

OBLICZENIE PEWNEJ KONSTRUKCJI PRZESTRZENNEJ

JANUSZ CZULAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Nieraz stosowane są w budownictwie monolityczne przestrzenne szkielety nośne o konstrukcji słupowo-płytowej (słupy i stropy), przy czym dla niektórych obiektów budowlanych o specjalnym przeznaczeniu stosowane są układy o niewielkiej odkształcalności płyt stropowych w porównaniu z odkształcalnością słupów. Jednakże ani w literaturze podręcznikowej ani w literaturze specjalnej z zakresu statyki rozmaitych układów przestrzennych (np. [1-10]) autor nie znalazł sposobu obliczenia tego rodzaju konstrukcji. Autor stwierdził natomiast, że obliczenia statyczne przy projektowaniu takich obiektów wykonywane są na podstawie założeń upraszczających, odbiegających znacznie od rzeczywistych warunków tych konstrukcji. Największe zastrzeżenia może tu wywoływać zwłaszcza nieuwzględnianie lub też niedostateczne uwzględnianie przestrzenności oraz wielokrotnej hiperstatyczności układu.

W tej sytuacji istnieje konieczność opracowania odpowiedniego sposobu obliczenia statycznego nośnych szkieletów przestrzennych słupowo-płytowych. Należy jednak zaznaczyć, że przy uwzględnieniu odkształcalności wszystkich elementów szkieletu, a więc tak słupów jak i płyt stropowych, opracowanie sposobu obliczenia takich konstrukcji jest zadaniem niełatwym. I przypuszczalnie z tego właśnie powodu zadanie to nie zostało jeszcze dotąd rozwiązane.

Rozważania przytoczone w niniejszej pracy odnoszą się do monolitycznych układów przestrzennych o niewielkiej odkształcalności płyt stropowych układu w porównaniu z odkształcalnością jego słupów. Rozważania te ograniczają się tylko do przypadku konstrukcji o słupach pionowych i o stropach poziomych (rys. 1, 4 i 5). W punktach 3 i 4 podany jest sposób ogólny obliczenia sił wzajemnego oddziaływania na siebie słupów i płyt stropowych takich szkieletów. Jest to zarazem rozwiązanie zagadnienia obliczenia sił wewnętrznych w słupach szkieletu. Obliczenie to oparte jest na założeniu całkowitej nieodkształcalności płyt stropowych, przy czym sprawa obliczenia sił wewnętrznych w tych płytach jest w danym razie zagadnieniem oddzielnym i nie wchodzi w zakres niniejszych rozważań.

2. Oznaczenia

W niniejszej pracy zastosowane są następujące oznaczenia:

- p rzędna dowolnego punktu (o współrzędnych x, y) dolnej powierzchni (płaszczyzny) stropu B po wzajemnym przemieszczeniu się stropów A i B (rys. 1);

- a, b, c wielkości niezależne od współrzędnych w równaniu dolnej powierzchni stropu B ;
- α kąt między dowolną prostą leżącą w płaszczyźnie p , równoległą do płaszczyzny XZ , a płaszczyzną XY ;
- β kąt między dowolną prostą leżącą w płaszczyźnie p , równoległą do płaszczyzny YZ , a płaszczyzną XY ;
- γ kąt obrotu stropu B względem stropu A w płaszczyźnie prostopadłej do osi Z ;
- x_0, y_0 współrzędne punktu B_0 (rys. 2);
- x_i, y_i współrzędne punktu B_i (rys. 2);
- l odległość między stropami A i B w świetle; wysokość słupów piętra $A - B$ (rys. 1 i 3);
- u_0, v_0, w_0 składowe przemieszczenia punktu B_0 stropu B w kierunku osi X, Y, Z (rys. 2);
- u_i, v_i, w_i składowe przemieszczenia punktu B_i stropu B w kierunku osi X, Y, Z (rys. 2), a także składowe zredukowanego przemieszczenia punktu D_i dolnej powierzchni stropu D w układzie złożonym (rys. 4);
- $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ przemieszczenia katowe otaczającego punkt B_i elementu pola dolnej powierzchni stropu B w płaszczyznach równoległych do płaszczyzn XZ, YZ, XY , (rys. 2), a także zredukowane przemieszczenia katowe otaczającego punkt D_i elementu pola dolnej powierzchni stropu D w układzie złożonym (rys. 4);
- $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i$ składowe całkowite przemieszczenia środka ciężkości pola przekroju poprzecznego B_i słupa i w kierunku osi X, Y, Z (rys. 3);
- $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$ przemieszczenia katowe całkowite przekroju poprzecznego B_i słupa i w płaszczyznach równoległych do płaszczyzn XZ, YZ, XY (rys. 3);
- $Q_i^X, Q_i^Y, Q_i^Z,$
 M_i^X, M_i^Y, M_i^Z składowe stanu napięcia w przekroju poprzecznym B_i słupa i (rys. 3);
- k_i^u wartość \bar{u}_i odpowiadająca obciążeniu słupa i siłą Q_i^X o wartości równej jednostce siły (rys. 3);
- m_i^u wartość \bar{u}_i odpowiadająca obciążeniu słupa i momentem M_i^X o wartości równej jednostce momentu (rys. 3);
- k_i^v wartość \bar{v}_i odpowiadająca obciążeniu słupa i siłą Q_i^Y o wartości równej jednostce siły (rys. 3);
- m_i^v wartość \bar{v}_i odpowiadająca obciążeniu słupa i momentem M_i^Y o wartości równej jednostce momentu (rys. 3);
- $-k_i^w$ wartość \bar{w}_i odpowiadająca obciążeniu słupa i siłą Q_i^Z o wartości równej jednostce siły (rys. 3);
- $-k_i^a$ wartość $\bar{\alpha}_i$ odpowiadająca obciążeniu słupa i siłą Q_i^X o wartości równej jednostce siły (rys. 3);
- $-m_i^a$ wartość $\bar{\alpha}_i$ odpowiadająca obciążeniu słupa i momentem M_i^X o wartości równej jednostce momentu (rys. 3);
- $-k_i^b$ wartość $\bar{\beta}_i$ odpowiadająca obciążeniu słupa i siłą Q_i^Y o wartości równej jednostce siły (rys. 3);
- $-m_i^b$ wartość $\bar{\beta}_i$ odpowiadająca obciążeniu słupa i momentem M_i^Y o wartości równej jednostce momentu (rys. 3);
- m_i^c wartość $\bar{\gamma}_i$ odpowiadająca obciążeniu słupa i momentem M_i^Z o wartości równej jednostce momentu (rys. 3);

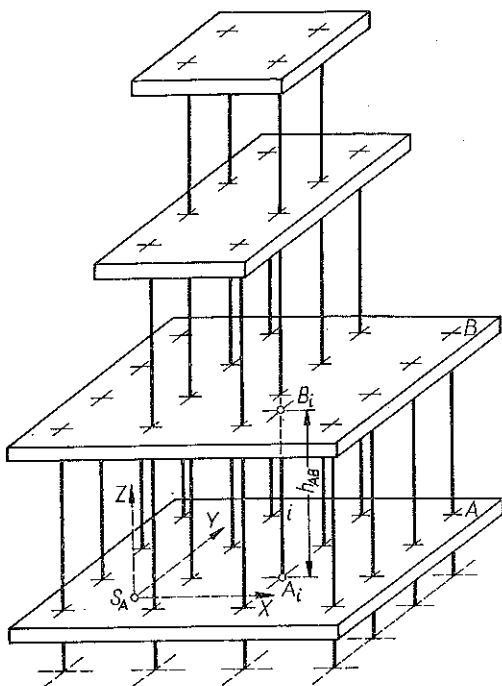
- $\bar{u}_i^0, \bar{v}_i^0, \bar{w}_i^0$, wartości $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$ odpowiadające ewentualnym innym niż siły $Q_i^X, Q_i^Y, Q_i^Z, M_i^X, M_i^Y, M_i^Z$ przyczynom odkształcającym słup i (rys. 3);
- $\bar{\alpha}_i^0, \bar{\beta}_i^0, \bar{\gamma}_i^0$ wartości $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$ odpowiadające ewentualnym innym niż siły $Q_i^X, Q_i^Y, Q_i^Z, M_i^X, M_i^Y, M_i^Z$ przyczynom odkształcającym słup i (rys. 3);
- J_i^X, J_i^Y momenty bezwładności przekroju poprzecznego słupa i względem środkowych osi głównych tego przekroju, równoległych odpowiednio do osi współrzędnych X i Y (rys. 3);
- A_i pole przekroju poprzecznego słupa i (rys. 3);
- C_i wielkość zależna od kształtu i wymiarów przekroju poprzecznego słupa i , figurująca we wzorach dla skręcania słupa (rys. 3);
- E moduł Younga;
- G moduł sprężystości postaciowej;
- ν współczynnik Poissona;
- $\bar{c}_i^u, \bar{c}_i^a, \bar{c}_i^v, \bar{c}_i^b, \bar{c}_i^w$ współczynniki przy wielkościach określających składowe stanu przemieszczenia przekroju poprzecznego B_i słupa i we wzorach dla składowych stanu napięcia w tym przekroju;
- $\bar{d}_i^u, \bar{d}_i^b, \bar{d}_i^a, \bar{d}_i^v, \bar{d}_i^w$ współczynniki przy wielkościach określających składowe stanu napięcia w przekroju poprzecznym B_i słupa i w przypadku niezmienności położenia względem siebie przekrojów A_i oraz B_i (rys. 3);
- $Q_i^{X0}, Q_i^{Y0}, Q_i^{Z0}$, składowe stanu napięcia w przekroju poprzecznym B_i słupa i w przypadku niezmienności położenia względem siebie przekrojów A_i oraz B_i (rys. 3);
- $M_i^{X0}, M_i^{Y0}, M_i^{Z0}$ składowe stanu napięcia w przekroju poprzecznym B_i słupa i w przypadku niezmienności położenia względem siebie przekrojów A_i oraz B_i (rys. 3);
- n liczba wszystkich słupów znajdujących się w obszarze międzystropowym $A - B$ (rys. 1);
- $\Sigma P_X, \Sigma P_Y, \Sigma P_Z$ sumy rzutów na osie X, Y, Z wszystkich sił zewnętrznych obciążających szkielet ponad przekrojem poziomym słupów piętra $A - B$ przylegającym do spodniej powierzchni stropu B (rys. 1);
- $\Sigma M_X^P, \Sigma M_Y^P, \Sigma M_Z^P$ sumy momentów wszystkich sił zewnętrznych, obciążających szkielet ponad przekrojem poziomym słupów piętra $A - B$ przylegającym do spodniej powierzchni stropu B względem osi X, Y, Z (rys. 1);
- $u_i^{DB}, v_i^{DB}, w_i^{DB}$, składowe przemieszczenia elementu pola otaczającego punkt D_i dolnej powierzchni stropu D względem górnej powierzchni stropu B w układzie złożonym (rys. 4);
- $\alpha_i^{DB}, \beta_i^{DB}, \gamma_i^{DB}$ składowe przemieszczenia elementu pola otaczającego punkt D_i dolnej powierzchni stropu D względem górnej powierzchni stropu B w układzie złożonym (rys. 4);
- u_0^B, v_0^B, w_0^B składowe przemieszczenia punktu $B_0(0, 0, l_{AB})$ dolnej powierzchni stropu B względem górnej powierzchni stropu A (rys. 4);
- $\alpha^B, \beta^B, \gamma^B$ przemieszczenia kątowe stropu B względem stropu A (rys. 4);
- u_0^D, v_0^D, w_0^D składowe przemieszczenia punktu $D_0(0, 0, l_{AD})$ dolnej powierzchni stropu D względem górnej powierzchni stropu A (rys. 4);
- $\alpha^D, \beta^D, \gamma^D$ przemieszczenia kątowe stropu D względem stropu A (rys. 4);
- l_{AB}, l_{AD} odległości dolnej powierzchni stropu B oraz dolnej powierzchni stropu D od górnej powierzchni stropu A (rys. 4).

3. Obliczenie układu podstawowego

Rozpatrujemy schemat przestrzennej monolitycznej konstrukcji szkieletowej przedstawiony na rys. 1. Przyjmujemy tutaj, że

- stropy są nieodkształcalne i grubość ich jest stała;
- główne środkowe płaszczyzny bezwładności słupów poszczególnych pięter są do siebie odpowiednio albo równoległe, albo prostopadłe;
- wzajemne przemieszczenia sąsiednich stropów są małe w porównaniu do odległości między nimi;
- odkształcenia słupów leżą w obszarze stosowalności prawa Hooke'a.

Dla określenia wielkości składowych stanu napięcia w przystropowych przekrojach poprzecznych słupów stosujemy tzw. metodę przemieszczeń. Odnosne obliczenia przeprowadzamy dla dowolnego piętra układu, np. dla piętra $A - B$.



Rys. 1

Przyjmujemy układ prostokątnych osi współrzędnych X, Y, Z o początku znajdującym się w dowolnym punkcie S_A górnej powierzchni stropu A ; kierunki osi współrzędnych są odpowiednio równoległe (albo prostopadłe) do głównych środkowych płaszczyzn bezwładności słupów piętra $A - B$.

Zmiana położenia stropu B względem stropu A spowodowana odkształceniem się słupów znajdujących się między tymi stropami może być całkowicie określona przez ustalenie, w odniesieniu do przyjętego układu osi współrzędnych, następujących elementów:

1) równania dolnej powierzchni (płaszczyzny) płyty stropowej B , które można napisać w następującej postaci ogólnej:

$$(3.1) \quad p = ax + by + c;$$

2) składowych u_0 i v_0 przemieszczenia w kierunku osi X i Y jakiegoś jednego dowolnego punktu B_0 spodniej powierzchni stropu B ;

3) kąta γ obrotu (skręcenia) stropu B względem punktu B_0 w płaszczyźnie prostopadłej do osi Z .

Niezależnie od współrzędnych x, y wielkości a, b i c , wchodzące w równanie (3.1), możemy określić w następujący sposób.

Ponieważ

$$(3.2) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = a = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = b = \operatorname{tg} \beta,$$

więc zgodnie z założeniem c) możemy napisać, że

$$(3.3) \quad a \approx \alpha, \quad b \approx \beta.$$

Wielkość

$$(3.4) \quad c = [p]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

oznacza odległość punktu przecięcia osią Z dolnej powierzchni stropu B od górnej powierzchni stropu A . Wielkość tę możemy określić w zależności od składowych u_0 , v_0 i w_0 przemieszczenia punktu B_0 odpowiednio w kierunku osi X , Y i Z oraz w zależności od kątów α i β . Bierzymy tu mianowicie pod uwagę dwa wzajemnie niezależne od siebie wyrażenia określające odległość punktu B_0 od górnej powierzchni stropu A . Jedno z tych wyrażeń, wynikające z równania (3.1) przy uwzględnieniu w nim zależności (3.3), ma postać

$$(3.5) \quad [p]_{\substack{x=x_0+u_0 \\ y=y_0+v_0}} = \alpha(x_0+u_0) + \beta(y_0+v_0) + c,$$

drugie zaś, niezależne od równania (3.1), postać następującą (rys. 1):

$$(3.6) \quad [p]_{\substack{x=x_0+u_0 \\ y=y_0+v_0}} = h_{AB} + w_0.$$

Stąd, przy pominięciu wielkości małych rzędu drugiego oraz przy uwzględnieniu, że $h_{AB} = l$, dochodzimy do wzoru

$$(3.7) \quad c = l + w_0 - \alpha x_0 - \beta y_0.$$

Uwzględniając zależności (3.3) oraz (3.7) w równaniu (3.1) możemy to równanie napisać ostatecznie w postaci następującej:

$$(3.8) \quad p = l + w_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0).$$

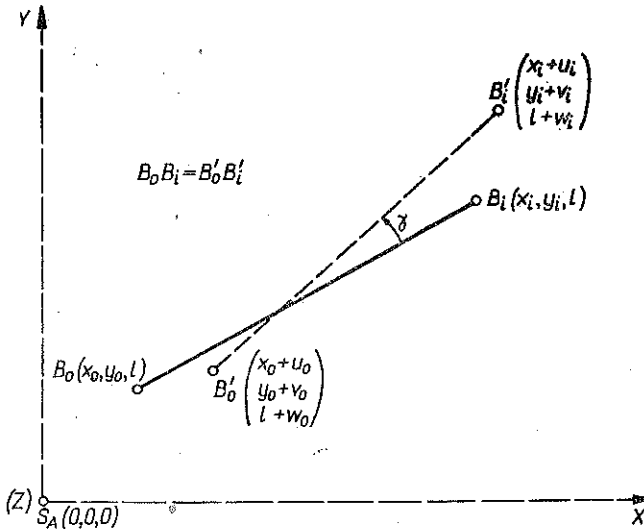
Z wyżej przeprowadzonych rozważań wynika, że dla określenia zmiany położenia każdego z punktów stropu B względem stropu A konieczne jest określenie sześciu wielkości geometrycznych, tzn. wielkości u_0 , v_0 , w_0 , α , β , γ . Wielkości liniowe u_0 , v_0 , w_0 odnoszą się do jednego ustalonego punktu (punkt B_0) dolnej powierzchni stropu B , wielkości katowe α , β , γ natomiast są jednakowe dla wszystkich punktów tej powierzchni. Uwzględniając te okoliczności i mając na widoku rys. 2 dochodzimy do następujących wzorów ogólnych dla składowych przemieszczenia odnoszących się do dowolnego punktu B_i spodniej powierzchni stropu B :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} u_i &= u_0 - \gamma(y_i - y_0), \\ v_i &= v_0 + \gamma(x_i - x_0), \\ w_i &= w_0 + \alpha(x_i - x_0) + \beta(y_i - y_0), \\ \alpha_i &= \alpha, \quad \beta_i = \beta, \quad \gamma_i = \gamma. \end{aligned}$$

Te wzory ogólne upraszczają się dla przypadku, gdy punkt B_0 jest pierwotnie punktem przebicia dolnej powierzchni stropu B przez oś Z . Wtedy bowiem, wobec tego, że $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, wzory (3.9) sprowadzają się odpowiednio do postaci następującej:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u_i &= u_0 - \gamma y_i, \\ v_i &= v_0 + \gamma x_i, \\ w_i &= w_0 + \alpha x_i + \beta y_i, \\ \alpha_i &= \alpha, \quad \beta_i = \beta, \quad \gamma_i = \gamma. \end{aligned}$$

Dysponując powyższymi wzorami możemy odnośne wielkości sił składowych stanu napięcia panującego w przekrojach poprzecznych słupów piętra $A - B$ przedstawić w odpowiedniej zależności od wielkości geometrycznych $u_0, v_0, w_0, \alpha, \beta, \gamma$.



Rys. 2

Bierzemy pod uwagę rys. 3 przedstawiający schemat dowolnego słupa i piętra $A - B$, gdzie odpowiednio zaznaczone są siły składowe oddziaływania stropu B na ten słup. Przy określaniu wielkości składowych przemieszczenia przekroju poprzecznego B_i słupa możemy, oprócz sił obciążających słup, uwzględnić także i ewentualne inne przyczyny odkształcające słup, jak np. zmianę temperatury otoczenia słupa w porównaniu z temperaturą panującą przy zakończeniu wykonywania konstrukcji.

Wzory ogólne określające przemieszczenie górnego przystropowego przekroju poprzecznego B_i słupa i możemy — w odniesieniu do przyjętego układu osi współrzędnych i przy uwzględnieniu przyjętych zwrotów dla dodatnich wartości kątów α, β, γ — napisać w postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i &= k_i^u Q_i^X + m_i^u M_i^Y + \bar{u}_i^0, \\
 \bar{v}_i &= k_i^v Q_i^Y + m_i^v M_i^X + \bar{v}_i^0, \\
 \bar{w}_i &= -k_i^w Q_i^Z + \bar{w}_i^0, \\
 \bar{\alpha}_i &= -k_i^a Q_i^X - m_i^a M_i^Y + \bar{\alpha}_i^0, \\
 \bar{\beta}_i &= -k_i^b Q_i^Y - m_i^b M_i^X + \bar{\beta}_i^0, \\
 \bar{\gamma}_i &= m_i^c M_i^Z + \bar{\gamma}_i^0,
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

przy czym, zgodnie z prawem wzajemności przemieszczeń, istnieją tu dwie równości:

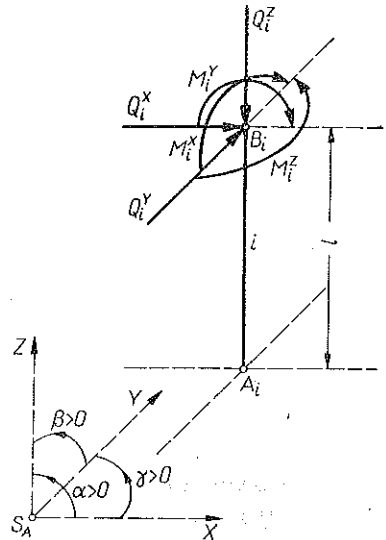
$$m_i^u = k_i^a, \quad m_i^v = k_i^b.
 \tag{3.12}$$

W przypadku słupa pryzmatycznego wielkości k_i i m_i figurujące we wzorach (3.11) możemy wyrazić odpowiednio za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned}
 k_i^u &= \frac{l^3}{3EJ_i^Y}, & m_i^u &= \frac{l^2}{2EJ_i^Y}, \\
 k_i^v &= \frac{l^3}{3EJ_i^X}, & m_i^v &= \frac{l^2}{2EJ_i^X}, \\
 k_i^w &= \frac{l}{EA_i}, & m_i^a &= \frac{l}{EJ_i^Y}, \\
 k_i^a &= \frac{l^2}{2EJ_i^Y}, & m_i^b &= \frac{l}{EJ_i^X}, \\
 k_i^b &= \frac{l^2}{2EJ_i^X}, & m_i^c &= \frac{l}{GC_i}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Wchodząca do ostatniego z tych wzorów wielkość G określona jest za pomocą wzoru

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.
 \tag{3.14}$$



Rys. 3

Z kolei równania (3.11) rozwiązujemy odpowiednio względem wielkości Q_i^X , Q_i^Y , Q_i^Z , M_i^X , M_i^Y , M_i^Z i dochodzimy tą drogą do wzorów następujących:

$$\begin{aligned}
 Q_i^X &= c_i^u \bar{u}_i + c_i^a \bar{\alpha}_i + Q_i^{X0}, \\
 Q_i^Y &= c_i^v \bar{v}_i + c_i^b \bar{\beta}_i + Q_i^{Y0}, \\
 Q_i^Z &= c_i^w \bar{w}_i + Q_i^{Z0}, \\
 M_i^X &= d_i^v \bar{v}_i + d_i^b \bar{\beta}_i + M_i^{X0}, \\
 M_i^Y &= d_i^u \bar{u}_i + d_i^a \bar{\alpha}_i + M_i^{Y0}, \\
 M_i^Z &= d_i^c \bar{\gamma}_i + M_i^{Z0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_i^u &= \frac{m_i^a}{m_i^a k_i^u - m_i^u k_i^a}, & \bar{c}_i^a &= \frac{m_i^u}{m_i^a k_i^u - m_i^u k_i^a}, \\
 \bar{c}_i^v &= \frac{m_i^b}{m_i^b k_i^v - m_i^v k_i^b}, & \bar{c}_i^b &= \frac{m_i^v}{m_i^b k_i^v - m_i^v k_i^b}, \\
 \bar{c}_i^w &= -\frac{1}{k_i^w}, & \bar{d}_i^v &= -\bar{c}_i^b, & \bar{d}_i^b &= \frac{k_i^v}{k_i^b} \bar{d}_i^v, \\
 \bar{d}_i^u &= -\bar{c}_i^a, & \bar{d}_i^a &= \frac{k_i^u}{k_i^a} \bar{d}_i^u, & \bar{d}_i^y &= \frac{1}{m_i^y}, \\
 Q_i^{X0} &= -\frac{m_i^a \bar{u}_i^0 + m_i^u \bar{a}_i^0}{m_i^a k_i^u - m_i^u k_i^a}, & Q_i^{Y0} &= -\frac{m_i^b \bar{v}_i^0 + m_i^v \bar{\beta}_i^0}{m_i^b k_i^v - m_i^v k_i^b}, & Q_i^{Z0} &= \frac{\bar{w}_i^0}{k_i^w}, \\
 M_i^{X0} &= -\frac{k_i^b \bar{v}_i^0 + k_i^v \bar{\beta}_i^0}{k_i^b m_i^v - k_i^v m_i^b}, & M_i^{Y0} &= -\frac{k_i^a \bar{u}_i^0 + k_i^u \bar{a}_i^0}{k_i^a m_i^u - k_i^u m_i^a}, & M_i^{Z0} &= -\frac{\bar{\gamma}_i^0}{m_i^y}.
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Figurujące we wzorach (3.15) wielkości Q_i^{X0} , Q_i^{Y0} , Q_i^{Z0} , M_i^{X0} , M_i^{Y0} , M_i^{Z0} określają odpowiednie składowe stanu napięcia w przekroju poprzecznym B_i słupa i w takim przypadku, gdy obydwaj jego końcowe przekroje poprzeczne, tzn. przekroje A_i i B_i , nie ulegają względem siebie przemieszczeniu. Wartości tych składowych (wszystkich albo tylko niektórych) mogą się nie równać zero tylko wtedy, gdy istnieją odnośne przyczyny odkształcające słup.

Ponieważ wobec monolityczności połączenia słupów z płytami stropowymi szkieletu spełnione są równości

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i &= u_i, & \bar{v}_i &= v_i, & \bar{w}_i &= w_i, \\
 \bar{\alpha}_i &= \alpha_i, & \bar{\beta}_i &= \beta_i, & \bar{\gamma}_i &= \gamma_i,
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

przeto uwzględniając tutaj zależności (3.10), wzory (3.15) przekształcamy ostatecznie we wzory

$$\begin{aligned}
 Q_i^X &= \bar{c}_i^u u_0 + \bar{c}_i^a \alpha - \bar{c}_i^y \gamma + Q_i^{X0}, \\
 Q_i^Y &= \bar{c}_i^v v_0 + \bar{c}_i^b \beta + \bar{c}_i^x x_i \gamma + Q_i^{Y0}, \\
 Q_i^Z &= \bar{c}_i^w w_0 + \bar{c}_i^x x_i \alpha + \bar{c}_i^y \gamma \beta + Q_i^{Z0}, \\
 M_i^X &= \bar{d}_i^v v_0 + \bar{d}_i^b \beta + \bar{d}_i^x x_i \gamma + M_i^{X0}, \\
 M_i^Y &= \bar{d}_i^u u_0 + \bar{d}_i^a \alpha - \bar{d}_i^y \gamma + M_i^{Y0}, \\
 M_i^Z &= \bar{d}_i^y \gamma + M_i^{Z0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Obecnie przechodzimy do ułożenia sześciu równań równowagi przestrzennej $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M_{(X)} = 0$, $\Sigma M_{(Y)} = 0$, $\Sigma M_{(Z)} = 0$ dla sił działających na część konstrukcji znajdującą się ponad przekrojem poziomym słupów piętra $A - B$, przylegającym do spodniej powierzchni stropu B (rys. 1).

Biorąc pod uwagę rys. 3 oraz odpowiednio uwzględniając tutaj odwrotność zwrotów sił Q_i i M_i , zaznaczonych na tym rysunku, możemy wyżej wymienione równania równowagi napisać ogólnie w postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 \Sigma X &= - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^X + \Sigma P_X = 0, \\
 \Sigma Y &= - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^Y + \Sigma P_Y = 0, \\
 \Sigma Z &= \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^Z + \Sigma P_Z = 0, \\
 \Sigma M_{(X)} &= l \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^Y + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^Z y_i + \sum_{i=1}^{i=n} M_i^X + \Sigma M_X^P = 0, \\
 \Sigma M_{(Y)} &= -l \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^X - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^Z x_i - \sum_{i=1}^{i=n} M_i^Y + \Sigma M_Y^P = 0, \\
 \Sigma M_{(Z)} &= \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^X y_i - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^Y x_i - \sum_{i=1}^{i=n} M_i^Z + \Sigma M_Z^P = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Literą n oznaczona jest w tych wzorach liczba wszystkich słupów znajdujących się w obszarze między stropami A i B ; symbolami ΣP_X , ΣP_Y , ΣP_Z oznaczone są sumy rzutów na osie X , Y , Z wszystkich sił zewnętrznych, obciążających konstrukcję powyżej wymienionego poprzednio przekroju poziomego konstrukcji, symbolami zaś ΣM_X^P , ΣM_Y^P , ΣM_Z^P — sumy momentów od tegoż obciążenia, określone odpowiednio względem osi X , Y , Z .

Uwzględniając w równaniach (3.19) wzory (3.18) dochodzimy ostatecznie do układu następujących sześciu równań liniowych z sześcioma wielkościami niewiadomymi u_0 , v_0 , w_0 , α , β , γ :

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{u}} \right) u_0 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{\alpha}} \right) \alpha + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} y_i \right) \gamma - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{X0} + \Sigma P_X = 0, \\
 & - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{v}} \right) v_0 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{\beta}} \right) \beta - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} x_i \right) \gamma - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{Y0} + \Sigma P_Y = 0, \\
 & \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} \right) w_0 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{\alpha}} x_i \right) \alpha + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{\beta}} y_i \right) \beta + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{Z0} + \Sigma P_Z = 0, \\
 & \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{v}} \right) v_0 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} y_i \right) w_0 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} x_i y_i \right) \alpha + \\
 & \quad + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} y_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{\beta}} \right) \beta + \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{v}} x_i \right) \gamma + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{Z0} y_i + \sum_{i=1}^{i=n} M_i^{X0} + \Sigma M_X^P + l \Sigma P_Y = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{u}} \right) u_0 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} x_i \right) w_0 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} x_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{a}} \right) \alpha - \\
 & \quad - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{w}} x_i y_i \right) \beta + \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{u}} y_i \right) \gamma - \\
 & \quad - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{Z0} x_i - \sum_{i=1}^{i=n} M_i^{Y0} + \Sigma M_Y^P - I \Sigma P_X = 0, \\
 (3.20) \quad & \text{[c. d.]} \\
 & \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{u}} y_i \right) u_0 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{v}} x_i \right) v_0 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{a}} y_i \right) \alpha - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{\beta}} x_i \right) \beta - \\
 & \quad - \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{u}} y_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} c_i^{\bar{v}} x_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\bar{\gamma}} \right) \gamma + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{X0} y_i - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i^{Y0} x_i - \sum_{i=1}^{i=n} M_i^{Z0} + \Sigma M_Z^P = 0.
 \end{aligned}$$

Drogą rozwiązania układu równań (3.20) wyznaczamy odpowiednie wartości dla $u_0, v_0, w_0, \alpha, \beta, \gamma$. Wartości te uwzględniamy we wzorach (3.18) i w ten sposób określamy ostatecznie odnośne wartości dla $Q_i^X, Q_i^Y, Q_i^Z, M_i^X, M_i^Y, M_i^Z$.

Odnosząc ułożone wyżej równania do każdego z pięter układu tego rodzaju co układ przedstawiony na rys. 1 możemy wyznaczyć (oddzielnie dla każdego piętra) siły składowe stanu napięcia we wszystkich słupach międzystropowych takiego układu.

Rozmiary odpowiednich obliczeń mogą być znacznie zmniejszone w przypadku istnienia symetrii szkieletu i jego obciążenia oraz ewentualnych innych przyczyn odkształcających słupy szkieletu.

I tak w przypadku podwójnej symetrii [tzn. symetrii względem płaszczyzn prostopadłych do osi X i Y (rys. 1)] wielkości $u_0, v_0, \alpha, \beta, \gamma$ są równe zero; jedynie wielkość w_0 nie jest równa zero. Wielkość tę możemy wtedy wyznaczyć naturalnie z równania trzeciego ($\Sigma Z = 0$) układu równań (3.20).

W przypadku symetrii pojedynczej trzy z sześciu wymienionych wyżej wielkości są równe zero. Jeżeli płaszczyzną symetrii jest np. płaszczyzna prostopadła do osi X , to wtedy wielkości u_0, α, γ są równe zero. Nierówne zero wielkości v_0, w_0, β możemy w tym przypadku obliczyć drogą rozwiązania układu trzech równań, złożonego z równań: drugiego ($\Sigma Y = 0$), trzeciego ($\Sigma Z = 0$) i czwartego ($\Sigma M_{(X)} = 0$), z układu równań (3.20).

Jeżeli niebisymentryczne obciążenie szkieletu bisymetryczne daje się rozłożyć na dwa odpowiednie obciążenia monosymetryczne, to wtedy wielkość γ równa się zero, a nierówne zero wielkości $u_0, v_0, w_0, \alpha, \beta$ najłatwiej możemy wyznaczyć drogą kolejnego uwzględnienia każdego z tych dwóch monosymetrycznych obciążeń składowych.

Wreszcie można tutaj przytoczyć pewne uwagi w sprawie odnośnego obliczenia konstrukcji szkieletowej o niecałkowicie monolitycznych połączeniach słupów z płytami stropowymi. Jeżeli np. słupy piętra $A - B$ (rys. 1) są połączone mono-

litycznie z płytą stropową A , a przegubami kulistymi z płytą stropową B , to wtedy siły składowe wzajemnego oddziaływania na siebie płyty B i słupa i piętra $A - B$ wyrażają się odpowiednio za pomocą wzorów

$$\begin{aligned}
 Q_i^X &= c_i^u u_0 - c_i^v y_i \gamma + Q_i^{X0}, \\
 Q_i^Y &= c_i^v v_0 + c_i^x x_i \gamma + Q_i^{Y0}, \\
 Q_i^Z &= c_i^w w_0 + c_i^x x_i \alpha + c_i^y y_i \beta + Q_i^{Z0},
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 c_i^u &= \frac{1}{k_i^u}, & c_i^v &= \frac{1}{k_i^v}, & c_i^w &= -\frac{1}{k_i^w}, \\
 Q_i^{X0} &= -\frac{u_i^0}{k_i^u}, & Q_i^{Y0} &= -\frac{v_i^0}{k_i^v}, & Q_i^{Z0} &= \frac{w_i^0}{k_i^w},
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

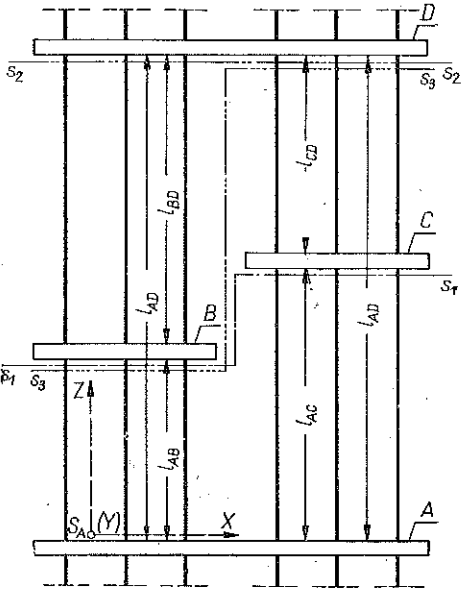
i gdzie symbole k_i^u, k_i^v, k_i^w oraz u_i^0, v_i^0, w_i^0 oznaczają tutaj odpowiednio te same wielkości co i we wzorach (3.11). Do wyznaczenia wielkości $u_0, v_0, w_0, \alpha, \beta, \gamma$ można w danym razie zastosować układ równań (3.19) naturalnie po uprzednim opuszczeniu w nich wyrazów określających sumy momentów M_i^X, M_i^Y, M_i^Z .

4. Obliczenie układów złożonych

Obliczenie przestrzennej konstrukcji szkieletowej o innym wzajemnym układzie płyt stropowych i słupów niż konstrukcja przedstawiona schematycznie na rys. 1 jest zadaniem znacznie bardziej złożonym od podanego w punkcie poprzednim obliczenia układu podstawowego. Z tego względu konstrukcje nie odpowiadające (w podanym wyżej znaczeniu) schematowi układu podstawowego, przedstawionemu na rys. 1, nazywamy tutaj układami złożonymi.

Bierzemy pod uwagę pewien określony wycinek monolitycznej konstrukcji przestrzennej, którego rzut na jedną z pionowych płaszczyzn współrzędnych przedstawiony jest schematycznie na rys. 4. Strop A połączony jest tutaj słupami bezpośrednio z dwoma oddzielnymi stropami B i C , które oprócz tego połączone są jeszcze ze stropem D .

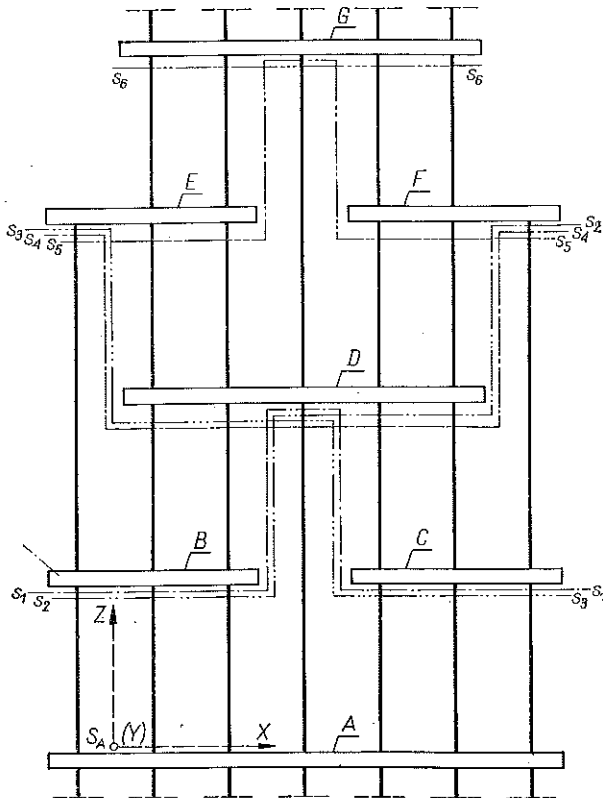
Uwzględniając schemat słupa międzystropowego podany na rys. 3 możemy siły składowe stanu napięcia w górnych przystropowych przekrojach poprzecznych słupów znajdujących się między stropami A i B, A i C, B i D, C i D wyrazić za pomocą



Rys. 4

wzorów ogólnych (3.15). Następnie biorąc pod uwagę położenie przyjętego na rys. 4 układu osi współrzędnych, możemy — zgodnie z warunkami (3.17) — określić odpowiednio wielkości $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$. I tak w odniesieniu do słupów między stropami A i B oraz A i C znajdują tutaj bezpośrednie zastosowanie wzory (3.10), a więc w konsekwencji i wzory (3.18). Natomiast w odniesieniu do słupów między stropami B i D oraz C i D trzeba odpowiednio uwzględnić przemieszczenie się stropu D względem stropu B i względem stropu C . W związku z tym we wzorach (3.17), odniesionych np. do słupów znajdujących się między stropami B i D , wielkości $u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ powinny być określone następująco:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_i &= u_i^{DB} = u_0^D - u_0^B + (l_{AD} - l_{AB}) \alpha^B - (\gamma^D - \gamma^B) y_i, \\ v_i &= v_i^{DB} = v_0^D - v_0^B + (l_{AD} - l_{AB}) \beta^B + (\gamma^D - \gamma^B) x_i, \\ w_i &= w_i^{DB} = w_0^D - w_0^B + (\alpha^D - \alpha^B) x_i + (\beta^D - \beta^B) y_i, \\ \alpha_i &= \alpha_i^{DB} = \alpha^D - \alpha^B, \quad \beta_i = \beta_i^{DB} = \beta^D - \beta^B, \quad \gamma_i = \gamma_i^{DB} = \gamma^D - \gamma^B. \end{aligned}$$



Rys. 5

Składowe stanu napięcia w tych słupach są więc wielkościami odpowiednio zależnymi od składowych przemieszczenia się stropu B i stropu D względem stropu A . Zastępując we wzorach (4.1) literę B literą C otrzymujemy wzory odnoszące się

do słupów znajdujących się między stropami C i D , z czego z kolei wynika, że składowe stanu napięcia w tych słupach są wielkościami zależnymi od składowych przemieszczenia się stropu C i stropu D względem stropu A .

Biorąc pod uwagę rys. 4 możemy się przekonać o tym, że dla wyznaczenia wielkości składowych przemieszczenia się stropów B , C i D względem stropu A zachodzi w danym razie konieczność rozwiązania układu osiemnastu równań równowagi przestrzennej, utworzonego z trzech zespołów równań $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M_{(X)} = 0$, $\Sigma M_{(Y)} = 0$, $\Sigma M_{(Z)} = 0$ ułożonych odpowiednio dla sił działających na każdą z trzech części konstrukcji znajdujących się np. ponad przekrojami $s_1 s_1$, $s_2 s_2$, $s_3 s_3$.

Obliczenie układu przestrzennego, którego rzut na jedną z pionowych płaszczyzn współrzędnych przedstawiony jest schematycznie na rys. 5, jest zadaniem o wiele większym (ze względu na rozmiary obliczenia) niż obliczenie układu przedstawionego na rys. 4.

Do określenia sił składowych stanu napięcia w słupach układu podanego na rys. 5 możemy, podobnie jak w przypadku poprzednim, zastosować odpowiednio wzory ogólne (3.15), a następnie, biorąc pod uwagę warunki (3.17), odpowiednio uwzględnić we wzorach (3.15) albo wzory (3.10), albo wzory (4.1), w zależności od tego, między jakimi stropami znajduje się odnośny słup i . Dla rozwiązania zadania widocznie konieczne jest w danym razie wyznaczenie wszystkich 36 wielkości składowych przemieszczenia stropów B , C , D , E , F i G względem stropu A . Te 36 wielkości możemy obliczyć drogą rozwiązania układu 36 równań równowagi przestrzennej ułożonych odpowiednio dla sił działających na części szkieletu znajdujące się ponad zaznaczonymi na rys. 5 przekrojami $s_1 s_1$, $s_2 s_2$, $s_3 s_3$, $s_4 s_4$, $s_5 s_5$, $s_6 s_6$.

Literatura cytowana w tekście

1. K. BEYER, *Die Statik im Stahlbetonbau*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
2. A. A. Уманский, *Пространственные системы*, Москва, Стройиздат, 1948.
3. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. I, Москва 1950.
4. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. II, Москва—Ленинград 1951.
5. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. III, Москва 1955.
6. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. IV, Москва 1958.
7. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. V, Москва 1959.
8. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. VI, Москва 1961.
9. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. VII, Москва 1962.
10. *Расчет пространственных конструкций*, Сборник статей, под ред. А. А. Уманского, в. VIII, Москва 1962.

Резюме

РАСЧЕТ НЕКОТОРОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

В настоящей работе дается способ расчета составляющих сил взаимного воздействия плит перекрытия и колонн в пространственных монолитных несущих конструкциях с небольшой деформируемостью плит перекрытия, по сравнению с деформируемостью колонн. Представленные рассуждения касаются каркасов с горизонтальными перекрытиями и вертикальными колоннами. Рассуждения проводятся при предположении полной недеформируемости плит перекрытия. Для решения задачи применяется метод перемещений, выводя соответствующие формулы и общие уравнения, касающиеся основной системы (рис. 1). Рассматривается вопрос расчета каркаса в случаях симметрии системы и ее нагрузки. Кроме того, учитывается также случай шарнирного соединения колонн с плитой перекрытия конструкции. В заключение, рассматривается проблема расчета сложных каркасов (рис. 4 и 5).

Summary

COMPUTATION OF SOME SPATIAL STRUCTURES

The present paper proposes a computation method of interaction forces between floor plates and columns in three-dimensional monolithic structures with a small deformability of floor plates as compared with that of the columns. The considerations presented concern structures with horizontal floors and vertical columns. The fundamental assumption is that of absolute indeformability of floor plates. To solve the problem the displacement method has been applied. Corresponding formulas and general equations are derived for the fundamental system (Fig. 1). The computation of the construction in the case of the symmetry of system and its loading is discussed. Besides, the case of hinged joints between plates and columns is also analysed. Finally, the problem of computing compound structures (Figs. 4 and 5) is considered.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
MINISTERSTWO SZKOLNICTWA WYŻSZEGO
MIĘDZYUCZELNIANY ZAKŁAD
PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW ARCHITEKTURY
URBANISTYKI I BUDOWNICTWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1964 r.