następnie poddana różnym obciążeniom jednostajnym, posiada strefę sprężystą dla dewia-

fora prostopadłego do kierunku wypełnienia. Rysunek 24 przedstawia bardzo wyraźnie przegięcie na krzywej naprężenie-odkształcenie, które nie występowało w wypadku kulek (rys. 16). Wydaje się jednak, że nachylenie pierwszej części krzywej jest łagodniejsze niż dla następnych cykli odwracalnych. Wzmocnienie powinno lekko zmienić moduł sprężystości lub raczej nieodwracalność dla tensorów naprężeń, które nie pokrywają się z tensorem wzmocnienia.

Obserwuje się w rzeczywistości, że granica sprężystości w kierunku osi H jest większa, jeżeli wypełnianie odbywa się wzdłuż tej osi (rys. 25), niż gdyby odbywało się w kierunku prostopadłym (rys. 24). Widać więc, że wypełnienie jest równoznaczne ze ścisaniem w kierunku ciężenia. Można przyjąć, że oprócz efektu Bauschingera (B, B') wzmocnienie jednoosiowe (E, E') powoduje zmniejszenie (C, C') granicy sprężystości dla obciążenia σ_i prostopadłego do obciążenia wywołującego wzmocnienie (rys. 24). Jeżeli spróbujemy ekstrapolować te wyniki dla zagadnienia płaskiego, wydaje się, że anizotropowa granica sprężystości dla tensora tego samego kierunku co tensor wzmocnienia mogłaby być w przybliżeniu przedstawiona za pomocą krzywej przesuniętej w kierunku drugiej dwusiecznej (rys. 2).

Jak wykazano, prawo sprężystości półszesciennej jest słuszne dla piasku poddanego obciążeniu równomiernemu, a więc moduł izotropowy sprężystości liniowej



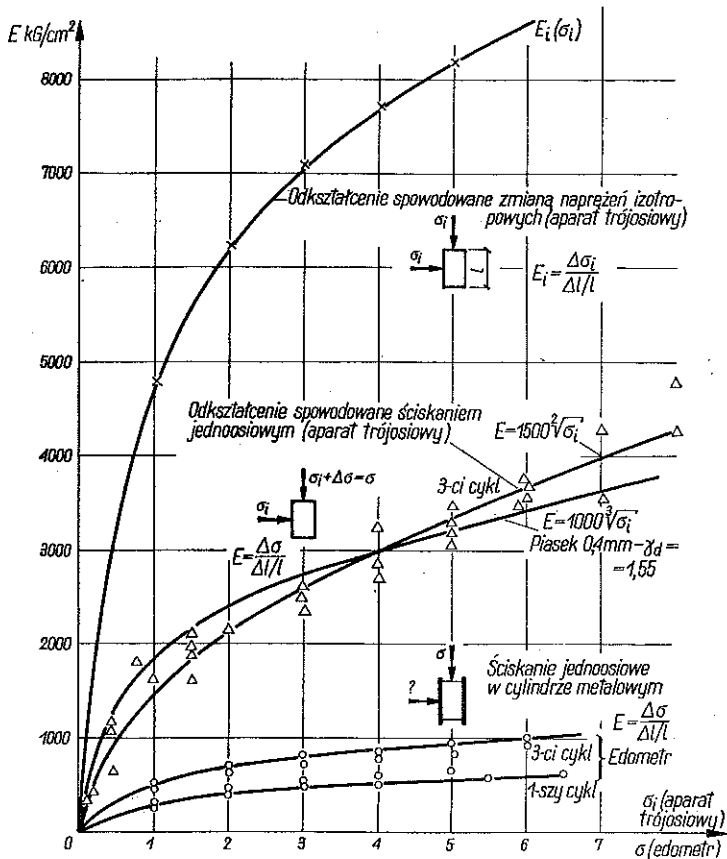
Rys. 27

jest proporcjonalny do pierwiastka szóstego stopnia z obciążenia średniego. Wartość zwykłego modułu przy zmianach obciążenia wzdłuż osi nie została zmieniona z tą samą dokładnością co poprzednia. Uogólniając różne wyniki doświadczeń z piaskiem 0,4 mm otrzymujemy bardzo szybki wzrost modułu między 0 a 1 kg/cm^2

obciążenia średniego (rys. 27). Wydaje się, że wartości doświadczalne modułu sprężystości otrzymywane po kilku cyklach mogłyby być w przybliżeniu przedstawione przez następujące prawo:

$$E = \alpha \sigma_i^n, \quad 0,5 < n < 0,6.$$

Dla tego samego piasku moduł edometryczny jest wyraźnie mniejszy, jeżeli założy się, że poprzednie obciążenie średnie jest równe obciążeniu osiowemu w edometrze. W rzeczywistości należałoby porównać obciążenie średnie w edometrze, które jest



Rys. 28

znacznie mniejsze. Zresztą w aparacie trójosiowym dziewięć naprężenia rośnie sukcesywnie i pozostaje mały; możliwe jest, że w edometrze dziewięć naprężeń będzie większe, co tłumaczyłoby większą odkształcalność, która na pierwszy rzut oka wydaje się niemożliwa. Odkształcenie zależy nie tylko od stanu naprężenia początkowego i końcowego, ale i od przebytej drogi. Aby przeprowadzić bardziej dokładne pomiary modułu sprężystości, skonstruowano nowy aparat. Wyniki będą porównane z wynikami edometrycznymi, w których zostanie mierzone naprężenie

nie boczne. Ponieważ pomiary dotychczasowe nie były zbyt dokładne, nie porównano modułu sprężystości i modułu edometrycznego otrzymanego według teorii sprężystości.

Pomiary właściwości mechanicznych piasków przeprowadza się na aparatach różnych typów. Najstarszymi są aparaty bezpośredniego ścinania (puszka cylindryczna, prostopadłościenna). Obecnie doświadczenia przeprowadza się w aparatach trójosiowych, w których naprężenia przykłada się w dwóch kierunkach, a odkształcenie wzdłuż trzeciego kierunku. Aparat ten pozwala na mierzenie zmian objętości, posiada jednak liczne wady przy pomiarach dokładnych. Doświadczenia wykazują, że odkształcenie nie jest jednorodne; liczne badania dowiodły niejednorodności stanu naprężenia. Zwykle zakłada się, że w poziomej płaszczyźnie symetrii naprężenia są prostopadłe i równe sobie, co pozwala poznać tensor naprężenia w tej płaszczyźnie. Ten stan naprężenia jest funkcją przemieszczeń dwóch sztywnych końcówek próbki trójosiowej, lecz nie jest to jednak bezpośrednio związane z odkształceniem w sąsiedztwie płaszczyzny z powodu różnorodności odkształcenia.

Zmiany pomiaru objętości dokonujemy na całej próbce. Pomiar ten jest niedokładny, nawet jeżeli nie występują płaszczyzny poślizgu, ponieważ tensory naprężenia i odkształcenia zmieniają się wyraźnie od jednego punktu do drugiego. Nie można więc wiązać zmian mierzonej objętości ze stanem istotnego naprężenia ciała. Jest prawdopodobne, że plastyczność idealna występuje najpierw w środkowej strefie próbki, a następnie rozszerza się powoli na całą próbkę. Stan naprężenia może pozostać stały od momentu powstania tej strefy. Przeciwnie, odczytana zmiana objętości nie odpowiada temu stanowi z wyjątkiem może dużych odkształceń, w których plastyczność idealna istnieje w całej próbce, jakkolwiek tensory naprężeń nadal zmieniają orientację.

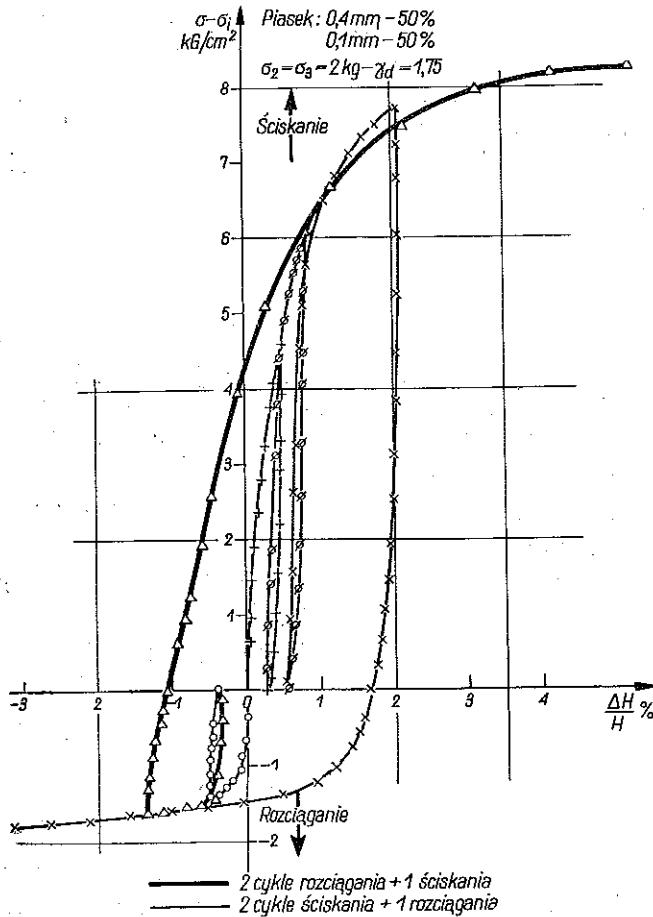
Dla uniknięcia tych trudności skonstruowano aparat o końcówkach sztywnych, stożkowych i chropowatych, posiadających kąt środkowy ($\pi/2 - \Phi$). Aparat ten ma za zadanie wywoływać stan naprężeń jednorodnych podczas całego odkształcenia.

Zresztą w «trójosiówce» dwa naprężenia są zawsze równe, co znacznie ogranicza możliwości aparatu. Aby temu zapobiec zbudowano aparaty, w których można skutecznie zmieniać naprężenia wzdłuż trzech osi. Istnieją również aparaty wykorzystujące próbki rurkowe, jak dla metali. Zbudowany przez autora aparat tego typu pozwalał wywoływać skręcanie, zmiany naprężeń wzdłuż trzech osi oraz na ściankach wewnętrznych i zewnętrznych. W rzeczywistości nie jest to jeszcze wystarczające dla zbadania właściwości materiału anizotropowego.

Przeprowadzając ściskanie (lub rozciąganie) w zwykłym aparacie trójosiowym stwierdzamy, że można wytworzyć obszar sprężysty. Jeżeli następnie przeprowadzimy rozciąganie (albo ściskanie), zauważymy, że granica sprężystości, o ile taka istnieje, staje się niższa albo nawet ujemna i że odkształcenie jest tylko częściowo odwracalne (rys. 29).

Wzmocnienie spowodowane przez zwiększenie naprężenia nie zmienia właściwości ośrodka, jeżeli naprężenie to dalej wzrasta. Dewiator maksymalny i koń-

cowy plastyczności idealnej nie zmieniają się na skutek poprzedniego wzmocnienia. Granica sprężystości w tym kierunku nie może przekroczyć wartości granicznej, która odpowiada szczytowi krzywej «naprężenie-odkształcenie» (rys. 29). Można zaobserwować górną granicę sprężystości odpowiadającą granicy plastyczności



Rys. 29

końcowej. Przy plastyczności idealnej ciało zachowuje się dokładnie tak, jak ciało sprężysto-plastyczne, jeżeli nie zmieniamy wielkości naprężenia wzmacniającego.

Pomiary poprzednie i analogie z materiałami sypkimi poprzednio używanymi pozwalają przypuszczać, że wzmocnienie prowadzi do granicy anizotropowej prawa sprężystości. Granica ta powinna być przedstawiona w przestrzeni sześć-wymiarowej albo pod postacią rodziny powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej, gdzie każda powierzchnia odpowiada pewnej określonej orientacji tensora przeznaczanego do badania granicy sprężystości.

Podczas wzmacniania zmiana objętości może być dodatnia, lub ujemna, zależnie od gęstości początkowej materiału i obciążenia średniego.

Plastyczność doskonała. Jeżeli wykonamy ściskanie próbki w aparacie trójosiowym, otrzymamy dla znacznego odkształcenia (10-20%) odcinek poziomy krzywej naprężenie-odkształcenie, dla którego tensor naprężenia jest stały, niezależnie od wielkości odkształcenia. Na tym poziomym odcinku (plastyczność idealna) gęstość materiału pozostaje stała, nazywamy ją gęstością krytyczną γ_c . Badania doświadczalne właściwości mechanicznych w obszarze plastyczności idealnej są mało dokładne, ponieważ trudno jest natychmiast przeprowadzić duże odkształcenia jednorodne.

Jeżeli ścisamy próbki o różnej gęstości lub próbki poddane uprzednio «rozciąganiu», otrzymujemy ten sam tensor naprężenia odpowiadający idealnej plastyczności. Użycie do badania próbki o odmiennej gęstości równa się poddaniu próbki pierwotnej pewnemu cyklowi naprężeń lub odkształceń. Wydaje się, że można by to uogólnić i przyjąć, że tensor naprężenia odpowiadający idealnej plastyczności jest niezależny od przeszłości materiału, a w szczególności od orientacji tensora w stosunku do tego materiału. Zauważono zresztą w przypadku wałeczków, że geometria układu w obszarze idealnej plastyczności miała taki sam obraz w stosunku do tensora naprężeń, niezależnie od jego orientacji. Być może, że w rozważanym obszarze uplastycznionym tensor odkształcenia zachowuje tę samą orientację i przemieszcza się po prostej drodze, na przykład linii prostej w przestrzeni odkształceń głównych. Jeżeli idealna plastyczność będzie osiągnięta dla danego tensora naprężenia niezależnie od jego orientacji, prawo może być przedstawione w przestrzeni naprężeń głównych przez powierzchnię. Powierzchnia ta jest symetryczna w stosunku do płaszczyzn dwusiecznych osi. Prawo jest izotropowe, chociaż geometria układu jest anizotropowa, ponieważ znaczne odkształcenie zacierza poprzednią anizotropię.

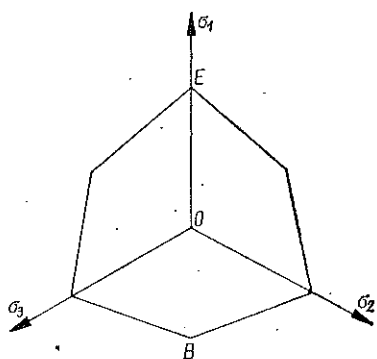
Prawo Coulomba odpowiada powierzchni stożkowej o przekroju sześciokątnym, gdzie stosunek dłuższego promienia sześciokąta do krótszego wynosi (rys. 30)

$$\frac{OE}{OB} = \frac{3 + \sin \Phi}{3 - \sin \Phi}$$

Gęstość krytyczna rośnie ze średnim obciążeniem (rys. 31).

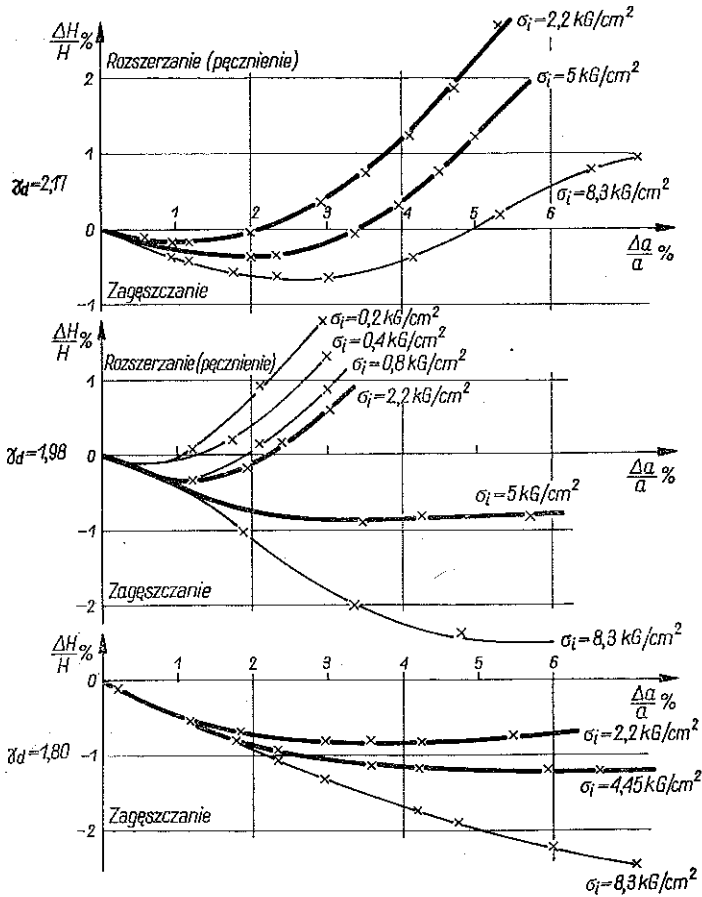
Maksymalna wytrzymałość mechaniczna. Maksymalne naprężenie przy ścisaniu w aparacie trójosiowym jest większe niż wytrzymałość w stanie plastyczności idealnej, jeśli gęstość początkowa jest większa od gęstości krytycznej, to znaczy, jeśli próbka była poddana uprzednio wzmocnieniu izotropowemu. W szczególności można otrzymać górną granicę sprężystości wyższą od wytrzymałości w stanie idealnej plastyczności.

Jeżeli próbka jest początkowo izotropowa i odkształcenie przebiega wzdłuż prostej zachowującej stały kierunek, maksymalna wytrzymałość mechaniczna jest wyrażona prawem izotropowym w przestrzeni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ślad Σ_1 tej powierzchni



Rys. 30

na płaszczyźnie oktaedrycznej jest miejscem geometrycznym punktów maksymalnej granicy sprężystości przy tym samym obciążeniu średnim. Rodziny krzywych przedstawiające granicę sprężystości znajdują się wszystkie wewnątrz Σ_1 . Przekrój ten jest prawdopodobnie sześciokątem analogicznym do sześciokąta idealnej pla-



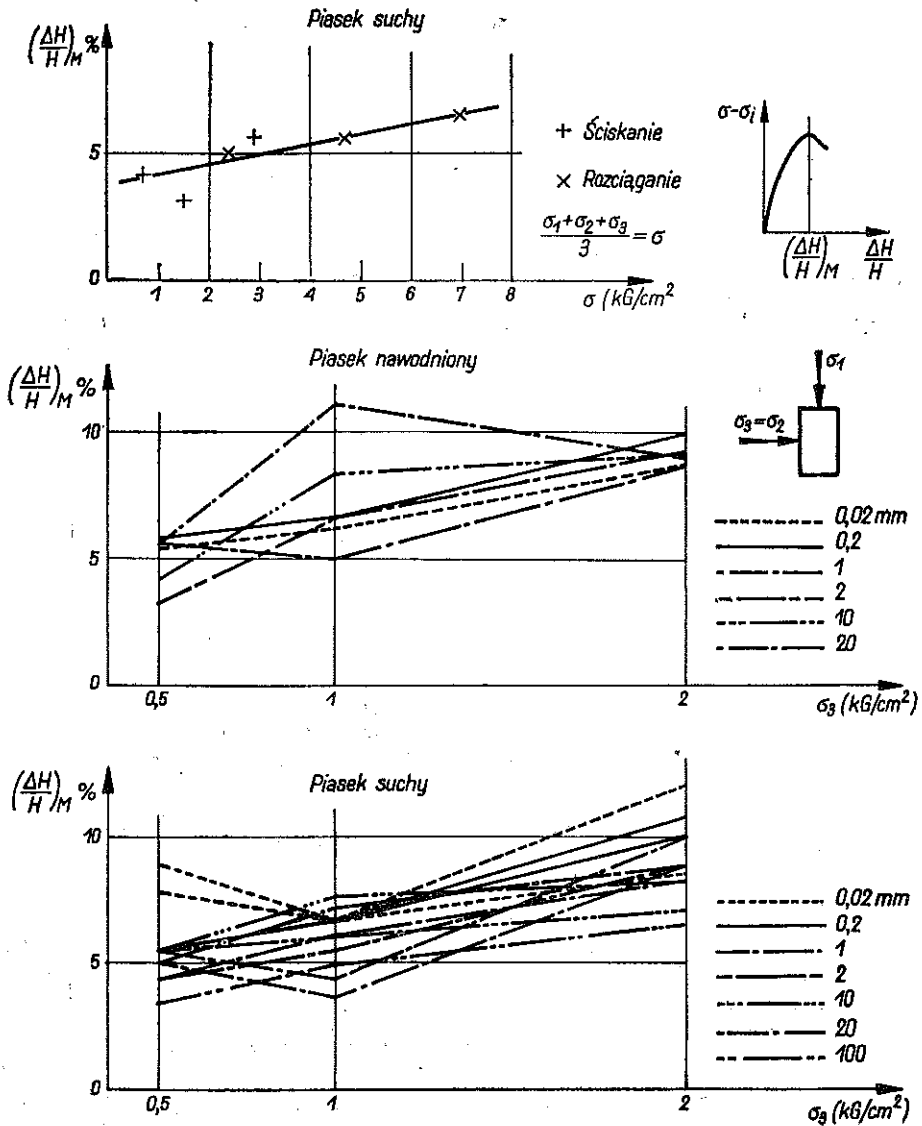
Rys. 31

styczności. Tymczasem wydaje się, na co wskazuje doświadczenie, że dewiator jest większy przy ścisaniu niż przy rozciąganiu ($\Phi = 41$ zamiast 35 dla $\gamma_a = 1,75$), co prowadziłoby do sześciokąta bardziej spłaszczonego niż to wskazuje wzór.

Jeżeli próbka jest początkowo izotropowa, ale odkształcenie (albo stan naprężenia) postępuje według cyklu nieliniowego albo ulega zmianie orientacji, powstaje anizotropia struktury, której forma zależy nie tylko od aktualnego tensora, ale od przebytej drogi. Wytrzymałość maksymalna jest prawdopodobnie przedstawiona za pomocą prawa anizotropowego w przestrzeni o sześciu wymiarach. Dlatego też poszukiwanie powierzchni wytrzymałości maksymalnej nie może być dokonane za pomocą aparatu trójosiowego na skręcanie ze ścisaniem i rozciąganiem jedno-

osiowym. Przeciwnie, aparaty te mogą być wykorzystane do otrzymywania powierzchni odpowiadającej plastyczności idealnej

Średnie odkształcenie osiowe odpowiadające maksymalnemu dewiatorowi różnie ze średnim obciążeniem (rys. 32) (z 3,0% na 6,5% dla obciążenia od 0,7 do 7 kG/cm²),



Rys. 32

a więc dla tego samego nacisku bocznego odkształcenia jest większe przy ścisnaniu niż przy rozciąganiu (6% zamiast 3,5% dla ciśnienia 2 kG/cm²).

Odkształcenie osiowe maleje, jeżeli gęstość rośnie (z 15% na 6%, jeżeli gęstość zmienia się z 1,43 na 1,75).

Odształcenie maleje, jeżeli szybkość ściskania rośnie.

Wytrzymałość mechaniczna piasku czystego jest niezależna od zawilgocenia (patrz tablica 5). Do doświadczenia użyto piasku granulowanego (0,5 mm). Wyniki badań trójosiowych o szybkości zmiennej podano w tablicy 5.

Tablica 5

Szybkość odształcenia w mm/min $h = 200$ mm	Φ w stopniach		γ_d (g/cm ³)
	suchy	nawodniony	
0,02	38° 5	38° 5	1,505
	37°		1,505
0,2	36° 6	38°	1,505
	36° 5		1,505
1	39° 2	37°	1,525
	40° 5	37° 4	1,512
2	37° 6	37°	1,505
	35°		1,505
10	38° 9	38°	1,505
	36° 3		1,505
20	36°	35° 5	1,505
	35° 5		1,505

Literatura cytowana w tekście

- [1] P. ANGLES D'AURIAC, *Representation graphique des états de contraintes ou de la déformation*, Bulletin de la Société Française des Mécaniciens, n° 21, 1956.
- [2] P. ANGLES D'AURIAC, *Contribution a l'étude de l'élasticité des corps tres déformables*, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Paris 1958.
- [3] G. SCHNEEBELI, *Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion*, Comptes-Rendus des Seances de l'Acad. des Scie., 243 (1956) p. 125.
- [4] G. SCHNEEBELI, *Une analogie mécanique pour l'étude de la stabilité des ouvrages en terre à deux dimensions*, Actes du Quatrième Congrès International de mécanique des Sols et des Travaux de Fondations, Londres 1957.
- [5] P. DANTU, *Contribution à l'étude mécanique et geometrique des milieux pulvérulents*, Actes du Quatrième Congrès Intern. de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations, Londres 1957.
- [6] P. DANTU, *Etude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maxima*, Actes du Cinquième Congrès Intern. de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations, Paris 1961.

Резюме

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВ

В работе дается описание и анализ результатов, касающихся раздробленных образцов тел, составляющих модели агрунтов.

Испытания проводились на образцах состоящих из стеклянных валиков, расположенных параллельно оси палочек в сечениях плавильных многоугольников с таким же расположением из стеклянных шариков или песку.

Размеры этих элементов были бы столь малыми, что модель обладала бы свойствами сплошной среды, а по меньшей мере верно отображала бы ее качественные свойства. Механические свойства испытываемых образцов зависели от системы элементов, упругих свойств зерен (или составных элементов), угла внутреннего трения, применяемого материала и т. п.

Summary

MECHANICAL PROPERTIES SOME MODELS OF SOILS

This paper is devoted to the description and analysis of some test results concerning problems of granular bodies representing continuous bodies.

The tests have been performed by means of samples composed of parallel glass rods of circular or polygonal cross-section, glass balls or sand. The dimensions of these elements were so small, that the properties of the model were practically those of a continuum, qualitatively at least.

Mechanical properties of the bodies tested depend on the arrangement of elements, elastic properties of grains (or elements) angle of internal friction material used etc.
