

## PÓŁODWROTNA METODA W HYDRODYNAMICE PŁASKIEJ<sup>1</sup>

S. I. GHEORGHITZA (BUKARESZT)

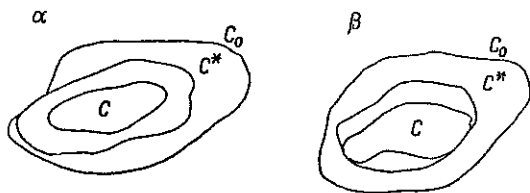
### 1. Wstęp

Kilka lat temu autor zaproponował pewną metodę rozwiązywania zagadnień hydrodynamiki rozpatrywanych na płaszczyźnie [1]. Celem jej było otrzymanie rozwiązań analitycznych pewnego zagadnienia. Przez zastosowanie kolejnych odwzorowań konforemnych, których celem było otrzymanie jak najlepszego przybliżenia do konturu danego na płaszczyźnie fizycznej, otrzymano zagadnienie brzegowe dla obszaru kanonicznego w płaszczyźnie pomocniczej zmiennej zespolonej. Metoda ta znalazła zastosowanie w pewnych zagadnieniach udaru oraz filtracji [2, 3, 4]. W niniejszej pracy podamy uogólnienia metody półodwrotnej przedstawionej w [1], co pozwoli na rozszerzenie zakresu zagadnień, które mogą być rozwiązane za jej pomocą. Następnie opisane zostaną nowe jej zastosowania.

Zagadnienia brzegowe, którymi będziemy się zajmować, powstały na gruncie hydrodynamiki i teorii filtracji, jednakże za pomocą znanych analogii można je również powiązać z innymi działami fizyki matematycznej.

### 2. Uogólnienie metody

Rozważmy zagadnienie brzegowe dla funkcji analitycznej (zagadnienie Dirichleta, Neumana lub mieszane), określonej w obszarze  $D_1$ , którego brzeg  $C$  mamy zamiar aproksymować za pomocą metody półodwrotnej. Weźmy dla przykładu dwa obszary  $D^*$  i  $D_0$  takie, że  $D \subset D^* \subset D_0$ . Ich brzegi  $C$ ,  $C^*$  i  $C_0$  mogą być położone względem siebie w różny sposób, lecz tutaj interesują nas jedynie następujące przypadki:



Rys. 1

$$(\alpha) C \cap C^* = \emptyset, \quad (\beta) C \cap C^* \neq \emptyset, \quad (\gamma) C \equiv C^* \quad (\text{np. rys. 1})$$

W przypadku  $\alpha$  opisaną metodę możemy zastosować w podobny sposób, jak to miało miejsce w [1]. Obieramy obszar kanoniczny w płaszczyźnie zmiennej zespo-

<sup>1</sup> Przedłumaczył z angielskiego J. ROLIŃSKI.

lonej  $z_1 = x_1 + iy_1$  i odwzorowujemy konforemnie na ten obszar  $D_0$  za pomocą funkcji  $G_1(z)$ :

$$(2.1) \quad z_1 = G_1(z).$$

Dla ustalenia uwagi obierzmy półpłaszczyznę za obszar kanoniczny, a zatem obrazem krzywej  $C$  w półpłaszczyźnie  $y_1 > 0$  będzie krzywa  $C^*$ , posiadająca ewentualnie punkty wspólne z prostą  $y_1 = 0$ . Punkty krzywej  $C_1$  mają rzędne nie mniejsze niż punkty krzywej  $C_1^*$  o tej samej odciętej. Za pomocą przekształcenia

$$(2.2) \quad z_2 = G_2(z_1)$$

przechodzimy do płaszczyzny  $y_2 > 0$ , tak że obrazem krzywej  $C_1^*$  będzie krzywa  $C_2^*$ , zaś krzywej  $C_1$  — krzywa  $C_2$  leżąca ponad  $C_2^*$ . Dalej postępujemy podobnie. Ostatecznie przejdziemy do półpłaszczyzny  $y_n > 0$ ,  $z_n = x_n + iy_n$  za pomocą związku

$$(2.3) \quad z_n = G_n(z_{n-1}),$$

przy czym krzywej  $C^*$  będzie odpowiadała krzywa  $C_n^*$ , krzywej zaś  $C$  krzywa  $C_n$ . Odwzorowania konforemne (2.1)–(2.3) dobieramy tak, aby zagadnienie brzegowe dla obszaru  $D_n$  (obraz obszaru  $D$  na płaszczyźnie  $z_n$ ) mogło być łatwo rozwiązane, a krzywa  $C$  otrzymana przez powrót do płaszczyzny fizycznej aproksymowała jak najlepiej dany kontur.

W przypadku  $\beta$  sposób postępowania jest taki sam z tą jedynie różnicą, że  $C_n$  i  $C_n^*$  mają pewne łuki wspólne. W przypadku  $\gamma$  pokrywają się kontury  $D_n$  i  $D_n^*$ .

Przykłady rozważone w poprzednich pracach dotyczyły wyłącznie przypadku  $\gamma$ , w którym  $C^*$  ma pewne łuki wspólne z  $C_0$ . Tutaj podamy również przykłady dla przypadków  $\beta$  i  $\alpha$ . Byłoby rzeczą interesującą rozważyć dalsze przykłady dla przypadku  $\alpha$ , który daje na ogół duże możliwości wyboru kolejnych odwzorowań konforemnych.

### 3. Pewne przypadki szczególne

Rozważmy półpłaszczyznę  $y > 0$  z rozcięciem  $AB\bar{A}$  o długości  $h$  wzdłuż osi  $y$ , przy czym mamy:  $A(+0, 0)$ ,  $B(0, h)$ ,  $\bar{A}(-0, 0)$ . W półpłaszczyźnie  $y_1 > 0$  zmiennej  $z_1$ , otrzymanej przez transformację, punktom  $A, B$  i  $\bar{A}$  będą odpowiadały punkty osi rzeczywistej o odciętych  $h, 0$  i  $-h$ . Niech krzywej  $C$  odpowiadają promienie  $(-\infty, E_1)$  oraz  $(F_1, \infty)$  i półokrąg  $E_1\gamma F_1$  o promieniu  $a$  i o środku  $z_1 = b$  w płaszczyźnie  $z_1$ . Przekształcając konforemnie  $D$  na górną płaszczyznę zmiennej  $z_2$ , tak aby zachodziły przyporządkowania  $E_2 \rightarrow -a$ ,  $F_2 \rightarrow a$ ,  $\infty \rightarrow \infty$ , otrzymamy

$$(3.1) \quad z_2 = \frac{1}{2} \left[ (h^2 + z_2^2)^{1/2} - b + \frac{a^2}{(h^2 + z_2^2)^{1/2} - b} \right]$$

lub

$$(3.2) \quad z_2^2 = 2 [z_2^2 + (z_2^2 - a^2)^{1/2} (z_2 + b) + bz_2] + b^2 - a^2 - h^2.$$

Otrzymamy zatem przypadek  $\beta$ . Równania parametryczne (3.4) łuku  $E\gamma F$  można napisać natychmiast, przyjmując oznaczenia:

$$(3.3) \quad b/a = c, \quad h/a = d, \quad V = (s + c)^2 + s^2 - d^2 - 1, \quad -1 < s < 1,$$

$$U = \{1 + 2(c^2 + d^2) + (d^2 - c^2)^2 + 4s[c + (c^2 - d^2)(c - s)]\}^{1/2},$$

$$(3.4) \quad 2^{1/2} x/a = \pm (U+V)^{1/2}, \quad 2^{1/2} y/a = (U - V)^{1/2}.$$

Nadajmy pewne wartości wielkościom  $a, b$  i  $h$  lub  $c$  i  $d$  określonym za pomocą (3.3). Jest rzeczą jasną, że dla  $b = 0$  otrzymamy brzeg symetryczny względem osi  $y$ . Gdy przy tym  $d = 2^{-1}$ , otrzymamy kształt zbliżony do półelipsy, a odpowiednimi równaniami parametrycznymi dla  $x > 0$  i  $y > 0$  będą

$$(3.5) \quad 2^{1/2} \frac{x}{a} = \left[ \left( \frac{25}{16} - s^2 \right)^{1/2} + 2s - \frac{5}{4} \right]^{1/2}, \quad 0 < s < 1.$$

$$2^{1/2} \frac{y}{a} = \left[ \left( \frac{25}{16} - s^2 \right)^{1/2} - 2s^2 + \frac{5}{4} \right]^{1/2},$$

Gdy  $d = 1$ , styczne do  $C$  w początku układu tworzą kąty  $\pi/4$  z częścią dodatnią lub ujemną osi rzeczywistej. Równaniami parametrycznymi łuku  $E\gamma F$  będą

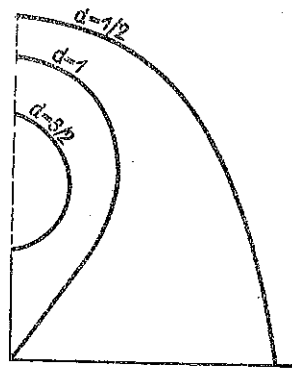
$$(3.6) \quad x = a [(1 - s^2)^{1/2} + s^2 - 1]^{1/2}, \quad y = a [(1 - s^2)^{1/2} + 1 - s^2]^{1/2},$$

$$0 < s < 1.$$

Równania we współrzędnych biegunowych można łatwo otrzymać z (3.6) oznaczając przez  $\theta$  kąt między promieniem wodzącym a osią  $y$ :

$$(3.6') \quad r^2 = 2a^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^{1/2}.$$

Gdy  $d = 3/2$ ,  $C$  składa się z osi rzeczywistej i rozcięcia wzdłuż osi  $y$  oraz pewnej krzywej symetrycznej względem osi  $y$  będącej przedłużeniem tego rozcięcia. Równaniami parametrycznymi łuku  $\gamma$  będą (dla  $x > 0, y > 0$ )



Rys. 2

$$(3.7) \quad 2^{1/2} \frac{x}{a} = \left[ \left( \frac{169}{16} - 9s^2 \right)^{1/2} + 2s^2 - \frac{13}{4} \right]^{1/2}, \quad 0 < s < 1.$$

$$2^{1/2} \frac{y}{a} = \left[ \left( \frac{169}{16} - 9s^2 \right)^{1/2} + \frac{13}{4} - 2s^2 \right]^{1/2},$$

Kształty łuku  $\gamma$  w tych wypadkach podane są na rys. 2. Jeżeli mamy do czynienia z przepływem równoległym do osi rzeczywistej i jednorodnym w dużej odległości od początku układu, potencjał zespolony w płaszczyźnie  $z$  będzie wynosił  $f = 2V_0 z_3$ .

Wracając do płaszczyzny fizycznej otrzymamy

$$f(z) = V_0 \left[ (h^2 + z^2)^{1/2} - b + \frac{a^2}{(h^2 + z^2)^{1/2} - b} \right].$$

Prędkością zespoloną będzie ( $b = 0$ )

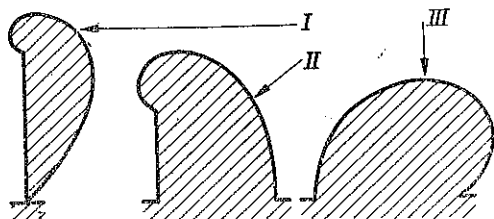
$$w = V_0 z (h^2 + z^2)^{-1/2} [1 - 3a^2 (h^2 + z^2)^{-1}].$$

Widzimy, że  $w \rightarrow v_0$ , gdy  $z \rightarrow \infty$ . Ponieważ  $M$ , najdalszy punkt łuku  $\gamma$  od osi rzeczywistej ma prędkość  $i(a+h)$ , więc wnosimy, że prędkość zespolona przyjmuje wartości rzeczywiste nie tylko w punktach osi rzeczywistej należących do  $C$ , lecz również w punktach osi  $y$  należących do  $D$ , czego należało oczekiwać:

$$w(0, y) = V_0 y (y^2 - h^2)^{-1/2} [1 + 2^{-1} a^2 (y^2 - h^2)^{-1}], \quad y > a + h.$$

Prędkość zespolona w punkcie  $M$  wynosi

$$w(M) = 2^{-1} V_0 a^{-1/2} (a + 4h) (a + h) (a + 2h)^{-3/2}.$$



Rys. 3

Na rysunku 3 podane są trzy kontury brzegowe asymetryczne otrzymane dla następujących par wartości  $c$  i  $d$ :

$$\text{I: } c = 1/2, \quad d = 3/2;$$

$$\text{II: } c = 1/2, \quad d = 1;$$

$$\text{III: } c = -1/2, \quad d = 1/2.$$

Na podstawie (3.3) i (3.4) ich równaniami parametrycznymi (dla  $s \in [-1, 1]$ ) są:

dla przypadku I

$$2^{1/2} x = \pm a [(10 - 2s - 8s^2)^{1/2} + 2s^2 + s - 3]^{1/2},$$

$$2^{1/2} y = a [(10 - 2s - 8s^2)^{1/2} + 3 - s - 2s^2]^{1/2};$$

dla przypadku II

$$2^{1/2} x = \pm a \left[ \left( \frac{65}{16} + \frac{s}{2} - 3s^2 \right)^{1/2} + 2s^2 + s - \frac{7}{4} \right]^{1/2},$$

$$2^{1/2} y = a \left[ \left( \frac{65}{16} + \frac{s}{2} - 3s^2 \right)^{1/2} + \frac{7}{4} - s - 2s^2 \right]^{1/2};$$

dla przypadku III

$$2^{1/2} x = \pm a [2^{1/2} (1 - s)^{1/2} + 2s^2 - s - 1]^{1/2},$$

$$2^{1/2} y = a [2^{1/2} (1 - s)^{1/2} + 1 + s - 2s^2]^{1/2}.$$

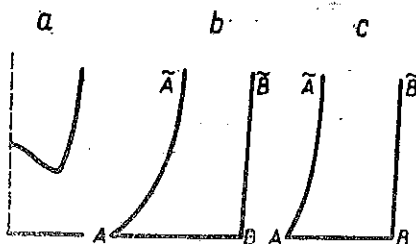
W tych przypadkach podać można wiele zastosowań hydrodynamicznych, jak np. ruch w obecności źródła lub upustu ułożonego na  $C$  lub w  $D$ , lub ruch stru-

mienia jednorodnego, normalnego do osi rzeczywistej w obecności przeszkody, którą tworzy krzywa  $\gamma$  i krzywa do niej symetryczna względem osi rzeczywistej.

4. Przykłady dotyczące ruchu w przewodach lub filtracji

Rozważmy pewne postacie  $C$  mogące aproksymować pewne przypadki ruchu w kanałach lub ośrodkach porowatych. Niech  $D_0$  oznacza półpłaszczyznę  $y > 0$ ,  $D^*$  – półpłaszczyznę górną bez podobszaru  $D'$  ograniczonego przez odcinek  $EG$  osi rzeczywistej i łuk  $EFG$ ,  $D_1$  – prostokąt  $T > y_1 > S$ ,  $a < x < a+L$ , gdzie  $T > 0$ ,  $L > 0$ ,  $D_{01}$  półpłaszczyznę górną, przy czym zakładamy, że  $D' \cap D = \emptyset$ , tj., że  $S > 0$  otrzymujemy w przypadku  $\alpha$ .

Na rysunku 4a przedstawiony jest przypadek symetryczny, w którym  $T$  jest nieskończone,  $EFG$  jest rozcięciem od początku układu wzdłuż osi  $y$ ,  $z_1(E_1) = -H$ ,  $z_1(G_1) = H$ ,  $a = -H$ ,  $s = H/2$ ,  $L = 2H$ . W tych samych warunkach, ale przy  $a = H$ ,  $s = 0$ ,  $L = H$  otrzymujemy krzywą  $C$ , podaną na rys. 4b. Równaniami parametrycznymi brzegów  $AA$  i  $BB$  będą przy  $s > 0$  odpowiednio



Rys. 4

$$2^{1/2} x = H [(s^4 + 4s^2)^{1/2} - s^2]^{1/2}, \quad 2^{1/2} y = H [(s^4 + 4s^2)^{1/2} + s^2]^{1/2}$$

oraz

$$2^{1/2} x = H [(s^4 + 10s^2 + 9)^{1/2} + 3 - s^2]^{1/2},$$

$$2^{1/2} y = H [(s^4 + 10s^2 + 9)^{1/2} - 3 + s^2]^{1/2}.$$

Jeżeli w płaszczyźnie  $z$  obrazem  $D$  jest półpasma  $H < x < 2H$ ,  $y > 0$ , a łuk  $EFG$  jest półokręgiem  $x_1^2 + y_1^2 = H^2$ ,  $y_1 > 0$ , to równaniami łuków  $A\tilde{A}$  i  $B\tilde{B}$  są:

$$xH^{-1} = 1 + 2^{-1/2} [(s^4 + 4s^2)^{1/2} - s^2]^{1/2},$$

$$yH^{-1} = s + 2^{1/2} [(s^4 + 4s^2)^{1/2} + s^2]^{1/2},$$

$$xH^{-1} = 2 + 2^{-1/2} [(s^4 + 10s^2 + 9)^{1/2} + 3 - s^2]^{1/2},$$

$$yH^{-1} = s + 2^{-1/2} [(s^4 + 10s^2 + 9)^{1/2} + s^2 - 3]^{1/2}$$

(również dla  $s > 0$ ). Łuki te podane są na rys. 4c.

Ruch zwykły w przewodzie otrzymanym przez dołączenie do łuków symetrycznych względem osi rzeczywistej jest dla danych odległości od osi rzeczywistej przepływem jednorodnym i równoległym do osi  $y$ . Wówczas potencjał zespolony może zostać zapisany w postaci  $-iV_0 z_1$ , tj.

$$f(z) = -iV_0 (z^2 + H^2)^{1/2},$$

a wtedy

$$w(z) = -V_0 iz (z^2 + H^2)^{-1/2}.$$

Punkt  $A$  jest punktem stagnacji i prędkość rośnie przy przejściu od  $A$  do  $B$ .

## 5. Przykład zastosowania współrzędnych dwubiegunowych

Przypuśćmy teraz, że  $D_0$  jest półpłaszczyzną górną,  $D^*$  półpłaszczyzną górną z rozcięciem  $(0, H)$  na osi  $y$ , a  $D$  jest ograniczone przez dwa łuki  $A\gamma B$  oraz  $\tilde{A}\tilde{\gamma}\tilde{B}$  i przez odcinki osi rzeczywistej  $A\tilde{A}$  i  $B\tilde{B}$ . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że łuki  $A\gamma B$  i  $\tilde{A}\tilde{\gamma}\tilde{B}$  znajdują się w drugiej ćwiartce. Niech przy odwzorowaniu  $D^*$  na półpłaszczyznę górną  $y_1 > 0$  danym łukom odpowiadają dwa półokręgi  $A_1\gamma_1 B_1$  i  $\tilde{A}_1\tilde{\gamma}_1\tilde{B}_1$  o promieniach odpowiednio  $R$  i  $r$  ( $r < R$ ). Jeżeli zastosujemy współrzędne dwubiegunowe  $\alpha, \beta$  określone za pomocą związku

$$\zeta = \ln \frac{a + z_1}{a - z_1}, \quad \xi = \alpha + i\beta,$$

to, jak wiadomo, obrazami półokręgów będą w półpłaszczyźnie  $\zeta$  odcinki  $\alpha = \alpha_R$ ,  $0 < \beta < \pi$  i  $\alpha = \alpha_r$ ,  $0 < \beta < \pi$ , gdzie  $\alpha_R$  i  $\alpha_r$  są ujemne i  $-\alpha_r > -\alpha_R$ . Obrazami odcinków  $A_1\tilde{A}_1$  i  $B_1\tilde{B}_1$  będą odcinki  $\beta = \pi$ ,  $\alpha_R > \alpha > \alpha_r$  i  $\beta = 0$ ,  $\alpha_R > \alpha > \alpha_r$  [5]. Jeżeli oznaczymy przez  $b$  odległości pomiędzy środkami obu półokręgów, wyrażenia na  $\alpha_R$  i  $\alpha_r$  będą miały postać:

$$\alpha_R = -\ln \frac{1}{2R} \left\{ \frac{R^2 - r^2}{b} + b + \left[ \left( \frac{R^2 - r^2}{b} + b \right)^2 - 4R^2 \right]^{1/2} \right\},$$

$$\alpha_r = -\ln \frac{1}{2r} \left\{ \frac{R^2 - r^2}{b} - b + \left[ \left( \frac{R^2 - r^2}{b} - b \right)^2 - 4r^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Gdy obrazem rozcięcia jest odcinek  $(-H, H)$  osi rzeczywistej, to równaniami parametrycznymi na płaszczyźnie  $z_1$  łuku odpowiadającego półokręgowi leżącemu w drugiej ćwiartce o środku w  $(-L, 0)$  i o promieniu  $\tilde{r}$  będą

$$(5.1) \quad \begin{aligned} 2^{1/2} x &= - \left[ \{(L^2 - H^2)^2 + \tilde{r}^4 + 4L^2\tilde{r}^2 + 2(L^2 - H^2)\tilde{r}^2 \cos 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - 4L\tilde{r}(\tilde{r}^2 + L^2 - H^2) \cos \theta\}^{1/2} + L^2 - H^2 + \tilde{r}^2 \cos 2\theta - 2L\tilde{r} \cos \theta \right]^{1/2}, \\ 2^{1/2} y &= \left[ \{(L^2 - H^2)^2 + \tilde{r}^4 + 4L^2\tilde{r}^2 + 2(L^2 - H^2)\tilde{r}^2 \cos 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - 4L\tilde{r}(\tilde{r}^2 + L^2 - H^2) \cos \theta\}^{1/2} + H^2 - L^2 - \tilde{r}^2 \cos 2\theta + 2L\tilde{r} \cos \theta \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Wówczas zagadnieniu brzegowemu dla  $D$  odpowiadać będzie zagadnienie brzegowe dla prostokąta  $\alpha_R > \alpha > \alpha_r$ ,  $\pi > \beta > 0$ .

W szczególności znajdziemy w  $D$  funkcję analityczną  $f(z)$ , dla której

$$(5.2) \quad \operatorname{Re} \{f(z)\} = \begin{cases} P_1 & \text{na } A\gamma B \\ P_2 & \text{na } \tilde{A}\tilde{\gamma}\tilde{B} \end{cases}, \quad \operatorname{Im} \{f(z)\} = \begin{cases} P_3 & \text{na } A\tilde{A} \\ P_4 & \text{na } B\tilde{B} \end{cases},$$

gdzie  $P_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) są stałymi rzeczywistymi. W płaszczyźnie  $f$  odpowiednim obszarem będzie również prostokąt, dlatego też pomiędzy zmiennymi  $f$  i  $\zeta$  mamy zależność liniową. Wyrażając  $\zeta$  przez  $z_1$ , a  $z_1$  przez  $z$  ( $z^2 = z_1^2 = H^2$ ), otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia dla płaszczyzny fizycznej. Zagadnienie brzegowe (5.2) powstaje często w teorii filtracji lub w teorii ruchów płaskich płynów doskonałych.

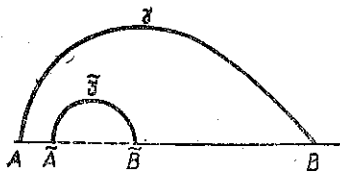
Для прикладу заложмы, же в пласчызнне  $z_1$  jest  $L = -2H, R = H, r = 3H/8, \tilde{A}_1 (-11 H/4, 0) \tilde{B}_1 (-2H, 0)$ . Z ogólnych równań parametrycznych znajdziemy dla łuku  $A\gamma B$  równania:

$$2^{1/2} x = -H [(26+6 \cos 2\theta - 32 \cos \theta)^{1/2} + 3 + \cos 2\theta - 4 \cos \theta]^{1/2},$$

$$2^{1/2} y = H [(26+6 \cos 2\theta - 32 \cos \theta)^{1/2} + 4 \cos \theta - \cos 2\theta - 3]^{1/2},$$

a dla łuku  $\tilde{A}\tilde{\gamma}\tilde{B}$ :

$$2^{1/2} x = -H [(24,728 + 1,305 \cos 2\theta - 17,033 \cos \theta)^{1/2} + 4,640 + 0,140 \cos 2\theta - 1,781 \cos \theta]^{1/2},$$



Rys. 5

$$2^{1/2} y = H [(24,728 + 1,305 \cos 2\theta - 1,7033 \cos \theta)^{1/2} + 1,781 \cos \theta - 0,140 \cos 2\theta - 4,640]^{1/2}.$$

Łuki te pokazane są na rys. 5.

Zauważmy, że  $\tilde{A}\tilde{\gamma}\tilde{B}$  jest w przybliżeniu półkolem, wobec tego metoda ta umożliwia badanie płaskiego ruchu podziemnego cieczy, wywołanego źródłem o skończonym promieniu w obszarze ograniczonym przez  $A\gamma B$  i łuk symetryczny względem osi rzeczywistej. Łuki te przedstawiają kontur zasilania.

Literatura cytowana w tekście

1. St. I. GHEORGHITZA, *A semi-inverse method in plane hydrodynamics*, Arch. Mech. Stos., 6, 11 (1959), 681-689.
2. St. I. GHEORGHITZA, *Aplicarea unei metode semiinverse in teoria pescusinei*, Analele Univ. C.I. Parhon, 25 (1960), 185-189.
3. ELENA UNGUREANU, *Asupra unor mișcări cu suprafață liberă din hidrodinamica subterană*, Comunicările Acad. R.P.R., 7, XII (1962), 799-802.
4. Шт. И. Георгице, *Применение одного полуобратного метода при решении задачи фильтрации под гидротехническими сооружениями*, Укр. Мат. Ж., 4, 14 (1962), 362-366.
5. Я. С. Уфлянд, *Биполярные координаты в теории упругости*, Гостетхиздат, Москва 1950.

Резюме

ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД В ПЛОСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В первой части работы дается обобщение полуобратного метода, рассматриваемого в [1], а затем приводится некоторое количество применений. Метод дает возможность легко определить много краевых задач для областей, ограниченных кривыми, показанными на рис. 2 или 3, и двумя радиусами на действительной оси, растягивающимися в бесконечность. Кривые из рис. 4 могут представлять собой границу для движения в каналах или в пористых средах. В заключительной части работы приводятся рассуждения, проводимые с помощью биполярных координат, касающихся краевых задач для области показанной на рис. 5.

## Summary

## ON A SEMI-INVERSE METHOD OF PLANE HYDRODYNAMICS

The first part of the paper is devoted to generalization of the semi-inverse method of [1]. Some applications are given. Many boundary value problems can easily be solved for regions bounded by the curves plotted in Fig. 2 or 3 and the two radii on the real axis extending to infinity. The curves in Fig. 4 can represent boundaries for motion in channels or in porous media.

Somme boundary value problems for regions as shown in Fig. 5 by using the method of bipolar coordinates are dealt with in the closing part of the paper.

INȘTYTUT MATEMATYCZNY  
RUMUŃSKIEJ AKADEMII NAUK, BUKARESzt

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 września 1963 r.*

---