

OBLICZANIE SPRĘŻYSTEJ I SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ STATECZNOŚCI PŁYT KOŁOWYCH O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI METODĄ ODWROTNA

ANTONI GAJEWSKI i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Występujące w praktyce płyty kołowe lub pierścieniowe, które mogą się wy-
boczyć wskutek działania sił w ich płaszczyźnie, są często płytami o zmiennej grubości,
a zatem zmiennej sztywności. Zmienna sztywność płyty jest czasem podyktowana
względami konstrukcyjnymi, czasem dążeniem do optymalnego wykorzystania
materiału płyty (kształtowanie ze względu na stateczność).

Wielkość obciążenia krytycznego przy sprężystym wyboczeniu płyt o zmiennej
sztywności obliczano różnymi metodami. Rozwiązania ściśle podano przede
wszystkim dla tych przypadków, w których można je wyrazić przez funkcje hiper-
geometryczne. Pierwszą jest tu praca R. GRAN-OLSSONA [8], który rozwiązał
problem stateczności płyty pierścieniowej o kwadratowo zmiennej sztywności
($D = D_1 r^2$), poddanej wszechstronnemu ściskaniu. Dwa lata później K. FEDERHOFER
[6] rozważył ogólniejszy przypadek ($h = Cr^n$) dla kilku wartości stałej n ; pracę
tę rozwinął H. EGGER [4]. Wreszcie dalszego uogólnienia na inne wartości stałej n
dokonał R. GRAN-OLSSON [9] przez zastosowanie rozwiązania w postaci funkcji
Whittakera.

Szczegółowej analizie zginania płyt kołowych o zmiennej grubości poświęcona
jest monografia A. D. KOWALENKI [11], jednak problemy stateczności są w niej
potraktowane marginesowo.

Pewne rozwiązania problemu stateczności sprężystej, wyrażone przez szeregi
potęgowe, podane są w pracy A. GAJEWSKIEGO [7]; omówiono tam również do-
tychczasowe osiągnięcia w zakresie analizy stateczności płyt prostokątnych o zmiennej
sztywności. Wyboczeniu płyt kołowych o zmiennej sztywności pod działaniem
pola temperatury poświęcone są prace R. A. ADADUROWA [1] i E. H. MANSFIELDA
[14].

W obecnej pracy podamy pewne rozwiązania uzyskane metodą odwrotną, mianowicie
metodą «założenia rozwiązania ściśłego», zastosowaną do problemów
wyboczenia prętów niepryzmatycznych w pracy M. ŻYCZKOWSKIEGO [23]. Podobną
metodę stosował również niedawno do problemu stateczności prętów niepryzma-
tycznych J. FADLE [5]. Jest ona również przydatna przy analizie problemów do-
tyczących ciał niejednorodnych (M. ŻYCZKOWSKI [26], W. OLSZAK i J. RYCHLEW-
SKI [16]). Metoda ta prowadzi w zasadzie do rozwiązań ścisłych, jednak nie dla

obranego z góry kształtu (lub niejednorodności), lecz dla otrzymanego przy danym rozkładzie ugięć lub naprężeń. Znaczenie praktyczne polega przede wszystkim na możliwości zachowania w rozwiązaniu pewnych parametrów i późniejszym dobraniu ich wartości tak, by uzyskać kształt zbliżony do danego. W tym sensie można tę metodę uważać za przybliżoną. Uzyskane rozwiązania ściśle mogą również służyć do weryfikacji różnych metod przybliżonych, a ponadto pogłębić ogólną orientację w zakresie stateczności płyt o zmiennej sztywności.

Szczególne znaczenie metody odwrotnej uwidacznia się jednak przy problemach wyboczenia sprężysto-plastycznego, gdzie stosowanie metody «wprost» jest poważnie utrudnione przez brak znajomości rozkładu modułu wyboczenia, który zależy właśnie od poszukiwanego obciążenia krytycznego. O ile nam wiadomo, rozwiązania problemu sprężysto-plastycznego wyboczenia płyt o zmiennej grubości nie są dotychczas znane; można, oczywiście, stosować obliczenia numeryczno-iteracyjne w połączeniu np. z metodą RITZA, (takie postępowanie sugeruje w odniesieniu do prętów A. N. DINNIK [3]), są one jednak żmudne, mało dokładne i pozbawione ogólności. Natomiast przy metodzie odwrotnej określenie kształtu pręta lub płyty przy wyboczeniu sprężysto-plastycznym, wobec znajomości obciążenia krytycznego, nie przedstawia większych trudności.

W pracy obecnej oprzemy się w zasadzie na prostej, technicznej teorii sprężysto-plastycznego wyboczenia płyt, podanej przez M. ROŠA i A. EICHINGERA, P. F. PAPPKOWICZA [17] i F. BLEICHA [2]. Moduł wyboczenia przyjmujemy zgodnie ze wzorem A. YLINENA [21 i 22]; ten wzór jest dogodny, ma prostą budowę i dobrą dokładność; był on już stosowany przy problemach stateczności prętów o zmiennym przekroju (I. SALA [18], M. WNUK i M. ŻYCZKOWSKI [20]), a także przy określaniu optymalnego kształtu pręta (F. P. LAASONEN [13]). Również i w naszym przypadku uzyskane wyniki pozwolą na oszacowanie oszczędności na ciężarze w stosunku do płyty o stałej grubości i tej samej sile krytycznej, co umożliwi optymalny dobór parametrów («Parametryczne kształtowanie wytrzymałościowe», W. KRZYŚ i M. ŻYCZKOWSKI [12]).

2. Sformułowanie zagadnienia w zakresie sprężystym

W pracy obecnej zajmiemy się jedynie płytami kołowymi lub pierścieniowymi, poddałymi w swojej płaszczyźnie wszechstronnemu równomiernemu ściskaniu siłą podłużną o natężeniu N . Taki stan uzyskujemy przez przyłożenie na wszystkich krawędziach płyty sił normalnych do konturu (czynnych lub biernych) o natężeniu N na jednostkę długości krawędzi. Założymy kołowo-symetryczną postać wyboczenia płyty przy jednej półfali w kierunku promieniowym; w rozpatrywanych problemach płyt zazwyczaj nie ma wątpliwości, że takie przyjęcie zapewnia minimum obciążenia krytycznego w przeciwieństwie np. do problemów stateczności powłok, gdzie ilość półfal z reguły nie daje się przewidzieć (ten fakt poważnie utrudniłby zastosowanie metody odwrotnej do analizy stateczności powłok). Przy powyższych założeniach równanie powierzchni ugięcia płyty po wyboczeniu przybiera postać

(A. D. KOWALENKO [11] po wprowadzeniu zmiany znaku przy N oraz pominięciu składników odpowiadających obciążeniu powierzchniowemu i cieplnemu)

$$(2.1) \quad \frac{d}{dr} \left\{ r \left[D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) + N \frac{dw}{dr} \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

oznacza sztywność walcową płyty, w ugięcie, h grubość płyty. Po przeprowadzeniu jednego całkowania możemy je napisać następująco:

$$(2.3) \quad z^2 Dw''' + (z^2 D' + zD) w'' + (\nu z D' - D + NR^2 z^2) w' = \bar{C}z,$$

przy czym dla wygody wprowadzono bezwymiarową zmienną $z = r/R$, gdzie R oznacza promień zewnętrzny płyty; przecinkiem oznaczono różniczkowanie względem z , a \bar{C} oznacza stałą całkowania, mającą znaczenie reakcji pionowej na podporze.

Dalszy tok postępowania zależy w sposób istotny od tego, czy płyta podparta jest w sposób statycznie wyznaczalny (ze względu na reakcję pionową), czy niewyznaczalny. Jeżeli mamy do czynienia ze statyczną wyznaczalnością, czyli podparcie występuje tylko na jednym okręgu, to reakcje pionowe są równe zeru (wobec braku sił «pionowych», prostopadłych do płaszczyzny płyty), zatem $\bar{C} = 0$. Ponadto wtedy, spośród trzech warunków brzegowych niezbędnych do scałkowania równania (2.3) ze względu na ugięcie w , tylko jeden dotyczy samej funkcji w , a pozostałe — pochodnych w' i w'' ; możemy więc, po oznaczeniu kąta ugięcia w kierunku promieniowym przez φ , gdzie $\varphi = -dw/dr$, napisać

$$(2.4) \quad z^2 D\varphi'' + (z^2 D' + zD) \varphi' + (\nu z D' - D + NR^2 z^2) \varphi = 0$$

i obliczać siłę krytyczną badając wyłącznie funkcję φ , gdyż mamy wtedy dla równania (2.4) do dyspozycji dwa warunki brzegowe. Warunki te mają mianowicie postać

$$(2.5) \quad \varphi = 0$$

na brzegu utwierdzonym albo w środku płyty kołowej, a

$$(2.6) \quad D \left(\varphi' + \frac{\nu}{z} \varphi \right) = 0$$

na brzegu swobodnym albo swobodnie podpartym. Różnica między tymi dwoma rodzajami podparć zanika w tym przypadku, gdyż zamiana jednego rodzaju na drugi powoduje tylko przesunięcie płyty jako ciała sztywnego (podparcie obu krawędzi lub dodatkowe w środku jest tu wykluczone). W dalszym ciągu będziemy się zajmować wyłącznie płytami statycznie wyznaczalnymi ze względu na reakcję pionową, więc będziemy korzystali z równania (2.4) i warunków brzegowych w postaci (2.5) i (2.6).

Metoda «założenia rozwiązania ścisłego» sprowadza się do założenia w równaniu (2.4) pewnej funkcji $\varphi = \varphi(z)$ i poszukiwaniu odpowiedniej funkcji $D = D(z)$,

określającej sztywność płyty oraz odpowiedniej siły krytycznej N . Różnica w stopniu trudności jest istotna, mianowicie otrzymujemy równanie tym razem tylko pierwszego rzędu, liniowe

$$(2.7) \quad \left(\varphi' + \frac{\nu\varphi}{z}\right)D' + \frac{d}{dz}\left(\varphi' + \frac{\varphi}{z}\right)D = -NR^2\varphi,$$

którego całkę ogólną można napisać przy dowolnej funkcji $\varphi = \varphi(z)$ w postaci

$$(2.8) \quad D = D(z) = \exp\left[-\int \frac{\frac{d}{dz}\left(\varphi' + \frac{\varphi}{z}\right)}{\varphi' + \frac{\nu\varphi}{z}} dz\right] \times \\ \times \left\{ C - NR^2 \int \frac{\varphi}{\varphi' + \frac{\nu\varphi}{z}} \exp\left[\int \frac{\frac{d}{dz}\left(\varphi' + \frac{\varphi}{z}\right)}{\varphi' + \frac{\nu\varphi}{z}} dz\right] dz \right\}.$$

Wzór ten nie jest tak prosty, jak w przypadku prętów, gdzie sztywność jest oczywiście określona za pomocą wzoru nie zawierającego całek [15] i [23], jednak umożliwia on uzyskanie rozwiązań efektywnych przy odpowiednim doborze funkcji $\varphi(z)$.

Osobną uwagę poświęcimy warunkom brzegowym. Warunek (2.5) należy do warunków geometrycznych, warunek (2.6) — do statycznych. Między obu typami warunków uwidacznia się tu zasadnicza różnica: warunek (2.5) musi być spełniony przez obraną funkcję $\varphi(z)$, natomiast (2.6) może być spełniony przez $\varphi(z)$, bądź też przez obliczoną funkcję $D(z)$. Obie możliwości spełnienia warunku statycznego (2.6) rozważymy teraz bardziej szczegółowo.

W pierwszym przypadku, gdy warunek (2.6) jest spełniony poprzez funkcję $\varphi(z)$, to sztywność D może być na odpowiedniej krawędzi różna od zera. W całce (2.8) pojawią się jednak osobliwości, bowiem współczynnik przy D' w równaniu (2.7), proporcjonalny właśnie do momentu promieniowego, zmierza w otoczeniu odpowiedniego punktu brzegowego do zera i równanie nie spełnia na ogół w otoczeniu tego punktu warunku Lipschitza. Stałą C należy wtedy wyznaczyć z warunku usunięcia osobliwości i otrzymujemy tu tylko jedno rozwiązanie. Jednakże niezbędne tu usunięcie osobliwości nie zawsze jest możliwe: warunkiem koniecznym jest to, by istniała nieosobliwa całka szczególna równania niejednorodnego. Nie wchodząc w szczegóły badania możliwych rodzajów osobliwości zauważymy, że całka taka zazwyczaj istnieje, gdy współczynnik przy D , mianowicie $\frac{d}{dz}\left(\varphi' + \frac{\varphi}{z}\right)$, nie jest jednocześnie równy zeru.

W drugim przypadku, gdy warunek (2.6) ma być spełniony poprzez funkcję $D(z)$, stałą C wyznaczamy właśnie z tego warunku. Prowadzi to zazwyczaj, przy obranej funkcji φ , do całej rodziny rozwiązań, bowiem warunek (2.6) przy specyfikowaniu funkcji φ nie interweniuje i jeden parametr pozostaje swobodny. Otrzymujemy tu zerowe sztywności na brzegu, co posiada znaczenie praktyczne,

szczególne przy założeniu wyboczenia sprężysto-plastycznego, bowiem wtedy nie oznacza to zerowej grubości płyty, a jedynie osiągnięcie przez naprężenia granicy plastyczności materiału.

Problem spełnienia warunków brzegowych zilustrujemy na prostszym przykładzie wyboczenia prętów. Z równania

$$(2.9) \quad (Dw'')'' + Pw'' = 0,$$

które jest słuszne dla dowolnego sposobu podparcia pręta, wynika znacznie prostszy od (2.8) wzór

$$(2.10) \quad D = \frac{C_1 + C_2 x - Pw}{w''}.$$

Założmy równanie linii ugięcia w trójparametrowej postaci ogólnej

$$(2.11) \quad w = a + \sin k(x + x_0)$$

przy parametrach a , k i x_0 ; mnożenie funkcji sinus przez stałą nie wniosłoby nic nowego. Rozważmy najpierw pręt o długości l obustronnie utwierdzony, a więc warunki czysto geometryczne: $w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0$. Z warunków na pochodną otrzymujemy dla pierwszej siły krytycznej $k = 2\pi/l$, $x_0 = l/4$, natomiast z obu warunków $w = 0$ wynika $a = -1$. Podstawienie tych wartości do (2.10) określa zmianę sztywności: z warunku usunięcia osobliwości $C_1 = -P$, $C_2 = 0$ i ostatecznie $D = Pl^2/4\pi^2 = \text{const}$. Otrzymujemy więc jedynie znane rozwiązanie dla pręta pryzmatycznego.

Przejdźmy do pręta zamocowanego dwuprzegubowo. Z warunków geometrycznych $w(0) = w(l) = 0$ wynika $x_0 = (\pi/2k) - l/2$, $a = -\cos(kl/2)$. Jeżeli zażądamy spełnienia warunków statycznych $D(0)w''(0) = D(l)w''(l) = 0$ przez funkcję w , to $k = \pi/l$, a po podstawieniu do (2.10) i «wygaszeniu» osobliwości $C_1 = C_2 = 0$ oraz $D = Pl^2/\pi^2 = \text{const}$. W tym przypadku podparcia możemy jednak otrzymywać również pręty niepryzmatyczne, spełniając warunki statyczne poprzez funkcję D . Nie przyjmując $k = \pi/l$ podstawiamy (2.11) z obliczonymi wartościami x_0 i a do (2.10); otrzymamy

$$(2.12) \quad D = \frac{C_1 + C_2 x + P \left[\cos \frac{kl}{2} - \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) \right]}{k^2 \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right)}.$$

Spełnienie warunków $D(0) = D(l) = 0$ prowadzi do $C_1 = C_2 = 0$, zatem ostatecznie kształt pręta będzie opisany równaniem (o parametrze swobodnym k zawartym w przedziale $0 < k \leq \pi/l$)

$$(2.13) \quad D = \frac{P \left[\cos \frac{kl}{2} - \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) \right]}{k^2 \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right)}.$$

Siłę krytyczną możemy teraz wyrazić przez sztywność w środku pręta, $x = l/2$,

$$(2.14) \quad P = \frac{k^2 D_0}{1 - \cos \frac{kl}{2}}.$$

Wróćmy obecnie do problemu stateczności płyt kołowych. Całkowanie we wzorze (2.8) może być wykonane efektywnie jedynie dla nielicznych funkcji $\varphi = \varphi(z)$. Rozważymy trzy przypadki: gdy $\varphi(z)$ jest całką równania Eulera (dwa przypadki) oraz gdy $\varphi(z)$ jest całką równania Bessela.

3. Funkcja $\varphi(z)$ w postaci rozwiązania równania Eulera (I)

Dla uzyskania możliwie prostych całek we wzorze (2.8) przyjmijmy zależność

$$(3.1) \quad \int \frac{\frac{d}{dz} \left(\varphi' + \frac{\varphi}{z} \right)}{\varphi' + \frac{\nu \varphi}{z}} dz = -\ln z^n,$$

gdzie n jest parametrem rzeczywistym o wartości chwilowo nieustalonej. Po zróżniczkowaniu (3.1) i uporządkowaniu otrzymujemy równanie typu Eulera:

$$(3.2) \quad z^2 \varphi'' + (n+1) z \varphi' - (1 - n\nu) \varphi = 0,$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(3.3) \quad \varphi(z) = C_1 z^{b - \frac{n}{2}} + C_2 z^{-b - \frac{n}{2}},$$

gdzie stała b jest określona za pomocą wzoru

$$(3.4) \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 4n\nu + 4}$$

i wobec $\nu \leq 1/2$ posiada przy dowolnym n wartość rzeczywistą.

3.1. Płyty kołowe pełne. Dla płyt pełnych (bez otworu środkowego) wymagane jest w każdym razie spełnienie warunku geometrycznego $\varphi(0) = 0$, co wyznacza stałą $C_2 = 0$. Kąt ugięcia $\varphi(z)$ jest więc tu określony za pomocą wzoru

$$(3.5) \quad \varphi(z) = C_1 z^{b - \frac{n}{2}}.$$

Płyta utwierdzona na brzegu. Mamy tu drugi warunek geometryczny $\varphi(1) = 0$, który jednak przez funkcję (3.5) nie może być spełniony i w rozważanym przypadku funkcja ta nie może znaleźć zastosowania.

Płyta swobodnie podparta na brzegu. Z warunku typu (2.6) wynika tutaj

$$(3.6) \quad C_1 D(1) \left(b - \frac{n}{2} + \nu \right) = 0.$$

Zatem możemy przyjąć jedynie $D(1) = 0$, bowiem przy $\nu \leq 1/2$ mamy zawsze $b - n/2 + \nu > 0$. Tak więc warunek brzegowy dotyczy funkcji $D(z)$; funkcja $\varphi(z)$ ma postać (3.5).

Z (2.8) wynika, że

$$(3.7) \quad D(z) = Cz^n - \frac{NR^2}{\left(b - \frac{n}{2} + \nu\right)(2-n)} z^2,$$

a po wyznaczeniu stałej C z warunku $D(1) = 0$ otrzymujemy

$$(3.8) \quad D(z) = \frac{NR^2}{\left(b - \frac{n}{2} + \nu\right)(2-n)} (z^n - z^2).$$

Dla zapewnienia skończonej wartości sztywności w środku płyty musimy dobrać parametr n z przedziału $n \geq 0$; przy $n = 0$ sztywność ta jest większa od zera, natomiast przy $n > 0$ otrzymujemy $D(0) = 0$.

Wielkość siły krytycznej N_k określimy po ustaleniu sztywności płyty w dowolnym punkcie $0 < z < 1$, najlepiej w połowie promienia płyty dla $z = 1/2$. Sztywność tę oznaczmy przez $D_{0,5}$; wtedy z odwrócenia (3.8) dla $z = 1/2$ wynika

$$(3.9) \quad N = N_k = \frac{\left(b - \frac{n}{2} + \nu\right)(n-2)2^{n+2}}{2^n - 2^2} \frac{D_{0,5}}{R^2}.$$

Wstawiając (3.9) do (3.8) otrzymujemy ostatecznie

$$(3.10) \quad D(z) = \frac{2^{n+2}}{2^2 - 2^n} (z^n - z^2) D_{0,5}.$$

W przypadku szczególnym $n = 0$ otrzymujemy różną od zera sztywność w środku płyty D_0 ; wtedy z odwrócenia (3.8) dla $z = 0$

$$(3.11) \quad N_k = 2(1 + \nu) \frac{D_0}{R^2},$$

a po podstawieniu do (3.8)

$$(3.12) \quad D(z) = (1 - z^2) D_0.$$

Grubość płyty przy wyboczeniu sprężystym jest więc określona za pomocą wzoru

$$(3.13) \quad h(z) = h_0 \sqrt[3]{1 - z^2}.$$

To proste rozwiązanie może posiadać duże znaczenie praktyczne, tym bardziej że, jak wykazemy później, kształt tej płyty jest z punktu widzenia jej ciężaru korzystniejszy od płyty o stałej grubości.

Przypadek szczególny $n = 2$ otrzymamy z (3.9) i (3.10) przez przejście do granicy:

$$(3.14) \quad N_k = \frac{4}{\ln 2} \left(\sqrt{2(1-\nu)} - 1 + \nu \right) \frac{D_{0,5}}{R^2}$$

oraz

$$(3.15) \quad D(z) = -\frac{4D_{0,5}}{\ln 2} z^2 \ln z.$$

3.2. Płyty pierścieniowe. Posłużymy się tu całą ogólną (3.3). Promień wewnętrzny płyty pierścieniowej oznaczmy przez R_1 , stosunek R_1/R przez η .

Wykażemy najpierw w sposób ogólny, iż spełnienie warunków brzegowych przez samą tylko funkcję φ (3.3) nie jest tu możliwe. W tym celu obliczmy najpierw proporcjonalne do momentu promieniowego wyrażenie

$$(3.16) \quad \varphi' + \frac{\nu\varphi}{z} = C_1 \left(b - \frac{n}{2} + \nu \right) z^{b - \frac{n}{2} - 1} - C_2 \left(b + \frac{n}{2} - \nu \right) z^{-b - \frac{n}{2} - 1}.$$

Tak więc oba wyrażenia (3.16) i (3.3) mają postać

$$(3.17) \quad F(z) = \bar{C}_1 z^{\alpha_1} + \bar{C}_2 z^{\alpha_2}.$$

W przypadku płyty pierścieniowej obustronnie utwierdzonej (ale przy jednym utwierdzeniu przesuwym w kierunku pionowym dla zapewnienia wspomnianej statycznej wyznaczalności) lub w przypadku płyty na jednej krawędzi swobodnej, na drugiej swobodnie podpartej otrzymywalibyśmy układ równań typu

$$(3.18) \quad \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = 0, \quad \bar{C}_1 \eta^{\alpha_1} + \bar{C}_2 \eta^{\alpha_2} = 0,$$

który mógłby posiadać rozwiązania niezerowe tylko przy $\eta^{\alpha_1} = \eta^{\alpha_2}$, co jest wykluczone wobec $\eta \neq 0$, $\eta \neq 1$ i $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Również przy utwierdzeniu jednej krawędzi a drugiej krawędzi swobodnej nie możemy spełnić warunków brzegowych przez funkcję φ_1 (3.3). Przyjmując np. utwierdzenie krawędzi zewnętrznej otrzymujemy $C_2 = -C_1$, a warunek na swobodnej krawędzi $z = \eta$ daje

$$(3.19) \quad \left(b - \frac{n}{2} + \nu \right) \eta^{b - \frac{n}{2} - 1} + \left(b + \frac{n}{2} - \nu \right) \eta^{-b - \frac{n}{2} - 1} = 0;$$

skąd

$$(3.20) \quad \eta^{2b} = -\frac{b + \frac{n}{2} - \nu}{b - \frac{n}{2} + \nu} < 0,$$

co jest wykluczone.

Tak więc warunki czysto geometryczne (obustronne utwierdzenie) są tu wykluczone, a w przypadku warunków obu typów lub tylko statycznych przynajmniej jeden z nich musi być spełniony przez funkcję $D = D(z)$ (zerowa sztywność na brzegu).

Płyta utwierdzona na brzegu zewnętrznym i swobodna na brzegu wewnętrznym. Warunek brzegowy $\varphi(1) = 0$ daje $C_2 = -C_1$; zatem

$$(3.21) \quad \varphi = C_1 \left(z^{b-\frac{n}{2}} - z^{-b-\frac{n}{2}} \right).$$

Warunek brzegowy na krawędzi wewnętrznej spełnić możemy jedynie poprzez funkcję $D(z)$. Ze wzoru (2.8) wynika całka ogólna

$$(3.22) \quad D(z) = z^n \left[C - \frac{NR^2}{(2-n) \left(b - \frac{n}{2} + \nu \right)} z^{2-n} + \frac{2bNR^2}{\left(b - \frac{n}{2} + \nu \right)^2} \int \frac{z^{1-n}}{z^{2b} + \alpha} dz \right],$$

gdzie stała b określona jest za pomocą (3.4), natomiast

$$(3.23) \quad \alpha = \frac{b + \frac{n}{2} - \nu}{b - \frac{n}{2} + \nu}.$$

Wobec niewymierności b w przypadku ogólnym (3.4) całka we wzorze (3.22) nie daje się na ogół wyrazić przez funkcje elementarne. Dla niektórych par wartości n i ν jest to jednak możliwe i jeden z takich przypadków rozważymy teraz szczegółowo.

Przyjmijmy $n = 1$, $\nu = 0,25 = 1/4$; wtedy $b = 1$, $\alpha = 5/3$ oraz

$$(3.24) \quad D(z) = z \left(C - \frac{4}{3} NR^2 z + \frac{32}{9} NR^2 \int \frac{dz}{z^2 + \frac{5}{3}} \right).$$

Po scałkowaniu znajdziemy

$$(3.25) \quad D(z) = z \left(C - \frac{4}{3} NR^2 z + \frac{32}{15} \sqrt{\frac{5}{3}} NR^2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} z \right).$$

Stałą C wyznaczmy z warunku $D(\eta) = 0$; ostatecznie więc

$$(3.26) \quad D(z) = NR^2 z \left[\frac{32}{15} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} z - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} \eta \right) - \frac{4}{3} (z - \eta) \right].$$

Oznaczamy dalej różną od zera sztywność płyty w miejscu utwierdzenia przez D_1 ; wprowadzając tę wartość oraz podstawiając $z = 1$ i odwracając (3.26) względem N możemy obliczyć siłę krytyczną:

$$(3.27) \quad N = N_k = \beta \frac{D_1}{R^2},$$

gdzie współczynnik β określony jest za pomocą wzoru

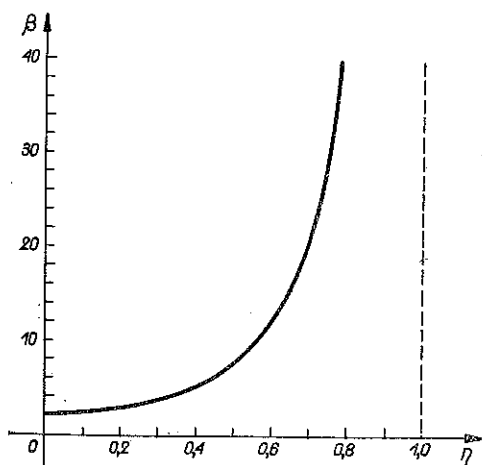
$$(3.28) \quad \beta = \frac{3}{4 \left[\frac{8}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} \eta \right) - (1 - \eta) \right]}$$

Po podstawieniu (3.27) i (3.28) do (3.26) możemy jeszcze wyrazić sztywność na dowolnym promieniu przez sztywność D_1 :

$$(3.29) \quad D(z) = \frac{\frac{8}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} z - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} \eta \right) - (z - \eta)}{\frac{8}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}} \eta \right) - (1 - \eta)} z D_1.$$

Tablica 1

| η | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|----------|
| β | 2.077 | 2.488 | 3.077 | 3.773 | 5.335 | 7.655 | 11.980 | 21.434 | 48.764 | 197.890 | ∞ |



Rys. 1. Zależność współczynnika β od stosunku promienia wewnętrznego do promienia zewnętrznego płyty pierścieniowej

W tablicy 1 podano wartości współczynników β we wzorze (3.27) dla różnych wartości parametru $\eta = R_1/R$, a na rys. 1 przedstawiono tę zależność graficznie. Wykres na rys. 1 jest analogiczny do wykresów podawanych w literaturze dla płyt pierścieniowych o stałej sztywności.

Ponadto wartości funkcji (3.29) przy wartości parametru $\eta = 0,2$ zestawiono w tablicy 2, a odpowiedni kształt płyty podaje rys. 2. Uzyskane tu rozwiązania są oczywiście słuszne również dla płyt swobodnie podpartych na brzegu wewnętrznym przy krawędzi zewnętrznej przesuwnie utwierdzonej (przesuwność poprzeczna).

Tablica 2

| z | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{D(z)}{D_1}$ | 0.0000 | 0.0552 | 0.1692 | 0.2989 | 0.4458 | 0.5994 | 0.7494 | 0.8859 | 1.0000 |
| $\frac{h(z)}{h_1}$ | 0.0000 | 0.3808 | 0.5531 | 0.6686 | 0.7639 | 0.8431 | 0.9083 | 0.9604 | 1.0000 |

Płyta utwierdzona na brzegu wewnętrznym i swobodna na brzegu zewnętrznym. Rozwiązania poprzednie możemy bezpośrednio wyzyskać do przypadku utwier-

dzenia na brzegu wewnętrznym, a swobodnego brzegu zewnętrznego, należy tylko przez R rozumieć promień wewnętrzny, przez z stosunek promienia bieżącego do promienia wewnętrznego, $1 \leq z \leq \eta$, a przez η — stosunek promienia zewnętrznego do wewnętrznego $\eta > 1$.



Rys. 2. Kształt płyty według równania (3.29)

Można jednak dla jednolitości zapisu pozostawić stare znaczenie stosunku η i zmiennej z , a wtedy we wzorach poprzedniego przypadku należy zamiast η podstawić $1/\eta$, zamiast R podstawić ηR , zamiast z podstawić z/η . Przy przyjęciu $n = 1$ oraz $\nu = 0,25$ otrzymujemy wtedy np.

$$(3.30) \quad N = N_k = \beta \frac{D_\eta}{R^2},$$

gdzie D_η jest sztywnością na brzegu wewnętrznym (utwierdzonym) $z = \eta$, natomiast współczynnik β określony jest za pomocą wzoru

$$(3.31) \quad \beta = \frac{3}{4\eta \left[(1 - \eta) - \frac{8}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \eta \left(\arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{\eta} - \arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right]}$$

Rozkład sztywności $D(z)$ określa wzór

$$(3.32) \quad D(z) = \frac{(1 - z) - \frac{8}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \eta \left(\arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{\eta} - \arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{z}{\eta} \right)}{(1 - \eta) - \frac{8}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \eta \left(\arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{\eta} - \arctg \sqrt{\frac{3}{5}} \right)} \frac{z}{\eta} D_\eta$$

Tablic liczbowych wartości funkcji $\beta(\eta)$ nie będziemy przytaczali.

Uzyskane rozwiązania są oczywiście również słuszne dla płyty swobodnie podpartej na brzegu zewnętrznym o krawędzi wewnętrznej przesuwnie utwierdzonej (przesuwność poprzeczna).

Płyta utwierdzona na brzegu zewnętrznym i utwierdzona przesuwnie (przesuwność poprzeczna) na wewnętrznym (lub na odwrót). Mamy tu dwa warunki geometryczne $\varphi(\eta) = \varphi(1) = 0$ i zgodnie z ogólnym dowodem podanym na początku p. 3.2. spełnienie ich przez funkcję (3.3) nie jest możliwe.

Płyta swobodnie podparta na brzegu zewnętrznym i swobodna na brzegu wewnętrznym (lub na odwrót). Wzdłuż obu krawędzi płyty mają tu być spełnione warunki (2.6). Okazuje się, że spełnienie ich przy wykorzystaniu funkcji φ nie jest możliwe; jak widać z założenia (3.1) przy zerowaniu się wyrażenia $\left(\varphi' + \frac{\nu \varphi}{z} \right)$ zeruje się jed-

nocześnie $\frac{d}{dz} \left(\varphi' + \frac{\varphi}{z} \right)$ i zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w p. 2, osobliwość całki szczególnej nie jest tu usuwalna. Wobec tego możemy otrzymywać jedynie płyty o zerowej sztywności na obu krawędziach.

Wprowadzając dogodnie tu oznaczenia $\varepsilon = -C_2/C_1$ przedstawimy ogólne wyrażenie na funkcję $\varphi(z)$, (3.3), w postaci

$$(3.33) \quad \varphi(z) = C_1 \left(z^{b-\frac{n}{2}} - \varepsilon z^{-b-\frac{n}{2}} \right).$$

Po podstawieniu (3.33) do całki ogólnej (2.8) otrzymamy

$$(3.34) \quad D(z) = z^n \left[C - \frac{NR^2}{b - \frac{n}{2} + \nu} \int \frac{z^{1-n} (z^{2b} - \varepsilon)}{z^{2b} + \varepsilon \alpha} dz \right],$$

gdzie stałe b i α są określone za pomocą (3.4) i (3.23). Po przekształceniu całki przez dodanie i odjęcie w liczniku $\varepsilon \alpha$ otrzymujemy ostatecznie

$$(3.35) \quad D(z) = z^n \left[C - \frac{NR^2}{\left(b - \frac{n}{2} + \nu\right)(2-n)} z^{2-n} + \frac{2b\varepsilon NR^2}{\left(b - \frac{n}{2} + \nu\right)^2} \int \frac{z^{1-n}}{z^{2b} + \varepsilon \alpha} dz \right].$$

Podobnie jak poprzednio całkowanie poprzez funkcje elementarne możliwe jest tylko dla niektórych par wartości n i ν . Dla przykładu przyjmijmy ponownie $n = 1$, $\nu = 0,25 = 1/4$, wtedy $b = 1$, $\alpha = 5/3$ oraz

$$(3.36) \quad D(z) = z \left(C - \frac{4}{3} NR^2 z + \frac{32}{9} NR^2 \varepsilon \int \frac{dz}{z^2 + \frac{5}{3} \varepsilon} \right).$$

Ponieważ $0 \leq z \leq 1$, więc stałą ε możemy dobrać z przedziałów $0 < \varepsilon < \infty$ lub $-\infty < \varepsilon < -3/5$. Rozpatrzmy obie możliwości.

Przy $\varepsilon > 0$ przyjmijmy $\delta^2 = 5/3 \varepsilon > 0$ i po scałkowaniu (3.36) napiszemy

$$(3.37) \quad D(z) = z \left(C - \frac{4}{3} NR^2 z + \frac{32}{15} NR^2 \delta \arctg \frac{z}{\delta} \right).$$

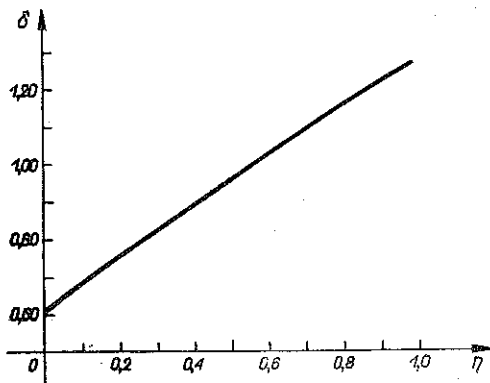
Musimy teraz spełnić warunki (2.6) na obu krawędziach płyty, dla $z = 1$ i $z = \eta$. Pierwszy z nich określa stałą C ; po podstawieniu

$$(3.38) \quad D(z) = \frac{4}{3} NR^2 z \left[(1-z) - \frac{8}{5} \delta \left(\arctg \frac{1}{\delta} - \arctg \frac{z}{\delta} \right) \right].$$

Drugi z warunków prowadzi do równania przestępnego względem stałej δ :

$$(3.39) \quad \operatorname{tg} \frac{5(1-\eta)}{8\delta} = \frac{(1-\eta)\delta}{\delta^2 + \eta}$$

Pierwiastki tego równania zestawiono w tablicy 3 dla różnych wartości stosunku promieni η , a na rys. 3 przedstawiono tę zależność wykreślnie. Siłę krytyczną N_k wyrazimy przez podanie sztywności w pewnym punkcie płyty różnym od $z = \eta$ i $z = 1$. Przyjmiemy np. środek pierścienia, $z = (1 + \eta)/2$, oznaczając $D \frac{(1+\eta)}{2} D_{0,5}$; przez odwrócenie (3.35) przy tej wartości z otrzymujemy



Rys. 3. Pierwiastki równania przestępnego (3.39) w zależności od η

Tablica 3

| η | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| δ | 0.6109 | 0.6790 | 0.7501 | 0.8196 | 0.8906 | 0.9597 | 1.0269 | 1.0947 | 1.1605 | 1.2261 | dowolne |

$$(3.40) \quad N = N_k = \frac{3}{2(1+\eta)} \left[\frac{1-\eta}{2} - \frac{8}{5} \delta \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+\eta}{2\delta} \right) \right] \frac{D_{0,5}}{R^2}$$

oraz po podstawieniu do (3.38)

$$(3.41) \quad D(z) = \frac{2z \left[(1-z) - \frac{8}{5} \delta \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\delta} \right) \right]}{(1+\eta) \left[\frac{1-\eta}{2} - \frac{8}{5} \delta \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+\eta}{2\delta} \right) \right]} D_{0,5}$$

Przykład obliczeń płyty o stosunku promieni $\eta = 0,2$ przedstawiono w tablicy 4 i na rys. 4. Pozostaje do rozważenia przypadek $-\infty < \varepsilon < -3/5$. Oznaczając tym razem $\vartheta^2 = -5\varepsilon/3 > 1$, po scałkowaniu (3.36) otrzymujemy

Tablica 4

| z' | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 1.00 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{D(z)}{D_{0,6}}$ | 0.0000 | 0.1003 | 0.2261 | 0.5171 | 0.8692 | 1.0000 | 1.0636 | 0.9415 | 0.5965 | 0.3310 | 0.0000 |
| $\frac{h(z)}{h_{0,6}}$ | 0.0000 | 0.4645 | 0.6092 | 0.8026 | 0.9543 | 1.0000 | 1.0209 | 0.9801 | 0.8418 | 0.6917 | 0.0000 |

$$(3.42) \quad D(z) = z \left(C - \frac{4}{3} NR^2 z + \frac{16}{15} NR^2 \vartheta \ln \frac{\vartheta + z}{\vartheta - z} \right)$$



Rys. 4. Kształt płyty według równania (3.41)

Po wyznaczeniu stałej C i doprowadzeniu do równania przestępnego ze względu na ϑ stwierdzamy jednak, że równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych $|\vartheta| > 1$, zatem przypadek ten nie daje rozwiązania.

4. Funkcja $\varphi(z)$ w postaci rozwiązania równania Eulera (II)

Przyjęcie (3.1) doprowadziło do rozwiązań stosunkowo prostych, jednak zawsze na brzegu swobodnym lub swobodnie podpartym sztywność płyty musiała być równa zero. W istocie, na brzegu takim przy $D \neq 0$ musiałoby zachodzić $\varphi' + \nu\varphi/z = 0$; z (3.1) wynika, że w miejscu tym również $d/dz (\varphi' + \varphi/z) = 0$, czyli współczynnik przy D w równaniu (2.7) jest równy zero, zatem zgodnie z uwagami zamieszczonymi w p. 2 osobliwość przenosi się do całki szczególnej równania (2.7) i nie jest usuwalna.

By móc otrzymywać skończone wartości sztywności na brzegach swobodnych założymy zależność

$$(4.1) \quad \int \frac{\frac{d}{dz} \left(\varphi' + \frac{\varphi}{z} \right)}{\varphi' + \frac{\nu\varphi}{z}} dz = n \ln \left(\varphi' + \frac{\nu\varphi}{z} \right),$$

gdzie n jest parametrem rzeczywistym o wartości chwilowo nieustalonej. Tym razem zerowanie się mianownika pod całką nie pociąga za sobą zerowania się licznika, ponieważ wyrażenie po prawej stronie (4.1) wykazuje stosowną osobliwość. Po zróżniczkowaniu (4.1) dochodzimy tu również do równania typu Eulera

$$(4.2) \quad (n-1)z^2\varphi'' + (\nu n - 1)z\varphi' - (\nu n - 1)\varphi = 0$$

o całce ogólnej

$$(4.3) \quad \varphi(z) = C_1 z + C_2 z^{\frac{1-\nu n}{n-1}}.$$

Wyrażenie proporcjonalne do promieniowego momentu gnącego wyniesie

$$(4.4) \quad \varphi' + \frac{\nu\varphi}{z} = (1+\nu)C_1 + \frac{1-\nu}{n-1}C_2 z^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}}.$$

Całkę ogólną równania (2.7) będzie tu wygodniej napisać nie w postaci (2.8), lecz jako funkcję górnej granicy całkowania; stała całkowania jest wtedy ukryta w dolnej granicy:

$$(4.5) \quad D(z) = -NR^2 \exp \left[- \int \frac{d \left(\varphi' + \frac{\varphi}{z} \right)}{\varphi' + \frac{\nu \varphi}{z}} dz \right] \times \\ \times \int_{z_0}^z \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t) + \frac{\nu \varphi(t)}{t}} \exp \left\{ \int \frac{d \left[\varphi'(t) + \frac{\varphi(t)}{t} \right]}{\varphi'(t) + \frac{\nu \varphi(t)}{t}} dt \right\} dt.$$

Żądane usunięcie osobliwości funkcji $D(z)$ będzie na ogół możliwe przez dobór parametru z_0 jako pierwiastka równania

$$(4.6) \quad \varphi'(z) + \frac{\nu \varphi(z)}{z} = 0;$$

w przypadku płyty o swobodnym brzegu zewnętrznym będziemy oczywiście mieli $z_0 = 1$, natomiast przy zewnętrznym brzegu utwierdzonym z_0 musi być zawarte w przedziale $0 < z_0 < 1$.

Po podstawieniu (4.1), (4.3) i (4.4) do (4.5) określimy więc w rozważanym przypadku zmienność sztywności płyty za pomocą wzoru ogólnego

$$(4.7) \quad D(z) = - \frac{\int_{z_0}^z \left(C_1 t + C_2 t^{\frac{1-\nu n}{n-1}} \right) \left[(1+\nu) C_1 + \frac{1-\nu}{n-1} C_2 t^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} \right]^{n-1} dt}{\left[(1+\nu) C_1 + \frac{1-\nu}{n-1} C_2 z^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} \right]^n} NR^2.$$

Stałą z_0 określimy przez podstawienie (4.4) do (4.6) i rozwiązanie; ostatecznie więc

$$(4.8) \quad z_0 = \left[- \frac{(1+\nu)(n-1)C_1}{(1-\nu)C_2} \right]^{\frac{n-1}{2-(1+\nu)n}}.$$

Wzór (4.7) sprowadzimy teraz do prostszej postaci. Zauważymy najpierw, że sztywność $D(z)$ zależy jedynie od stosunku stałych C_2/C_1 i oznaczymy, podobnie jak w poprzednim punkcie, $C_2/C_1 = -\varepsilon$. Ponadto z różnych możliwości podstawień we wzorze (4.7) wybierzemy podstawienie następujące:

$$(4.9) \quad 1 - \frac{1-\nu}{(n-1)(1+\nu)} \varepsilon t^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} = 1 - \left(\frac{t}{z_0} \right)^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} = u,$$

które zapewni zerowanie się dolnej granicy całkowania. Zamiast (4.7) możemy wtedy napisać

$$(4.10) \quad D(z) = \frac{(n-1)z_0^2 NR^2}{(1-\nu^2)[\nu(z)]^n} \int_0^{\nu(z)} \left[1 + \frac{(1+\nu)(n-1)}{2-(1+\nu)n} u \right] (1-u)^{\frac{(3+\nu)n-4}{2-(1+\nu)n}} u^{n-1} du,$$

gdzie oznaczono

$$(4.11) \quad \nu(z) = 1 - \frac{1-\nu}{(n-1)(1+\nu)} \varepsilon z^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} = 1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}}.$$

Możliwość efektywnego obliczenia całki we wzorze (4.10) (w postaci zamkniętej) zależy przede wszystkim od doboru stałej n . Najprostsze wyniki otrzymamy w przypadku

$$(4.12) \quad \frac{(3+\nu)n-4}{2-(1+\nu)n} = m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

i tylko tym przypadkiem się zajmiemy. Po odwróceniu (4.12) uzyskujemy

$$(4.13) \quad n = \frac{4+2m}{(3+\nu)+(1+\nu)m}$$

oraz po podstawieniu

$$(4.14) \quad z_0 = \left\{ \frac{(1+\nu)(1+m)}{[(3+\nu)+(1+\nu)m]\varepsilon} \right\}^{\frac{1+m}{2}},$$

$$(4.15) \quad v(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}}$$

oraz

$$(4.16) \quad D(z) = \frac{(1+m)z_0^2 NR^2}{(1+\nu)[(3+\nu)+(1+\nu)m][v(z)]^{\frac{4+2m}{(3+\nu)+(1+\nu)m}}} \times \\ \times \int_0^{v(z)} \left[1 + \frac{(1+\nu)(1+m)}{2} u \right] (1-u)^m u^{\frac{(1-\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m}} du.$$

Korzystając ze wzoru Newtona, który zapiszemy w postaci

$$(4.17) \quad (1-u)^m = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} u^l$$

po scałkowaniu, uproszczeniu przez $[v(z)]^n$ i uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie dla dowolnego całkowitego nieujemnego m

$$(4.18) \quad D(z) = z_0^2 NR^2 \sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l.$$

We wzorze tym dla skrócenia oznaczono

$$(4.19) \quad a_l = (-1)^l \binom{m}{l} \frac{1+m}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{2}{\{(4+2m)+[(3+\nu)+(1+\nu)m]l\}} + \right. \\ \left. + \frac{(1+\nu)(1+m)}{(4+2m)+[(3+\nu)+(1+\nu)m](l+1)} \right\} \\ b_l = (-1)^{l+1} \binom{m}{l} \frac{(1+m)^2}{2\{(4+2m)+[(3+\nu)+(1+\nu)m](l+1)\}}.$$

Siłę krytyczną można obliczyć po podaniu sztywności w pewnym punkcie (na pewnym promieniu) płyty. Oznaczmy ten punkt przez $z = \zeta$, $0 \leq \zeta \leq 1$, a ponadto $D(\zeta) = D_\zeta$. Wtedy możemy napisać

$$(4.20) \quad N = N_k = \beta \frac{D_\zeta}{R^2},$$

gdzie współczynnik β określony jest za pomocą wzoru

$$(4.21) \quad \beta = \frac{1}{z_0^2 \sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{\zeta}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{\zeta}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l}.$$

Po podstawieniu (4.20) i (4.21) do (4.18) możemy wzór ogólny na sztywność płyty napisać następująco:

$$(4.22) \quad D(z) = \frac{\sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l}{\sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{\zeta}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{\zeta}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l} D_\zeta.$$

4.1. Płyty kołowe pełne. Dla płyt kołowych pełnych mamy warunek geometryczny $\varphi(0) = 0$, który przez funkcję (4.3) jest automatycznie spełniony, o ile tylko wykładnik w drugim składniku jest dodatni. Stąd wynika ograniczenie $1 < n < 1/\nu$. Jednak warunek ten jest jeszcze zbyt słaby, bowiem proporcjonalne do promieniowego momentu gnącego wyrażenie (4.4) musi być w punkcie $z = 0$ ograniczone, o ile sztywność w tym punkcie ma być różna od zera. Wykładnik drugiego składnika musi tu być nieujemny, skąd ostatecznie $1 < n \leq 2/(1+\nu)$, co jednak nie daje żadnego dodatkowego ograniczenia dla parametru m , (4.12).

Płyta utwierdzona na brzegu. Z drugiego warunku geometrycznego $\varphi(1) = 0$ wynika $C_2 = -C_1$, czyli $\varepsilon = 1$. W dalszym ciągu po wprowadzeniu parametru m (4.12) otrzymujemy

$$(4.23) \quad \varphi(z) = C_1 \left(z - z^{\frac{3+m}{1+m}} \right)$$

oraz

$$(4.24) \quad z_0 = \left[\frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m} \right]^{\frac{1+m}{2}},$$

natomiast wzory (4.18) i (4.19) pozostają bez zmiany. Siłę krytyczną i rozkład sztywności $D(z)$ można tu wyrazić przez $D(0) = D_0$, mianowicie

$$(4.25) \quad N = N_k = \beta \frac{D_0}{R^2},$$

gdzie

$$(4.26) \quad \beta = \frac{[(3+\nu)+(1+\nu)m]^{1+m}}{(1+\nu)^{1+m} (1+m)^{1+m} \sum_{l=0}^m a_l}$$

oraz

$$(4.27) \quad D(z) = \frac{D_0}{\sum_{l=0}^m a_l} \sum_{l=0}^m \left[a_l + \frac{(3+\nu)+(1+\nu)m}{(1+\nu)(1+m)} b_l z^{\frac{2}{1+m}} \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{(3+\nu)+(1+\nu)m}{(1+\nu)(1+m)} z^{\frac{2}{1+m}} \right]^{\beta}$$

Podamy obecnie kilka przykładów. Najprostsze rozwiązania otrzymujemy przy $m = 0$:

$$(4.28) \quad \varphi(z) = C_1 (z - z^3), \quad z_0 = \sqrt{\frac{1+\nu}{3+\nu}}, \quad \beta = \frac{4(7+\nu)}{3}$$

oraz

$$(4.29) \quad D(z) = \left(1 - \frac{2}{3} z^2 \right) D_0.$$

Przy $\nu = 0$ mamy $\beta = 28/3 = 9,333$, przy $\nu = 0,3$ $\beta = 9,733$. Szywność płyty jest tu kwadratową funkcją promienia, przy czym na brzegu jest trzykrotnie mniejsza od szywności w środku płyty.

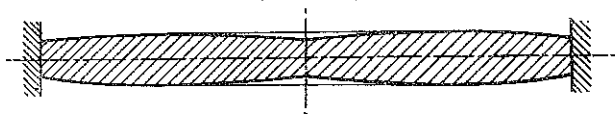
Podstawiając $m = 1$ otrzymujemy

$$(4.30) \quad \varphi(z) = C_1 (z - z^2), \quad z_0 = \frac{1+\nu}{2+\nu}, \quad \beta = \frac{3(5+\nu)(7+2\nu)}{5(1+\nu)}$$

oraz

$$(4.31) \quad D(z) = \left[1 + \frac{3}{1+\nu} z - \frac{3(5+\nu)}{5(1+\nu)} z^2 \right] D_0.$$

Przy $\nu = 0$ mamy $\beta = 21$, a szywność płyty na brzegu jest równa szywności w środku. Kształt płyty podaje rys. 5. Przy $\nu > 0$ szywność płyty na brzegu jest nieco mniejsza, niż szywność w środku, różnice nie przekraczają jednak 20%.



Rys. 5. Kształt płyty według równania (4.31)

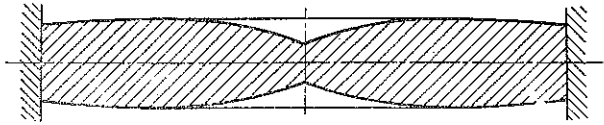
Przy wyższych wartościach m wzory stają się bardziej złożone. Przyjmując $m = 3$ oraz $\nu = 0$ otrzymujemy

$$(4.32) \quad \varphi(z) = C_1 (z - z^{\frac{3}{2}}), \quad \beta = 143,$$

oraz

$$(4.33) \quad D(z) = (1 + 9,86z^{\frac{1}{2}} + 8,81z + 21,6z^{\frac{3}{2}} - 33,7z^2) D_0.$$

Szytywność na brzegu D_1 jest tu 7,57 razy większa od D_0 ; kształt płyty przedstawia rys. 6.



Rys. 6. Kształt płyty według równania (4.33)

Płyta swobodnie podparta na brzegu. Drugi warunek brzegowy jest tu warunkiem statycznym i może być spełniony bądź za pośrednictwem funkcji $\varphi(z)$, bądź też funkcji $D(z)$. Spełnienie za pomocą $\varphi(z)$ wymaga zerowania się funkcji (4.4) w punkcie $z = 1$, czyli

$$(4.34) \quad \varepsilon = \frac{(1+\nu)(n-1)}{1-\nu} = \frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m}, \quad z_0 = 1.$$

Podstawienie do (4.3) daje

$$(4.35) \quad \varphi(z) = C_1 \left[z - \frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m} z^{\frac{3+m}{1+m}} \right],$$

a z (4.18) otrzymujemy

$$(4.36) \quad D(z) = NR^2 \sum_{l=0}^m (a_l + b_l z^{\frac{2}{1+m}}) (1 - z^{\frac{2}{1+m}})^l,$$

przy czym a_l i b_l są określone za pomocą (4.19). Określając siłę krytyczną poprzez sztywność w środku płyty (4.25), otrzymujemy na współczynnik β bardzo prosty wzór

$$(4.37) \quad \beta = \frac{1}{\sum_{l=0}^m a_l},$$

Wreszcie wzór (4.22) przybiera postać

$$(4.38) \quad D(z) = \frac{D_0}{\sum_{l=0}^m a_l} \sum_{l=0}^m (a_l + b_l z^{\frac{2}{1+m}}) (1 - z^{\frac{2}{1+m}})^l.$$

Przejdziemy do przypadków szczególnych. Podobnie jak dla płyty utwierdzonej otrzymujemy najprostsze rozwiązanie przez przyjęcie $m = 0$:

$$(4.39) \quad \varphi(z) = C_1 \left(z - \frac{1+\nu}{3+\nu} z^3 \right), \quad \beta = \frac{4(1+\nu)(7+\nu)}{3(3+\nu)}$$

oraz

$$(4.40) \quad D(z) = \left[1 - \frac{2(1+\nu)}{3(3+\nu)} z^2 \right] D_0.$$

Przy $\nu = 0$ mamy $\beta = 28/9 = 3,111$ [a więc trzykrotne zmniejszenie w stosunku do (4.28)], ale sztywność płyty na brzegu jest tylko o 22% mniejsza od sztywności w środku. Wartość współczynnika β zależy od współczynnika Poissona ν znacznie wyraźniej niż dla płyty utwardzonej.

W przypadku $m = 1$ mamy

$$(4.41) \quad \varphi(z) = C_1 \left(z - \frac{1+\nu}{2+\nu} z^2 \right), \quad \beta = \frac{3(1+\nu)(5+\nu)(7+2\nu)}{5(2+\nu)^2}$$

oraz

$$(4.42) \quad D(z) = \left[1 + \frac{3}{2+\nu} z - \frac{3(1+\nu)(5+\nu)}{5(2+\nu)^2} z^2 \right] D_0.$$

Przy $\nu = 0$ otrzymujemy $\beta = 5,25$, a sztywność płyty na brzegu jest o 75% większa od sztywności w środku. Kształt płyty jest zbliżony do przedstawionego na rys. 5, jednak z dodatkowym poszerzeniem ku brzegom.

W przypadku spełnienia warunku brzegowego dla $z = 1$ za pośrednictwem funkcji $D(z)$ możemy również zastosować zapis całki ogólnej (4.7), gdzie jednak ε nie musi być określone za pomocą (4.34), a wzór (4.8) określający z_0 nie ma zastosowania. Jednakże lepiej pozostawić bez zmiany wzory (4.8) i (4.14) dodając we wzorach na $D(z)$ nową całkę szczególną równania jednorodnego; zamiast (4.18) otrzymujemy wtedy

$$(4.43) \quad D(z) = z_0^2 N R^2 \sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{2+m}} \right]^l + \frac{C}{\left[1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^{\frac{4+2m}{(3+\nu)+(1+\nu)m}}},$$

przy czym a_l i b_l są określone za pomocą wzorów (4.19). Stałą C określamy z warunku $D(1) = 0$. Stała ε może być dowolna, byleby otrzymywać $z_0 > 1$, co zapewni usunięcie osobliwości. Zatem

$$(4.44) \quad \varepsilon < \frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m}.$$

Siłę krytyczną $N = N_k$ określamy np. przez określenie sztywności w środku płyty D_0 . Przykładów liczbowych nie będziemy tu jednak przytaczali.

4.2. Płyty pierścieniowe. W przypadku płyt pierścieniowych jedynie wyjątkowo można będzie zastosować całkę (4.18); częściej da się wykorzystać całkę (4.43), co łączy się z zerową sztywnością na jednym z brzegów.

Płyta utwierdzona na brzegu zewnętrznym, swobodna na wewnętrznym. W tym przypadku można uzyskać płytę o sztywnościach brzegowych różnych od zera, jednak tylko dla niektórych wartości stosunku promieni η . Płytę taką można po prostu «wyciąć» z płyty, określonej w p. 4.1, tak by warunek (2.6) był spełniony przez funkcję $\varphi(z)$. Warunek ten jest spełniony w punkcie $z = z_0$, (4.6), zatem rozwiązanie uzyskamy dla płyty pierścieniowej o parametrze η równym z_0 . Wobec (4.24) mamy więc

$$(4.45) \quad \eta = \left[\frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m} \right]^{\frac{m+1}{2}}$$

Jedynie wzory (4.25), (4.26) i (4.27) muszą ulec pewnej formalnej zmianie wobec tego, iż symbol D_0 nie posiada tu odpowiednika fizycznego. Wyrażając siłę krytyczną przez D_1 otrzymujemy

$$(4.46) \quad N = N_k = \beta \frac{D_1}{R^2},$$

gdzie

$$(4.47) \quad \beta = \frac{1}{\eta^2 \sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{1}{\eta} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{1}{\eta} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l}$$

oraz

$$(4.48) \quad D(z) = \frac{\sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{z}{\eta} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{z}{\eta} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l}{\sum_{l=0}^m \left[a_l + b_l \left(\frac{1}{\eta} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right] \left[1 - \left(\frac{1}{\eta} \right)^{\frac{2}{1+m}} \right]^l} D_1,$$

przy czym współczynniki a_l i b_l określone są za pomocą wzorów (4.19). Tak np. wzory (4.28) i (4.29) przyjmują postać

$$(4.49) \quad \varphi(z) = C_1(z - z^3), \quad \eta = \sqrt{\frac{1+\nu}{3+\nu}}, \quad \beta = 4(7+\nu)$$

oraz

$$(4.50) \quad D(z) = (3 - 2z^2) D_1, \quad D_\eta = \frac{7+\nu}{3+\nu} D_1.$$

Podobnie można zmienić wzory (4.30) i (4.31) [mamy tu $\eta = (1+\nu)/(2+\nu)$], (4.32), (4.33) itp.

Dla wartości $\eta > z_0$ można uzyskiwać rozwiązanie o zerowej sztywności na brzegu wewnętrznym. Należy się posłużyć całką (4.43) podstawiając $\varepsilon = 1$ oraz wyznaczając stałą C z warunku $D(\eta) = 0$. Natomiast przy $\eta < z_0$ całki (4.43) nie można wykorzystać, ponieważ osobliwość w ostatnim składniku nie jest wtedy usuwalna.

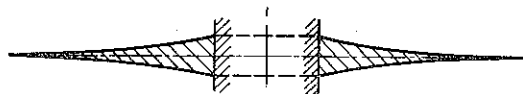
Płyta utwierdzona na brzegu wewnętrznym i swobodna na zewnętrznym. Mamy tu warunek geometryczny $\varphi(\eta) = 0$; skąd

$$(4.51) \quad \varepsilon = \eta^{-\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} = \eta^{-\frac{2}{1+m}}.$$

Łatwo sprawdzić, że warunek statyczny (4.6) nie może tu być spełniony przez funkcję $\varphi(z)$, zatem możemy uzyskiwać jedynie zerowe sztywności na brzegu zewnętrznym. Otrzymujemy

$$(4.52) \quad z_0 = \left[\frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m} \right]^{\frac{1+m}{2}} \eta < \eta;$$

całka (4.43) nie wykazuje osobliwości i rozwiązanie można uzyskać przy dowolnym stosunku η .



Rys. 7. Kształt płyty według równania (4.56)

Dla przykładu przyjmiemy $m = 0$, $\nu = 0$. Wtedy ze wzoru (4.52) $z_0 = \eta/\sqrt{3}$, a całka (4.43) przybiera postać

$$(4.53) \quad D(z) = \frac{1}{14} NR^2 \eta^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{z^2}{\eta^2} \right) + \frac{C}{\left(1 - 3 \frac{z^2}{\eta^2} \right)^{\frac{4}{3}}}.$$

Z warunku $D(1) = 0$ wyznaczamy stałą C , a z warunku $D(\eta) = D_\eta$ siłę krytyczną. Ostatecznie

$$(4.54) \quad N = N_k = \beta \frac{D_\eta}{R^2}, \quad \beta = \frac{28}{(2 - 3\eta^2) \left[\left(\frac{3 - \eta^2}{2\eta^2} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{\eta^2}{2 - 3\eta^2} \right]}$$

oraz

$$(4.55) \quad D(z) = \frac{\left(\frac{3 - \eta^2}{3z^2 - \eta^2} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{2z^2 - 3\eta^2}{2 - 3\eta^2}}{\left(\frac{3 - \eta^2}{2\eta^2} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{\eta^2}{2 - 3\eta^2}} D_\eta.$$

Na przykład przy $\eta = 0,2$ mamy $\beta = 0,26$ oraz

$$(4.56) \quad D(z) = 0,175 \left[\left(\frac{2,96}{3z^2 - 0,04} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{z^2 - 0,06}{0,94} \right] D_\eta.$$

Kształt płyty pokazano na rys. 7.

Płyta swobodnie podparta na brzegu zewnętrznym i swobodna na wewnętrznym. W tym przypadku mamy do spełnienia dwa warunki statyczne. Wobec postaci funkcji (4.4) i ogólnego dowodu przytoczonego w p. 3.2 spełnienie jednocześnie obu tych warunków poprzez funkcję $\varphi(z)$ nie jest możliwe i co najmniej na jednym z brzegów płyty musimy otrzymywać sztywność równą zeru.

Gdy chcemy spełnić warunek statyczny poprzez funkcję $\varphi(z)$ w punkcie $z = \eta$, to wówczas $z_0 = \eta$, skąd wobec (4.8)

$$(4.57) \quad \varepsilon = \frac{(1+\nu)(n-1)}{1-\nu} \eta^{-\frac{2-(1+\nu)n}{n-1}} = \frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m} \eta^{-\frac{2}{1+m}}.$$

Należy skorzystać z całki (4.43), stałą C wyznaczyć z warunku $D(1) = 0$, a siłę krytyczną z warunku $D(\eta) = D_\eta$. Gdy natomiast chcemy uzyskać różną od zera sztywność dla $z = 1$, to $z_0 = 1$, a wobec (4.8)

$$(4.58) \quad \varepsilon = \frac{(1+\nu)(n-1)}{1-\nu} = \frac{(1+\nu)(1+m)}{(3+\nu)+(1+\nu)m}.$$

Korzystamy również z całki (4.43); stałą C wyznaczamy z warunku $D(\eta) = 0$, a siłę krytyczną z warunku $D(1) = D_1$. Przykładu liczbowego nie będziemy tu przytaczali.

Wspomnimy jeszcze, że podobnie jak w poprzednim przypadku (p. 3) wobec ogólnego dowodu podanego w p. 3.2, a odnoszącego się również do funkcji (4.3), uzyskanie płyty o obu brzegach utwierdzonych nie jest tu możliwe.

5. Funkcja $\varphi(z)$ w postaci rozwiązania równania Bessela

Całka (2.8) upraszcza się znacznie, gdy przyjmiemy związek

$$(5.1) \quad \frac{d}{dz} \left(\varphi' + \frac{\varphi}{z} \right) = -\alpha^2 \varphi,$$

w którym dodatnia stała α jest na razie dowolna. Oznaczając

$$(5.2) \quad -\frac{\alpha^2 \varphi}{\varphi' + \frac{\varphi}{z}} = f(z)$$

napiszemy (2.8) w postaci

$$(5.3) \quad D(z) = \exp \left[- \int f(z) dz \right] \left\{ C + \frac{NR^2}{\alpha^2} \int f(z) \exp \left[\int f(z) dz \right] dz \right\}.$$

Przy dalszym oznaczeniu

$$(5.4) \quad v(z) = \exp \left[\int f(z) dz \right]$$

mamy

$$(5.5) \quad dv = f(z) \exp \left[\int f(z) dz \right]$$

oraz

$$(5.6) \quad D(z) = v^{-1} \left(C + \frac{NR^2}{\alpha^2} \int dv \right) = \frac{NR^2}{\alpha^2} + \frac{C}{v(z)},$$

czyli po powrocie do starych zmiennych

$$(5.7) \quad D(z) = \frac{NR^2}{\alpha^2} + C \exp \left[a^2 \int \frac{\varphi}{\varphi' + \frac{v\varphi}{z}} dz \right].$$

Funkcja $\varphi(z)$ musi tu spełniać równanie (5.1), które po przekształceniu przybiera postać

$$(5.8) \quad z^2 \varphi'' + z\varphi' + (a^2 z^2 - 1)\varphi = 0.$$

Jest to równanie typu Bessela posiadające całkę ogólną

$$(5.9) \quad \varphi(z) = C_1 J_1(az) + C_2 Y_1(az),$$

gdzie J_1 i Y_1 oznaczają funkcje Bessela pierwszego rzędu, kolejno pierwszego i drugiego rodzaju. Wprowadzimy zmienną $az = u$, $0 \leq u \leq \alpha$ i napiszemy (5.7) w postaci ogólnej

$$(5.10) \quad D(u) = \frac{NR^2}{\alpha^2} + C \exp \left[\int \frac{J_1(u) - \varepsilon Y_1(u)}{J_0(u) - \frac{1-\nu}{u} J_1(u) - \varepsilon \left[Y_0(u) - \frac{1-\nu}{u} Y_1(u) \right]} du \right],$$

gdzie podobnie jak poprzednio wprowadzono oznaczenie $\varepsilon = -C_2/C_1$. Niestety występująca we wzorze (5.10) całka nie wyraża się skończoną kombinacją funkcji elementarnych lub znanych funkcji nieelementarnych i obliczenie jej może nastąpić tylko przez rozwinięcie na szereg lub metodami numerycznymi.

Proporcjonalna do momentu promieniowego funkcja jest tu określona za pomocą wzoru

$$(5.11) \quad \varphi' + \frac{v\varphi}{z} = C_1 \left\{ J_0(u) - \frac{1-\nu}{u} J_1(u) - \varepsilon \left[Y_0(u) - \frac{1-\nu}{u} Y_1(u) \right] \right\}.$$

5.1. Płyty kołowe pełne. Dla płyt pełnych wymagane jest spełnienie warunku geometrycznego $\varphi(0) = 0$, skąd $\varepsilon = 0$, bowiem funkcje Y rosną w pobliżu zera nieograniczenie. Zatem

$$(5.12) \quad D(u) = \frac{NR^2}{\alpha^2} + C \exp \left[\int \frac{J_1(u)}{J_0(u) - \frac{1-\nu}{u} J_1(u)} du \right].$$

Płyta utwierdzona na brzegu. W tym przypadku z drugiego warunku geometrycznego $\varphi(1) = 0$ wynika $J_1(\alpha) = 0$. Aby zapewnić dobór sztywności odpowiadający najmniejszej sile krytycznej przyjmijmy najmniejszy pierwiastek tego równania $\alpha = 3,832$:

$$(5.13) \quad D(u) = \frac{NR^2}{3,832^2} + C \exp \left[\int \frac{J_1(u)}{J_0(u) - \frac{1-\nu}{u} J_1(u)} du \right].$$

Stałą C należy teraz obliczyć z warunku usunięcia osobliwości. Całka we wzorze (5.13) posiada przy $0 < u < 3,832$ osobliwość nieusuwalną, zatem należy przyjąć $C = 0$; w wyniku dochodzimy tu do płyty o stałej sztywności $D(z) = \text{const} = D$, dla której jak wiadomo z [17] i [19]

$$(5.14) \quad N = N_k = 3,832^2 \frac{D}{R^2} = 14,68 \frac{D}{R^2}.$$

Płyta swobodnie podparta na brzegu. Warunek statyczny (2.6) dla $z = 1, u = a$ przybiera tu postać

$$(5.15) \quad D_1 \left[J_0(a) - \frac{1-\nu}{a} J_1(a) \right] = 0$$

i może być spełniony bądź przez funkcję φ , bądź też przez funkcję D . W pierwszym przypadku parametr a musi być określony z równania (5.15) i zależy od współczynnika ν ; np. dla $\nu = 0,3$ otrzymujemy najmniejszy pierwiastek $a = 2,05$, [19]. Z warunku usunięcia osobliwości z całki (5.12) wynika znowu $C = 0$, zatem otrzymujemy w wyniku płytę o stałej grubości, dla której

$$(5.16) \quad N = N_k = 2,05^2 \frac{D}{R^2} = 4,20 \frac{D}{R^2}.$$

Płyty o zmiennej sztywności otrzymamy przy spełnieniu warunku (5.15) poprzez funkcję D . Wtedy parametr a może być dowolny, byleby zawarty w przedziale $0 < a < 2,05$, co eliminuje rozbieżność całki we wzorze (5.12). Pisząc tę całkę w postaci oznaczonej możemy z warunku $D(a) = 0$ określić stałą C :

$$(5.17) \quad C = - \frac{NR^2}{a^2} \exp \left[- \int_0^a \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} d\xi \right].$$

Podstawiając (5.17) do (5.12) i oznaczając sztywność w środku płyty przez D_0 obliczymy siłę krytyczną. Przy ogólnym wzorze typu (4.25) współczynnik β będzie określony za pomocą wzoru

$$(5.18) \quad \beta = \frac{a^2}{1 - \exp \left[- \int_0^a \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} d\xi \right]},$$

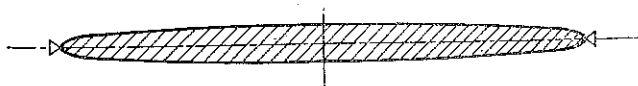
a po podstawieniu (5.17) i (5.18) do (5.12) otrzymujemy ostatecznie

$$(5.19) \quad D(u) = \frac{1 - \exp \left[- \int_u^a \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} d\xi \right]}{1 - \exp \left[- \int_0^a \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} d\xi \right]} D_0.$$

Wartości całek we wzorach (5.18) i (5.19) najdogodniej jest, zwłaszcza przy małych wartościach parametru α , obliczyć przez rozwinięcie funkcji podcałkowej na szereg potęgowy. Ponieważ $J_1(\xi)$ jest funkcją nieparzystą, a $J_0(\xi)$ parzystą, to iloraz będzie funkcją nieparzystą; po dokonaniu dzielenia otrzymujemy

$$(5.20) \quad \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} = \frac{1}{1+\nu} \xi + \frac{1}{4(1+\nu)^2} \xi^3 + \frac{7+\nu}{96(1+\nu)^3} \xi^5 + \\ + \frac{33+10\nu+\nu^2}{1536(1+\nu)^4} \xi^7 + \dots$$

Przejdziemy do przykładów. Przyjmując $\alpha = 0,5$, $\nu = 0,3$ i korzystając z rozwinięcia (5.20) obliczamy $\beta = 2,663$, a kształt płyty określony jest dokładnie tablicą 5 i rys. 8.



Rys. 8. Kształt płyty według równania (5.19)

Tablica 5

| z | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{D(z)}{D_0}$ | 1.0000 | 0.9911 | 0.9628 | 0.9159 | 0.8497 | 0.7637 | 0.6569 | 0.5285 | 0.3772 | 0.2016 | 0.0000 |
| $\frac{h(z)}{h_0}$ | 1.0000 | 0.9970 | 0.9875 | 0.9711 | 0.9472 | 0.9140 | 0.8693 | 0.8085 | 0.7226 | 0.5862 | 0.0000 |

Ciekawe jest również przejście graniczne $\alpha \rightarrow 0$. Rozwinięcie całki przy dolnej granicy $u = az$ posiada postać

$$(5.21) \quad \int_{az}^{\alpha} \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} d\xi = \frac{\alpha^2}{2(1+\nu)} (1-z^2) + \frac{\alpha^4}{16(1+\nu)^2} (1-z^4) + \\ + \frac{(7+\nu)\alpha^6}{576(1+\nu)^3} (1-z^6) + \dots,$$

zatem

$$(5.22) \quad \exp \left[- \int_{az}^{\alpha} \frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi) - \frac{1-\nu}{\xi} J_1(\xi)} d\xi \right] = 1 - \frac{\alpha^2}{2(1+\nu)} (1-z^2) + \dots$$

Po podstawieniu tego wzoru do (5.18) przy $z = 0$ i przejściu do granicy otrzymujemy

$$(5.23) \quad \beta = 2(1+\nu),$$

natomiast podstawienie do (5.19) i przejście graniczne daje

$$(5.24) \quad D(z) = (1 - z^2) D_0.$$

Tak więc doszliśmy do rozwiązania, uzyskanego już poprzednio na innej drodze, (3.11) i (3.12).

5.2. Płyty pierścieniowe. *Płyta utwierdzona na brzegu zewnętrznym i swobodna na wewnętrznym.* Dla takiej płyty warunek geometryczny $\varphi(z=1) = 0$ wyznacza stałą ε ; po podstawieniu można napisać wzór na kąt ugięcia w postaci:

$$(5.25) \quad \varphi(u) = \bar{C}_1 [Y_1(a) J_1(u) - J_1(a) Y_1(u)],$$

gdzie

$$(5.26) \quad \bar{C}_1 = \frac{C_1}{Y_1(a)}.$$

Spełniając drugi warunek (statyczny) za pomocą funkcji φ otrzymujemy w wyniku jedynie płytę o stałej sztywności. Natomiast przy spełnieniu tego samego warunku poprzez funkcję D parametr a pozostaje dowolny; musi on jednak być większy od najmniejszego pierwiastka równania

$$(5.27) \quad a\eta [J_1(a) Y_0(a\eta) - Y_1(a) J_0(a\eta)] - (1 - \nu) [J_1(a) Y_1(a\eta) - Y_1(a) J_1(a\eta)] = 0.$$

Warunek ten zapewnia zbieżność całki we wzorze (5.10). Stałą C w tym wzorze wyznaczamy z warunku $D(z = \eta) = 0$, a siłę krytyczną z warunku $D(z = 1) = D_1$. Oczywiście wyniki liczbowe można tu otrzymać jedynie w sposób przybliżony.

Płyta utwierdzona na brzegu wewnętrznym i swobodna na zewnętrznym. Z warunku geometrycznego $\varphi(z = \eta) = 0$ określimy stałą ε , a po podstawieniu tej wartości

$$(5.28) \quad \varphi(u) = \bar{C}_1 [Y_1(a\eta) J_1(u) - J_1(a\eta) Y_1(u)].$$

Aby uzyskać płytę o zmiennej sztywności musimy warunek statyczny dla $z = 1$ spełnić za pośrednictwem funkcji $D(u)$. Wtedy stała a pozostaje dowolna, byle mniejsza od najmniejszego pierwiastka równania

$$(5.29) \quad a\eta [J_0(a) Y_1(a\eta) - Y_0(a) J_1(a\eta)] - (1 - \nu) [J_1(a) Y_1(a\eta) - Y_1(a) J_1(a\eta)] = 0.$$

Stałą C we wzorze (5.10) wyznaczamy z warunku $D(z = 1) = 0$, a siłę krytyczną z warunku $D(z = \eta) = D_\eta$.

Płyta utwierdzona na brzegu zewnętrznym i utwierdzona przesuwnie (przesuwność poprzeczna) na brzegu wewnętrznym. Występujące tu dwa warunki geometryczne $\varphi(z = \eta) = \varphi(z = 1) = 0$ mogą na ogół być spełnione przez funkcję (5.9). Z jednego z nich wynika (5.25), a drugi prowadzi do równania ze względu na a :

$$(5.30) \quad Y_1(a) J_1(a\eta) - J_1(a) Y_1(a\eta) = 0.$$

Należy przyjąć najmniejszy pierwiastek tego równania (sześciocyfrową tablicę pierwiastków tego równania można znaleźć w pracy [24], tablica 6). Stałą C w całości

(5.10) należy teraz dobrać tak, aby usunąć osobliwość. Całka ta jest jednak niewątpliwie rozbieżna, gdyż w przedziale będzie się znajdował pierwiastek wyrażenia w mianowniku. Wobec tego $C = 0$ i w wyniku otrzymujemy tu jedynie płytę pierścieniową o stałej sztywności.

Płyta swobodnie podparta na brzegu zewnętrznym i swobodna na wewnętrznym. Mamy tu dwa warunki statyczne $m_r(\eta) = m_r(1) = 0$ i musimy rozpatrzyć możliwość ich spełnienia poprzez funkcję $\varphi(z)$ lub przez funkcję $D(z)$.

Nałożenie obu warunków na funkcję φ prowadzi wobec (5.11) do uzyskanego drogą eliminacji niewiadomej ε równania o niewiadomej α :

$$(5.31) \quad [\alpha J_0(\alpha) - (1 - \nu) J_1(\alpha)] [\alpha \eta Y_0(\alpha \eta) - (1 - \nu) Y_1(\alpha \eta)] - \\ - [\alpha Y_0(\alpha) - (1 - \nu) Y_1(\alpha)] [\alpha \eta J_0(\alpha \eta) - (1 - \nu) J_1(\alpha \eta)] = 0.$$

Stałą C należy teraz dobrać z warunku usunięcia osobliwości; oczywiście $C = 0$ i otrzymujemy płytę pierścieniową o stałej sztywności.

Spełnienie jednego warunku statycznego przez funkcję $\varphi(z)$ a drugiego przez $D(z)$ nie jest możliwe. Istotnie, ponieważ całka we wzorze (5.10) będzie wtedy rozbieżna, należy przyjąć $C = 0$, co wyklucza możliwość nałożenia drugiego warunku na funkcję $D(z)$.

Jeżeli natomiast chcemy spełnić oba warunki statyczne za pomocą funkcji $D(z)$, to stała α może być w zasadzie dowolna. Z warunków $D(\eta) = D(1) = 0$ wynika przy przedstawieniu całki jako oznaczonej w granicach od $\alpha \eta$ do u , że

$$(5.32) \quad C = -\frac{NR^2}{a^2},$$

$$(5.33) \quad \int_{\alpha \eta}^a \frac{J_1(u) - \varepsilon Y_1(u)}{J_0(u) - \frac{1-\nu}{u} J_1(u) - \varepsilon \left[Y_0(u) - \frac{1-\nu}{u} Y_1(u) \right]} du = 0.$$

Drugie z tych równań określa związek między parametrami ε i α . Po ustaleniu tego związku możemy określić kształt płyty (5.10) i odpowiednią siłę krytyczną.

6. Sprężysto-plastyczne wyboczenie płyt kołowych i pierścieniowych o zmiennej sztywności

Istnieje już duża liczba teorii sprężysto-plastycznego wyboczenia płyt (o stałej sztywności); niektóre z nich są dość skomplikowane. Dla naszych celów, tj. dla analizy stateczności płyt o zmiennej sztywności, posłużymy się teorią możliwie prostą. Teorie takie podali F. BLEICH (por. [2]), P. F. PAPKOWICZ [17] oraz M. ROŠ i A. EICHINGER (por. [2]). Teoria Bleicha, w której rozpatrywano płyty jednokierunkowo ściskane, sprowadza się do analizy stateczności płyty ortotropowej o stosunku sztywności w dwóch kierunkach głównych równym stosunkowi zależnego od naprężenia modułu wyboczenia Kármána do modułu Younga (w monografii [2], wydanej w roku 1952, w związku z badaniami SHANLEYA zastąpiono moduł Kármána przez moduł styczny). Teoria Roša i Eichingera sprowadza się do analizy płyty izotropowej o module równym modułowi Kármána. P. F. Pap-

kowicz podaje obie te propozycje i wyraża przypuszczenie, iż wyniki doświadczalne będą leżały pomiędzy wynikami obu teorii.

W naszym przypadku, wobec wszechstronnego równomiernego ściskania w płaszczyźnie płyty, bardziej uzasadniona będzie niewątpliwie teoria Roša i Eichingera, w której jednak moduł Kármána zastąpimy modułem stycznym $\bar{E}(\sigma) = d\sigma/de$. Zauważymy, że panujący w naszym przypadku dwuosiowy stan naprężenia jest dla materiałów ciągliwych wyteżeniowo równoważny stanowi jednoosiowemu. Dla uzyskania efektywnych wyników musimy przyjąć pewną postać zależności $\bar{E} = \bar{E}(\sigma)$. Najdogodniejsza wydaje się tu propozycja A. YLINENA [21 i 22]

$$(6.1) \quad \bar{E}(\sigma) = E \frac{Q - \sigma}{Q - c\sigma},$$

gdzie Q oznacza granicę plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu (ściskaniu), C pewną stałą materiałową, której wartości podane są w pracach [21 i 22]. Należy podkreślić, że wzór (6.1) posiada charakter uniwersalny, mianowicie dla naprężeń σ małych w stosunku do granicy plastyczności otrzymujemy praktycznie $\bar{E}(\sigma) = E$. Przez σ rozumie się tu oczywiście wartość bezwzględną naprężenia.

Przyjmiemy teraz, że przy znanym już rozkładzie sztywności płyty, określonym uprzednio, poszukujemy rozkładu grubości płyty, odpowiadającego wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Zastępując we wzorze na sztywność (2.2) E przez $\bar{E}(\sigma)$, (6.1), oraz podstawiając $\sigma = N/h$, otrzymujemy

$$(6.2) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{Qh - N}{Qh - cN}.$$

Ze wzoru tego wynika przede wszystkim, iż zerowej sztywności odpowiada tu różna od zera grubość płyty, mianowicie równa

$$(6.3) \quad h_{\min} = \frac{N}{Q},$$

co odpowiada osiągnięciu w tym miejscu przez naprężenia krytyczne granicy plastyczności.

Równanie (6.2) jest równaniem algebraicznym czwartego stopnia ze względu na niewiadomą h . Wygodnie jest rozwiązywać je w postaci bezwymiarowej, odnosząc niewiadomą h bądź do wartości h_{\min} określonej za pomocą wzoru (6.3), bądź też do wartości obliczonej dla zakresu sprężystego ze wzoru (2.2). Z tych dwóch możliwości pierwsza jest korzystniejsza, bowiem przy $D \rightarrow 0$ otrzymujemy pierwiastek zmierzający do jedności, a nie do nieskończoności jak w drugim przypadku.

Oznaczmy grubość płyty obliczoną dla zakresu sprężystego, czyli pierwiastek równania (2.2), przez \tilde{h} :

$$(6.4) \quad \tilde{h} = \sqrt[3]{\frac{12(1-\nu^2)D}{E}}.$$

Równanie (6.2) można wtedy przepisać w postaci

$$(6.5) \quad \frac{\bar{h}}{h_{\min}} - \frac{h}{h_{\min}} \sqrt[3]{\frac{\frac{h}{h_{\min}} - 1}{\frac{h}{h_{\min}} - c}} = 0.$$

Równanie (6.5) określa w sposób uwikłany funkcję $h/h_{\min} = f(\bar{h}/h_{\min})$ przy parametrze c . Praktycznie najdogodniej jest zestawzić tablicę funkcji odwrotnej $\bar{h}/h_{\min} = f(h/h_{\min})$, co w oparciu o (6.5) nie następuje żadnej trudności, i obliczać z niej drogą interpolacji odwrotnej poszukiwane wartości h . Postępowanie takie doprowadziło do tablicy 6, w której podano wartości funkcji $\bar{h}/h_{\min} = f(h/h_{\min})$ przy $c = 0,977$ (stal St 37 i stal St 52), $c = 0,875$ (sośnina fińska) oraz $c = 0,857$ (stop magnez-elektron).

Praktyczny tok postępowania przy określaniu kształtu płyty w zakresie sprężysto-plastycznym jest następujący:

1. Przyjmujemy pewną funkcję $\varphi(z)$ i określamy odpowiednią funkcję $D(z)/D_c$ oraz współczynnik siły krytycznej β (np. zgodnie z rozwiązaniem w p. 3-5).

2. Dla danej siły krytycznej N obliczamy sztywność w pewnym stosownie dobranym punkcie D_c , mianowicie $D_c = NR^2/\beta$, i wyznaczamy w ten sposób samą funkcję $D(z)$.

3. Za pomocą wzorów (6.3) określamy h_{\min} , a za pomocą wzoru (6.4) rozkład funkcji $\bar{h} = \bar{h}(z)$.

4. Interpolacją odwrotną określamy z tablicy 6, $h = h(z)$, czyli rozkład grubości płyty.

Jeżeli natomiast kształt płyty jest określony przez funkcję $h = h(z)$, a chcemy stosowaną przez nas metodą odwrotną określić w sposób przybliżony odpowiednią siłę krytyczną przy wyboczeniu sprężysto-plastycznym, to postępujemy następująco:

1. Dobieramy ciąg funkcji $\varphi_n(z)$, obliczamy odpowiednie funkcje $D_n(z)/D_c$ i współczynniki β_n .

2. Porównując wzór (6.3) ze wzorem typu (4.20) wyrażamy dla każdej funkcji $\varphi_n(z)$ sztywność w punkcie charakterystycznym D_c przez nieznaną jeszcze wielkość h_{\min} :

$$(6.6) \quad D_c = \frac{QR^2}{\beta} h_{\min}.$$

3. Na podstawie wzoru (6.4) obliczamy \bar{h}_c , a wobec tego, że obraliśmy z góry h_c możemy z równania (6.5) określić h_{\min} . Po podstawieniu otrzymujemy równanie drugiego stopnia względem h_{\min} :

$$(6.7) \quad \frac{12(1-\nu^2)QR^2c}{\beta E h_c^3} h_{\min}^2 - \left[1 + \frac{12(1-\nu^2)QR^2}{\beta E h_c^2} \right] h_{\min} + h_c = 0.$$

4. Po określeniu z równania (6.7) h_{\min} określamy kolejno D_c , (6.6), $D(z)$ oraz $h(z)$ z tablicy 6; parametr dobieramy teraz tak, by uzyskana funkcja $h(z)$ jak najmniej różniła się od obranej. Wreszcie wzór (6.3) określa odpowiednią siłę krytyczną.

Tok postępowania przy wyznaczaniu kształtu płyty dla obranej funkcji $\varphi(z)$ i obranej siły krytycznej zilustrujemy na przykładzie. Przyjmiemy dla płyty kołowej

Tablica 6

| $\frac{h}{h_{\min}}$ | $\frac{\tilde{h}}{h_{\min}}$ | | |
|----------------------|------------------------------|-------------------|----------|
| Rodzaj materiału | Stal St 37 Stal St 52 | Sośnina fińska | Elektron |
| c | 0.977 | 0.875 | 0.857 |
| 1.000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.005 | 0.5659 | 0.3392 | 0.3249 |
| 1.010 | 0.6784 | 0.4240 | 0.4067 |
| 1.020 | 0.7903 | 0.5269 | 0.5068 |
| 1.030 | 0.8520 | 0.5958 | 0.5744 |
| 1.040 | 0.8939 | 0.6484 | 0.6265 |
| 1.050 | 0.9255 | 0.6915 | 0.6694 |
| 1.060 | 0.9512 | 0.7282 | 0.7061 |
| 1.070 | 0.9733 | 0.7604 | 0.7384 |
| 1.080 | 0.9927 | 0.7892 | 0.7673 |
| 1.090 | 1.0104 | 0.8154 | 0.7938 |
| 1.100 | 1.0266 | 0.8393 | 0.8182 |
| 1.120 | 1.0564 | 0.8828 | 0.8622 |
| 1.140 | 1.0836 | 0.9216 | 0.9015 |
| 1.160 | 1.1092 | 0.9569 | 0.9376 |
| 1.180 | 1.1336 | 0.9897 | 0.9710 |
| 1.200 | 1.1573 | 1.0206 | 1.0025 |
| 1.250 | 1.2138 | 1.0919 | 1.0750 |
| 1.300 | 1.2683 | 1.1575 | 1.1416 |
| 1.400 | 1.3741 | 1.2786 | 1.2643 |
| 1.500 | 1.4777 | 1.3925 | 1.3794 |
| 1.600 | 1.5800 | 1.5021 | 1.4899 |
| 1.700 | 1.6817 | 1.6093 | 1.5978 |
| 1.800 | 1.7831 | 1.7149 | 1.7039 |
| 1.900 | 1.8840 | 1.8194 | 1.8089 |
| 2.000 | 1.9848 | 1.9230 | 1.9126 |
| 2.200 | 2.1861 | 2.1285 | 2.1188 |
| 2.400 | 2.3870 | 2.3326 | 2.3234 |
| 2.600 | 2.5875 | 2.5355 | 2.5267 |
| 2.800 | 2.7880 | 2.7378 | 2.7294 |
| 3.000 | 2.9886 | 2.9400 | 2.9316 |
| 3.500 | 3.4892 | 3.4434 | 3.4356 |
| 4.000 | 3.9897 | 3.9459 | 3.9384 |

pełnej, swobodnie podpartej o promieniu $R = 100$ cm funkcję $\varphi(z)$ w postaci (3.5) przy przyjęciu $n = 0$, zatem $\varphi(z) = C_1 z$; rozkład sztywności określa (3.12), natomiast ze wzoru (3.11) $\beta = 2(1+\nu)$. Przyjmiemy stałe materiałowe dla stali St 37

według Ylinena, [22]: $Q = 2400 \text{ kG/cm}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $c = 0,977$, $\nu = 0,3$. Założymy ponadto, że siła krytyczna $N = 10\,000 \text{ kG/cm}$.

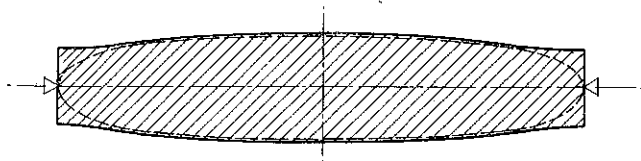
Obliczona ze wzoru (3.11) sztywność D_0 wyniesie $D_0 = 3,85 \cdot 10^7 \text{ kG cm}$, wobec tego $D(z) = 3,85 \cdot 10^7 (1 - z^2)$. Przy założeniu, że ma miejsce wyboczenie sprężyste wzór ten określałby już w zupełności kształt płyty, mianowicie ze wzoru (6.4)

$$\tilde{h}(z) = 5,84 \sqrt[3]{1 - z^2} \text{ [cm]}.$$

Jednakże grubość płyty na brzegu zewnętrznym zmierza do zera i wyboczenie musi być sprężysto-plastyczne. Ze wzoru (6.3) $h_{\min} = 4,17 \text{ cm}$, zatem

$$\frac{\tilde{h}(z)}{h_{\min}} = 1,40 \sqrt[3]{1 - z^2}.$$

Dla danego stosunku $\tilde{h}(z)/h_{\min}$ odczytujemy z tablicy 6 na drodze interpolacji odwrotnej h/h_{\min} , określając w ten sposób kształt płyty. Wyniki zestawione są w tablicy 7 i na rys. 9.



Rys. 9. Porównanie kształtu płyty w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym

Tablica 7

| z | 0.00 | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 1.00 |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{\tilde{h}(z)}{h_{\min}}$ | 1.4000 | 1.3953 | 1.3811 | 1.3567 | 1.3210 | 1.2720 | 1.2065 | 1.1185 | 0.9959 | 0.8048 | 0.6444 | 0.0000 |
| $\frac{h(z)}{h_{\min}}$ | 1.4250 | 1.4205 | 1.4067 | 1.3931 | 1.3498 | 1.3035 | 1.2436 | 1.1676 | 1.0836 | 1.0224 | 1.0085 | 1.0000 |
| $h(z)$ cm | 5.94 | 5.93 | 5.86 | 5.81 | 5.63 | 5.44 | 5.19 | 4.86 | 4.52 | 4.26 | 4.20 | 4.17 |

7. Problem oszczędności na materiale w przypadku stosowania płyt o zmiennej grubości

Jak wykazano na drodze rachunku wariacyjnego, przy optymalnym ukształtowaniu idealnie sprężystego pręta narażonego na wyboczenie, oszczędność na materiale w stosunku do pręta pryzmatycznego o tym samym kształcie przekroju wynosi 13,4% (por. [25]). Przy optymalnym ukształtowaniu płyty możemy spodziewać się jeszcze większej oszczędności.

Rozwiązanie problemu kształtowania wszechstronnie ściskanej płyty kołowej w ujęciu rachunku wariacyjnego natrafia jednak na trudności nawet przy założeniu wyboczenia sprężystego. Natomiast uzyskane w tej pracy rozwiązania umożliwią pewną orientację co do rzędu oszczędności na materiale (ciężarze) i pozwalają na optymalny dobór pewnych parametrów (parametryczne kształtowanie wytrzymałościowe [12]).

Rozważymy najpierw swobodnie podpartą płytę o stałej grubości H ; jej objętość wynosi

$$(7.1) \quad V_0 = \pi R^2 H,$$

a siła krytyczna przy $\nu = 0,3$ określona jest za pomocą wzoru (5.16). Zakładając sprężystość wybożenia mamy

$$(7.2) \quad H = \sqrt[3]{\frac{12(1-\nu^2)NR^2}{4,20E}},$$

zatem

$$(7.3) \quad V_0 = \pi \sqrt[3]{\frac{12(1-\nu^2)}{4,20}} E^{-\frac{1}{3}} R^{\frac{8}{3}} N^{\frac{1}{3}}.$$

W przypadku płyty sprężytej o zmiennej sztywności, gdy jest ona określona za pomocą wzoru $D(z) = D_c f(z)$, a ponadto gdy wprowadzono współczynnik (4.20), mamy

$$(7.4) \quad V = 2\pi \sqrt[3]{\frac{12(1-\nu^2)}{\beta}} E^{-\frac{1}{3}} R^{\frac{8}{3}} N^{\frac{1}{3}} \int_0^1 z \sqrt[3]{f(z)} dz.$$

Tak więc stosunek objętości, pozwalający określić oszczędność na materiale, wynosi

$$(7.5) \quad \frac{V}{V_0} = 2 \sqrt[3]{\frac{4,20}{\beta}} \int_0^1 z \sqrt[3]{f(z)} dz.$$

Przyjmijmy dla przykładu $\varphi(z) = C_1 z$, zatem ze wzoru (3.12) $f(z) = 1 - z^2$, a ze wzoru (3.11) przy $\nu = 0,3$ otrzymujemy $\beta = 2,60$. Po podstawieniu do (7.5)

$$(7.6) \quad \frac{V}{V_0} = 2 \sqrt[3]{\frac{4,20}{2,60}} \int_0^1 z \sqrt[3]{1-z^2} dz = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{4,20}{2,60}} = 0,880.$$

Oszczędność na materiale wynosi tu 12%; niewątpliwie przy korzystniejszym doborze funkcji $f(z)$ może ona ulec wyraźnemu zwiększeniu.

Korzystając z wyników uzyskanych w p. 6 możemy ponadto analizować oszczędność na ciężarze przy założeniu wybożenia sprężysto-plastycznego płyt o zmiennej sztywności. Oczywiście, dopiero takie podejście ma zasadnicze znaczenie praktyczne, bowiem kształty optymalne prowadzą z reguły do zerowych sztywności na brzegu. Wobec konieczności posługiwania się tablicą 6 określimy kształt płyty jedynie na drodze tablicowej, co zmusza do całkowania numerycznego przy obliczaniu objętości. Przykładu liczbowego nie będziemy tu jednak podawali.

8. Uwagi końcowe

Zastosowana w pracy metoda odwrotna pozwoliła nie tylko na uzyskanie wielu rozwiązań ścisłych problemu stateczności płyt o zmiennej sztywności w zakresie sprężystym, lecz przede wszystkim na przejście do zakresu sprężysto-plastycznego

i do problemu kształtowania. Wydaje się, że może ona oddać dalsze usługi przy innych sposobach podparcia i obciążenia płyt, jak również przy zastosowaniu dokładniejszej teorii wyoboczenia sprężysto-plastycznego.

Literatura cytowana w tekście

1. P. A. Ададуров, *Устойчивость неравномерно нагретых пластин*, Сборник «Тепловые напряжения в элементах турбомашин», АН УССР, 1, Киев 1961, 121-137.
2. F. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, Mc. Graw-Hill New York 1952, tłum. ros., Moskwa 1959.
3. А. Н. Дячик, *Продольный изгиб-кручение*, АН СССР, Москва 1955, 238-258.
4. H. EGGER, *Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke*, Ing.-Archiv, 3, 12 (1941), 190-200.
5. J. FADLE, *Eine Anwendung der Methode der Problemumkehrung auf die Knickung der geraden Stabes mit veränderlicher Querschnitt*, Ing.-Archiv, 6, 32 (1963), 373-387.
6. K. FEDERHOFER, *Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte*, Ing.-Archiv, 3, 11 (1940), 224-238.
7. A. GAJEWSKI, *Pewne rozwiązania ściśle problemu stateczności płyt o zmiennej sztywności*, Arch. Inżyn. Łądów., 3, 11 (1965).
8. R. GRAN-OLSSON, *Knickung der Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit*, Ing.-Archiv, 3, 9 (1938), 205-214.
9. R. GRAN-OLSSON, *Über die Knickung der Kreisringplatte von veränderlicher Dicke*, Ing. Archiv, 2, 12 (1941), 123-132.
10. E. КАММЕ, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen B. 1*, Leipzig 1951.
11. А. Д. Коваленко, *Круглые пластинки переменной толщины*, Москва 1959, Физматгиз.
12. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963), 643-666.
13. F. P. LAASONEN, *Nurjahdustuen edullisimmasta poikkipinnavalinnasta* [Dobór najkorzystniejszego kształtu pręta poddanego wyoboczeniu] Tekn. Aikakaust., 2, 38 (1948), 49-52.
14. E. H. MANSFIELD, *Bending, buckling and curling of a heated thin plate*, Proc. Roy. Soc., A268 (1962), 316-327.
15. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1958.
16. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, *Nichtthomogenitätsprobleme im elastischen und vorplastischen Bereich*, Österr. Ing.-Archiv, 15 (1961), 130-152.
17. П. Ф. Папкович, *Строительная механика корабля*, т. II, Судпромгиз, Ленинград 1941.
18. J. SALA, *Über die inelastische Knickung eines verjüngten Stabes*, Diss., Helsinki 1951.
19. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc. Graw Hill, New York 1961.
20. M. WNUK i M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ osłabienia pręta na siłę krytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 3, 7 (1959), 311-336.
21. A. YLINEN, *Eräs aksiaalisen jännitystilän muodonnmuutosfunktio ja sitä vastaava nurjahduskaava* [Zależność między odkształceniami i naprężeniami i jej zastosowanie w teorii wyoboczenia], Tekn. Aikakaust., 38 (1948), 9-14.
22. A. YLINEN, *A Method of Determining the Buckling Stress and Required Cross-Sectional Area for Centrally Loaded Straight Columns in Elastic and Inelastic Range*, Mem. Assoc. Int. Ponts. Charp. 16., Zurich (1956), 529-550.
23. M. ŻYCZKOWSKI, *Wyoboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, Rozpr. Inżyn., 2, 2 (1954), 231-289.
24. M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inżyn., 3, 4 (1956), 367-412.
25. M. ŻYCZKOWSKI, *W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych*, Rozpr. Inżyn., 4, 4 (1956), 441-456.
26. M. ŻYCZKOWSKI, *Nośność graniczna niejednorodnych wirujących tarcz kołowych*, Rozpr. Inżyn., 1, 5 (1957), 49-96.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГОЙ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ОБРАТНЫМ МЕТОДОМ

Целью работы является получение точных решений задачи устойчивости круговых и кольцеобразных пластинок с переменной жесткостью, подверженных всестороннему сжатию постоянной силой N . Исследовались различные способы опирания (статически определяемые) и то, как в упругой области, так и упруго-пластической. В работе даются некоторые решения, полученные обратным методом, а именно методом «предположения точного решения».

После общей формулировки задачи в упругой области в разделе II, в третьем разделе работы получен ряд точных решений для круговых пластинок (3.9), (3.10) и кольцеобразных (3.28), (3.29), (3.31), (3.32), (3.40) и (3.41) используя функцию угла прогиба в виде решения уравнения Эйлера I, (3.2). Все решения, приведенные в этом разделе, определяют пластинки, жесткость которых на свободном краю или свободно опертом равняется нулю. В разделе IV приводится решение лишнее этой черты (свойства). Оно было получено предполагая функцию прогиба также в форме решения уравнения Эйлера, но в несколько другой форме по сравнению с предыдущей, уравнения Эйлера II, (4.2). Уравнения (4.21) и (4.22) отличаются более общей формой и дают возможность получить теоретически произвольное количество видов пластинок (и соответствующих им критических сил).

Приведенные здесь решения для полных круговых пластинок (4.26), (4.27), (4.37), (4.38) и кольцеобразных пластинок (4.47), (4.48), (4.54), (4.55) иллюстрируются простыми примерами.

В разделе V существенно упрощается общее уравнение (2.8), принимая функцию прогиба в виде решения уравнения Бесселя (5.8). Подобно, как в разделе III, на свободном и свободно опертом краю жесткость пластинки должно равняться нулю, (5.18) и (5.19).

Раздел VI посвящен упруго-пластическому продольному изгибу круговых и кольцеобразных пластинок переменной жесткости. В данном случае, основой принято возможно простая теория упруго-пластического продольного изгиба пластинок, предложенную Рошем и Эйхингером, в которой, однако, модуль Кармана был заменен касательным модулем $\bar{E}(\sigma) = d\sigma/d\varepsilon$. При этом использовано формулу А. Илинена (6.1).

Приводится практический порядок действий при определении формы пластинки в упруго-пластической области, а также способ определения критической силы в этой области для априори приведенной формы пластинки. В заключение (раздел VII) определяется процентная экономия материала при замене пластинки постоянной жесткости — пластинкой переменной жесткости, но с той же самой критической силой (7.6). Для приведенного примера — экономия является довольно значительная и составляет 12%.

Summary

COMPUTATION OF THE ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC STABILITY OF CIRCULAR PLATES WITH VARIABLE RIGIDITY BY MEANS OF THE INVERSE METHOD

The aim of the present paper is to obtain accurate solutions of the stability problem of circular and annular plates with variable rigidity, subjected to uniform compression by a constant force N . Various (statically determinate) support conditions are analysed both in the elastic and the elastic-plastic range. Some solutions are obtained by means of the inverse method of «assumed accurate solution».

In the elastic range the problem is stated in a general manner in the second part. The third part contains a number of accurate solutions for circular (3.9) and (3.10) and annular plates (3.28), (3.29), (3.31), (3.32), (3.40) and (3.41) obtained by assuming the deflection angle in the form of

solution of Euler's equation I, (3.2). All the solutions obtained in this part determine plates with zero rigidity at a free or simply supported edge. The fourth part discusses solutions not having this feature. They are also obtained by assuming the deflection angle in the form of an Euler's equation but having a somewhat different form (Euler's equation II), (4.2). The equations (4.21) and (4.22) are sufficiently general to enable theoretical obtainment of an arbitrary number of forms of plates (and the relevant critical forces).

Solutions are obtained for full plates (4.26), (4.27), (4.37) and (4.38) and annular plates (4.47), (4.48), (4.54) and (4.55). They are illustrated by some simple examples.

In the fifth part an essential simplification of the general equation (2.8) is obtained by assuming the deflection function in the form of the solution of the Bessel equation (5.8). Similarly to the third part the rigidity at a free or simply supported edge must be zero (5.18), (5.19).

The sixth part is devoted to elastic-plastic buckling of circular and annular plates with variable rigidity. It is based on the simple buckling theory of elastic plastic plates given by Roš and Eichinger, the Kármán modulus being replaced by the tangent modulus $\bar{E}(\sigma) = d\sigma/d\epsilon$, and the A. Ylinen formula (6.1) being used. Practical procedure for the determination of the form of the plate in the elastic-plastic is described as well as the method of finding the critical force in this range for a prescribed form of the plate. In conclusion (part 7) the material economies are determined in percents if a constant rigidity plate is replaced by a plate of variable rigidity, the critical force remaining the same, (7.6). For the example under consideration these economies are considerable and amount to 12 percent.

KATEDRA FIZYKI I KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1964 r.
