

BADANIA NAD PRZEPŁYWEM PODDŹWIĘKOWYM PŁYNU ŚCIŚLIWEGO W KANALE W OBECNOŚCI PRZESZKODY

SIMONA POPP (BUKARESZT)

Wstęp

Badania nad przepływem poddźwiękowym płynu doskonale ściśliwego w kanale, w którym występuje przeszkoda kołowa lub niemal kołowa, prowadzone były dotychczas albo metodami przybliżonymi, stosowanymi na płaszczyźnie fizycznej, albo też metodami aproksymacji hodograficznej.

Zagadnienie to badał E. LAMLA [1] metodą przybliżoną JANZENA [2] i RAYLEIGHA [3], Z. HASIMOTO [4] metodą przybliżoną I. IMAI [5] oraz autorka niniejszego [6, 7 i 8] metodą aproksymacji hodograficznej S. A. CZAPŁYGINA [9] i metodą przybliżoną B. M. KISIELEWA [10]. Tym samym problemem zajmował się H. SUZUKI w pracy, którą cytuje Z. HASIMOTO [4] stanowił on również przedmiot badań empirycznych TAYLORA i SHARMANA [11].

Poniżej omówimy własne badania związane z tym problemem i porównamy uzyskane rezultaty z rezultatami cytowanych autorów.

1. Trzy warianty metody aproksymacji hodograficznej S. A. Czapłygina

Rozważać będziemy przepływ ustalony, bezwirowy i izentropowy płynu doskonale ściśliwego odbywający się w płaszczyźnie xOy .

Jak wiadomo metoda przybliżona Czapłygina opiera się na zastąpieniu prawa ściśliwości Poissona

$$(1.1) \quad \frac{p'}{\rho'} = \frac{p_0}{\rho_0'}$$

przez pewną zależność liniową. W ten sposób płyn rzeczywisty można zastąpić płynem fikcyjnym, zwanym płynem Czapłygina, i ustalić zależność pomiędzy przepływem płynu Czapłygina w płaszczyźnie z (tzn. xOy) oraz sprzężonym przepływem nieściśliwym w płaszczyźnie $z^{(0)}$ (tzn. $x^{(0)}Oy^{(0)}$).

Znając potencjał zespolony $f(z^{(0)})$ przepływu nieściśliwego można następnie przejść na płaszczyznę z za pomocą wzoru

$$(1.2) \quad z = C_1 z^{(0)} + C_2 \int \left[\frac{df(z^{(0)})}{dz^{(0)}} \right]^2 dz^{(0)}$$

podanego w r. 1939 jednocześnie przez C. JACOBA [12] i H. S. TSIENA [13] (C_1 i C_2 są pewnymi stałymi).

Wobec tej zależności kąty, które tworzą prędkości V i $V^{(0)}$ odpowiednio z osiami Ox i $Ox^{(0)}$, zachowują się, a związek pomiędzy modułami tych prędkości, niezależny od $z^{(0)}$ i z , przyjmie postać

$$(1.3) \quad \frac{1}{V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} + C_2 V^{(0)}.$$

Najczęściej stosowane są trzy następujące warianty metody aproksymacji hodo-graficznej Czapłygina: wariant Czapłygina-Demczenki, wariant Kármána-Tsiena i wariant C. Jacoba. Różnią się one między sobą wyborem prostej, która zastąpić ma krzywą stałej entropii.

CZAPLYGIN [9] i DEMCZENKO [14] wybierają prostą styczną do krzywej stałej entropii w punkcie odpowiadającym prędkości zerowej; KÁRMÁN [15] i TSIEN [13] wybierają styczną w punkcie odpowiadającym pewnej prędkości V_1 , która może być na przykład prędkością w nieskończoności, podczas gdy C. JACOB [16 i 17] zastępuje linię stałej entropii cięciwą łączącą punkty odpowiadające prędkości zerowej i prędkości w nieskończoności.

W każdym z tych wariantów występujące w związku (1.2) stałe C_1 i C_2 można wyrazić w postaci szeregu potęgowego względem liczby Macha M_∞ przepływu w nieskończoności, a mianowicie

$$(1.4) \quad \begin{aligned} C_1 &= 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 + AM_\infty^4 + \dots, \\ C_2 V_\infty^2 &= -\frac{1}{4} M_\infty^2 - AM_\infty^4 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie A ma wartości następujące:

$$(1.5) \quad A = \begin{cases} \frac{1-2\gamma}{16} & \text{w wariantcie Czapłygina-Demczenki,} \\ \frac{3}{16} & \text{Kármána-Tsiena,} \\ \frac{2-\gamma}{16} & \text{C. Jacoba.} \end{cases}$$

2. Przepływ poddźwiękowy w kanale

Podamy teraz kilka własnych rezultatów otrzymanych przy zastosowaniu każdego z trzech wymienionych wariantów do płaskiego, ustalonego, bezwirowego przepływu płynu ściśliwego przy dużych prędkościach poddźwiękowych w kanale o ścianach równoległych i w obecności przeszkody prawie kołowej oraz przy założeniu, że ściśliwość płynu określona jest za pomocą (1.1).

W naszych poprzednich pracach [6 i 7] rozważając przepływ bezwirowy dookoła przeszkody wykorzystaliśmy znany wzór określający potencjał zespolony $f(z^{(0)})$

sprężonego przepływu nieściśliwego, podany przez H. LAMBA [18] i A. MASOTTIEGO [19]:

$$(2.1) \quad f(z^{(0)}) = \tilde{V}_\infty \left\{ z^{(0)} + \frac{\pi b^2}{a^2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi z^{(0)}}{a} \right\}.$$

Szerokość kanału oznaczyliśmy tu przez a , a średnicę koła przez $2b$.

Wiadomo, że wzór (2.1) określa potencjał zespolony odpowiadający przepływowi nieściśliwemu w kanale o szerokości a dookoła przeszkody prawie kołowej, którą można uważać za koło o promieniu b (przy czym różnica między dwoma jej średnicami ekstremalnymi jest bardzo mała).

Uwzględniając związki (1.2), (1.3), (1.4) i (2.1) i pomijając wyrazy rzędu wyższego niż $(\pi b/a)^2$ i \mathbf{M}_∞^4 otrzymamy dla przeszkody w płaszczyźnie z wyrażenia następującej postaci:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x &= b \left[1 - \frac{3}{4} \mathbf{M}_\infty^2 - 3A\mathbf{M}_\infty^4 - \frac{2}{3} \mathbf{M}_\infty^2 \frac{\pi^2 b^2}{a^2} - \frac{8}{3} A\mathbf{M}_\infty^4 \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right] \cos \sigma + \\ &\quad + \frac{b}{3} [\mathbf{M}_\infty^2 + 4A\mathbf{M}_\infty^4] \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right] \cos^3 \sigma, \\ y &= b \left[1 + \frac{1}{4} \mathbf{M}_\infty^2 + A\mathbf{M}_\infty^4 \right] \sin \sigma - \\ &\quad - \frac{b}{3} [\mathbf{M}_\infty^2 + 4A\mathbf{M}_\infty^4] \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right] \sin^3 \sigma \quad (0 \leq \sigma \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Podaliśmy jednocześnie [6] następujący wzór, który wyraża rozkład prędkości na przeszkodzie:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} V &= 2\tilde{V}_\infty |\sin \sigma| \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} + \frac{1}{4} \mathbf{M}_\infty^2 B + \mathbf{M}_\infty^4 AB + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \mathbf{M}_\infty^4 \left[16 \sin^4 \sigma - 8 \sin^2 \sigma + 1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} (80 \sin^4 \sigma - 24 \sin^2 \sigma + 1) \right] \right\}, \end{aligned}$$

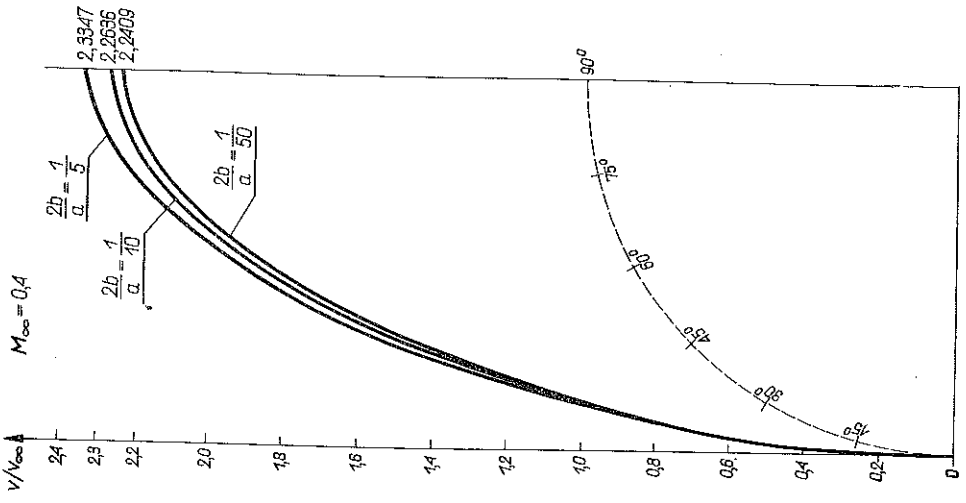
gdzie

$$B = 4 \sin^2 \sigma - 1 + \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \left(4 \sin^2 \sigma - \frac{1}{3} \right).$$

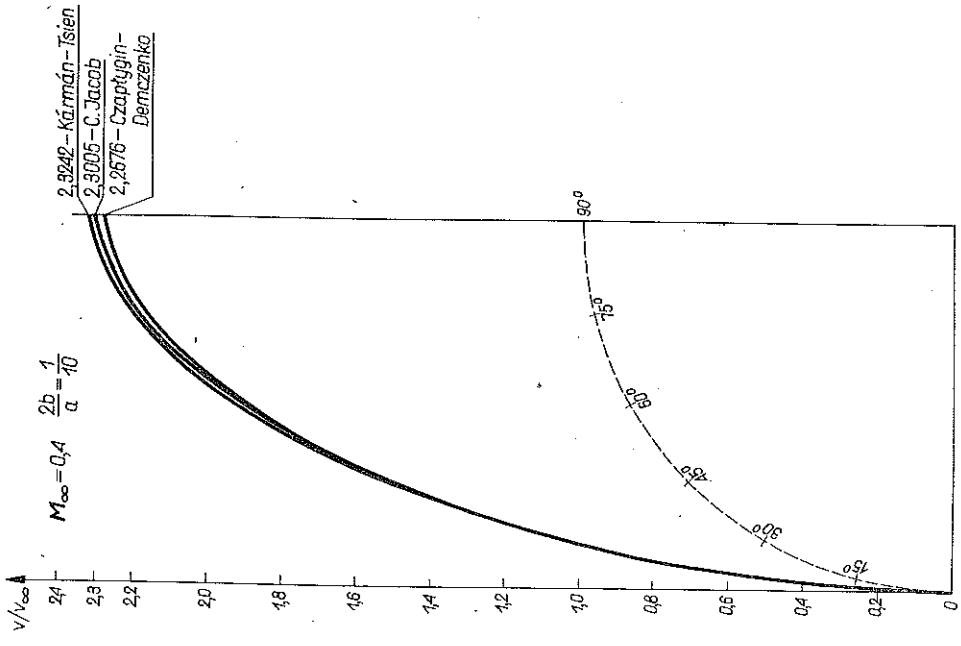
We wzorach powyższych \tilde{V}_∞ oznacza prędkość w niekończoności sprężonego przepływu nieściśliwego. Na brzegu koła przyjęto: $z^{(0)} = be^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$). W wariantach Czapłygina-Demczenki i Kármána-Tsiena przyjęto $\tilde{V}_\infty = V_\infty$, gdzie V_∞ jest prędkością przepływu ściśliwego w nieskończoności. W wariantcie C. Jacoba należy dla prędkości uwzględnić poprawkę określoną za pomocą wzoru

$$(2.4) \quad \tilde{V}_\infty = V_\infty \left(1 + \frac{\gamma+1}{96} \mathbf{M}_\infty^4 + \dots \right).$$

Przyjmując we wzorze (2.3) $\sigma = \pm\pi/2$ znajdujemy prędkość maksymalną na obwodzie koła.



Rys. 1



Rys. 2

Za pomocą wzoru (2.3) można również obliczyć wartości prędkości na przeszkodzie. Wykorzystując (2.3) wykreślono na rys. 1 krzywe podające rozkład prędkości na przeszkodzie przy założeniu, że $M_\infty = 0,4$ oraz że stosunek $2b/a$ wynosi odpowiednio $1/5, 1/10, 1/50$.

Rachunki przeprowadzono ograniczając rozwinięcia występujące we wzorze (2.3) do wyrazów rzędu M_∞^2 .

Krzywe podane na rys. 2 określają ten sam rozkład prędkości dla trzech omawianych wyżej wariantów w przypadku gdy $M_\infty = 0,4$ i $2b/a = 0,1$. Uwzględniłiśmy tutaj wyrazy rzędu niewiększego niż M_∞^4 .

Tablica 1

$\frac{2b}{a}$	M_∞^*	(trzecie przybliżenie)	$\frac{V_{\max}}{V_\infty}$
1/2	0,3441	Czapłygin-Demczenko	2,7504
	0,3403	Kármán-Tsien	2,7674
	0,3422	C. Jacob	2,7598
1/3	0,3759	Czapłygin-Demczenko	2,4856
	0,3709	Kármán-Tsien	2,5202
	0,3734	C. Jacob	2,5028
1/4	0,3888	Czapłygin-Demczenko	2,3893
	0,3829	Kármán-Tsien	2,4332
	0,3870	C. Jacob	2,4099
1/5	0,3959	Czapłygin-Demczenko	2,3442
	0,3904	Kármán-Tsien	2,3824
	0,3929	C. Jacob	2,3638
1/10	0,4064	Czapłygin-Demczenko	2,2848
	0,4003	Kármán-Tsien	2,3234
	0,4028	C. Jacob	2,3059
1/50	0,4099	Czapłygin-Demczenko	2,2656
	0,4036	Kármán-Tsien	2,3052
	0,4064	C. Jacob	2,2868
1/100	0,4100	Czapłygin-Demczenko	2,2648
	0,4037	Kármán-Tsien	2,3050
	0,4064	C. Jacob	2,2860

Analiza rys. 2 prowadzi do wniosku, że wartości liczbowe uzyskiwane każdym z tych trzech wariantów są bardzo bliskie, przy czym wariant C. Jacoba daje wartości pośrednie pomiędzy wartościami, które dają warianty Czapłygina-Demczenki i Kármána-Tsiena.

We wcześniejszej pracy [7] autorka wyliczyła liczbę krytyczną Macha M_∞^* dla wielu wartości stosunku $2b/a$, uwzględniając wyrażenie na prędkość maksymalną na przeszkodzie i odrzucając we wzorze (2.3) wyrazy rzędu wyższego niż M_∞^4 .

Podajemy w tablicy 1 wartości M_∞^* odpowiadające trzem omawianym wariantom oraz odpowiednie prędkości maksymalne.

W tabelicy 2 wartości krytyczne Macha, które uzyskaliśmy metodą hodograficzną rozważaną w tej pracy, porównane są z wartościami, które uzyskaliśmy ze wzoru na prędkość maksymalną na przeszkodzie, podanego przez E. LAMLĘ. Jest to wzór następujący:

$$(2.5) \quad \frac{V_{\max}}{V_{\infty}} = 2 \left(1 + \frac{7}{12} M_{\infty}^2 \right) + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{43}{12} M_{\infty}^2 \right) \left(\frac{2\pi b}{a} \right)^2.$$

Uwzględniono tylko wyrazy rzędu nie wyższego niż M_{∞}^4 .

Tabela 2. M_{∞}^* liczba krytyczna Macha

$\frac{2b}{a}$	E. Lamla	Metoda hodograficzna
1/2	0,3496	0,3475
1/3	0,3826	0,3793
1/4	0,3987	0,3931
1/5	0,4062	0,4001
1/10	0,4180	0,4103
1/50	0,4224	0,4136
1/100	0,4225	0,4137

Zauważmy, że rezultaty uzyskane obu wymienionymi metodami są bardzo bliskie. Różnice pomiędzy liczbami krytycznymi Macha dla tych samych wartości stosunku $2b/a$ są mniejsze we wszystkich rozważanych przypadkach niż 0,01.

Można również podać wzór określający rozkład prędkości wzdłuż osi Oy . Wykorzystuje się w tym celu wzór (1.3) oraz wzór określający prędkość płynu nieściśliwego w płaszczyźnie $z^{(0)}$, który można wyprowadzić ze wzoru (1.4), określającego potencjał zespolony:

$$(2.6) \quad \frac{df}{dz^{(0)}} = \tilde{V}_{\infty} \left\{ 1 - \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right] \left(\operatorname{sh} \frac{\pi z}{a} \right)^{-2} \right\}.$$

Po wykonaniu rachunków otrzymujemy poszukiwany wzór w postaci następującej:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{V}{\tilde{V}_{\infty}} = & 1 + \frac{b^2}{y^{(0)2}} + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2 y^{(0)2}} a + \frac{1}{2} M_{\infty}^2 \frac{b^2}{y^{(0)2}} \left[\frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 y^{(0)2}}{a^2} \times \right. \\ & \times a \left(a^2 + \frac{1}{2} \beta \right) \left. \right] + A \frac{b^2}{y^{(0)2}} M_{\infty}^4 \left\{ \alpha \beta + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 y^{(0)2}}{a^2} a (2a^2 + \beta) + \right. \\ & + \frac{1}{16} \frac{b^4}{y^{(0)4}} M_{\infty}^4 \left\{ \frac{b^2}{y_0^2} a \left[\frac{b^2}{y^{(0)2}} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 y^{(0)2}}{a^2} a \right) + 4 \left(1 + \frac{\pi^2 y^{(0)2}}{a^2} a \right) \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi^2 b^2}{a^2} a \left[4 + \frac{1}{3} \frac{b^2}{y^{(0)2}} \left(4 + \frac{b^2}{y^{(0)2}} \right) \right] + 4 \frac{b^2}{y^{(0)2}} \right\}, \right. \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha = 1 + \frac{b^2}{y^{(0)2}}, \quad \beta = \alpha + 1.$$

Pominięto tu wyrazy rzędu wyższego niż M_∞^4 .

Wyrażenie (2.7) można wykorzystać do obliczeń numerycznych, które prowadzą do wyników zgodnych z otrzymanymi przez Z. Hasimoto, [4].

W tabelicy 3 podajemy niektóre wartości stosunku V/V_∞ na osi Oy i porównujemy je z danymi znajdującymi się w cytowanej pracy Z. Hasimoto.

Tablica 3: V/V_∞ , $M_\infty = 0,4$

$y^{(0)}/b$	Z. Hasimoto $2b/a = 0,1$	Taylor-Sharman $2b/a = 0,1$	Metoda hodograficzna $2b/a = 0,1$	I. Imai $2b/a = 0$
1	2,213	—	2,2636	2,284
2	1,335	1,35	1,30	1,345
3	1,16	1,18	1,14	1,15

Literatura cytowana w tekście

1. E. LAMLA, *Die symmetrische Potential Strömung eines kompressibeln Gases einen Kreiszyylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet*, Luftfahrtforschung, **17** (1940), 329–331.
2. O. JANZEN, *Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten*, Physikal. Zeitschr., **14** (1913), 639.
3. LORD RAYLEIGH, *On the flow of a compressible fluid past an obstacle*, Phil. Mag. **32** (1916), 1.
4. Z. HASIMOTO, *On the subsonic flow of a compressible fluid past a circular cylinder between two parallel walls*, Proc. Physico-Math. Soc. Japan., **25** (1943), 563–574.
5. I. IMAI, *A new method of successive approximations for dealing with the two dimensional subsonic flow of a compressible fluid*, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **24** (1942), 120–12.
6. SIMONA POPP, *Miscarea subsonică a unui fluid compresibil într-un canal în jurul unui cilindru cvasicircular*, Comunicările Academiei R.P.R., **9** (1959), 223–228.
7. SIMONA POPP, *Variantele metodei de aproximatie a lui S. A. Ciaplighin în problema mișcării subsonice în canal în jurul cilindrului cvasicircular*, Analele științifice ale Universității «Al. I. Cuza» din Iași, Supliment, **6** (1960), 723–730.
8. SIMONA POPP, *Cercetări asupra mișcării subsonice în jurul unui obstacol situet într-un canal*, Studii și Cercetări Matematice, **14** (1963), 213–221.
9. С. А. ЧАПЛЫГИН, *О газовых струях*, 1902, Собрание сочинений, т. 2, Москва 1948, 19–137.
10. Б. М. КИСЕЛЕВ, *Обтекание тел заданной формы плоским дозвуковым потоком газа*, Сборник теоретических работ по аэродинамике, Москва 1957, 11–26.
11. G. I. TAYOR, C. F. SHARMAN, *A mechanical method for solving problems of flow in compressible fluids*, Proc. Royal Society, A **121**, (1928), 194.
12. C. JACOB, *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles*, Portugaliae Mathematics, **1** (1939), 209–257.
13. H. S. TSIEN, *Two-dimensionel subsonic flow of a compressible fluid*, J. Aeronaut. Sci., **7** (1939), 399–407.
14. B. DEMTCHENKO, *Sur la relation entre la dynamique des fluides compressibles et celle des fluides incompressibles*, Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, **2** (1933), 85–105.
15. TH. KÁRMÁN, *Compressibility effects in aerodynamics*, J. Aeronaut. Sci., **8** (1941), 337–355.

16. C. JACOB, *Remarques sur la méthode approchée de Tchapligne*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 223, (1946).

17. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Editions de l'Académie de la R.P.R. Bucarest-Gauthier-Villars, Paris 1959.

18. H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, 6-e ed., 1932.

19. A. MASOTTI, *Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele; seconda approssimazione*, Atti della Reale Accademia nazionale dei Lincei, 4, (1926), 443.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ В КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

Проводится анализ установившегося безвихревого дозвукового плоского течения сжимаемой жидкости при наличии почти кругового препятствия. Автор, сравнивает результаты, полученные в собственных, более ранних работах с результатами других авторов и констатирует их большую совместность.

Summary

RESEARCH OF SUBSONIC FLOW IN A DUCT WITH AN OBSTACLE

This is an analysis of a steady-state plane subsonic flow with no rotation of a compressible fluid through duct with parallel walls and an almost circular obstacle. The authoress confronts her results obtained in some previous works with those obtained by other authors. Very good agreement has been found.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1964 r.
