

WYBOCZENIE PRĘTÓW PROSTYCH O ZMIENNYCH SZTYWNOŚCIACH ZGINANIA

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienie stateczności sprężystej prętów prostych o zmiennych sztywnościach zginania można już obecnie zaliczyć do tych klasycznych problemów mechaniki, które zostały obszernie opracowane i opisane w literaturze technicznej.

Jak wiadomo, obliczenie sił krytycznych dla prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości własnych jednorodnych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Rozwiązania ściśle takich równań różniczkowych można tylko w pewnych szczególnych przypadkach wyrazić w postaci zamkniętych wzorów za pomocą znanych funkcji. Różne tego rodzaju rozwiązania są m.in. podane w monografiach F. BLEICHA [1], A. N. DINNIKA [2], J. NALESZKIEWICZA [3], A. R. RŻANICYNA [4] oraz w pracy [5] F. SZELĄGOWSKIEGO. W pracy [6] podano rozwiązanie zagadnienia wybooczenia sprężystego ustrojów ramowych, złożonych z prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych kwadratowych lub kołowych.

W wielu przypadkach znane metody sprowadzają zagadnienie do rozwiązania nieskończonych układów jednorodnych algebraicznych równań liniowych. Rozwiązania takie otrzymujemy np. przy zastosowaniu metody RITZA, TREFFTZA, GALERKINA oraz za pomocą metody równań całkowych FREDHOLMA drugiego rodzaju.

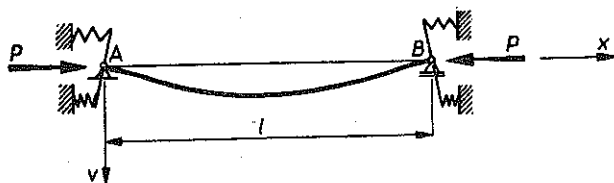
Ostatnia z wymienionych metod została zastosowana w pracy [7] przez W. NOWACKIEGO do rozwiązania różnych zagadnień z zakresie stateczności sprężystej prętów o stałych przekrojach poprzecznych i rusztów płaskich, a następnie w pracy [8] przez autora tej pracy do rozwiązania zagadnienia wybooczenia i drgań pręta prostego o dowolnie zmiennej sztywności zginania, swobodnie podpartego w obu końcach.

W pracy niniejszej stanowiącej udoskonalenie pracy [9] podano rozwiązanie zagadnienia wybooczenia sprężystego pręta prostego o dowolnej zmienności sztywności zginania dla różnych warunków brzegowych. Rozważano pręty podparte swobodnie, utwierdzone całkowicie i utwierdzone sprężysto. Rozwiązanie przy zastosowaniu metody ortogonalizacyjnej Galerkina doprowadzono do nieskończonego układu algebraicznych jednorodnych równań liniowych, w których wielkościami niewiadomymi są współczynniki FOURIERA. Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego otrzymanego układu równań stanowi warunek dla obliczenia siły krytycznej. Ze względu na fakt, że sumy wszystkich szeregów występujących w otrzy-

manym układzie równań udało się wyrazić w postaci całek, podane rozwiązanie może mieć duże znaczenie praktyczne.

2. Wyboczenie pręta sprężysto utwierdzonego w obu końcach

Rozważmy pręt prosty o zmiennej sztywności zginania $R(x) = E(x)I(x)$ ściskany osiowo stałą siłą i utwierdzony sprężysto na obu końcach (rys. 1).



Rys. 1

Równanie różniczkowe odkształconej przy wyboczeniu osi takiego pręta ma postać

$$(2.1) \quad \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{Plv(x) + M_A(l-x) + M_B x}{IR(x)} = 0,$$

gdzie M_A i M_B oznaczają momenty brzegowe, a pozostałe oznaczenia wyjaśniono na rys. 1.

Zakładamy, że funkcja $R(x)$ spełnia warunki regularności, gwarantujące dopuszczalność przekształceń, wykonanych w przedstawionym rozwiązaniu, oraz wyrażamy równanie osi odkształconej rozważonego pręta w postaci następującego sinusowego szeregu Fouriera:

$$(2.2) \quad v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin \alpha_m x,$$

gdzie

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{l}.$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że nie tylko w przypadku pręta swobodnie podpartego, lecz również w przypadku pręta utwierdzonego na jednym lub na obu końcach można wyznaczyć poprawnie wielkość siły krytycznej, wyrażając równanie osi odkształconej za pomocą szeregu (2.2) pomimo tego, że nie spełnia on warunku brzegowego w utwierdzonym końcu pręta.

Podstawiając szereg (2.2) do równania różniczkowego (2.1) otrzymujemy

$$(2.3) \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m \alpha_m^2 l \sin \alpha_m x = Pl \sum_{m=1}^{\infty} v_m \frac{\sin \alpha_m x}{R(x)} + \frac{M_A(l-x)}{R(x)} + \frac{M_B x}{R(x)}.$$

Stosując metodę ortogonalizacyjną GALERKINA, mnożymy obie strony równania (2.3) przez $\sin \alpha_l x$ oraz całkujemy względem x w granicach $x = 0$, $x = l$. W wyniku otrzymujemy następujący nieskończony układ algebraicznych równań liniowych:

$$(2.4) \quad v_i = \frac{2}{l^2 \alpha_i^2} \left(Pl \sum_{m=1}^{\infty} v_m a_{im} + M_A b_i + M_B c_i \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(2.5) \quad a_{im} = \int_0^l \frac{\sin \alpha_i x \sin \alpha_m x}{R(x)} dx, \quad b_i = \int_0^l \frac{(l-x) \sin \alpha_i x}{R(x)} dx,$$

$$c_i = \int_0^l \frac{x \sin \alpha_i x}{R(x)} dx.$$

W przypadku pręta sprężysto utwierdzonego w obu końcach muszą być spełnione warunki

$$(2.6) \quad \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]_{x=0} = -\vartheta_A M_A, \quad \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]_{x=l} = -\vartheta_B M_B,$$

gdzie ϑ_A i ϑ_B oznaczają odpowiednio kąty obrotów przekrojów podporowych pręta, wywołane odpowiednio momentami $M_A = 1$, $M_B = 1$.

Równania (2.6) po wykorzystaniu szeregu (2.2) przyjmują postać

$$(2.7) \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m a_m = -\vartheta_A M_A, \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m (-1)^m a_m = -\vartheta_B M_B.$$

Podstawiając prawą stronę równania (2.4) — po odpowiedniej zmianie indeksów — do równań (2.7), otrzymujemy następujący układ równań:

$$(2.8) \quad 2 \left(Pl \sum_{m=1}^{\infty} v_m S_{1m} + M_A S_{11} + M_B S_{12} \right) = -\vartheta_A l^2 M_A,$$

$$2 \left(Pl \sum_{m=1}^{\infty} v_m S_{2m} + M_A S_{21} + M_B S_{22} \right) = -\vartheta_B l^2 M_B,$$

gdzie

$$(2.9) \quad S_{1m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{km}}{\alpha_k}, \quad S_{11} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\alpha_k}, \quad S_{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha_k},$$

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{km}}{\alpha_k}, \quad S_{21} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{\alpha_k}, \quad S_{22} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{\alpha_k}.$$

Zmieniając w szeregach (2.9) kolejność sumowania i całkowania oraz wykorzystując znane sumy szeregów (por. np. [10]):

$$(2.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} = \frac{l-x}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \alpha_k x}{\alpha_k} = -\frac{x}{2},$$

znajdujemy sumy szeregów (2.9) w postaci następujących całek:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} S_{1m} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(l-x) \sin a_m x}{R(x)} dx, & S_{2m} &= -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{x \sin a_m x}{R(x)} dx, \\ S_{11} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{R(x)} dx, & S_{12} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{x(l-x)}{R(x)} dx, \\ S_{21} &= -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{x(l-x)}{R(x)} dx, & S_{22} &= -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{x^2}{R(x)} dx. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (2.8) względem momentów M_A , M_B znajdujemy:

$$(2.12) \quad M_A = \frac{Pl}{D} \sum_{m=1}^{\infty} v_m U_{1m}, \quad M_B = \frac{Pl}{D} \sum_{m=1}^{\infty} v_m U_{2m},$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{aligned} U_{1m} &= S_{2m} S_{12} - S_{1m} \left(S_{22} + \vartheta_B \frac{l^2}{2} \right), & U_{2m} &= S_{1m} S_{21} - S_{2m} \left(S_{11} + \vartheta_A \frac{l^2}{2} \right), \\ D &= \left(S_{11} + \vartheta_A \frac{l^2}{2} \right) \left(S_{22} + \vartheta_B \frac{l^2}{2} \right) - S_{12} S_{21}. \end{aligned}$$

W przypadku pręta utwierdzonego całkowicie na końcu A lub na końcu B należy przyjąć we wzorach (2.13) odpowiednio $\vartheta_A = 0$ lub $\vartheta_B = 0$.

Uwzględniając wyrażenia (2.12) przedstawimy układ równań (2.4) w następującej postaci:

$$(2.14) \quad v_i = \frac{2P}{l\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} v_m \left(a_{im} + \frac{b_1}{D} U_{1m} + \frac{c_i}{D} U_{2m} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie zagadnienia doprowadzono zatem do nieskończonego układu (2.14) algebraicznych, jednorodnych równań liniowych.

Przyrównując do zera wyznacznik podstawowy układu równań (2.14) otrzymujemy równanie

$$(2.15) \quad \det [Dl\alpha_i^2 \delta_{im} - 2P(Da_{im} + b_1 U_{1m} + c_i U_{2m})] = 0,$$

gdzie δ_{im} oznacza symbol Kroneckera.

Najmniejszy pierwiastek równania (2.15) daje siłę krytyczną P_{kr} w przypadku sprężystego, prostego pręta o zmiennej sztywności zginania, utwierdzonego sprężysto w obu końcach i ściskanego osiowo stałą siłą.

3. Inne przypadki

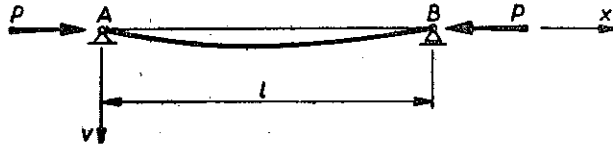
Przypadek 1. Rozważmy pręt swobodnie podparty na końcach (rys. 2). W tym przypadku $M_A = M_B = 0$ i układ równań (2.4) upraszcza się do postaci

$$(3.1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m (l\alpha_m^2 \delta_{im} - 2Pa_{im}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Z przyrównania do zera wyznacznika podstawowego układu równań (3.1) znajdujemy równanie

$$(3.2) \quad \det (\alpha_m^2 \delta_{im} - 2Pa_{im}) = 0,$$

którego najmniejszy pierwiastek daje siłę krytyczną.



Rys. 2

Rozwiązanie powyższe umożliwia również wyznaczenie siły krytycznej w przypadku pręta o jednym końcu utwierdzonym i drugim końcu swobodnym. Należy wtedy rozważyć pręt swobodnie podparty na obu końcach (dwa razy dłuższy) o odpowiednio dobranej sztywności zginania, zmiennej symetrycznie względem środka długości pręta.

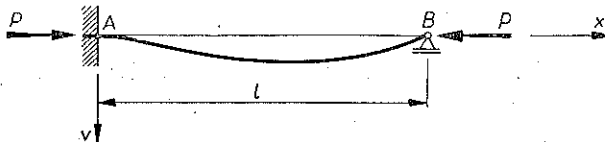
W przypadku pręta o stałej sztywności zginania R_0 zachodzi związek

$$(3.3) \quad a_{im} = \frac{l}{2R_0} \delta_{im}$$

i równanie (3.2) daje dla $m = 1$ znana wartość siły krytycznej

$$(3.4) \quad P_{kr} = \frac{\pi^2 R_0}{l^2}.$$

Przypadek 2. Rozważmy pręt całkowicie utwierdzony na podporze A i swobodnie podparty na podporze B (rys. 3).



Rys. 3

W tym przypadku $\vartheta_A = 0$ oraz $M_B = 0$ i układ równań (2.4) przyjmuje postać

$$(3.5) \quad v_i = \frac{2}{l^2 \alpha_i^2} \left(Pl \sum_{m=1}^{\infty} v_m a_{im} + M_A b_i \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Podstawiając wyrażenie (3.5) do pierwszego z warunków (2.7) (przy $\vartheta_A = 0$), znajdujemy

$$(3.6) \quad M_A = - \frac{Pl}{S_{11}} \sum_{m=1}^{\infty} v_m S_{1m}.$$

Uwzględniając wyrażenie (3.6) doprowadzamy układ równań (3.5) do następującej postaci

$$(3.7) \quad v_i = \frac{2P}{l\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} v_m C_{im}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

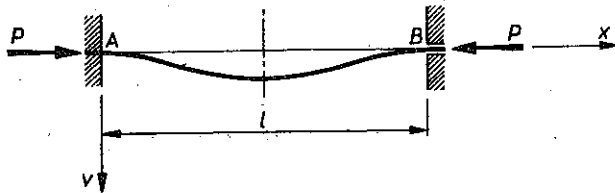
$$(3.8) \quad C_{im} = a_{im} - \frac{b_i S_{1m}}{S_{11}}.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego układu równań (3.7) daje równanie

$$(3.9) \quad \det(l\alpha_m^2 \delta_{im} - 2PC_{im}) = 0,$$

którego najmniejszy pierwiastek wyznacza siłę krytyczną.

Przypadek 3. Rozważmy wyboczenie pręta całkowicie utwierdzonego w obu końcach ($\vartheta_A = \vartheta_B = 0$), jeśli sztywność zginania zmienia się symetrycznie względem środka długości pręta (rys. 4).



Rys. 4

Ze względu na symetryczną postać wyboczenia pręta wskaźniki sumowania i, k, m przyjmują tylko wartości nieparzyste i zachodzi warunek

$$(3.10) \quad M_A = M_B.$$

W celu wykazania, że w tym przypadku wyrażenia (2.12) spełniają równanie (3.10) wykorzystujemy łatwy do sprawdzenia związek:

$$(3.11) \quad \int_0^l \frac{(l-x) \sin \alpha_k x}{R(x)} dx = -(-1)^k \int_0^l \frac{x \sin \alpha_k x}{R(l-x)} dx.$$

Ponieważ z warunku symetrii $R(x) = R(l-x)$, zatem na podstawie związku (3.11) dla $k = 1, 3, 5, \dots$ znajdujemy

$$(3.12) \quad b_k = c_k.$$

Uwzględniając równość (3.12) w szeregach (2.9) otrzymujemy związki:

$$(3.13) \quad S_{11} = -S_{22}, \quad S_{12} = -S_{21}, \quad S_{1m} = -S_{2m}.$$

Wykorzystanie związków (3.13) w wyrażeniach (2.13) prowadzi do warunku (3.10).

Uwzględniając związek (3.10) doprowadzamy układ równań (2.14) do postaci:

$$(3.14) \quad v_i = \frac{2P}{I\alpha_i^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} v_m G_{im}, \quad i = 1, 3, 5, \dots,$$

gdzie

$$(3.15) \quad G_{im} = a_{im} - \frac{f_i S_{1m}}{\bar{S}},$$

$$(3.16) \quad f_i = b_i + c_i = l \int_0^l \frac{\sin \alpha_i x}{R(x)} dx, \quad \bar{S} = S_{11} + S_{12} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha_k} = \frac{l^2}{4} \int_0^l \frac{dx}{R(x)}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik podstawowy układu równań (3.14) znajdujemy równanie:

$$(3.17) \quad \det(I\alpha_i^2 \delta_{im} - 2PG_{im}) = 0, \quad i, m = 1, 3, 5, \dots,$$

którego najmniejszy pierwiastek daje siłę krytyczną w przypadku pręta utwierdzonego w obu końcach o symetrycznie zmiennej sztywności zginania.

Przypadek 4. Rozważmy wyboczenie pręta o stałej sztywności zginania $R_0 = E_0 I_0$ całkowicie utwierdzonego na obu końcach.

W tym przypadku na podstawie wzorów (2.5), (2.9) i (3.16) znajdujemy

$$(3.18) \quad a_{im} = \frac{l}{2R_0} \delta_{im}, \quad f_i = \frac{2l}{\alpha_i R_0} \quad \text{dla } i = 1, 3, 5, \dots,$$

$$(3.19) \quad S_{1m} = \frac{l}{2\alpha_m R_0}, \quad \bar{S} = \frac{2l^3}{\pi^2 R_0} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Wykorzystując wyrażenia (3.18) oraz mając na uwadze, że w tym przypadku $M_A = M_B$ otrzymujemy na podstawie równania (2.4) związek

$$(3.20) \quad v_i = \frac{4M_A \lambda^2}{(i^2 - \lambda^2) i \pi P} \quad \text{dla } i = 1, 3, 5, \dots,$$

gdzie

$$(3.21) \quad \lambda^2 = \frac{Pl^2}{\pi^2 R_0}.$$

Podstawiając wyrażenia (3.18) i (3.19) do wzoru (3.15) znajdujemy

$$(3.22) \quad G_{im} = \frac{l}{2R_0} \left(\delta_{im} - \frac{2l^3}{\pi^2 im \bar{S} R_0} \right) \quad \text{dla } i = 1, 3, 5, \dots$$

Uwzględniając wzory (3.16), (3.18) oraz drugi ze wzorów (3.19) doprowadzamy układ równań (3.14) do następującego równania:

$$(3.23) \quad \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \lambda^2} = 0$$

wykorzystaniu znanej sumy szeregu

$$(3.24) \quad \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{\sin \pi\lambda} - \operatorname{ctg} \pi\lambda \right)$$

otrzymujemy

$$(3.25) \quad \cos \pi\lambda = 1.$$

Warunek (3.25) po wykorzystaniu wzoru (3.21) daje dla $\lambda = 2$ znaną wielkość siły krytycznej:

$$(3.26) \quad P_{kr} = \frac{4\pi^2 R_0}{l^2}.$$

4. Przykłady

Przykład 1. Obliczmy siłę krytyczną w przypadku pręta swobodnie podpartego w obu końcach, jeśli sztywność na zginanie zmienia się według funkcji

$$(4.1) \quad R(x) = R_0 z(x),$$

gdzie

$$(4.2) \quad z(x) = \frac{l^2}{sx^2 - slx + l^2}$$

oraz

$$(4.3) \quad s = 4(1 - k), \quad k = \frac{R_0}{R_s},$$

przy czym R_0 oznacza sztywność zginania w punkcie podparcia pręta, a R_s sztywność zginania w środku długości pręta.

Łatwo zauważyć, że w zależności od przyjętego stosunku k funkcja (4.1)–(4.2) umożliwi nadanie rozważanemu prętowi kształtu wypukłego lub wklęsłego o symetrycznej zmianie sztywności zginania względem środka długości pręta.

W rozważanym przypadku siłę krytyczną wyznaczmy na podstawie warunku (3.2) po obliczeniu wartości współczynnika a_{im} .

Podstawiając funkcję (4.1)–(4.2) do pierwszego ze wzorów (2.5) oraz wykonując całkowanie otrzymujemy

$$(4.4) \quad a_{ii} = \frac{l}{2R_0} \left(1 - \frac{s}{6} - \frac{s}{2\pi^2 i^2} \right) \quad \text{dla } i = m$$

oraz

$$(4.5) \quad a_{im} = \frac{2sl}{\pi^2 R_0} \frac{im [(-1)^{i+m} + 1]}{(i^2 - m^2)^2} \quad \text{dla } i \neq m.$$

Ograniczając w pierwszym przybliżeniu układ równań (3.1) do jednego równania oraz wykorzystując wzór (4.4), znajdujemy

$$(4.6) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 R_0}{l^2} \gamma_1,$$

gdzie współczynnik

$$(4.7) \quad \gamma_1 = \frac{6\pi^2}{6\pi^2 - s(\pi^2 + 3)} = \frac{3\pi^2}{\pi^8(1 + 2k) - 6(1 - k)}$$

zależy od stosunku $k = R_0/R_s$ i przy $k = 1$ jest $\gamma_1 = 1$.

Uwzględniając w następnym przybliżeniu w układzie równań (3.1) dwa równania, odpowiadające symetrycznej postaci wybożenia rozważanego pręta ($i, m = 1, 3, 5, \dots$), napiszemy warunek (3.2) w postaci równania

$$(4.8) \quad 4P^2(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + 2Pl(a_1^2a_{33} + a_3^2a_{11}) - la_1^2a_3^2 = 0.$$

Mniejszy pierwiastek równania (4.8) po wykorzystaniu wzorów (4.4) i (4.5) daje następujący wzór na wielkość siły krytycznej:

$$(4.9) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 R_0}{l^2} \gamma_2,$$

gdzie współczynnik

$$(4.10) \quad \gamma_2 = 24\pi^2 \cdot \frac{4(5A + 9s) - \sqrt{256A^2 + 6561s^2}}{16\pi^2(6 - s)A - 195s^2},$$

$$A = 3\pi^2(6 - s) - 10s.$$

Na podstawie wyprowadzonych wzorów (4.7) i (4.10) obliczono dla kilku stosunków k wartości współczynników γ_1 i γ_2 oraz zestawiono je w tablicy 1, wykazując w ten sposób w rozważanym przypadku dobrą zbieżność wyników, otrzymanych w dwóch kolejnych przybliżeniach.

Tablica 1. Wartości współczynników γ_1 i γ_2

	$k = 0,25$	$k = 0,50$	$k = 1,00$	$k = 2,00$	$k = 4,00$
γ_1	2,8734	1,7688	1,0000	0,5350	0,2772
γ_2	2,8341	1,7566	1,0000	0,5314	0,2766

Z porównania obliczonych wartości współczynników γ_1 i γ_2 wynika, że tylko przy $k = 0,25$ różnica tych wartości przekracza nieznacznie 1%, a w pozostałych przypadkach jest jeszcze mniejsza.

Przykład 2. Obliczmy siłę krytyczną w przypadku pręta całkowicie utwierdzonego na obu końcach o sztywności na zginanie zmiennej według funkcji (4.1)–(4.2).

Rozważmy symetryczną postać wybożenia pręta ($i, m = 1, 3, 5, \dots$).

Siłę krytyczną wyznaczmy z równania (3.17) po obliczeniu wartości współczynnika G_{im} .

Ponieważ składnik a_{im} wyraża się za pomocą wzorów (4.4), (4.5), a więc pozostaje do obliczenia wartość współczynnika f_i oraz całki S_{1m} i \bar{S} .

Podstawiając funkcję (4.1)–(4.2) do pierwszego ze wzorów (2.11) oraz do wzorów (3.16) i wykonując całkowanie, otrzymujemy

$$(4.11) \quad S_{1m} = \frac{l^2}{2\pi m R_0} \left(1 - \frac{2s}{\pi^2 m^2} \right), \quad f_i = \frac{2l^2}{\pi i R_0} \left(1 - \frac{2s}{\pi^2 i^2} \right),$$

$$\bar{S} = \frac{l^3}{4R_0} \left(1 - \frac{s}{6} \right),$$

gdzie $i, m = 1, 3, 5, \dots$

Podstawiając do wzoru (3.15) wyrażenia (4.4), (4.5) i (4.11) przedstawiamy współczynnik $K_{im} = G_{im} R_0/l$ w następującej postaci:

$$(4.12) \quad K_{ii} = \frac{\pi^4 i^4 (6-s)(6\pi^2 i^2 - \pi^2 i^2 s - 3s) - 288(\pi^2 i^2 - 2s)^2}{12\pi^6 i^6 (6-s)} \quad \text{dla } i = m,$$

$$K_{im} = \frac{4\pi^4 i^4 m^4 s(6-s) - 6(i^2 - m^2)^2(\pi^2 i^2 - 2s)(\pi^2 m^2 - 2s)}{\pi^6 i^3 m^3 (i^2 - m^2)^2 (6-s)} \quad \text{dla } i \neq m.$$

Ograniczając w pierwszym przybliżeniu układ równań (3.14) do jednego równania oraz wykorzystując wzór (4.12)₁, znajdujemy

$$(4.13) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 R_0}{l^2} \kappa_1,$$

gdzie

$$(4.14) \quad \kappa_1 = \frac{6\pi^6 (6-s)}{\pi^4 (6-s)(6\pi^2 - \pi^2 s - 3s) - 288(\pi^2 - 2s)^2}.$$

Wzór (4.14) daje wartości znacznie różniące się od wyników ścisłych, np. dla pręta o stałej sztywności zginania R_0 , tj. przy $s = 0$ $\kappa_1 = 5,2790$.

Uwzględniając w następnym przybliżeniu w układzie równań (3.14) dwa równania, odpowiadające symetrycznej postaci wybożenia rozważanego pręta ($i, m = 1, 3, 5, \dots$), otrzymujemy na podstawie warunku (3.17) równanie

$$(4.15) \quad 4P^2 (G_{13} G_{31} - G_{11} G_{33}) + 2Pl (\alpha_1^2 G_{33} + \alpha_3^2 G_{11}) - l^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2 = 0.$$

Mniejszy pierwiastek równania (4.15) daje następujący wzór na wielkość siły krytycznej:

$$(4.16) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 R_0}{l^2} \kappa_2,$$

gdzie po wykorzystaniu oznaczenia $K_{im} = G_{im} R_0/l$

$$(4.17) \quad \kappa_2 = \frac{9K_{11} + K_{33} - \sqrt{(9K_{11} - K_{33})^2 + 36K_{13}^2}}{4(K_{11} K_{33} - K_{13}^2)},$$

a współczynniki K_{11} , K_{13} i K_{33} wyrażają się za pomocą wzorów:

$$(4.18) \quad K_{11} = 324 [\pi^4 (6-s)(6\pi^2 - \pi^2 s - 3s) - 288(\pi^2 - 2s)^2] W^{-1},$$

$$K_{13} = 27 [27\pi^4 s(6-s) - 128(\pi^2 - 2s)(9\pi^2 - 2s)] W^{-1},$$

$$K_{33} = 4 [27\pi^4 (6-s)(18\pi^2 - 3\pi^2 s - s) - 32(9\pi^2 - 2s)^2] W^{-1},$$

$$W = 3888 \pi^6 (6-s).$$

Drugie przybliżenie daje w przypadku pręta o zmiennej sztywności zginania $s \neq 0$ wyniki znacznie różniące się od wyników otrzymanych w pierwszym przybliżeniu (tablica 2).

Wyznamy zatem jeszcze wielkość siły krytycznej w trzecim przybliżeniu.

Warunek (3.17) wyboczenia rozważanego pręta doprowadza w tym przypadku po wykorzystaniu wzorów (4.12) do następującego równania:

$$(4.19) \quad FP^3 - LP^2 + NP - Q = 0,$$

gdzie

$$(4.20) \quad \begin{aligned} P &= 8I^6 (K_{11} K_{33} K_{55} - K_{13}^2 K_{55} - K_{15}^2 K_{33} - K_{35}^2 K_{11} + 2K_{13} K_{15} K_{35}), \\ L &= 4\pi^2 R_0 I^4 (25K_{11} K_{33} + 9K_{11} K_{55} + K_{33} K_{55} - 25K_{13}^2 - 9K_{15}^2 - K_{35}^2), \\ N &= 2\pi^4 R_0^2 I^2 (225 K_{11} + 25K_{33} + 9K_{55}), \\ Q &= 225\pi^6 R_0^3. \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (4.12) znajdziemy

$$(4.21) \quad \begin{aligned} K_{15} &= 500 [625\pi^4 s (6 - s) - 3456 (\pi^2 - 2s) (25\pi^2 - 2s)] Z^{-1}, \\ K_{35} &= 125 [16875\pi^4 s (6 - s) - 512 (9\pi^2 - 2s) (25\pi^2 - 2s)] Z^{-1}, \\ K_{55} &= 48 [625\pi^4 (6 - s) (150\pi^2 - 25\pi^2 s - 3s) - 288 (25\pi^2 - 2s)^2] Z^{-1}, \end{aligned}$$

$$(4.22) \quad Z = 9 \cdot 10^6 \pi^6 (6 - s).$$

Najmniejszy dodatni pierwiastek równania (4.19) daje wielkość siły krytycznej, którą można wyrazić za pomocą wzoru:

$$(4.23) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 R_0}{I^2} \kappa_3,$$

gdzie wartość współczynnika κ_3 można łatwo obliczyć dla różnych wartości k (por. (4.3)).

Na podstawie wzorów (4.13), (4.16) i (4.23) obliczono dla kilku stosunków k wartości współczynników κ_i ($i = 1, 2, 3$) oraz zestawiono te wartości w tablicy 2, wykazując dobrą zbieżność wyników uzyskanych w drugim i w trzecim przybliżeniu (κ_2 i κ_3).

Tablica 2. Wartości współczynników $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$

	$k = 1,00$	$k = 2,00$	$k = 4,00$
κ_1	5,2790	3,6364	2,3475
κ_2	4,0721	2,5509	1,4985
κ_3	4,0165	2,5389	1,4904

Na podstawie wartości współczynnika κ_3 dla $k = 1,00$ (tj. dla pręta o stałym przekroju poprzecznym) można przypuszczać, że wartości κ_3 dla $k = 2,00, 4,00$ są

обчислене з wystarczającą dokładnością dla praktyki. Obliczone wartości współczynników κ_3 dla $k = 2,00, 4,00$ umożliwiają więc z dostatecznym przybliżeniem wyznaczenie ze wzoru (4.32) sił krytycznych w rozważonych przypadkach prętów wklęsłych o zmiennych sztywnościach zginania.

Wydaje się, że przedstawione w tej pracy rozwiązanie może mieć duże zastosowanie w praktyce, ponieważ umożliwia z dostatecznym przybliżeniem wyznaczenie sił krytycznych w prętach o zmiennych sztywnościach zginania oraz dla różnych warunków brzegowych. W pewnych przypadkach może tylko powodować trudności ścisłe obliczenie całek, które jednak można wyznaczyć za pomocą metod przybliżonych.

Literatura cytowana w tekście

1. Ф. Блех, *Устойчивость металлических конструкций*, перевод с англ., Москва 1959.
2. А. Н. Дьячик, *Продольный изгиб, Кричение*, Москва 1955.
3. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Warszawa 1953.
4. А. Р. Ржаницын, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Москва 1955.
5. F. SZELAĞOWSKI, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie bezwładności*, do-datek do nr 45 Przeglądu Technicznego, Warszawa 1927.
6. E. KRYNICKI i Z. MAZURKIEWICZ, *Zginanie i wyboczenie ustrojów ramowych, złożonych z prętów pełnych o zmiennych przekrojach poprzecznych*, Arch. Inżyn. Ładow., 2, 9 (1963).
7. W. NOWACKI, *Z zagadnień stateczności prętów prostych i rusztów płaskich*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 2 (1956).
8. Z. MAZURKIEWICZ, *Buckling and vibration of a non-homogeneous simply supported bar with regard to its own weight*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 11-12, 8 (1960).
9. Z. MAZURKIEWICZ, *Buckling of straight bars with arbitrarily varying flexural rigidities and under various boundary conditions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 9, 12 (1964).
10. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва—Ленинград 1951.

Резюме

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ НА ИЗГИБ

Дается решение задачи, касающейся продольного изгиба упругого прямого стержня с произвольной изменностью жесткости на изгиб и с различными краевыми условиями, подверженного действию постоянной осевой силы. Рассматриваются: стержни свободно опертые, полностью защемленные и упруго защемленные. Используя ортогонализированный метод Галеркина полученное решение сводится к бесконечной системе алгебраических однородных линейных уравнений, в которых неизвестными величинами являются коэффициенты Фурье. Приравнение к нулю основного детерминанта, полученной системы уравнений является условием для определения критической силы. Принимая во внимание то, что суммы всех рядов, существующих в полученной системе уравнений можно было выразить в виде интегралов, предложенное решение может иметь большое практическое значение. Приводятся конкретные примеры определения критических сил в случае стержней с переменной жесткостью изгиба, свободно опертых и полностью защемленных обоими концами.

S u m m a r y

BUCKLING OF STRAIGHT BARS OF VARIABLE FLEXURAL RIGIDITY

The paper is devoted to the solution of the elastic buckling problem of straight bars with flexural rigidity varying in an arbitrary manner, supported with various boundary conditions and subjected to the action of a constant axial force. Simply supported and rigidly or elastically clamped bars are considered. The solution (using the Galerkin orthogonalization method) is reduced to an infinite set of homogeneous linear algebraic equations with the Fourier coefficients as unknowns. Setting the principal determinant of this set of equations equal to zero we obtain the condition for calculating the critical force. In view of the fact that the sum of any series in the set of equations thus obtained can be expressed in the form of an integral the solution obtained may be of considerable practical importance. The paper contains some concrete examples of computing the critical force for bars of variable flexural rigidity, simply supported or rigidly clamped at both ends.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 stycznia 1965 r.
