

ZASTOSOWANIE METODY SIŁ ZESPOLONYCH
W TEORII POWŁOK ORTOTROPOWYCH

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Uwagi wstępne

W niniejszej pracy zostały wyprowadzone podstawowe równania teorii powłok ortotropowych. Przedstawione zagadnienie ujmuje się jak najogólniej, przyjmując sześć funkcji charakteryzujących omawianą tutaj ortotropię. Otrzymane równania stosują się zarówno do ortotropii naturalnej (własność materiału), jak i do ortotropii konstrukcyjnej pojętej możliwie ogólnie (powłoki uźebrowane, pofałdowane, o zmiennej grubości itp.).

W pewnych zagadnieniach teorii powłok występuje ortotropia, która polega na występowaniu różnych własności sprężystych w pewnych ograniczonych elementach, tworzących pofałdowania (uźebrowania). W ten sposób określoną ortotropię nazywać będziemy ortotropią konstrukcyjną pierwszego (drugiego) rodzaju.

Do rzeczywistej powierzchni środkowej powłoki możemy przyporządkować powierzchnię umowną; będzie to powierzchnia, względem której odniesiemy np. pofałdowania. Jeżeli powierzchnia umowna może być określona analitycznie znacznie prościej niż rzeczywista powierzchnia środkowa powłoki, to możemy analizować stan odkształcenia i naprężenia powłoki umownej przy nie zmienionym obciążeniu, traktując rozwiązanie jako przybliżone dla powłoki rzeczywistej. Można traktować powłokę umowną jako ortotropową przy odpowiednio dobranych funkcjach ortotropii. Funkcje te można wyznaczyć porównując odkształcenia elementu powłoki danej i powłoki ortotropowej umownej. Należy tutaj wprowadzić konstrukcyjne wartości modułów Younga, Kirchhoffa oraz liczb Poissona. Tak pojętą ortotropię określano do tej pory wyłącznie dla powłok obrotowych [1] i to dla stanu quasi-osiowo-symetrycznego, wprowadzonego przez E. REISSNERA [3]. Uwaga autorów kierowała się prawie wyłącznie na powłoki warstwowe i uźebrowane, o czym świadczą dwie podstawowe dla tego kierunku badań monografie S. A. AMBARCUMIANA [4] i I. A. BIRGERA [6].

Wpływy termiczne dla powłok izotropowych, posługując się równaniami W. W. NOWOŻILOWA, uwzględniali J. M. GRIGORIENKO i Ł. A. ILIN [10]. W niniejszej pracy wpływy termiczne traktuje się podobnie jak to uczynił W. Z. WŁASOW w pracy [8].

Przedstawiona tematyka wypłynęła przy badaniu przez autora zagadnień związanych ze zginaniem cienkościennych łuków ortotropowych. Zagadnienia te można w przybliżeniu rozwiązać stosując teorię powłok ortotropowych dla stanu quasi-

osiowo-symetrycznego. Niniejsza praca ma na celu wyprowadzenie równań ogólniejszych nadających się do badania stanów dowolnych z uwzględnieniem wpływów termicznych. Zwrócono tutaj szczególną uwagę na to, aby końcowe układy równań były jak najbardziej przydatne do zastosowań.

Obliczenie naprężeń w powłokach pofałdowanych ze względu na skomplikowany kształt powłok jest bardzo uciążliwe a nieraz wręcz niemożliwe. Zachodzi więc pytanie, czy stosując teorię ortotropii konstrukcyjnej pozbywamy się tutaj trudności? W tym przypadku trudność niejako przenosi się na zagadnienie wyznaczenia funkcji ortotropii; jednak te ostatnie mogą być w wielu przypadkach aproksymowane pewnymi funkcjami przybliżonymi, co pozwala dla ważnych praktycznie przypadków znaleźć przybliżone rozwiązanie.

2. Założenia

1. Przedstawione tutaj równania odnoszą się do powłok, których środkowa powierzchnia przedstawiona jest za pomocą współrzędnych krzywoliniowych, odniesionych do kierunków głównych.

2. Pofałdowanie (uźebrowanie) środkowej powierzchni powłoki danej powinno być takie, aby kierunki ortotropii pokrywały się z liniami krzywizn głównych. Zatem pofałdowanie lub uźebrowanie powinny być równoległe do linii a_1 lub a_2 . Przykłady takiej ortotropii podano na rys. 3. Przypadek, w którym powłoka jest pofałdowana (uźebrowana) krzyżowo, a zachowuje przy tym ortotropię, może być również analizowany; uprzednio jednak należy doświadczalnie określić wszystkie funkcje ortotropii.

3. Przyjmujemy, że zależności statyczne i geometryczne teorii powłok ortotropowych są takie same jak dla teorii powłok izotropowych, przy czym w tym ostatnim przypadku przyjmuje się odpowiednie wzory W. W. NOWOŻŁOWA [12].

4. Rozkład temperatury jest funkcją liniową wzdłuż elementu normalnego powłoki, a przepływ ciepła jest ustalony; wtedy [8 i 11]

$$(2.1) \quad \vartheta(a_1, a_2; z) = t_0(a_1, a_2) + zt(a_1, a_2),$$

gdzie

$$(2.2) \quad t_0 = \frac{1}{2}(t_z + t_w), \quad t = \frac{1}{h}(t_z - t_w).$$

W równaniach (2.1) i (2.2) t_z oznacza temperaturę powierzchni powłoki dla $z = h/2$ (rys. 2), a t_w dla $z = -h/2$, t_0 temperaturę powierzchni środkowej powłoki, a_1 i a_2 ortogonalne współrzędne krzywoliniowe. Przyjmuje się również, że średnie wartości dla modułów sprężystości są niezależne od temperatury.

5. Należy się spodziewać, że wyniki uzyskane na podstawie przytoczonych równań będą tym dokładniejsze, im odchylenia powierzchni środkowej powłoki danej od przyporządkowanej jej powierzchni umownej będą mniejsze.

6. Występujące składowe wektora obciążenia powierzchniowego X_j i Z są tylko funkcjami współrzędnych

7. Rozpatruje się tylko małe odkształcenia i ugięcia (teoria liniowa fizycznie i geometrycznie); materiał zaś podlega prawu Hooke'a (5.1).

3. Strona geometryczna

Odształcenie elementu powłoki ε_j , kąt odkształcenia postaciowego ω zmiany krzywizny linii głównych \varkappa_j , skręcenie elementu powierzchni τ wynoszą [12],

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_j &= \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_j A_{3-j}} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} u_{3-j} + \frac{w}{R_j}, \quad \omega = - \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{A_{3-k}} \frac{\partial}{\partial \alpha_{3-k}} \left(\frac{u_k}{A_k} \right), \\ \varkappa_j &= - \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} - \frac{u_j}{R_j} \right) - \frac{1}{A_j A_{3-j}} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \left(\frac{1}{A_{3-j}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_{3-j}} - \frac{u_{3-j}}{R_{3-j}} \right), \\ \tau &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \frac{1}{R_k} \left(\frac{1}{A_{3-k}} \frac{\partial u_k}{\partial \alpha_{3-k}} - \frac{1}{A_k A_{3-k}} \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_{3-k}} u_k \right). \end{aligned}$$

Występujący indeks j przebiega liczby 1, 2.

Powyższym składowym stanu odkształcenia odpowiadają następujące warunki nierozdzielności przemieszczeń wyprowadzone przez A. L. GOLDENWEIZERA [9]:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A_{3-j} \frac{\partial \varkappa_{3-j}}{\partial \alpha_j} + (\varkappa_{3-j} - \varkappa_j) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_{3-j}} + 2\tau \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} - \frac{1}{R_j} \left[A_{3-j} \frac{\partial \varepsilon_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{3-j} - \varepsilon_j) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_{3-j}} + \omega \left(1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right] = 0, \\ \sum_{k=1}^2 \frac{\varkappa_k}{R_{3-k}} + \frac{1}{A_k A_{3-k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{1}{A_k} \left[A_{3-k} \frac{\partial \varepsilon_{3-k}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial A_{3-k}}{\partial \alpha_k} (\varepsilon_{3-k} - \varepsilon_k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} A_k \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_{3-k}} + \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_{3-k}} \omega \right] \right\}. \end{aligned}$$

Występujące w równaniach (3.1) składowe u_j i w wektora przemieszczenia, posiadają wartości dodatnie dla przyjętego układu osi, podanego na rys. 1 Promienie krzywizny linii α_j oznaczono przez R_j . Stan zwany quasi-osiowo-symetrycznym może być określony za pomocą równań [3].

$$(3.3) \quad u_1 = u = u(\alpha), \quad u_2 = v = kr, \quad w = w(\alpha).$$

Dla takiego przypadku, jak to wynika z równań (3.1)₂ i (3.1)₄, będzie

$$(3.4) \quad \omega = 0, \quad \tau = 0.$$

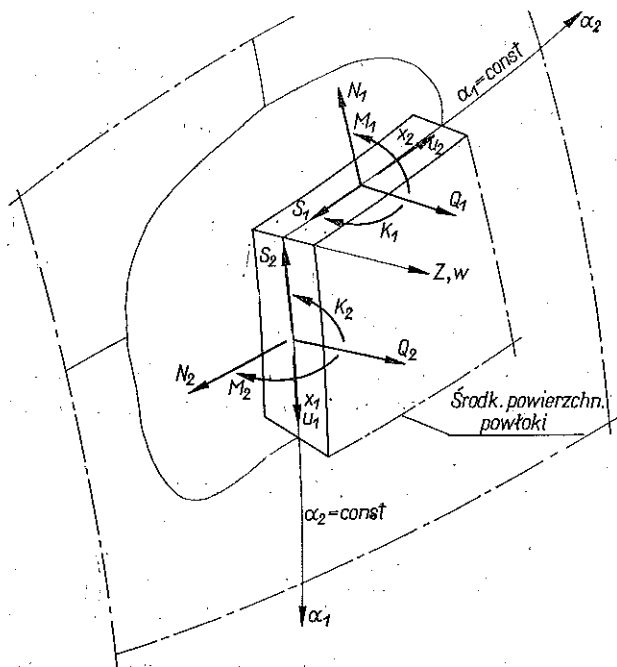
Zmiany krzywizny linii głównych wynoszą

$$(3.5) \quad \kappa_1 = \frac{1}{R_1} \varphi', \quad \kappa_2 = \frac{1}{R_2} (k + \varphi \operatorname{ctg} \alpha),$$

gdzie

$$(3.6) \quad \varphi = -\frac{1}{R_1} (w' - u),$$

przedstawia zmianę kąta nachylenia stycznej do południka; przecinkiem oznaczyliśmy pochodną.



Rys. 1

Stan osiowo-symetryczny otrzymujemy przyjmując

$$(3.7) \quad k = 0.$$

4. Strona statyczna

Warunki równowagi dla układu linii ortogonalnych pokrywających się z krzywiznami głównymi i zgodnie z A. E. LOVE'EM [2] mają postać

$$(4.1) \quad \frac{1}{A_j A_{3-j}} \left[A_{3-j} \frac{\partial N_j}{\partial \alpha_j} + (N_j - N_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial S_{3-j}}{\partial \alpha_{3-j}} + (S_{3-j} + S_j) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right] + \frac{Q_j}{R_j} + X_j = 0,$$

$$(4.1) \quad \frac{1}{A_j A_{3-j}} \left[A_{3-j} \frac{\partial M_j}{\partial \alpha_j} + (M_j - M_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial K_{3-j}}{\partial \alpha_{3-j}} + (K_{3-j} + K_j) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right] - Q_j = 0,$$

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{A_k A_{3-k}} \frac{\partial A_{3-k} Q_k}{\partial \alpha_k} - \frac{N_k}{R_k} \right) + Z = 0, \quad S_1 - \frac{K_2}{R_2} = S_2 - \frac{K_1}{R_1}.$$

Występujące w powyższych równaniach wszystkie wielkości wewnętrzne oraz współrzędne wektora obciążenia powierzchniowego przedstawiają wartości dodatnie, gdy posiadają zwroty takie jak na rys. 1. Eliminacja sił poprzecznych Q_j z układu (4.1) daje

$$(4.1') \quad A_{3-j} \frac{\partial N_j}{\partial \alpha_j} + (N_j - N_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3-j}} + 2S \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} + \frac{1}{R_j} \left[A_{3-j} \frac{\partial M_j}{\partial \alpha_j} + (M_j - M_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + 2A_j \frac{\partial K}{\partial \alpha_{3-j}} + 2 \left(1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right) K \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right] = -A_j A_{3-j} X_j,$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{N_k}{R_k} - \frac{1}{A_k A_{3-k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{1}{A_k} \left[A_{3-k} \frac{\partial M_k}{\partial \alpha_k} + (M_k - M_{3-k}) \frac{\partial A_{3-k}}{\partial \alpha_k} + A_k \frac{\partial K}{\partial \alpha_{3-k}} + 2K \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_{3-k}} \right] \right\} = Z,$$

gdzie [12]

$$(4.2) \quad S = S_j - \frac{K_{3-j}}{R_{3-j}}, \quad K = \frac{1}{2} (K_1 + K_2).$$

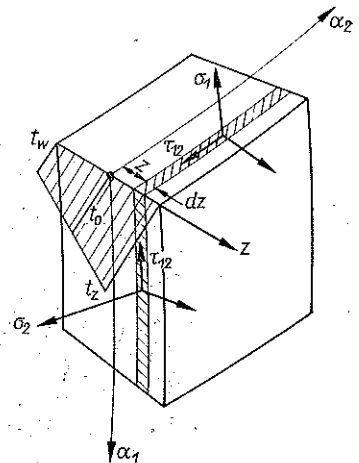
Stan quasi- lub osiowo-symetryczny występować będzie wtedy, gdy wszystkie wielkości wewnętrzne oraz składowe $X_1 = X$ i Z będą jedynie funkcjami α , zaś składowa X_2 będzie równa zero.

5. Strona fizyczna

Prawo Hooke'a dla rozpatrywanej ortotropii przyjmujemy w postaci następującej:

$$(5.1) \quad \sigma_j = \frac{E_{jr}}{1 - \nu_{jr} \nu_{3-j,r}} [\varepsilon_j + \nu_{3-j,r} \varepsilon_{3-j} - (1 + \nu_{3-j,r}) \alpha_t t_0] + \frac{z E_{jz}}{1 - \nu_{jz} \nu_{3-j,z}} [\nu_j + \nu_{3-j,z} \nu_{3-j} - (1 + \nu_{3-j,z}) \alpha_t t],$$

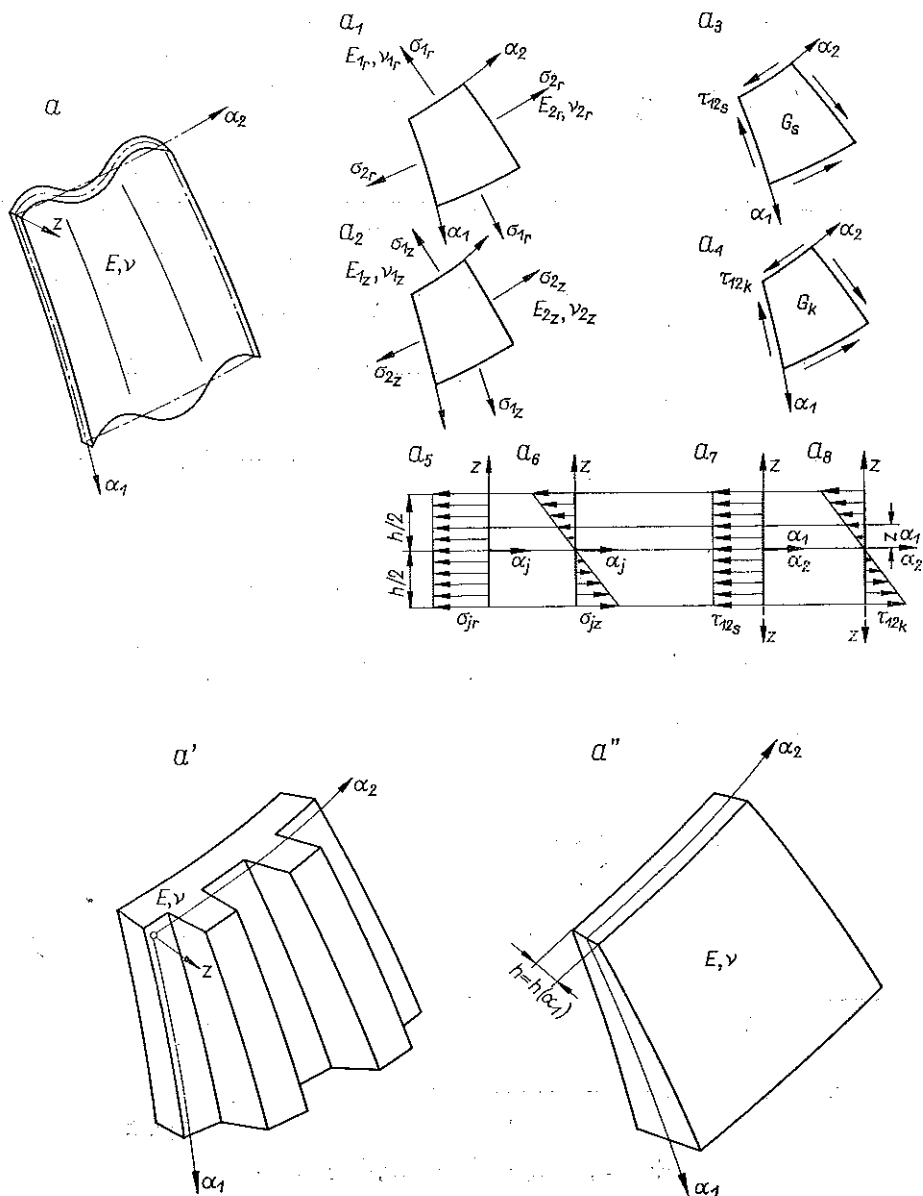
$$\tau_{(z)} = \tau_{12} = \tau_{21} = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \omega + 2z \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \tau.$$



Rys. 2

Występujące w (5.1) naprężenia przedstawiono na rys. 2. Indeksy r i z odnoszą się odpowiednio do rozciągania lub zginania, a s i k — do ścinania lub skręcania. Budowa równań (5.1) jest wynikiem przyjęcia liniowego rozkładu naprężeń na elemencie normalnym powłoki (rys. 3).

Wprowadźmy teraz sztywności: na rozciąganie-ściskanie, na zginanie, na ścinanie oraz na skręcanie:



Rys. 3

$$(5.2) \quad \begin{aligned} C_j &= \frac{E_{jr} h}{1 - \nu_{jr} \nu_{3-j,r}}, & C_{j,3-j} &= C_j \nu_{3-j,r} = C_{3-j,j}; \\ D_j &= \frac{E_{jz} h^3}{12(1 - \nu_{jz} \nu_{3-j,z})}, & D_{j,3-j} &= D_j \nu_{3-j,z} = D_{3-j,j}; \\ A &= \frac{E_s h}{2(1 + \nu_s)}, & B &= \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \frac{h^3}{6}. \end{aligned}$$

Zależności (5.2)₂ i (5.2)₄ wynikają z zastosowania zasady Bettiego dla układów podanych na rys. 3a₁ i 3a₂. Podstawiając (5.2) do (5.1) otrzymujemy

$$(5.3) \quad \sigma_j = \sigma_{jr} + z \sigma_{jz}, \quad \tau_{(z)} = \frac{A}{h} \omega + z \frac{12B}{h^3} \tau,$$

gdzie

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{jr} &= \frac{1}{h} [C_j \varepsilon_j + C_{j,3-j} \varepsilon_{3-j} - (C_j + C_{j,3-j}) \alpha_t t_0], \\ \sigma_{jz} &= \frac{12}{h^3} [D_j \varkappa_j + D_{j,3-j} \varkappa_{3-j} - (D_j + D_{j,3-j}) \alpha_t t]. \end{aligned}$$

Obecnie określimy siły wewnętrzne w przekrojach powłoki:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} N_j &\approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j dz, & S_j &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_{3-j}}\right) dz, \\ M_j &\approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j z dz, & K_j &\approx \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{(z)} z dz. \end{aligned}$$

Podstawiając (5.3) i (5.4) do (5.5) otrzymujemy

$$(5.6) \quad \begin{aligned} N_j &= C_j \varepsilon_j + C_{3-j,j} \varepsilon_{3-j} - (C_j + C_{3-j,j}) \alpha_t t_0, \\ S_j &= A \omega + \frac{B}{R_{3-j}} \tau, \quad S = A \omega, \\ M_j &= D_j \varkappa_j + D_{3-j,j} \varkappa_{3-j} - (D_j + D_{3-j,j}) \alpha_t t, \\ K &= K_1 = K_2 = B \tau. \end{aligned}$$

Przybliżone wzory (5.5) są tak napisane, że zależności (5.6) przy założeniu izotropii i braku wpływów termicznych przechodzą we wzory Nowożyłowa. Przekształcając układ równań (5.6) w ten sposób, aby składowe odkształcenia wyrażały się przez siły wewnętrzne, otrzymamy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_j &= \mathcal{C}_j N_j - \mathcal{C}_{3-j,j} N_{3-j} + \alpha_t t_0, \\ \varkappa_j &= \mathcal{D}_j M_j - \mathcal{D}_{3-j,j} M_{3-j} + \alpha_t t, \\ \omega &= \frac{1}{A} S, \quad \tau = \frac{1}{B} K. \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} e_j &= \frac{C_{3-j}}{C_j C_{3-j} - C_{3-j,j}^2}, & e_{3-j,j} &= \frac{C_{3-j,j}}{C_j C_{3-j} - C_{3-j,j}^2}, \\ D_j &= \frac{D_{3-j}}{D_j D_{3-j} - D_{3-j,j}^2}, & D_{3-j,j} &= \frac{D_{3-j,j}}{D_j D_{3-j} - D_{3-j,j}^2}. \end{aligned}$$

Zamiast konstrukcyjnych modułów Younga wprowadzamy niekiedy funkcje ortotropii, które definiujemy w sposób następujący:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} k_{1r}(a_1, a_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{1r}}{E}, & \frac{1}{k_{2r}(a_1, a_2)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{2r}}{E}, \\ k_{1z}(a_1, a_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{1z}}{E}, & \frac{1}{k_{2z}(a_1, a_2)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{2z}}{E}, \\ k_s(a_1, a_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_s(1+\nu)}{E(1+\nu_s)}, & k_k(a_1, a_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_k(1+\nu)}{E(1+\nu_k)}. \end{aligned}$$

Przedstawimy jakościową ocenę występujących tutaj konstrukcyjnych modułów E_{ij} i ν_{ij} oraz funkcji ortotropii k_{ij} .

Jako pierwszy przypadek rozpatrzmy pofałdowanie względem linii a_2 (rys. 3a). Wtedy otrzymujemy

$$(5.10) \quad \begin{aligned} E_{1r} \geq E: & \quad k_{1r} \geq 1, & E_{2r} \leq E: & \quad k_{2r} \geq 1, \\ E_{1z} \geq E: & \quad k_{1z} \geq 1, & E_{2z} \leq E: & \quad k_{2z} \geq 1, \\ G_s \geq G: & \quad k_s \geq 1, & G_k \geq G: & \quad k_k \geq 1. \end{aligned}$$

Jeżeli chodzi o wzory (5.10)₉–(5.10)₁₂, to należy je ustalać doświadczalnie. W przypadku pofałdowań względem linii a_1 możemy ustalić analogiczne do (5.10) nierówności:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} E_{1r} \leq E: & \quad k_{1r} \leq 1, & E_{2r} \geq E: & \quad k_{2r} \leq 1, \\ E_{1z} \leq E: & \quad k_{1z} \leq 1, & E_{2z} \geq E: & \quad k_{2z} \leq 1, \\ G_s \geq G: & \quad k_s \geq 1, & G_k \geq G: & \quad k_k \geq 1. \end{aligned}$$

W przypadku pofałdowań nie pokrywających się z linią a_1 lub a_2 , lecz przy zachowaniu ortotropii, to, jak już wspomniano, należy wszystkie funkcje ortotropii wyznaczyć doświadczalnie.

Stosując zasadę Bettiego do układu podanego na rys. 3a₁ i 3a₂ otrzymujemy przybliżone zależności

$$(5.12) \quad \nu_{2r} \approx \frac{\nu_{1r}}{k_{1r} k_{2r}}, \quad \nu_{2z} \approx \frac{\nu_{1z}}{k_{1z} k_{2z}}.$$

W przypadku pofałdowań względem linii a_2 możemy przyjąć, że

$$(5.13) \quad \nu_{1r} \approx \nu_{1z} \approx \nu,$$

a przy pofałdowaniach względem linii α_1

$$(5.14) \quad \nu_{2r} \approx \nu_{2z} \approx \nu.$$

Wzory (5.12)–(5.14) mają taką samą budowę, jak w teorii płyt o ortotropii konstrukcyjnej [5].

W przypadku powłoki posiadającej uźebrowania pokrywające się (np. z linią α_1 , rys. 3a) otrzymujemy

$$(5.15) \quad \begin{aligned} E_{1r} \geq E: \quad k_{1r} \geq 1, \quad E_{2r} \approx E: \quad k_{2r} \approx 1, \\ E_{1z} \geq E: \quad k_{1z} \geq 1, \quad E_{2z} \approx E: \quad k_{2z} \approx 1, \\ G_s \approx G: \quad k_s \approx 1, \quad G_k \approx G: \quad k_k \approx 1. \end{aligned}$$

Funkcje zaś k_{1r} i k_{1z} , jak to wynika z porównania odkształceń powłoki ortotropowej i izotropowej, mogą być przedstawione w postaci ilorazów odpowiednich powierzchni oraz momentów bezwładności. Określenie funkcji dla takiej ortotropii obszernie omówiono w pracy [6].

Dla określenia funkcji ortotropii pierwszego rodzaju dla powłok małowyniosłych można stosować wzory podane w pracy [5]. Dla innej klasy powłok funkcje te, jak już zaznaczono, należy otrzymywać z porównania odkształceń, a w przypadkach gdy to jest ze względów obliczeniowych niemożliwe — doświadczalnie.

W przypadku ortotropii naturalnej funkcje te ustala się doświadczalnie.

6. Rozwiązanie metodą sił zespolonych

Końcowe równania teorii powłok możemy przedstawić w przemieszczeniach w siłach lub w postaci mieszanej (połączenie funkcji naprężeń i przemieszczeń). Jeżeli analizować wyszczególnione powyżej możliwości rozwiązania przedstawionego zagadnienia, to ze względu na to, że występujące sztywności $A, B, C_j, C_{3-j,j}, D_j$ i $D_{3-j,j}$ mogą być w najogólniejszym przypadku funkcjami zmiennych α_1 i α_2 , metoda przemieszczeniowa prowadzi do bardzo skomplikowanych operatorów. Niektóre przypadki takich układów dla szczególnego rodzaju powłok zostały rozpatrzone w pracy [4]. Podobnie i metoda mieszana prowadzi do złożonych układów równań. Dla ortotropii drugiego rodzaju układy takie przedstawiono w pracy V. VISARIONA i C. STĂNESCU [7]. Zastosowanie metody sił zespolonych do omawianego tutaj zagadnienia ma jeszcze tę cenną zaletę, że pozwala na wyeliminowanie wielkości małych w równaniach zasadniczych. Zatem gdy siły zewnętrzne nie są funkcjami przemieszczeń, jedynym operatywnym rozwiązaniem jest rozwiązanie w siłach wewnętrznych, które można przedstawić w postaci trzech równań różniczkowych, zawierających wprowadzone przez NOWOŻIŁOWA siły zespolone (tutaj odpowiednio uogólnione) oraz siły zespolone sprzężone. W szczególnym przypadku izotropii siły zespolone sprzężone nie wchodzi do rozpatrywanych równań, są one bowiem mnożone przez pewne funkcje; w tym przypadku można przyjąć, że są one równe zeru.

W wielu przypadkach w powłokach ortotropowych możemy przyjąć pewne uproszczenia, które sprowadzają równania do względnie prostej postaci analogicznej do układu równań Nowożyłowa.

Przejdziemy obecnie do wyprowadzenia podstawowych równań teorii powłok ortotropowych przy wykorzystaniu formalnie wprowadzonych sił zespolonych i sił zespolonych sprzężonych.

Wprowadźmy stałą, znaną z teorii powłok izotropowych

$$(6.1) \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

a następnie pomnożmy równania (3.2) przez stałą

$$(6.1') \quad \Omega i = Eh c i, \quad i = \sqrt{-1},$$

i wprowadźmy do tego układu wielkości (5.7)₁ i (5.7)₃. Podobnie wprowadźmy do układów (4.1') zamiast momentów M_j i K wielkości określone za pomocą wzorów (5.6)₄ i (5.6)₅. Następnie dodając te dwa układy otrzymamy

$$(6.2) \quad A_{3-j} \frac{\partial N_j}{\partial \alpha_j} a_{j1} + N_j \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} a_{j2} - N_{3-j} \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} a_{j3} + A_j \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3-j}} a_{j4} + \\ + 2S \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} a_{j5} - \Omega c_{3-j} \frac{A_{3-j}}{R_j} i \frac{\partial N_{3-j}}{\partial \alpha_j} - i \Omega \frac{A_{3-j}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} + \\ + i \Omega \left(A_{3-j} \frac{\partial \kappa_{3-j}}{\partial \alpha_j} b_{j1} + \kappa_{3-j} \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} b_{j2} - \kappa_j \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} b_{j3} + A_j \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_{3-j}} b_{j4} + \right. \\ \left. + 2\tau \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} b_{j5} \right) + \frac{1}{R_j} A_{3-j} D_j \frac{\partial \kappa_j}{\partial \alpha_j} - \frac{A_{3-j}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [(D_j + D_{3-j,1}) t] - \\ - \alpha_t \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} \frac{D_j - D_{3-j}}{R_j} t = - A_j A_{3-j} X_j.$$

Występujące w równaniach (6.2) pomocnicze funkcje a_{jk} i b_{jk} ($k = 1, 2 \dots 5$) są zestawione w tablicy 1.

Jeżeli teraz wprowadzimy do układu (6.2) poniższe, w sposób formalny zdefiniowane siły zespolone i zespolone sprzężone:

$$(6.3) \quad \tilde{N}_j \stackrel{\text{df}}{=} N_j + i \Omega (\kappa_{3-j} - \alpha_t t) = N_j + i \Omega (\mathcal{D}_{3-j} M_{3-j} - \mathcal{D}_{3-j,1} M_j), \\ \tilde{\tilde{N}}_j \stackrel{\text{df}}{=} N_j - i \Omega (\kappa_{3-j} - \alpha_t t) = N_j - i \Omega (\mathcal{D}_{3-j} M_{3-j} - \mathcal{D}_{3-j,1} M_j), \\ \tilde{S} \stackrel{\text{df}}{=} S + i \Omega \tau = S + \frac{i \Omega}{B} K, \quad \tilde{\tilde{S}} \stackrel{\text{df}}{=} S - \frac{i \Omega}{B} K,$$

to wtedy układ (6.2) przyjmie postać

$$(6.4) \quad \frac{1}{2A_j A_{3-j}} \left\{ (a_{j1} + b_{j1}) A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (a_{j2} + b_{j2}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} \tilde{N}_j - (a_{j3} + b_{j3}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} \tilde{\tilde{N}}_{3-j} + \right.$$

$$(6.4) \quad + (a_{j4} + b_{j4}) A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2 (a_{j5} + b_{j5}) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} - i \Omega \mathcal{C}_{3-j} \frac{A_{3-j}}{R_j} \times$$

c.d.

$$\times \left\{ \left[\left(1 + \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{C}_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \left(1 - \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{C}_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{\tilde{N}}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right] + p_j \right\} = - X_j + X_{jt}$$

Tablica 1. Zestawienie pomocniczych funkcji a_{jk} , b_{jk} , c_{jl} ($j = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, 5$; $l = 1, \dots, 4$)

	Powłoka ortotropowa	Powłoka izotropowa
a_{j1}	$1 + \mathcal{C}_{3-j} \frac{\Omega}{R_j} i$	$1 + \frac{\nu c}{R_j} i$
a_{j2}	$1 + \mathcal{C}_j \frac{\Omega}{R_j} i \left(1 + \frac{\mathcal{C}_{3-j,1}}{\mathcal{C}_j} + \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{\mathcal{C}_j} \frac{\partial \mathcal{C}_{3-j,1}}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1+\nu) c}{R_j} i$
a_{j3}	$1 + \mathcal{C}_{3-j} \frac{\Omega}{R_j} i \left(1 + \frac{\mathcal{C}_{3-j,1}}{\mathcal{C}_{3-j}} + \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{\mathcal{C}_{3-j}} \frac{\partial \mathcal{C}_{3-j,1}}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1+\nu) \nu c}{R_j} i$
a_{j4}	$1 - \frac{\Omega}{AR_j} i$	$1 - 2 \frac{(1+\nu) c}{R_j} i$
a_{j5}	$1 - \frac{\Omega}{2AR_j} i \left(1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} - \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1+\nu) c}{R_j} i \left(1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right)$
b_{j1}	$1 - \frac{D_{3-j,1}}{\Omega R_j} i$	$1 - \frac{\nu c}{R_j} i$
b_{j2}	$1 + \frac{D_{3-j}}{\Omega R_j} i \left(1 - \frac{D_{3-j,1}}{D_{3-j}} - \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{D_{3-j}} \frac{\partial D_{3-j,1}}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1-\nu) \nu c}{R_j} i$
b_{j3}	$1 + \frac{D_j}{\Omega R_j} i \left(1 - \frac{D_{3-j,1}}{D_j} + \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{D_j} \frac{\partial D_j}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1-\nu) c}{R_j} i$
b_{j4}	$1 - \frac{2B}{\Omega R_j} i$	$1 - 2 \frac{(1-\nu) c}{R_j} i$
b_{j5}	$1 - \frac{B}{\Omega R_j} i \left(1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} + \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1-\nu) c}{R_j} i \left(1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right)$
c_{j1}	$1 - \frac{i\Omega}{2AR_j}$	$1 - \frac{(1+\nu) c}{R_j} i$
c_{j2}	$1 - \frac{\Omega}{2AR_j} i \left(\frac{R_j}{R_{3-j}} - \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1+\nu) c}{R_{3-j}} i$
c_{j3}	$1 - \frac{B}{\Omega R_j} i$	$1 - \frac{(1-\nu) c}{R_j} i$
c_{j4}	$1 - \frac{B}{\Omega R_j} i \left(\frac{R_j}{R_{3-j}} + \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1-\nu) c}{R_{3-j}} i$

W równaniu (6.4) wprowadzono oznaczenia

$$(6.5) \quad \begin{aligned} p_j &= (a_{j1} - b_{j1}) A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (a_{j2} - b_{j2}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} \tilde{N}_j - (a_{j3} - b_{j3}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} \tilde{N}_{3-j} + \\ &\quad + (a_{j4} - b_{j4}) A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2(a_{j5} - b_{j5}) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S}. \\ X_{jt} &= \frac{1}{A_j A_{3-j}} \left\{ \frac{D_j - D_{3-j}}{R_j} \frac{A_{3-j}}{\alpha_j} \alpha_t t + \frac{A_{3-j}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [(D_j + D_{3-j,j}) t] - \right. \\ &\quad \left. - i\Omega A_{3-j} \alpha_t \left[\left(b_{j1} - \frac{D_j}{\Omega R_j} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_{3-j}} \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} (b_{j2} - b_{j3}) t \right] \right\}. \end{aligned}$$

W podobny sposób otrzymamy trzecie równanie; łączymy równanie (4.1)₂ z pomnożonym przez $i\Omega$ równaniem (3.2)₂ przy wykorzystaniu związków (5.6), (5.7), (4.1)₁, (3.2)₁ oraz (6.3) tak, iż w wyniku końcowym otrzymujemy

$$(6.6) \quad \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{P_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{P_2}{A_2} \right) \right] = Z - Z_t.$$

W równaniu (6.6) przyjęto oznaczenia

$$(6.7) \quad \begin{aligned} P_j &= R_j \left[A_j A_{3-j} X_j + A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (C_{j1} + C_{j2}) A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + (C_{j2} + C_{j4}) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} + \frac{1}{2} (C_{j1} - C_{j3}) A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + \right. \\ &\quad \left. + (C_{j2} - C_{j4}) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S}, \right. \\ Z_t &= i\Omega \alpha_t \left\{ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{R_1 A_2}{A_1} \frac{\partial t}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{R_2 A_1}{A_2} \frac{\partial t}{\partial \alpha_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

W najogólniejszym przypadku ortotropii dysponujemy więc układami równań (6.4)–(6.7). W zastosowaniach bardzo często spotykamy się z pewnymi szczególnymi przypadkami ortotropii. Rozpatrzeniem takich przypadków zajmiemy się dalej. Obecnie przejdziemy do obliczenia sił wewnętrznych, przemieszczeń oraz kątów obrotu. Wychodząc z równań (6.3) możemy wyznaczyć siły wewnętrzne za pomocą zależności

$$(6.8) \quad \begin{aligned} N_j &= \operatorname{Re} \tilde{N}_j, \quad S = \operatorname{Re} \tilde{S}, \\ M_j &= \frac{1}{\Omega} \operatorname{Im} (D_j \tilde{N}_{3j} + D_{3-j,j} \tilde{N}_j), \quad K = \frac{B}{\Omega} \operatorname{Im} \tilde{S}. \end{aligned}$$

Do wyznaczenia współrzędnych wektora przemieszczenia posłużyć się możemy układami równań otrzymanymi ze wzorów (3.1)_{1,2}, (5.7) oraz (6.8):

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_j A_{3-j}} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} u_{3-j} + \frac{w}{R_j} &= e_j \operatorname{Re} \tilde{N}_j - e_{3-j,j} \operatorname{Re} \tilde{N}_{3-j} + \alpha_t t_0, \\ -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) &= \frac{1}{A} \operatorname{Re} \tilde{S}. \end{aligned}$$

Całkując układ (6.9) otrzymamy składowe u_j i w ; dalej możemy obliczyć kąty obrotu stycznych do linii α_j , wokół stycznych do linii α_{3-j} , tj.

$$(6.10) \quad \vartheta_j = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} + \frac{u_j}{R_j}.$$

Przejdziemy z kolei do omówienia pewnych szczególnych przypadków ortotropii.

7. Szczególne przypadki ortotropii¹

Z równań (6.4), (6.5)₁ i (6.7) wynika, że podstawowe równania upraszczają się w sposób zasadniczy, jeżeli przyjmiemy przybliżone równości

$$(7.1) \quad a_{jk} \approx b_{jk} \approx C_{j,l} \approx 1, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad l = 1, 2, \dots, 4,$$

słuszne dla pewnej klasy powłok izotropowych i ortotropowych. W tym przypadku wszystkie pomocnicze funkcje zestawione w tabelicy 1 mogą być przyjęte za równe jedności z błędem nie przekraczającym wartości h/R_j , tj. z takim błędem, jaki wnosi do teorii powłok (ściślej, dla pewnej klasy powłok izotropowych) hipoteza Love'a-Kirchhoffa. W tym przypadku odpowiednie równania mogą być napisane w postaci

$$(7.2) \quad A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2 \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} - \\ - \frac{1}{2} i\Omega \mathcal{C}_{3-j} \frac{A_{3-j}}{R_j} \left[\left(1 + \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{C}_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \left(1 - \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{C}_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right] = \\ = -A_j A_{3-j} (X_j - X_{jt}),$$

gdzie

$$(7.3) \quad X_{jt} = \frac{1}{A_j A_{3-j}} \left\{ \frac{D_j - D_{3-j}}{R_j} \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} \alpha_t t + \frac{A_{3-j}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [(D_j + D_{3-j,t}) t] - \right. \\ \left. - i\Omega A_{3-j} \alpha_t \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} \right) \right\}.$$

Trzecie równanie ma postać identyczną z (6.6) z tym zastrzeżeniem, że ulega jednak zmianie funkcja P_j :

$$(7.4) \quad P_j = R_j \left[A_j A_{3-j} X_j + A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2\tilde{S} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right].$$

Uwzględniając w (7.4) zależność (7.2) otrzymamy

$$(7.4') \quad P_j = R_j A_j A_{3-j} \left\{ X_{jt} + i\Omega \frac{\mathcal{C}_{3-j}}{2R_j A_j} \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \mathcal{C}_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{C}_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right] \right\}.$$

Dalsze uproszczenia otrzymuje się w przypadku, gdy spełniona jest równość

$$(7.5) \quad D_j \approx \Omega^2 \mathcal{C}_{3-j},$$

¹Przedstawioną w tym punkcie problematykę należy traktować jako dyskusyjną i wymagającą dalszych badań.

słuszna zawsze dla powłok izotropowych oraz dla pewnej klasy powłok ortotropowych. Równania (7.2) przyjmują postać

$$(7.6) \quad A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2\tilde{S} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} - \\ - i\Omega e_{3-j} \frac{A_{3-j}}{R_j} \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} = - A_j A_{3-j} (X_j - X_{jt}).$$

Trzecie równanie ma postać taką samą jak (6.6) z tym, że ulega teraz zmianie funkcja P_j :

$$(7.7) \quad P_j = R_j A_j A_{3-j} \left(X_{jt} + i\Omega \frac{e_{3-j}}{R_j A_j} \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right).$$

Funkcje X_{jt} i Z_t określone są teraz za pomocą wzorów (7.3) i (6.7)₂.

Wreszcie ostatni szczególny przypadek to powłoka izotropowa. W tym przypadku

$$(7.8) \quad C_j = C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad C_{3-j,j} = \nu C, \quad e_j = \frac{1}{Eh}, \quad e_{3-j,j} = \frac{\nu}{Eh}, \\ D_j = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{3-j,j} = \nu D, \quad \mathcal{D}_j = \frac{12}{Eh^3}, \quad \mathcal{D}_{3-j,j} = \frac{12\nu}{Eh^3}.$$

Uwzględniając zależność (7.8) w równaniach (7.6) i (7.3) otrzymamy

$$(7.9) \quad A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2 \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} - \\ - \frac{A_{3-j} c}{R_j} i \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} = - A_j A_{3-j} (X_j - X_{jt}),$$

$$X_{jt} = - \frac{1}{A_j} i\Omega \alpha_t \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} \right).$$

Ponieważ w wyniku przeprowadzonej tutaj analizy otrzymujemy w przypadku powłoki izotropowej równania, które różnią się od równań Nowożyłowa, należy wykazać, że różnica ta jest zgodna z uproszczeniami (7.1) słusznymi zawsze dla pewnej klasy powłok izotropowych. Równanie (7.9)₁ jest w budowie prostsze niż analogiczne równanie podane w pracy [12]. Dodajmy i odejmijmy od lewej strony równania (7.9)₁ wyrażenie $(A_{3-j} ic/R_j) \partial \tilde{N}_j / \partial \alpha_j$, a otrzymamy po podzieleniu przez $A_j A_{3-j}$

$$(7.10) \quad \frac{1}{A_j A_{3-j}} \left[A_{3-j} \left(1 + \frac{ic}{R_j} \right) \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} \right] - \frac{ic}{A_j R_j} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \alpha_j} = - X_j + X_{jt},$$

gdzie $\tilde{N} = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2$.

W równaniu (7.10) funkcję $1+ic/R_j$ możemy przyjąć za równą jedności, a otrzymane tak układy równań odpowiadają układom podanym w pracy [12]. Zatem postać (7.9)₁ w świetle uproszczeń (7.1) jest równoważna układowi (7.10), a jako prostsza może być używana w obliczeniach. Trzecie równanie otrzymamy wstawiając do (6.6) funkcje (7.4), przy czym w tej ostatniej równości możemy uwzględnić (7.9)₁; wtedy otrzymamy

$$(7.11) \quad \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{ic}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha_2} \right] = \\ = Z - Z_t - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (R_1 A_2 X_{1t}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (R_2 A_1 X_{2t}) \right].$$

Jeżeli uwzględnimy natomiast (7.10), to wówczas

$$(7.12) \quad \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + ic \nabla^2 \tilde{N} \approx Z - Z_t - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (R_1 A_2 X_{1t}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (R_2 A_1 X_{2t}) \right],$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial (\cdot)}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial (\cdot)}{\partial \alpha_2} \right] \right\}.$$

Równanie w postaci (7.12) spotykamy w pracy [12].

8. Powłoki obrotowe

W przypadku powłok obrotowych liniami krzywizn głównych są południki i równoleżniki. Za współrzędne krzywoliniowe wybierzemy teraz kąty α i β (rys. 4). Współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni mają znaną postać

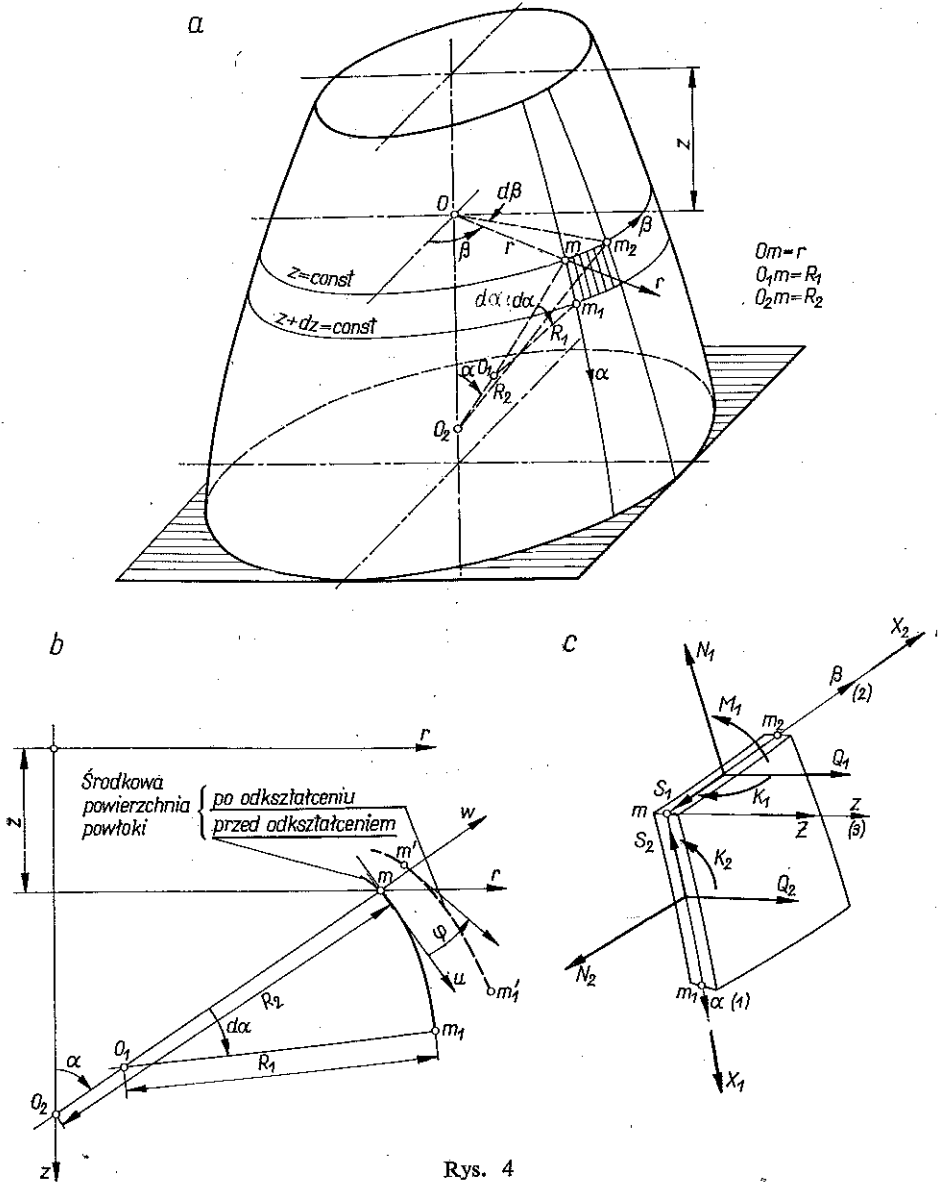
$$(8.1) \quad A_1 = R_1, \quad A_2 = r = R_2 \sin \alpha.$$

W równaniach (8.1) r oznacza promień równoleżnika określonego za pośrednictwem kąta α , zaś R_1 i R_2 promienie krzywizn południka i równoleżnika. Ponieważ współczynniki A_1 i A_2 są tylko funkcjami kąta α , to równania Gaussa-Codazziego sprowadzają się tylko do jednej zależności:

$$(8.2) \quad r' = R_1 \cos \alpha.$$

Przytoczmy teraz podstawowe równania teorii powłok ortotropowych obrotowych. Układy te otrzymamy ze wzorów (6.4)–(6.7), przy czym przyjmiemy założenia, że ortotropia w powłokach obrotowych jest tego rodzaju, iż wszystkie funkcje, które ją charakteryzują, są zależne tylko od kąta α . Po uwzględnieniu powyższego otrzymamy

$$(8.3) \quad (a_{11} + b_{11}) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + (a_{12} + b_{12}) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \tilde{N}_1 - (a_{13} + b_{13}) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \tilde{N}_2 + \\ + (a_{14} + b_{14}) \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - i \Omega \mathcal{E}_2 \frac{1}{R_1} \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \mathcal{E}_2} \right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + \right.$$



Rys. 4

(8.3) (c.d.1)

$$\begin{aligned}
 & + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} \Big] + \frac{p_1}{R_2 \sin \alpha} = -2R_1 (X_1 - X_{1t}), \\
 & (a_{21} + b_{21}) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + (a_{24} + b_{24}) \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2(a_{25} + b_{25}) \cos \alpha \tilde{S} - i\Omega e_1 \times \\
 & \times \frac{1}{R_2} \left[\left(1 + \frac{D_2}{\Omega^2 e_1} \right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \left(1 - \frac{D_2}{\Omega^2 e_1} \right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} \right] + \frac{p_2}{R_1} = -2R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}), \\
 & \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{P_1}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} \right) \right] = Z - Z_t,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (a_{11} - b_{11}) R_2 \sin \alpha \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + (a_{12} - b_{12}) R_1 \cos \alpha \tilde{N}_1 - \\
 &\quad - (a_{13} - b_{13}) R_1 \cos \alpha \tilde{N}_2 + (a_{14} - b_{14}) R_1 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta}, \\
 p_2 &= (a_{21} - b_{21}) R_1 \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + (a_{24} - b_{24}) R_2 \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2(a_{25} - b_{25}) R_1 \cos \alpha \tilde{S}, \\
 \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin \alpha X_1 + R_2 \sin \alpha \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + (\tilde{N}_1 - N_2) R_1 \cos \alpha + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (C_{11} + C_{13}) R_1 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} + \frac{1}{2} (C_{11} - C_{13}) R_1 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta}, \\
 (8.4) \quad \frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} &= R_1 R_2 X_2 + \frac{R_1}{\sin \alpha} \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{1}{2} (C_{21} + C_{23}) R_2 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + \\
 &\quad + (C_{22} + C_{24}) R_1 \operatorname{ctg} \alpha \tilde{S} + \frac{1}{2} (C_{21} - C_{23}) R_2 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + (C_{22} - C_{24}) R_1 \operatorname{ctg} \alpha \tilde{S}, \\
 X_{1t} R_1 R_2 \sin \alpha &= (D_1 - D_2) \cos \alpha a_t t + \frac{R_2}{R_1} a_t \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} [(D_1 + D_{12}) t] - \\
 &\quad - i \Omega R_2 a_t \sin \alpha \left[\left(b_{11} - \frac{D_1}{\Omega R_1} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (b_{12} - b_{13}) t \right], \\
 X_{2t} R_1 R_2 \sin \alpha &= \frac{R_1}{R_2} a_t \frac{\partial}{\partial \beta} [(D_2 + D_{12}) t] - i \Omega R_1 a_t \left[\left(b_{21} - \frac{D_2}{\Omega R_2} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right], \\
 Z_t &= i \Omega a_t \left\{ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(R_2 \sin \alpha \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{R_1}{\sin \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu układu (8.3) siły wewnętrzne obliczamy z układu (6.8), przemieszczenia zaś — po uwzględnieniu (8.1), (8.2) — z układu równań

$$\begin{aligned}
 (8.5) \quad \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right) &= \mathcal{E}_1 \operatorname{Re} \tilde{N}_1 - \mathcal{E}_{12} \operatorname{Re} \tilde{N}_2 + a_t t_0, \\
 \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} u &= \mathcal{E}_2 \operatorname{Re} \tilde{N}_2 - \mathcal{E}_{12} \operatorname{Re} \tilde{N}_1 + a_t t_0, \\
 - \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{R_2 \sin \alpha} \right) &= \frac{1}{A} \operatorname{Re} \tilde{S}.
 \end{aligned}$$

Kąty obrotu stycznych obliczamy za pomocą równości

$$(8.6) \quad \vartheta_1 = -\frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - u \right), \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - v \right).$$

Jeżeli dla rozpatrywanego tutaj przypadku będą spełnione równości (7.1), to układy równań (8.3)–(8.4) będą mieć postać (por. odnośnik na s. 367)

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - \frac{i\Omega}{2R_1} e_2 \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} \right] = -R_1 (X_1 - X_{1t}), \\ \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2 \cos \alpha \tilde{S} - \frac{i\Omega}{2R_2} e_1 \left[\left(1 + \frac{D_2}{\Omega^2 e_1} \right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{D_2}{\Omega^2 e_1} \right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} \right] = -R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}), \\ \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{P_1}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} \right) \right] = Z - Z_t, \end{aligned}$$

gdzie

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin \alpha \left\{ \frac{i\Omega}{2R_1^2} e_2 \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} \right] + X_{1t} \right\}, \\ \frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} &= R_1 R_2 \left\{ \frac{i\Omega}{2R_2^2 \sin \alpha} e_1 \left[\left(1 + \frac{D_2}{\Omega^2 e_1} \right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \left(1 - \frac{D_2}{\Omega^2 e_1} \right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} \right] + X_{2t} \right\}, \\ X_{1t} &= \frac{D_1 - D_2}{R_1 R_2} \alpha_t t \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\alpha_t}{R_1^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} [(D_1 + D_{12}) t] - \frac{i\Omega}{R_1} \alpha_t \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right), \\ X_{2t} &= \frac{\alpha_t}{R_2^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} [(D_2 + D_{12}) t] - \frac{i\Omega}{R_2 \sin \alpha} \alpha_t \left(\frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right), \end{aligned}$$

funkcja zaś Z_t określona jest za pomocą równania (8.4)₇. Jeżeli w powłoce obrotowej spełniona jest dodatkowo równość (7.5), to (8.7), otrzymujemy

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - \frac{i\Omega}{R_1} e_2 \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} = -R_1 (X_1 - X_{1t}), \\ \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2 \cos \alpha \tilde{S} - \frac{i\Omega}{R_2} e_1 \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} = -R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}). \end{aligned}$$

W równaniach (8.9) X_{1t} i X_{2t} określone są za pomocą wzorów (8.8)₄ i (8.8)₅. Trzecie równanie określone jest za pomocą wzoru (8.7)₃ z tym zastrzeżeniem, że funkcje P_1/R_1 i $P_2/R_2 \sin \alpha$ mają nieco inną postać:

$$(8.10) \quad \begin{aligned} \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin \alpha \left(\frac{i\Omega}{R_1^2} \mathcal{E}_2 \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + X_{1t} \right), \\ \frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} &= R_1 R_2 \left(\frac{i\Omega}{R_2^2 \sin \alpha} \mathcal{E}_1 \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + X_{2t} \right). \end{aligned}$$

Funkcję Z_t określa w tym przypadku równanie (8.4)₇.

Wreszcie jako ostatni przypadek rozpatrzmy powłoki izotropowe. Uwzględniając w równaniach (8.9)–(8.10) oraz (8.7)₃ zależności (7.8) otrzymujemy

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - \frac{ic}{R_1} \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} &= -R_1 (X_1 - X_{1t}), \\ \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2 \cos \alpha \tilde{S} - \frac{ic}{R_2} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} &= -R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}), \\ \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{ic}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} \right) \right] &= \\ &= Z - Z_t - \frac{ic}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (R_1 R_2 \sin \alpha X_{1t}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (R_1 R_2 X_{2t}) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(8.12) \quad X_{1t} \approx -\frac{i\Omega}{R_1} a_t \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right), \quad X_{2t} \approx -\frac{i\Omega}{R_2 \sin \alpha} a_t \left(\frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right).$$

W rozpatrywanym przypadku funkcja Z_t jest określona za pomocą wzoru (8.4)₇.

9. Stan quasi-osioowo-symetryczny

Stan ten charakteryzuje się tym, że pochodne cząstkowe wszystkich sił wewnętrznych, obciążeń i wpływów termicznych względem zmiennej β są równe zeru. Dodatkowo należy przyjąć, że składowa $X_2 = 0$ oraz, że siła $S = 0$. W przypadku gdy przemieszczenia u, w będą tylko funkcjami zmiennej α , a przemieszczenie $v = 0$, to odpowiedni stan określa się jako osioowo-symetryczny.

W rozpatrywanym tutaj przypadku z równań (8.3) otrzymamy

$$(9.1) \quad \begin{aligned} (a_{11} + b_{11}) N_1' + (a_{12} + b_{12}) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \tilde{N}_1 - (a_{13} + b_{13}) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \tilde{N}_2 - \\ - \frac{i\Omega}{R_1} \mathcal{E}_2 \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \mathcal{E}_2} \right) \tilde{N}_2' + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 \mathcal{E}_2} \right) \tilde{N}_2 \right] + \frac{P_1}{R_2 \sin \alpha} &= -2R_1 (X_1 - X_{1t}), \\ \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left(\frac{P_1}{R_1} \right)' &= Z - Z_t, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (a_{11} - b_{11}) R_2 \sin a \tilde{N}'_1 + (a_{12} - b_{12}) R_1 \cos a \tilde{N}_1 - (a_{13} - b_{13}) R_1 \cos a \tilde{N}_2, \\
 X_{1t} R_1 R_2 \sin a &= (D_1 - D_2) \alpha_t t \cos a + \frac{R_2}{R_1} \alpha_t \sin a [(D_1 + D_{12}) t]' - \\
 (9.2) \quad &- i\Omega R_2 \alpha_t \sin a \left[\left(b_{11} - \frac{D_1}{\Omega R_1} \right) t' - \frac{1}{R_1} t'_0 + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} a (b_{12} - b_{13}) t \right], \\
 Z_t &= i\Omega \alpha_t \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t + \frac{1}{R_1} t'' + \frac{1}{R_2} \operatorname{ctg} a t' \right], \\
 \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin a X_1 + R_2 \sin a \tilde{N}'_1 + (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) R_1 \cos a.
 \end{aligned}$$

Przedstawiony powyżej układ równań (9.1) zawiera dwie niewiadome funkcje (siły zespolone) \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 ($\tilde{N}'_1, \tilde{N}'_2$), które otrzymać możemy po scałkowaniu tego układu przy odpowiednich warunkach brzegowych.

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem stanu opisanego równaniami (9.1). Uwzględnijmy mianowicie zależności (3.5) (3.6) w układzie (6.3), pomijając przy tym wpływy termiczne; a otrzymamy

$$(9.3) \quad \tilde{N}_1 = N_1 + \frac{i\Omega}{R_2} (\varphi \operatorname{ctg} a + k), \quad \tilde{N}_2 = N_2 + \frac{i\Omega}{R_1} \varphi'.$$

Jeżeli wprowadzimy do równań (9.3) funkcję naprężeń ψ , przez którą siły wewnętrzne wyrażają się za pomocą wzorów

$$(9.4) \quad N_1 + \frac{\Omega}{R_2} \operatorname{ctg} a \psi, \quad N_2 = \frac{\Omega}{R_1} \psi',$$

to z (9.3) znajdziemy

$$(9.5) \quad \tilde{N}_1 = \frac{\Omega}{R_2} [\operatorname{ctg} a (\psi + i\varphi) + ki], \quad \tilde{N}_2 = \frac{\Omega}{R_1} (\psi + i\varphi)'.$$

Jeżeli wprowadzimy dalej do układu (9.5) zespoloną funkcję naprężeń

$$(9.6) \quad \tilde{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi + i\varphi,$$

wtedy równania (9.5) przyjmą postać

$$(9.7) \quad \tilde{N}_1 = \frac{\Omega}{R_2} (\tilde{\psi} \operatorname{ctg} a + ik), \quad \tilde{N}_2 = \frac{\Omega}{R_1} \tilde{\psi}'.$$

Dalej (już przez analogię) siły zespolone sprzężone określimy za pomocą wzorów

$$(9.8) \quad \tilde{\tilde{N}}_1 = \frac{\Omega}{R_2} (\tilde{\tilde{\psi}} \operatorname{ctg} a + ik), \quad \tilde{\tilde{N}}_2 = \frac{\Omega}{R_1} \tilde{\tilde{\psi}}',$$

gdzie

$$(9.9) \quad \tilde{\tilde{\psi}} = \psi - i\varphi.$$

Jeżeli założymy dalej, że układ równań (9.1) jest jednorodny ($X_1 = Z = 0$) oraz brak jest wpływów termicznych, to wtedy uwzględnienie (9.7) i (9.8) w układzie (9.1) daje tylko jedno równanie (drugie spełnia się tożsamościowo), przedstawiające rozwiązanie zagadnienia. Będzie to równanie

$$(9.10) \quad (a_{11} + b_{11}) \left(\frac{\text{ctg } \alpha}{R_2} \tilde{\psi} \right)' + (a_{12} + b_{12}) \frac{R_1}{R_2^2} \text{ctg}^2 \alpha \tilde{\psi} - (a_{13} - b_{13}) \frac{\text{ctg } \alpha}{R_2} \tilde{\psi}' - \\ - \frac{i\Omega}{R_1} e_2 \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right)' + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right)' \right] + \frac{p_1}{\Omega R_2 \sin \alpha} = \\ = - ik \left[(a_{11} + b_{11}) \left(\frac{1}{R_2} \right)' + (a_{12} + b_{12}) \frac{R_1}{R_2^2} \text{ctg } \alpha \right],$$

gdzie

$$(9.10') \quad \frac{p_1}{\Omega} = (a_{11} - b_{11}) R_2 \sin \alpha \left(\frac{\text{ctg } \alpha}{R_2} \tilde{\psi} \right)' + (a_{12} - b_{12}) \frac{R_1}{R_2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \tilde{\psi} - \\ - (a_{13} - b_{13}) \cos \alpha \tilde{\psi}' + (a_{11} - b_{11}) R_2 \sin \alpha ik \left(\frac{1}{R_2} \right)' + (a_{12} - b_{12}) \frac{R_1}{R_2} ik \cos \alpha.$$

Jeżeli przyjmiemy równości (7.1) w układach (9.10) i (9.10'), to otrzymamy

$$(9.11) \quad \frac{1}{2} \Omega e_2 R_2 \sin \alpha \left[\left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right)' + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 e_2} \right) \left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right)' \right] - \\ - R_1 \tilde{\psi} i \sin \alpha = k R_1 \cos \alpha.$$

Przyjmując zaś równość (7.5) otrzymujemy zamiast (9.11)

$$(9.12) \quad \Omega_3 e_2 R_2 \sin \alpha \left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right)' - R_1 \tilde{\psi} i \sin \alpha = k R_1 \cos \alpha.$$

Wreszcie w przypadku powłoki izotropowej z (9.12) otrzymamy

$$(9.13) \quad c R_2 \sin \alpha \left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right)' - R_1 i \tilde{\psi} \sin \alpha = k R_1 \cos \alpha.$$

Przedstawione w tym punkcie równania (9.10)–(9.13) są różnymi wariantami równań E. REISSNERA [3], które przy przyjęciu $k = 0$ przechodzą w równania stanu osiowo-symetrycznego. W tym ostatnim przypadku są to klasyczne równania jednorodne E. MEISSNERA i H. REISSNERA.

W zakończeniu tego punktu podkreślamy, że w pewnych rodzajach ortotropii mogą być spełnione tylko niektóre równości (7.1) i (7.5). Oznaczać to będzie, że pozostałe funkcje pomocnicze (nie spełniające tych równań) należy w zasadniczych równaniach uwzględnić. W charakterze przypadku wyjaśniającego ten punkt widzenia przeprowadzimy analizę ogólną równania powłoki toroidalnej ortotropowej. Równanie to było zastosowane do rozwiązania zginanego łuku falistego w pracy [1].

10. Przykład

Rozpatrzmy teraz przypadek powłoki toroidalnej ortotropowej, w quasi-osiosymetrycznym stanie, scharakteryzowanej funkcjami ortotropii [1]

$$(10.1) \quad \begin{aligned} C_1 &\approx E h k_1, & C_2 &\approx \frac{E h}{k_2}, & C_{12} &\approx \frac{E h}{\nu} k_1, \\ D_1 &\approx \frac{E h^3}{12} k_2, & D_2 &\approx \frac{E h^3}{12 k_1}, & D_{12} &\approx \frac{\nu E h^3}{12 k_1}. \end{aligned}$$

Występujące w (10.1) funkcje k_1 i k_2 (tabl. 2) są większe od jedności. Promienie krzywizny powłoki toroidalnej R_1 , R_2 określone są za pomocą wzorów

$$(10.2) \quad R_1 = r_0, \quad R_2 = R \frac{1 + \lambda \sin \alpha}{\sin \alpha}, \quad \lambda = \frac{r_0}{R}.$$

W tabelicy 2 zestawiono wszystkie funkcje pomocnicze a_{1k} i b_{1k} ($k = 1, 2, 3$) wchodzące do podstawowego równania (9.9). Jak wynika z tej tabelicy funkcje te możemy określić za pomocą przybliżonych wzorów:

$$(10.3) \quad a_{1k} = b_{1k} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } k = 1, 2, \\ 1 + \frac{ic}{\lambda r_0 \cos \alpha} [(1 + \lambda \sin \alpha) k_2]', & \text{jeśli } k = 3. \end{cases}$$

Ponieważ równość (7.5) jest też spełniona, to równanie (9.10) po uwzględnieniu powyższego i po szeregu przekształceń, przyjmie postać

$$(10.4) \quad [(1 + \lambda \sin \alpha) k_2 \tilde{\psi}']' - \mu \tilde{\psi} \sin \alpha = \mu k \cos \alpha,$$

gdzie

$$\mu = \sqrt{12} r_0^2 / R h.$$

Równanie (10.4) było podstawowym równaniem, na którym oparto rozwiązanie zginania łuku falistego w pracy [1]. To uproszczone równanie otrzymano w cytowanej wyżej pracy na nieco innej drodze (przez całkowanie równania dokładnego). Zatem przedstawiony w tej pracy sposób eliminacji pewnych wyrazów mających mały wpływ na równania zasadnicze jest bardzo wygodny przy rozwiązywaniu zagadnień ortotropowych.

11. Wnioski

1. Rozwiązanie metodą sił zespolonych umożliwia uproszczenia podstawowych równań teorii powłok ortotropowych. W każdym konkretnym przypadku ortotropii należy zanalizować, które to pomocnicze funkcje czynią zadość równaniom (7.1) i (7.5), po czym uwzględnić te związki w równaniach zasadniczych.

2. Równania teorii powłok ortotropowych upraszczają się w sposób zasadniczy, jeżeli przyjmie się, że dla wszystkich funkcji pomocniczych spełnione są równania (7.1). Jeżeli dodatkowo zachodzi (7.5), to wtedy otrzymuje się równania o budowie

Tablica 2. Pomocnicze funkcje a_{1k}, b_{1k} ($k = 1, 2, 3$)
(powłoki obrotowe w stanie osiowo-symetrycznym)

Powłoki obrotowe	a_{11}	$1 + e_{12} \frac{\Omega}{R_1} i$
	a_{12}	$1 + e_1 \frac{\Omega}{R_1} i \left(1 + \frac{e_{12}}{e_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{e_1} e'_{12} \right)$
	a_{13}	$1 + e_2 \frac{\Omega}{R_1} i \left(1 + \frac{e_{12}}{e_2} + \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{e_2} e'_{12} \right)$
	b_{11}	$1 - \frac{D_{12}}{\Omega R_1} i$
	b_{12}	$1 + \frac{D_2}{\Omega R_1} i \left(1 - \frac{D_{12}}{D_2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{D_2} D'_{12} \right)$
	b_{13}	$1 + \frac{D_1}{\Omega R_1} i \left(1 - \frac{D_{12}}{D_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{D_1} D'_{12} \right)$
Powłoka obrotowa toroidalna (przykład)	a_{11}	$1 + \frac{\nu c}{k_1 r_0} i$
	a_{12}	$1 + \frac{c}{r_0 k_1} \left[1 + \nu + \frac{\nu p_0 (1 + \lambda)}{k_1 (1 + \lambda \sin \alpha)} \right]$
	$a_{13}^*)$	$1 + \frac{ic}{\lambda r_0 \cos \alpha} [(1 + \lambda \sin \alpha) k_2]'$
	b_{11}	$1 - \frac{\nu c}{k_1 r_0}$
	b_{12}	$1 + \frac{c}{r_0 k_1} i \left[1 - \nu - \frac{\nu p_0 (1 + \lambda)}{k_1 (1 + \lambda \sin \alpha)} \right]$
	$b_{13}^*)$	$1 + \frac{ic}{\lambda r_0 \cos \alpha} [(1 + \lambda \sin \alpha) k_2]'$

Funkcje ortotropii dla powłoki toroidalnej w rozpatrywanym przykładzie wynoszą [1]:

$$k_{1r} = k_{2z} = k_1 = \frac{p_0 (1 + \lambda)}{1 + \lambda \sin \alpha} \geq 1, \quad p_0 \leq 1,5,$$

$$k_{2r} = k_{1z} = k_2 \approx p_1 - p_2 \sin \alpha \geq 1.$$

*) Przyjęto $1 \pm \frac{\nu}{k_1 k_2} \approx 1$.

analogicznej do układu równań powłok izotropowych. Do tej grupy należeć będą powłoki ortotropowe, dla których funkcje ortotropii są stałe i mało różniące się od jedności.

3. W zależności od tego, które funkcje pomocnicze można przyjąć jako równe jedności, mogą wystąpić pewne uproszczenia w związkach między siłami a odkształceniami lub w określeniu sił poprzecznych. Jeżeli jak w przykładzie $a_{11} \approx \approx a_{12} \approx 1$, to przybliżone równości można otrzymać zakładając formalnie $C_1 \approx \approx C_{12} \approx 0$. Aby jednak z tego wynikała równość $N_1 \approx 0$, potrzeba, aby i na brzegu siła ta była równa zeru. Zatem jeżeli mamy wyciągnąć pewne wnioski dotyczące pominięcia pewnych wielkości wewnętrznych, to takie uproszczenia mogą być wprowadzone dopiero po rozpatrzeniu zagadnienia brzegowego, a więc dla każdej klasy zagadnień oddzielnie.

4. Pomijając w równaniach zasadniczych teorii powłok izotropowych pewne wyrazy określające małe wpływy na przebieg zjawiska, uzyskano równania prostsze niż równania Nowożyłowa.

5. Zagadnienia brzegowe dla omawianych tutaj równań należy formułować podobnie jak dla powłok izotropowych, tj. przez części rzeczywiste lub urojone sił zespolonych, lub przez składowe przemieszczenia i kąty obrotu.

6. Jeżeli brać pod uwagę pewne niedogodności metody, jak wolniejsza zbieżność szeregów dla wielkości wewnętrznych, trudność formułowania w ogólnym przypadku zagadnień brzegowych w siłach zespolonych oraz fakt, że spotykane w obliczeniach numerycznych układy równań algebraicznych posiadają współczynniki zespolone, to niedogodności te skompensowane są niższym rzędem równań końcowych oraz możliwością wprowadzenia uproszczeń w równaniach wyjściowych, co jest rzeczą szczególnie cenną w teorii powłok ortotropowych. Dodatkowo równania zasadnicze po wprowadzeniu powyższych uproszczeń mają w przyjętym tutaj opisie względnie prostą budowę.

Literatura cytowana w tekście

1. S. BORKOWSKI, *Zginanie luków falistych*, Rozpr. Inżyn., 1, 12 (1964), 137.
2. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1934.
3. E. REISSNER, *Rotationally symmetric problems in the theory of thin elastic shells*, Proc. Th. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, 51.
4. С. А. Амбардумян, *Теория анизотропных оболочек*, Москва 1962.
5. Л. Е. Андреева, *Упругие элементы приборов*, Москва 1961.
6. И. А. Биргер, *Круглые пластинки и оболочки вращения*, Москва 1961.
7. В. Висарион, К. Стенеску, *Исследование квазиинвариантов статикогеометрической аналогии для тонких упругих оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 1, 25 (1961), 68.
8. В. З. Власов, *Некоторые задачи сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости*, Изд. АН СССР, 9, 1950, 1267.
9. А. Л. Гольденвейзер, *Теория тонких упругих оболочек*, Москва 1953.
10. Я. М. Григоренко, Л. А. Ильин, *Уравнения теории тонких оболочек в комплексной форме с учетом температурных воздействий*, w zbiorze prac, pt. Тепловые напряжения в элементах турбомашин, Киев 1962.
11. В. М. Майзель, *Температурная задача теории упругости*, Киев 1951.
12. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз 1962.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ СИЛ К ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Работа касается теории ортотропных оболочек, в которой зависимость между внутренними силами и составляющими деформированного состояния может быть принята в виде (5.1). Существующие в уравнениях (5.1) жесткости определяются с помощью формул (5.2). В работе предполагается правильность зависимостей (3.1), выведенных В. В. Новожиловым для изотропных оболочек. Принимаются уравнения равновесия А. Лява согласно (4.1). Затем, используя статико-геометрическую аналогию А. Л. Гольденвейзера, вводятся формально определенные комплексные силы и комплексные сопряженные силы (6.3) так что для комплексных сил получаются конечные уравнения (6.4)–(6.7). В этих уравнениях учитываются термические влияния, при предположенном линейном изменении температуры вдоль нормали к середине поверхности оболочки [уравнение (2.1)]. Принимается также, что поток тепла является установившимся.

В работе, рассматриваются две группы систем уравнений: первая для которых удовлетворяется приближенным равенствам (7.1) и вторая для которой добавочно имеет место (7.5).

Осуществляя и консеквентно пренебрегая малыми выражениями получается некоторый, более простой, вариант уравнений теории изотропных оболочек (7.9) и (7.11). В п. 8 рассматриваются оболочки вращения, в качестве особого случая получается уравнение, выведенное Э. Рейсснером.

В каждом конкретном случае ортотропии необходимо исследовать вспомогательные функции, сопоставленные на таблице 1 и отбросить те, которые удовлетворяют зависимостям (7.1) или (7.5), получая, таким образом, упрощение основной системы уравнений. В качестве примера, рассматривается такой анализ для тороидальной оболочки (ср. [1]), работающей в квази-осесимметрическом состоянии.

Настоящая работа имеет целью составление уравнений, с помощью которых можно решать проблему, подобно как напр. в [1], но для произвольных напряженных состояний. Приведенные уравнения являются справедливыми для оболочек, снабженных ребрами (рис. 3а) или оболочек с естественной ортотропией. Имеется также возможность решать при помощи приведенных уравнений проблемы оболочек с переменной толщиной.

Summary

APPLICATION OF COMPLEX FORCES IN THE THEORY OF ORTHOTROPIC SHELLS

The present paper concerns the theory of orthotropic shells assuming the relation between the section forces and the deformation components in the form (5.1). The rigidities involved in these equations are determined by equations (5.2). It is assumed that equations (3.1) derived by V. V. NOVOZHILOV for isotropic shells are valid. The equilibrium equations are assumed, after A. E. H. LOVE, according to (4.1). Next, making use of the mechanical-geometrical analogy of A. L. GOLDENVEIZER, formally determined complex and conjugate complex forces (6.3) are introduced for which the final equations (6.4)–(6.7) are obtained. Thermal influences are taken into consideration assuming linear temperature variability along the normal to the middle surface of the shell [equation (2.1)]. It is also assumed that the heat flow is steady.

Two groups of sets of equations are considered. The approximate equations (7.1) are satisfied for the first group. For the other one, equation (7.5) is satisfied additionally.

By rejecting small terms a simpler form of the equations of the theory of isotropic shells is obtained, (7.9) and (7.11).

Shells of revolution are considered in Sec. 8. As a particular case, the equation of E. REISSNER is obtained.

In every particular case of orthotropy, the auxiliary functions of Table 1 should be examined. The functions satisfying the relations (7.1) or (7.5) should be rejected thus obtaining a simplified fundamental set of equations. As an example is analysed a toroidal shell (cf. [1]) working in a quasi axially symmetric state.

The aim of the present paper is to give equations that can be used to solve problems similar to those of [1], but for arbitrary states of stress. The equations obtained are also valid for ribbed shells (Fig. 3a') or shells with natural orthotropy. It is also possible to use them to solve problems of shells with variable rigidity (Fig. 3a).

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 czerwca 1964 r.
