

**ZASTOSOWANIE METODY KOLLOKACJI
DO OBLICZENIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH UGIĘĆ BELEK
O SKRĘPOWANEJ PRZESUWNOŚCI PODPÓR**

ZENON WASZCZYSHYN (KRAKÓW)

1. Wstęp

Belki zginane, rozpatrywane w mechanice technicznej, mogą mieć końce zamocowane w różny sposób. Obok zamocowania końców ze względu na obrót przekrojów przypodporowych (granicznymi przypadkami będą: podparcie przegubowe i doskonale utwierdzenie) rozpatruje się również przesuwność podpór. Wpływ sprężystego utwierdzenia i sprężystych przemieszczeń podpór normalnych do osi belki (przy wprowadzeniu liniowych zależności dla skrępowań) można dość łatwo zanalizować na podstawie teorii małych ugięć. Natomiast analiza wpływu przemieszczeń podpór, równoległych do osi belki, wobec konieczności odrzucenia zasady zeszywnienia i niestosowalności zasady superpozycji, jest o wiele bardziej skomplikowana.

Uwzględnienie wpływu skrępowanej przesuwności podpór (w dalszym ciągu pod przesuwnością będziemy rozumieli przemieszczenia równoległe do osi nieodkształconej belki) ma duże znaczenie zarówno dla lepszej oceny rzeczywistego zachowania się belek jak również przy obliczaniu ustrojów statycznie niewyznaczalnych ze względu na siły podłużne.

Zagadnieniem tym zajmował się już w 1904 r. I. G. BUBNOW [1] przy okazji badania płyt walcowo zginanych, używanych jako pokrycie kadłubów okrętów. Dalsze badania były kontynuowane przez S. P. TIMOSZENKĘ [17 i 18], F. TAKABEYĘ [16], S. WAYA [23], R. LIEBOLDA [9], J. MANDESA [10], R. FRISCH-FAYA [4], a w Związku Radzieckim przez B. F. PAPKOWICZA [13], S. D. LEJTESA [6, 7 i 8] i K. M. KARADZIEGO [5].

Wszyscy wyżej wymienieni badacze opierali swoje rozważania na gruncie teorii małych ugięć odrzucając zasadę zeszywnienia i obliczając przesuw podpór z przybliżonego wzoru na długość odkształconej osi belki. W dodatku wszyscy, z wyjątkiem S. D. LEJTESA, ograniczali swoje rozważania do belek (lub płyt walcowo zginanych) sprężystych. Również wszyscy zajmowali się belkami podpartymi na wysokości osi.

W pracach autora, a częściowo autora i M. ŻYCKOWSKIEGO dotyczących belek sprężystych, opartych na nieprzesuwnych podporach, stosowano teorię ugięć skończonych. Równania wyjściowe dla dużych ugięć belki o rozciągliwej osi rozwiązano w pracy [19] w sposób ścisły. Jednak skomplikowana postać rozwiązania (układ dwóch równań przestępnych z funkcjami i całkami eliptycznymi) znacznie utrudniała analizę; toteż w pracy [21] zastosowano do rozwiązania równań pod-

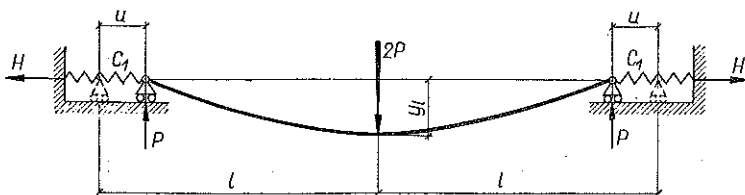
stawowych metodę małego parametru. Otrzymano w ten sposób proste, przybliżone wzory umożliwiające również analizę wpływu wysokości podparcia [22].

Rozwiązania przybliżone, otrzymane w pracach [21 i 22], dzięki zastosowaniu metody małego parametru mają bardzo prostą postać i nadają się do dalszej analizy znacznie lepiej od rozwiązań otrzymanych na podstawie teorii małych ugięć. Wadą jest natomiast niezbyt wielki promień zbieżności szeregów; rozbieżność szeregów potęgowych przy większych ugięciach (obciążeniach) ogranicza stosowalność otrzymanych przybliżonych rozwiązań.

Praca niniejsza podaje inne, przybliżone rozwiązanie problemu przez zastosowanie metody kollokacji. Metoda ta, której podstawy omówimy nieco dalej, pozwoli na otrzymanie przybliżonego rozwiązania odnoszącego się do znacznie szerszego przedziału, a ponadto pozwoli pokonać znaczne trudności przy obliczaniu ugięć sprężysto-plastycznych belek opartych na podporach ze skrepowaną przesuwnością.

W obecnej pracy wykorzystamy równania wyjściowe wyprowadzone w pracy [19], dotyczącej ugięć sprężystych, jak również równania wyprowadzone dla ugięć skończonych sprężysto-plastycznych belki prostokątnej o osi rozciągliwej, podane w pracy [20]. Oprzemy się ponadto na następujących założeniach:

1. Materiał belki jest idealnie sprężysto-plastyczny o module Younga E i granicy plastyczności $Q = Q_r = |Q_e|$ i jednakowych właściwościach przy ściskaniu i rozciąganiu.
2. Obowiązuje zasada płaskich przekrojów zarówno w zakresie sprężystym jak i sprężysto-plastycznym.
3. Belka jest przyzmatyczna o stałym polu przekroju F i momencie bezwładności I .
4. Belka jest nieważka, zginana w jednej z płaszczyzn głównych.
5. Pomijamy wpływ sił poprzecznych na uplastycznienie i ugięcie belki.
6. Przyjmujemy, że siła podłużna jest stała na długości całej belki i równa się reakcji poziomej $N \equiv H$ (założenie to, jak było wykazane w pracy [22], wywołuje bardzo niewielki błąd).
7. Podparcie jest przyłożone na wysokości osi belki.
8. W przypadku ugięć sprężysto-plastycznych zajmiemy się tylko procesem obciążania, nie będziemy natomiast rozpatrywali odciążenia belki.

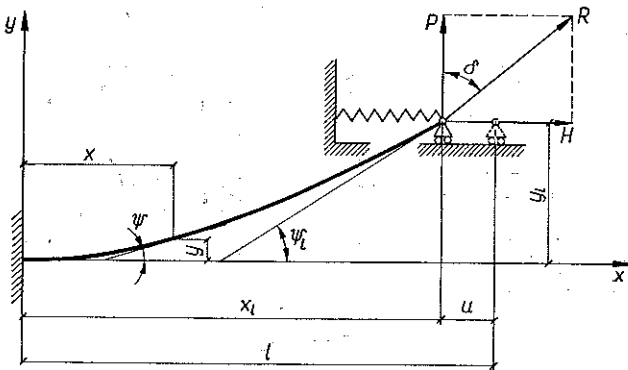


Rys. 1

Metodą kollokacji posłużymy się do obliczenia ugięć belki pokazanej na rys. 1. Belka ta została dość dobrze zbadana przez nas w zakresie sprężystym; w zakresie sprężysto-plastycznym brak jest rozwiązań ścisłych. Przyjęty prosty model belki umożliwi wykonanie doświadczeń weryfikujących proponowaną metodę.

2. Metoda kollokacji jedno- i dwupunktowej

Metoda kollokacji zaproponowana przez R. A. FRAZERA, W. P. JONESA i S. W. SKANA [3] polega na dobraniu funkcji, która przy spełnieniu warunków brzegowych spełniałaby równanie różniczkowe wewnątrz obszaru w skończonej ilości punktów. Będzie to typ kollokacji wewnętrznej (według klasyfikacji podanej przez L. COLLATZA [2]). Można też stosować, zwłaszcza przy rozwiązywaniu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, kollokację brzegową polegającą na przyjęciu funkcji spełniającej równanie wewnątrz obszaru i takim dobraniu wolnych parametrów funkcji kollokowanej, aby były spełnione warunki brzegowe w obranych punktach leżących na brzegu obszaru. Obok wymienionych typów, które nazywamy kollokacją czystą, możemy również stosować kollokację z pochodnymi. W takim przypadku żądamy spełnienia nie tylko równania wyjściowego, ale też zróżniczkowanego równania wyjściowego w pewnych punktach kollokacji (w tych samych lub innych). Na ogół im więcej warunków kollokacji (zgodności kollokacji) będzie spełnionych, tym dokładniej przyjęta funkcja będzie aproksymowała funkcję ścisłą. Charakterystyczną cechą metody jest jej duża prostota i możliwość uzyskania stosunkowo dobrych przybliżeń przy niewielkim nakładzie pracy rachunkowej. Rzeczą zasadniczą jest sprawa doboru funkcji kollokowanej jak również ustalenie punktów kollokacji.



Rys. 2

Zastosowana przez nas kollokacja będzie przykładem bardzo prostej kollokacji wewnątrzno-brzegowej. Przyjmijmy mianowicie linię ugięcia (właściwie rozkład kątów ugięcia) w postaci takiej funkcji, która przy spełnieniu warunków brzegowych spełniałaby równanie krzywizny w środku rozpiętości belki z rys. 1 oraz zróżniczkowane równanie krzywizny nad podporą. W przypadku posługiwania się wspornikiem przedstawionym na rys. 2 (ze względu na symetrię belkę z rys. 1 możemy podzielić na dwa jednakowe wsporniki) będą to warunki przy utwierdzeniu i na końcu wspornika. W dalszym ciągu w przypadku spełnienia pierwszego z wymienionych warunków będziemy mówili o kollokacji jednopunktowej, natomiast o dwupunktowej, gdy będą spełnione obydwa warunki.

Przyjęcie właśnie takich warunków kollokacji, spośród wielu możliwych, posiada wyraźną interpretację fizyczną. Mianowicie w przypadku wystąpienia zakresu sprężystego na całym wsporniku z rys. 2 będą to warunki zgodności momentu utwierdzenia oraz siły poprzecznej na swobodnym końcu.

Zajmować się będziemy teraz szczegółowo belką wspornikową pokazaną na rys. 2. Jako zmienną niezależną $\bar{\xi}$ przyjmijemy tzw. cechę identyczności punktu [15]. Określamy ją przez przypisanie każdemu punktowi osi nieodkształconej belki odpowiedniej odciętej osi liczbowej $\bar{\xi}$. Takie wprowadzenie zmiennej typu Lagrange'a pozwala łatwo odnieść wszystkie obliczenia do belki nieodkształconej i umożliwiło w pracach [19 i 20] wyprowadzenie równań wyjściowych ugięć skończonych dla belek o rozciągliwej osi.

Przyjmijemy w dalszym ciągu dla kąta ugięcia funkcję kollokowaną w następującej postaci:

$$(2.1) \quad \psi(\xi) = A\bar{\psi}(\bar{\xi}),$$

w której dla wygody dalszych rachunków wyłączono przed funkcję $\bar{\psi}$ stałą A wyznaczaną z kollokacji jednopunktowej. W dalszym ciągu stosować będziemy oznaczenia

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= A\bar{\psi}', & \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= A\bar{\psi}'' \\ \frac{d\psi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} &= A\bar{\psi}'_0, & \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} &= A\bar{\psi}''_0, \\ \frac{d\psi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} &= A\bar{\psi}'_1, & \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} &= A\bar{\psi}''_1, \end{aligned}$$

w których kreseczkami oznaczyliśmy różniczkowanie względem bezwymiarowej cechy identyczności

$$(2.3) \quad \xi = \frac{\bar{\xi}}{l}.$$

Taki sposób oznaczania pochodnych i ustalonych punktów (ideksy l i o) będziemy stosowali w dalszym ciągu pracy.

W przypadku wspornika z rys. 2 przyjmijemy następujące warunki brzegowe:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \xi = 0, & \quad \bar{\psi}_0 = 0, \\ \xi = 1, & \quad \bar{\psi}'_1 = 0 \end{aligned}$$

oraz warunek

$$(2.5) \quad \frac{x_1}{l} = 1 - \frac{u}{l},$$

który po wprowadzeniu związku między przemieszczeniem u i reakcją poziomą H będzie warunkiem skrępowanej przesuwności.

Równania różniczkowe linii ugięcia możemy napisać w formie

$$(2.6) \quad x' = s' \cos \psi, \quad y' = s' \sin \psi,$$

w której pochodne s' będą przyjmowały różną postać w zależności od zakresu występującego w rozpatrywanym przedziale ξ (zakres sprężysty, jednostronne lub dwustronne uplastycznienie).

Dalszą analizę ułatwi wprowadzenie bezwymiarowych oznaczeń; wprowadzimy mianowicie: smukłość λ ,

$$(2.7) \quad \lambda = \frac{2l}{i}$$

(i oznacza promień bezwładności odpowiadający zginaniu w ustalonej płaszczyźnie; nie musi on być najmniejszym promieniem bezwładności); stałą materiałową

$$(2.8) \quad a^2 = \frac{Q}{E},$$

bezwymiarowe współczynniki przesuwu

$$(2.9) \quad \tilde{c}_1 = \frac{l}{EF} c_1, \quad \gamma = \frac{\tilde{c}_1}{1 + \tilde{c}_1}$$

oraz bezwymiarowe siły

$$(2.10) \quad \theta = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \chi = \frac{Hl^2}{EI},$$

$$p = \frac{P}{QF}, \quad r = \frac{H}{QF},$$

związane między sobą zależnościami

$$(2.11) \quad \theta = \frac{a^2 \lambda^2}{4} p, \quad \chi = \frac{a^2 \lambda^2}{4} r.$$

Podwójne oznaczenia przyjęto ze względu na rozpatrywanie ugięć sprężystych i sprężysto-plastycznych; oznaczenia takie ułatwią porównanie z wynikami otrzymanymi w cytowanej literaturze.

3. Zakres sprężysty

Zakresem tym zajmiemy się dość dokładnie ze względu na zastosowania inżynierskie oraz na możliwość porównania wyników metody kollokacji z wynikami otrzymanymi na innej drodze w publikacjach przytoczonych we wstępie.

Równania krzywizny i przyrostu długości osi belki zostały wyprowadzone w pracy [19]; toteż przepiszemy je tylko. Mamy mianowicie

$$(3.1) \quad \varphi' = \frac{MI}{EI}, \quad \frac{s'}{l} = 1 + \frac{N}{EF}.$$

Po wprowadzeniu wymienionych w p. 2 bezwymiarowych oznaczeń i przyjęciu założenia 6) o stałości siły podłużnej $N \equiv H$ możemy równania (2.6) napisać w następującej postaci:

$$(3.2) \quad \frac{x'}{l} = \left(1 + \frac{4\chi}{\lambda^2}\right) \cos \psi, \quad \frac{y'}{l} = \left(1 + \frac{4\chi}{\lambda^2}\right) \sin \psi.$$

Potrzebne funkcje $\sin \psi$ i $\cos \psi$ otrzymamy przez podstawienie funkcji (2.1) do szeregu Maclaurina; otrzymamy wtedy

$$(3.3) \quad \sin \psi = A\bar{\psi} - \frac{A^3}{6}\bar{\psi}^3 + \dots, \quad \cos \psi = 1 - \frac{A^2}{2}\bar{\psi}^2 + \dots,$$

dzięki czemu rozwiązanie równań wyjściowych (3.2) możemy zapisać w postaci

$$(3.4) \quad \frac{x}{l} = \left(1 + \frac{4\chi}{\lambda^2}\right) \left(\xi - \frac{A^2}{2}I_{2\xi} + \dots\right), \quad \frac{y}{l} = \left(1 + \frac{4\chi}{\lambda^2}\right) \left(AI_{1\xi} - \frac{A^3}{6}I_{3\xi} + \dots\right),$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(3.5) \quad I_{j\xi} = \int_0^\xi \bar{\psi}^j d\bar{\xi}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Podstawiając do (3.4) $\xi = 1$ otrzymamy współrzędne końca ugiętej belki:

$$(3.6) \quad \frac{x_l}{l} = 1 + \frac{4\chi}{\lambda^2} - \frac{A^2}{2}I_{2l} + \dots, \quad \frac{y_l}{l} = AI_{1l} + \frac{4\chi}{\lambda^2}AI_{1l} + \dots$$

Skorzystamy teraz z warunku skrępowanej przesuwności (2.5). Zachowanie trzech wyrazów szeregu (3.6)₁ oraz wprowadzenie bezwymiarowego współczynnika przesuwu γ według (2.9)₂ pozwala otrzymać następujący przybliżony wzór dla reakcji poziomej:

$$(3.7) \quad \chi = \frac{I_{2l}\gamma}{8}A_\lambda^2.$$

W dalszym ciągu będziemy stosowali skrócone oznaczenia

$$(3.8) \quad A_\lambda = A\lambda, \quad \theta_\lambda = \theta\lambda, \quad a_\lambda = a\lambda \quad \text{itd.}$$

Wrócimy teraz do warunków kollokacji. Pierwszym będzie warunek zgodności krzywizn przy utwierdzeniu wspornika (lub zgodność momentów utwierdzenia), który wobec (3.1)₁ przyjmie postać

$$(3.9) \quad A\bar{\psi}'_0 = \frac{M_u l}{EI}.$$

Po rozpisaniu momentu utwierdzenia M_u i wprowadzeniu bezwymiarowych sił otrzymamy dla wspornika z rys. 2 pierwszy warunek kollokacji

$$(3.10) \quad A\bar{\psi}'_0 = \frac{x_l}{l}\theta - \frac{y_l}{l}\chi.$$

Drugi warunek kollokacji będzie warunkiem zgodności drugiej pochodnej $\bar{\psi}_1''$ funkcji kollokowanej i funkcji ścisłej będącej rozwiązaniem równania wyjściowego ugięć skończonych na swobodnym końcu wspornika. Po wykorzystaniu równania dla ψ'' z pracy [21] otrzymamy warunek

$$(3.11) \quad A\bar{\psi}_1'' = -\zeta \cos(\delta + \psi_1) - \frac{2}{\lambda^2} \zeta^2 \sin 2(\delta + \psi_1),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia bezwymiarowe $\zeta = RI^2/EI$ dla całkowitej reakcji R . Wprowadzenie bezwymiarowych sił (2.10)₁ i pominięcie drugiego wyrazu po prawej stronie (3.11) pozwala napisać drugi warunek kollokacji w uproszczonej postaci

$$(3.12) \quad A\bar{\psi}_1'' \approx -\theta \cos \psi_1 + \chi \sin \psi_1.$$

Tak napisany warunek odpowiada zgodności sił poprzecznych na swobodnym końcu wspornika i można go otrzymać wprost z rys. 2 przez rzutowanie bezwymiarowych sił na kierunek normalnej do odkształconej osi belki nad podporą przegubową (na swobodnym końcu).

Zachowanie pierwszych wyrazów w szeregach (3.6) i (3.3) pozwala napisać kolejno pierwszy i drugi warunek kollokacji w następującej, uproszczonej postaci:

$$(3.13) \quad \frac{I_{11} I_{21}}{8} \gamma A_\lambda^3 + \bar{\psi}'_0 A_\lambda = \theta_\lambda,$$

$$(3.14) \quad \frac{I_{21} \bar{\psi}_1}{8} \gamma A_\lambda^3 - \bar{\psi}_1'' A_\lambda = \theta_\lambda.$$

Podany układ równań jest podstawą do stosowania metody kollokacji; w przypadku kollokacji jednopunktowej żądamy, aby funkcja kollokowana ψ spełniała równanie (3.13), a w przypadku dwupunktowej kollokacji muszą być spełnione obydwa równania.

Wrócimy teraz do sprawy ustalenia funkcji ψ . Dwa warunki brzegowe (2.4) oraz dwa warunki kollokacji (3.13) i (3.14) pozwalają na dobór funkcji kollokowanej z czterema wolnymi parametrami, które można w sposób jednoznaczny wyznaczyć z przytoczonych warunków. Oczywiście, przyjęcie większej ilości warunków kollokacji podniosłoby dokładność wyników, lecz z drugiej strony znacznie utrudnia obliczenia.

Spośród wielu dobieranych funkcji $\bar{\psi}$ szczególnie dobre wyniki daje funkcja

$$(3.15) \quad \bar{\psi} = \frac{\xi + C\xi^2}{1 - B + B\xi}.$$

Tak przyjęta funkcja spełnia pierwszy warunek brzegowy (2.4)₁, natomiast z drugiego wynika

$$(3.16) \quad C = -\frac{1 - B}{2 - B}.$$

Funkcja (3.15) przy $B = 0$ przyjmuje postać paraboli znanej z teorii małych ugięć, natomiast przy $B = 1$ funkcja $\bar{\psi}$ przyjmuje wartość stałą odpowiadającą przejściu

belki w ciągnio. Stałe A i B występujące w funkcji $\psi = A\bar{\psi}$ wyznaczmy z warunków kollokacji (3.13) i (3.14). Wszystkie potrzebne wartości pochodnych oraz całek I_{1l} i I_{2l} przedstawimy jako funkcje stałej B ; otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_l &= 1 + C = \frac{1}{2 - B}, & \bar{\psi}'_0 &= \frac{1}{1 - B}, \\
 \bar{\psi}''_l &= 2C = -2\frac{1 - B}{2 - B}, \\
 I_{1l} &= \frac{1}{2B^3(2 - B)} \left[B(2 - B + B^2) - 2(1 - B) \ln \frac{1}{1 - B} \right], \\
 I_{2l} &= \frac{1}{3B^5(2 - B)^2} \left[B(12 - 18B + 10B^2 - 2B^3 + B^4) - \right. \\
 &\quad \left. - 6(1 - B)(2 - 2B + B^2) \ln \frac{1}{1 - B} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Dla ułatwienia obliczeń numerycznych w tabelicy 1 zestawiono wyżej wymienione wartości wyliczone dla różnych B .

Tabelica 1

B	C_l	$\bar{\psi}_l$	$\bar{\psi}'_0$	$\bar{\psi}''_l$	I_{1l}	I_{2l}
0,000	-0,5000	0,5000	1,0000	-1,0000	0,3333	0,1333
0,025	-0,4937	0,5063	1,0253	-0,9873	0,3386	0,1373
0,050	-0,4872	0,5128	1,0513	-0,9744	0,3441	0,1416
0,100	-0,4737	0,5263	1,1111	-0,9474	0,3556	0,1507
0,200	-0,4444	0,5556	1,2500	-0,8889	0,3809	0,1716
0,300	-0,4118	0,5882	1,4286	-0,8236	0,4102	0,1974
0,400	-0,3750	0,6250	1,6667	-0,7500	0,4444	0,2294
0,500	-0,3333	0,6667	2,0000	-0,6667	0,4849	0,2700
0,600	-0,2857	0,7142	2,5000	-0,5714	0,5340	0,3228
0,700	-0,2308	0,7692	3,3333	-0,4616	0,5950	0,3939
0,800	-0,1667	0,8333	5,0000	-0,3333	0,6740	0,4944
0,900	-0,0909	0,9091	10,0000	-0,1818	0,7847	0,6498
0,950	-0,04762	0,9524	20,0000	-0,09524	0,8638	0,7707
0,990	-0,009901	0,9901	100,0000	-0,01980	0,9582	0,9259
1,000	0	1	∞	0	1	1

3.1. Kollokacja dwupunktowa. Rozwikłanie układu równań (3.13) i (3.14) ze względu na stałe A_λ i B jest niemożliwe (stała występuje w całkach I_{1l} i I_{2l} pod logarytmem), toteż zastosujemy metodę odwrotną. Wyeliminujemy mianowicie z układu (3.13) i (3.14) siłę bezwymiarową θ_λ i otrzymamy związek wiążący obydwie stałe A_λ i B w następującej postaci:

$$A_\lambda = \sqrt{\frac{8(\bar{\psi}'_0 + \bar{\psi}'_l)}{I_{2l}\gamma(\bar{\psi}_l - I_{1l})}}.
 \tag{3.18}$$

Po podstawieniu funkcji (3.18) do (3.7) otrzymamy przybliżony wzór dla reakcji poziomej jako funkcji stałej B :

$$(3.19) \quad \chi = \frac{\bar{\psi}'_0 + \bar{\psi}'_l}{\bar{\psi}_l - I_{II}}$$

Siłę obciążającą wyliczymy z równania (3.13); otrzymamy

$$(3.20) \quad \theta_\lambda = \left(\frac{\bar{\psi}'_0 + \bar{\psi}'_l}{\bar{\psi}_l - I_{II}} I_{II} + \bar{\psi}_0 \right) A_\lambda = (\chi I_{II} + \bar{\psi}'_0) A_\lambda.$$

Zachowanie pierwszego wyrazu szeregu (3.6)₁ pozwala otrzymać przybliżony wzór dla bezwymiarowej strzałki ugięcia

$$(3.21) \quad \frac{y_l}{l} \lambda \equiv f_\lambda = I_{II} A_\lambda.$$

Metoda odwrotna będzie polegała na ustaleniu stałej B , obliczeniu wielkości A_λ i reakcji χ ze wzorów (3.18) i (3.19), a następnie siły obciążającej θ_λ i strzałki ugięcia f_λ . Otrzymamy więc kolejne punkty wykresów, które przy dostatecznie małych odstępach B pozwalają na dość dokładne odczytanie wielkości χ i f_λ przy danym obciążeniu θ_λ .

W tabelicy 2 przytoczono wyniki obliczeń wykonanych dla belki opartej na podporach doskonale nieprzesuwnych, tj. dla $\gamma = 1$.

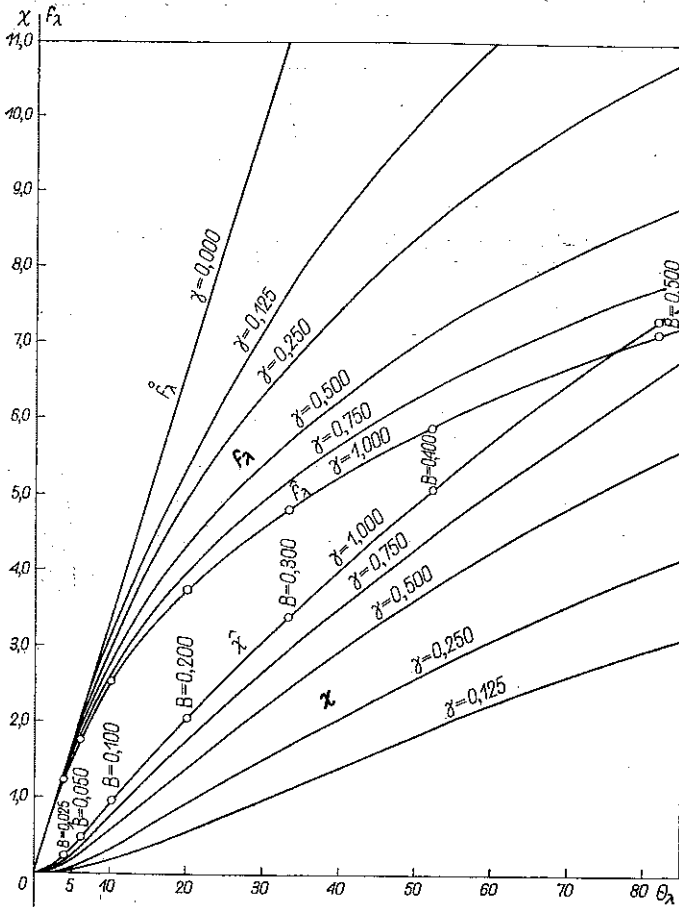
Tablica 2

B	\hat{A}_λ	χ	$\hat{\theta}_\lambda$	\hat{f}_λ
0,000	0	0	0	0
0,025	3,634	0,2266	4,004	1,230
0,050	5,075	0,4558	6,131	1,746
0,100	7,135	0,9590	10,361	2,537
0,200	9,818	2,068	20,004	3,740
0,300	11,735	3,390	33,130	4,814
0,400	13,305	5,076	52,186	5,913
0,500	14,741	7,334	81,905	7,148

W dalszym ciągu nad wielkościami odnoszącymi się do belki z nieprzesuwными podporami dano znaczek \wedge , natomiast przy podporach idealnie przesuwnych znaczek \circ .

Na wykresach naniesionych na rys. 3 obok krzywych $\hat{\chi}$ i \hat{f}_λ podano również krzywe odpowiadające innym współczynnikom przesuwu γ . Poszczególne punkty tych krzywych można otrzymać łatwo przez pomnożenie wartości \hat{A}_λ , $\hat{\theta}_\lambda$ i \hat{f}_λ z tabelicy 2 przez $\gamma^{-1/2}$ zgodnie ze wzorami (3.18), (3.20) i (3.21).

Tak otrzymane rozwiązanie obejmuje znacznie szerszy zakres obciążenia θ_λ niż przy metodzie małego parametru, gdyż w pracach [21 i 22] przybliżone wzory odnosiły się do $\theta_\lambda \leq 8,61$. Znaczne rozszerzenie zakresu (wykaże to przykład liczbowy, który podamy dalej) ma duże znaczenie szczególnie przy elementach wiotkich o dużej smukłości np. przy płytach walcowo zginanych.



Rys. 3

3.2. Kollokacja jednopunktowa. Metoda odwrotna, pozwalająca otrzymać rozwiązanie na drodze kolejnych przybliżeń, jest dość żmudna. Dla praktycznych obliczeń o wiele wygodniejszym jest zastosowanie kollokacji jednopunktowej. Polegać ona będzie na ustaleniu stałej B , a więc pochodnych i całek (3.17), a następnie na wyznaczeniu stałej A_λ z równania (3.13)₁ (jest to warunek kollokacji jednopunktowej).

Równanie (3.13)₁ jest równaniem stopnia trzeciego posiadającym jeden pierwiastek rzeczywisty. Pierwiastek ten można łatwo obliczyć na podstawie wzoru Cardano; otrzymamy mianowicie

$$(3.22) \quad A_\lambda = \sqrt[3]{\frac{4\theta_\lambda}{I_{11}I_{22}\gamma}} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27} \frac{\psi_0^{-7/3}}{\theta_\lambda^2 I_{11}I_{22}\gamma}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{32}{27} \frac{\psi_0^{-7/3}}{\theta_\lambda^2 I_{11}I_{22}\gamma}}} \right),$$

bądź stosując poręczniejszą w użyciu metodę kolejnych przybliżeń lub też posługując się gotowymi tablicami (np. [14]).

Znając A_λ , odpowiadające danemu obciążeniu θ_λ , możemy bez trudu obliczyć reakcję poziomą χ z (3.7) oraz strzałkę ugięcia f_λ z (3.21).

Tak otrzymane rozwiązanie będzie tym dokładniejsze, im lepiej dobierzemy wartość stałej B . W obliczeniach będziemy dobierali B na podstawie rys. 3, w zależności od wielkości siły obciążającej θ_λ . Obliczenia numeryczne wykazują przy tym, że nawet dobierając dosyć odległe wartości B [pomimo niespełnienia drugiego warunku kollokacji (3.14)] popełniamy niewielkie błędy. Ten niewielki wpływ metody na dobór stałej B stanowi dość dużą jej zaletę, szczególnie dalej przy badaniu ugięć sprężysto-plastycznych.

3.3. Przykład liczbowy. Zastosujemy metodę kollokacji do wyznaczenia reakcji poziomej i strzałki ugięcia dla belki o schemacie jak na rys. 1. Przyjmijmy, że belka jest prostokątna o wymiarach przekroju poprzecznego 7×8 cm, wykonana ze stali o module Younga $E = 2,1 \times 10^6$ kG/cm. Belka posiada długość $2l = 200$ cm, jest obciążona siłą $2P = 20\,000$ kG i oparta jest na przegubowych, nieprzesuwnych podporach.

Dla podanego przekroju obliczamy

$$F = 28 \text{ cm}^2, \quad I = \frac{7^3 \times 4}{12} = 114,3 \text{ cm}^4, \quad i = 2,02 \text{ cm},$$

skąd smukłość belki będzie równa $\lambda = \frac{200}{2,02} = 99$.

Bezwymiarowej sile

$$\theta_\lambda = \frac{10\,000}{2,1 \times 10^6 \times 114,3} \cdot 99 = 41,244$$

będą odpowiadały wartości

$$\begin{aligned} B &= 0,3475, & C &= -0,3949, & \bar{\psi}_l'' &= -0,7897, \\ & & \bar{\psi}_l &= 0,6051, & I_{1l} &= 0,4257, \\ \hat{A}_\lambda &= 12,517, & \bar{\psi}_0' &= 1,5326, & I_{2l} &= 0,2114, \end{aligned}$$

znalezione na drodze kolejnych przybliżeń na podstawie podanej metody kollokacji dwupunktowej. Z równań (3.19) i (3.21) obliczono poszukiwane wartości reakcji poziomej i strzałki ugięcia

$$\hat{\chi} = \frac{1,5326 - 0,7897}{0,6051 - 0,4257} = 4,1401, \quad \hat{H} = \frac{4,1401 \times 2,1 \times 10^6 \times 114,3}{100^2} = 99372 \text{ kG},$$

$$f_\lambda = 0,4257 \times 12,517 = 5,3286, \quad \hat{f} = \frac{\hat{y}_l}{l} = \frac{5,3286}{99} = 0,05386.$$

Otrzymane wyniki możemy porównać z wynikami otrzymanymi w pracy [19] dla tej samej belki na podstawie ścisłego rozwiązania równań ugięć skończonych.

Otrzymano tam $\hat{H} = 97508$ kG, $\hat{f} = 0,05337$ tak, że różnice w porównaniu z metodą kollokacji będą wynosiły

$$\Delta\hat{\chi} = \frac{99\,372 - 97\,508}{97\,508} \cdot 100\% = 1,91\%$$

$$\Delta\hat{f} = \frac{0,05382 - 0,05337}{0,05337} \cdot 100\% = 0,84\%$$

Dla porównania w tablicy 3 podano wyniki obliczeń wykonanych metodą kollokacji jednopunktowej dla różnych wartości B ; obok podano procentowe różnice w stosunku do metody kollokacji dwupunktowej. Z tablicy widać, że przyjęcie

Tablica 3

$\theta_\lambda = 41,244$					
B	\hat{A}_λ	$\hat{\chi}$		\hat{f}_λ	
0,000	16,461	4,515	9,06	5,487	2,97
0,025	16,187	4,497	8,62	5,481	2,85
0,050	15,908	4,479	8,19	5,474	2,72
0,100	15,343	4,434	7,10	5,456	2,38
0,200	14,216	4,335	4,71	5,415	1,61
0,300	13,066	4,218	1,74	5,360	0,58
0,3475	12,517	4,140	0,00	5,329	0,00
0,400	11,891	4,054	-2,08	5,284	-0,84
0,500	10,673	3,845	-7,13	5,175	-2,89

różnego kształtu linii ugięcia nie ma dużego wpływu na wielkość reakcji i strzałki ugięcia; w porównaniu np. z parabolą znaną z teorii małych ugięć ($B = 0,000$) odpowiednie różnice będą wynosiły: $\Delta\hat{\chi} = 9,06\%$, $\Delta\hat{f} = 2,97\%$.

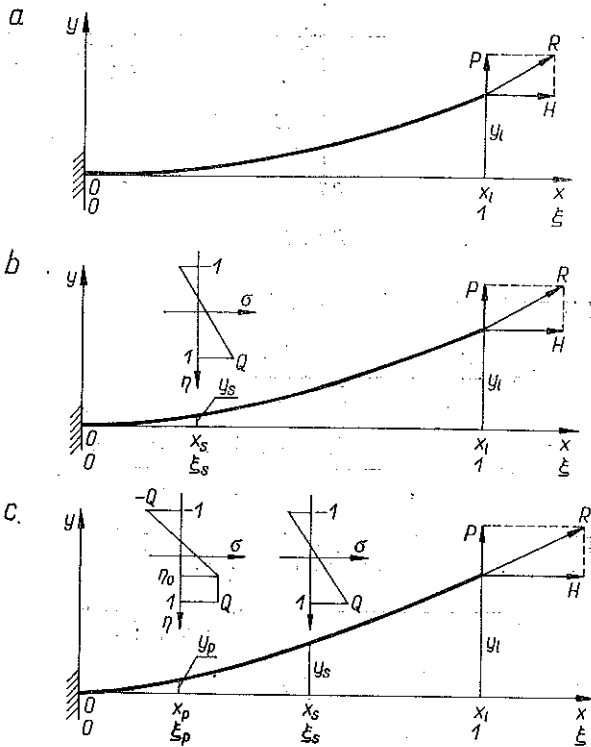
4. Zakres sprężysto-plastyczny

W przypadku gdy materiał belki jest sprężysto-plastyczny, stopniowemu zwiększeniu obciążenia towarzyszy pojawienie i rozwijanie się obszarów z różnymi typami rozkładu naprężeń; widać to dokładnie na rys. 4. Powiększaniu się obciążenia towarzyszy powstanie obszarów sprężystych, jednostronnego i dwustronnego uplastycznienia, przy czym punkty ξ_s i ξ_p rozgraniczające poszczególne obszary przesuwają się od utwierdzenia w kierunku wolnego końca wspornika z rys. 4.

Podstawową trudnością przy obliczaniu ugięć sprężysto-plastycznych jest konieczność «zszywania» obszarów z różnymi typami rozkładu naprężeń. Zadanie staje się trudne już w najprostszym, prostokątnym przekroju z powodu skomplikowanych równań dla poszczególnych obszarów (w przypadku rozpatrywania ugięć skończonych odpowiednie równania mają skomplikowaną przestępną postać nie dającą się rozwikłać ze względu na potrzebne parametry, por. [20]).

Metoda kollokacji pozwala ominąć trudności «zszywania» dzięki przyjęciu jednej funkcji opisującej linię ugięcia, funkcji obowiązującej dla wszystkich obszarów.

Zażądamy przy tym, aby funkcja kolokowana spełniała warunki brzegowe i warunki kolokacji z różnych rozkładów naprężeń. Pierwszy warunek kolokacji będzie żądaniem spełnienia równania krzywizny w punkcie $\xi = 0$ tego rozkładu naprężeń, jaki występuje przy utwierdzeniu wspornika z rys. 4. Natomiast drugi warunek kolokacji utworzony dla końca wspornika będzie warunkiem zgodności siły poprzecznej, czyli pochodnej krzywizny odpowiadającej rozkładowi sprężystemu, gdyż przy belce z rys. 4 właśnie taki rozkład będzie się stale pojawiał. Podobny problem wystąpi w warunkach brzegowych.



Rys. 4

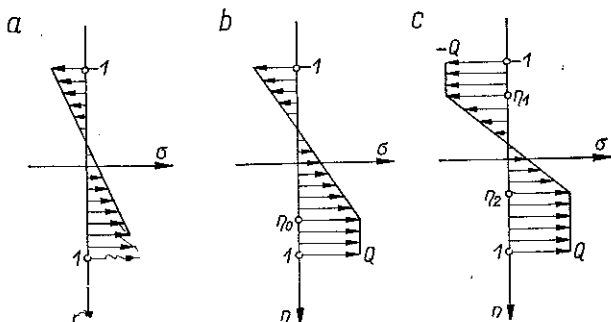
Zajmować się będziemy w dalszym ciągu belką prostokątną i skorzystam y z równań wyprowadzonych w pracy [20] dla zakresu sprężysto-plastycznego. Podamy jedynie równania odnoszące się do przypadku, gdy moment gnący $M > 0$ i siła podłużna $N > 0$. Dla ułatwienia dalszych rozważań będziemy posługiwali się bezwymiarowymi oznaczeniami, analogicznymi do (2.10)₂,

$$(4.1) \quad n = \frac{N}{QF}, \quad m = \frac{M}{WQ},$$

gdzie W oznacza wskaźnik wytrzymałości; bezwymiarowe siły przyjmują wartość 1 z chwilą pojawienia się pierwszych odkształceń plastycznych. W przypadku jed-

nostronnego uplastycznienia (rys. 5b) będą miały miejsce następujące związki: dla współrzędnej η_0

$$(4.2) \quad \eta_0 = 2 - \frac{m}{1-n};$$



Rys. 5

dla krzywizny i przyrostu długości osi belki

$$(4.3) \quad \varphi' = \frac{2a^2 \lambda}{\sqrt{3}} \frac{(1-n)^3}{(3-3n-m)^2},$$

$$\frac{s'}{l} = 1 + a^2 \left[1 - \frac{4(1-n)^2(2-n-m)}{(3-3n-m)^2} \right].$$

Podobnie jak w pracy [20] przepiszemy związki dla współrzędnych η_1 i η_2 odpowiadające dwustronnemu uplastycznieniu (rys. 5c):

$$(4.4) \quad \eta_1 = -n - \sqrt{3 - 3n^2 - 2m}, \quad \eta_2 = -n + \sqrt{3 - 3n^2 - 2m}$$

oraz równania krzywizny φ' i pochodnej s'

$$(4.5) \quad \varphi' = \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3 - 3n^2 - 2m}},$$

$$\frac{s'}{l} = 1 + \frac{a^2 n}{\sqrt{3 - 3n^2 - 2m}}.$$

Wróćmy teraz do belki z rys. 4c. W przypadku wystąpienia wszystkich trzech typów rozkładu naprężeń współrzędne końca ugiętej belki możemy określić za pomocą równań wynikających z (2.6):

$$(4.6) \quad x_l = \int_0^{\xi_p} s' \cos \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} s' \cos \psi d\xi + \int_{\xi_s}^1 s' \cos \psi d\xi,$$

$$y_l = \int_0^{\xi_p} s' \sin \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} s' \sin \psi d\xi + \int_{\xi_s}^1 s' \sin \psi d\xi.$$

Zamiast pochodnych s' podstawimy związki wynikające z równań (4.5), (4.3) i (3.1):

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{s'}{l} &= 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} r\psi', & 0 \leq \psi \leq \psi_p, \\ \frac{s'}{l} &= 1 + a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} \psi' - 2a \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\lambda} (1-r)\psi'}, & \psi_p \leq \psi \leq \psi_s, \\ \frac{s'}{l} &= 1 + a^2 r, & \psi_s \leq \psi \leq \psi_l, \end{aligned}$$

przy czym uwzględniono założenie o stałej sile podłużnej $n = r = \text{const}$.

Punkt rozgraniczający jednostronne i dwustronne uplastycznienie znajdziemy z warunku $\eta_1 = -1$. Przyjęcie założenia stałej siły podłużnej oraz napisanie momentu gnącego w dowolnym punkcie belki w postaci

$$(4.8) \quad m = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[p\lambda \left(\frac{x_l}{l} - \frac{x}{l} \right) - r\lambda \left(\frac{y_l}{l} - \frac{y}{l} \right) \right]$$

pozwala przedstawić (4.4)₁ jako równanie dla wyznaczenia punktu ξ_p

$$(4.9) \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} (1+r-2r^2) + p\lambda \frac{x_l}{l} - r\lambda \frac{y_l}{l} = p\lambda \int_0^{\xi_p} s' \cos \psi d\xi - r\lambda \int_0^{\xi_p} s' \sin \psi d\xi,$$

w którym zamiast x_l , y_l i s' należy wstawić odpowiednio (4.6) i (4.7)₁.

Punkt rozgraniczający jednostronne uplastycznienie od strefy sprężystej znajdziemy z warunku $\eta_0 = 1$. Po podstawieniu (4.8) do (4.2) otrzymamy równanie dla wyznaczenia ξ_s :

$$(4.10) \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} (1-r) + p\lambda \frac{x_l}{l} - r\lambda \frac{y_l}{l} = \\ = p\lambda \left(\int_0^{\xi_p} s' \cos \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} s' \cos \psi d\xi \right) - r\lambda \left(\int_0^{\xi_p} s' \sin \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} s' \sin \psi d\xi \right).$$

W dalszym ciągu zastosujemy kollokację jednopunktową. W przypadku wystąpienia uplastycznienia obustronnego w punkcie $\xi = 0$ (przy utwierdzeniu wspornika z rys. 4) pierwszy warunek kollokacji po przyjęciu funkcji kollokowanej (2.1) możemy napisać zgodnie z (4.5)₁:

$$(4.11) \quad A\bar{\psi}'_0 = \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} \left[3 - 3r^2 - \sqrt{3} \left(p\lambda \frac{x_l}{l} - r\lambda \frac{y_l}{l} \right) \right]^{-1/2},$$

a w przypadku wystąpienia jednostronnego uplastycznienia zgodnie z (4.3)₁:

$$(4.12) \quad A\bar{\psi}'_0 = \frac{2a^2 \lambda}{\sqrt{3}} \frac{(1-r)^3}{\left[3(1-r) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(p\lambda \frac{x_l}{l} - r\lambda \frac{y_l}{l} \right) \right]^2}.$$

Dla otrzymania kompletu równań rozwiązujących zagadnienia dołączymy jeszcze warunek skrępowanej przesuwności (2.5) w postaci bezwymiarowej:

$$(4.13) \quad \frac{x_l}{l} = 1 - \frac{a^2}{\bar{c}_1} r,$$

gdzie przyjęto bezwymiarowy współczynnik przesuwności (2.9)₁.

Otrzymany układ czterech równań (4.9), (4.10), (4.11) lub (4.12) oraz (4.13) pozwala obliczyć wartości ξ_p , ξ_s , A_λ i r . W praktyce stosować będziemy metodę kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu zachowamy tylko 1 w pochodnych (4.7) przy wyznaczaniu ξ_p i ξ_s z równań (4.9) i (4.10) oraz w warunku kollokacji (4.11), natomiast pełne wyrażenia dla s' w warunku skrępowanej przesuwności (4.13). Dalszym ułatwieniem będzie zachowanie tylko pierwszych wyrazów szeregu Maclaurina dla $\sin \psi$ i $\cos \psi$, dzięki czemu możemy napisać współrzędne ugiętej belki w przybliżonej postaci.

$$(4.14) \quad \frac{x}{l} = \xi, \quad \frac{y}{l} = I_{1\xi} A.$$

Podane uproszczenia pozwalają przedstawić wymienione wcześniej równania w uproszczonej postaci a mianowicie kolejno: warunek kollokacji jednopunktowej, równanie dla wyznaczenia ξ_p , równanie dla wyznaczenia ξ_s oraz warunek skrępowanej przesuwności:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} A_\lambda \bar{\psi}'_0 &= \frac{a_\lambda^2}{2\sqrt{3}} [3 - 3r^2 - \sqrt{3} (p_\lambda - r I_{11} A_\lambda)]^{-1/2}, \\ (1-r)^2 - \frac{a_\lambda^4}{12\bar{\psi}'_0{}^2 A_\lambda^2} &= \sqrt{3} (p_\lambda \xi_p - r A_\lambda I_{1\xi_p}), \\ (1+2r-3r^2) - \frac{a_\lambda^4}{12\bar{\psi}'_0{}^2 A_\lambda^2} &= \sqrt{3} (p_\lambda \xi_s - r A_\lambda I_{1\xi_s}), \\ \frac{I_{21}}{2} A_\lambda^2 - 2\sqrt{3} [\bar{\psi}_s - (1-r) \bar{\psi}_p] A_\lambda + 2a_\lambda \sqrt{2\sqrt{3}(1-r) A_\lambda (K_{\xi_s} - K_{\xi_p})} - \\ &- a_\lambda^2 [r - \xi_p + (1-r) \xi_s] - \frac{a_\lambda^2}{\bar{c}_1} r = 0, \end{aligned}$$

gdzie dodatkowo przyjęto oznaczenie

$$(4.16) \quad K_\xi = \int_0^\xi \sqrt{\bar{\psi}'} d\bar{\xi}$$

oraz wprowadzono oznaczenia (3.9). Oznaczenia pozostałych całek i pochodnych podano w (3.6) i (2.2). Przy rozwiązywaniu układu równań zastosowano następujący tok postępowania: po przyjęciu pewnej funkcji $\bar{\psi}$ obieramy w równaniu (4.15)₁ pewną wartość reakcji r , wyliczamy stąd stałą A_λ , następnie kolejno z równań (4.15)₂ i (4.15)₃ wyliczamy współrzędne ξ_p i ξ_s ; poprawność otrzymanych wartości sprawdzamy za pomocą równania (4.15)₄.

Podaliśmy przybliżone rozwiązanie dla przypadku wystąpienia dwustronnego uplastycznienia; przy braku tego obszaru bez kłopotu możemy zawęzić układ

(4.15) przez przyjęcie warunku kollokacji (4.12) (w przypadku wystąpienia jednostronnego uplastycznienia) i przyjęciu $\xi_p = 0$.

Otrzymane rozwiązanie można traktować jako praktycznie zupełnie wystarczające pierwsze przybliżenie. W następnych przybliżeniach możemy wprowadzić pełne nieliniowe równania linii ugięcia zamiast przybliżonych związków (4.14).

Podaliśmy rozwiązanie metodą kollokacji jednopunktowej. W przypadku zastosowania kollokacji dwupunktowej należałoby dodatkowo spełnić równanie (3.14) będące warunkiem zgodności sił poprzecznych na swobodnym końcu wspornika (lub nad podporą belki z rys. 1). Warunek ten przy ustalonym obciążeniu p można spełnić (podobnie jak w zakresie sprężystym) przez właściwy dobór parametrów funkcji kollokowanej ψ . Na przeszkodzie stoją tutaj jedynie bardzo żmudne rachunki, gdyż wobec skomplikowanej postaci całek $I_{j\xi}$ i K_ξ (często przestępnej ze względu na poszukiwany parametr) stosować możemy tylko metodę kolejnych przybliżeń.

4.1. Przykład liczbowy. Wyznamy reakcję poziomą oraz ugięcie i rozkład naprężeń w belce z przykładu rozpatrzonego w p. 3.1. Przyjmijmy przy tym, że belka stalowa posiada granicę plastyczności $Q = 2100 \text{ kG/cm}^2$, a więc stała materiałowa będzie wynosiła

$$a^2 = \frac{Q}{E} = \frac{1}{1000}, \quad a = 0,03162, \quad a_\lambda = a\lambda = 0,03162 \times 99 = 3,130.$$

Przyjmijmy, że belka jest obciążona siłą

$$p_\lambda = \sqrt{3}, \quad P = \frac{p_\lambda Q F}{\lambda} = \frac{\sqrt{3} \times 2100 \times 28}{99} = 1029 \text{ kG}.$$

Taka siła w przypadku belki opartej na podporach idealnie przesuwnych jest nośnością graniczną ustroju, gdyż powoduje powstanie przegubu plastycznego zamieniającego belkę w mechanizm.

Do dalszych obliczeń przyjmijmy funkcję

$$(4.17) \quad \bar{\psi} = \xi - \frac{\xi^2}{2},$$

dla której potrzebne całki i pochodne przyjmą wartości

$$(4.18) \quad \begin{aligned} I_{1\xi} &= \int_0^\xi \bar{\psi} d\xi = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}, & I_{1l} &= \frac{1}{3}, \\ I_{2\xi} &= \int_0^\xi \bar{\psi}^2 d\xi = \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^5}{20}, & I_{2l} &= \frac{2}{15}, \\ K_\xi &= \int_0^\xi \sqrt{\bar{\psi}'} d\xi = \frac{2}{3} [1 - (1 - \xi)^{3/2}], \\ \bar{\psi}' &= 1 - \xi, & \bar{\psi}'_0 &= 1. \end{aligned}$$

Podstawienie wymienionych wartości do (4.15) daje układ równań

$$\begin{aligned} 0,5774 \hat{r} \hat{A}_\lambda^3 - 3 \hat{r}^2 \hat{A}_\lambda^2 &= 8,0052, \\ (1 - \hat{r})^2 - \frac{8,0052}{\hat{A}_\lambda^2} &= 3\xi_p - 0,6231 \left(\xi_p^2 - \frac{\xi_p^3}{3} \right), \\ (1 + 2\hat{r} - 3\hat{r}^2) - \frac{8,0052}{\hat{A}_\lambda^2} &= 3\xi_s - 0,6231 \left(\xi_s^3 - \frac{\xi_s^3}{3} \right), \\ \frac{\hat{A}_\lambda^2}{15} - 2\sqrt{3} \hat{A}_\lambda \left[\xi_s - \frac{\xi_s^2}{2} - (1 - \hat{r}) \left(\xi_p - \frac{\xi_p^2}{2} \right) \right] &+ 4,173 \sqrt{2\sqrt{3}(1 - \hat{r})} \hat{A}_\lambda \times \\ &\times [(1 - \xi_p)^{3/2} - (1 - \xi_s)^{3/2}] - 9,7969 [\hat{r} - \xi_p + (1 - \hat{r}) \xi_s] = 0, \end{aligned}$$

z którego drogą kolejnych przybliżeń obliczono następujące wielkości:

$$\hat{r} = 0,1414, \quad \hat{A}_\lambda = 4,870, \quad \xi_p = 0,1369, \quad \xi_s = 0,3134.$$

Tak więc reakcja pozioma będzie wynosiła

$$\hat{H} = \hat{r} QF = 0,1414 \times 2100 \times 28 = 8322 \text{ kG}.$$

Strzałkę ugięcia obliczymy za pomocą wzoru (3.22):

$$\hat{f}_\lambda = I_{II} \hat{A}_\lambda = \frac{4,870}{3} = 1,623, \quad \frac{\hat{y}_l}{l} = \frac{\hat{f}_\lambda}{\lambda} = \frac{1,623}{99} = 0,01639.$$

Dla porównania wyliczymy strzałkę ugięcia przy obciążeniu niszczącym dla belki opartej na podporach idealnie przesuwnych. Znany z teorii małych ugięć wzór przy zastosowaniu wprowadzonych oznaczeń można napisać w postaci

$$(4.19) \quad \mathring{f}_\lambda = \frac{10}{27\sqrt{3}} a_\lambda^2.$$

W przypadku naszej belki

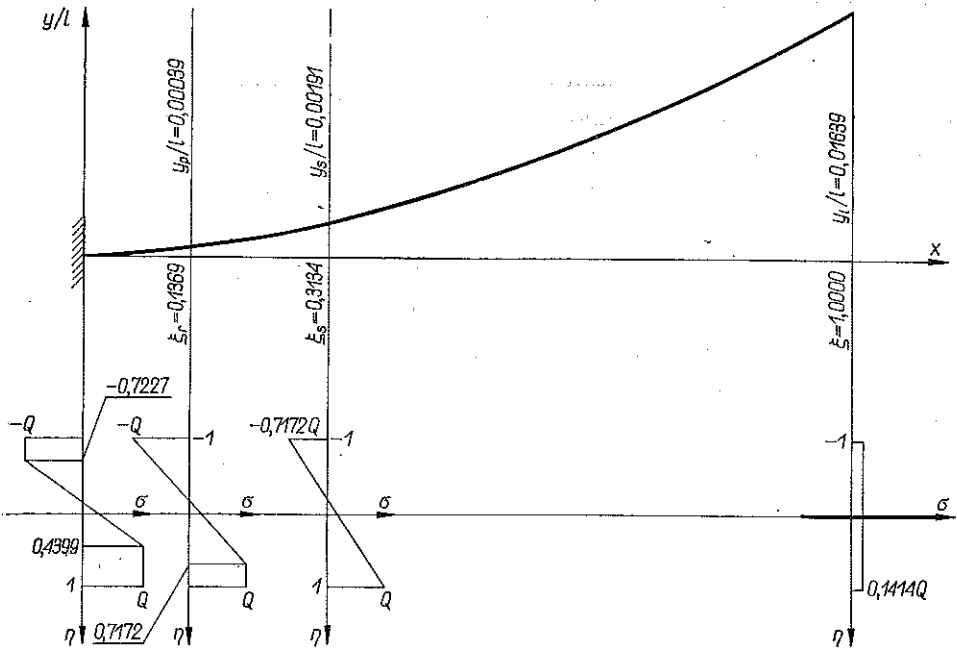
$$\mathring{f}_\lambda = \frac{10}{27\sqrt{3}} 3,1302^2 = 2,095$$

i procentowa różnica ugięć będzie wynosiła

$$\Delta f = \frac{\mathring{f}_\lambda - \hat{f}_\lambda}{\hat{f}_\lambda} \cdot 100\% = \frac{2,095 - 1,623}{1,623} \cdot 100\% = 29,09\%.$$

Na koniec na rys. 6 podano wielkości ugięć oraz rozkłady naprężeń w charakterystycznych punktach, obliczone za pomocą równań (4.4) i (4.2).

W przykładzie posłużyliśmy się wielomianem drugiego stopnia (4.17) jako funkcją kollokowaną. Takie przybliżenie daje dobre rezultaty szczególnie przy niewielkich siłach (w naszym przykładzie $\theta_\lambda = pa_\lambda^2/4 = 4,330$, gdyż jak wykazaliśmy w zakresie sprężystym ostateczne wyniki niewiele się różnią przy różnych przyjętych kształtach linii ugięcia.



Rys. 6

5. Zakończenie

W podanej przez nas metodzie kollokacji przyjęcie *a priori* linii ugięcia pozwoliło otrzymać przybliżone rozwiązanie zagadnienia nie tylko w zakresie sprężystym, ale też w zakresie sprężysto-plastycznym. Zalety metody są najbardziej widoczne w tym ostatnim zakresie, gdyż pozwalają pokonać wielkie trudności «zszycia» poszczególnych obszarów.

Podaliśmy rozwiązanie dla ugięć sprężysto-plastycznych belki prostokątnej wykonanej z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Wprowadzenie pewnych uproszczeń pozwala na zastosowanie metody do obliczenia ugięć belek o innych przekrojach, wykazujących wzmocnienie liniowe. Metoda kollokacji pozwala również na ocenę nośności belek ze skrępowaną przesuwnością podpór.

W pracy rozpatrzyliśmy belkę opartą przegubowo i obciążoną siłą skupioną. Odpowiedni dobór funkcji kollokowanej pozwala na obliczanie innych typów belek; merytoryczna strona metody nie ulegnie przy tym zmianie.

Dodatkowym problemem jest możliwość weryfikacji otrzymanych rozwiązań. W zakresie sprężystym istnieje bogata literatura i możemy wyniki porównać zarówno ze ścisłymi jak i przybliżonymi rozwiązaniami. Natomiast w zakresie sprężysto-plastycznym z powodu trudności rachunkowych brak jest takich rozwiązań, toteż poprawność otrzymanych rozwiązań powinno się sprawdzić przede wszystkim na drodze doświadczalnej.

Wyżej podane problemy jak również weryfikacja doświadczalna będą potraktowane oddzielnie.

Na zakończenie warto powiedzieć o możliwościach połączenia metody kolokacji z innymi metodami przybliżonymi, np. z metodą przekrojów wielopunktowych zaproponowaną przez J. ORKISZA [11] oraz J. ORKISZA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [12]. Metoda, polegająca na zastąpieniu właściwego przekroju układem zastępczym powierzchni, pozwala stosunkowo łatwo pokonać trudności wynikające z uwzględnienia wzmocnienia czy też różnego kształtu przekroju przy obliczaniu ugięć sprężysto-plastycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. И. Г. Бубнов, *Труды по теории пластин*, Госиздат Техничко-Теорет. Лит., Москва 1953.
2. L. GOLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer (tłum. Polskie PWN, W-w 1960), Berlin-Göttingen-Hedelber, 1958.
3. R. A. FRAZER, W. P. JONES, S. W. SKAN, *Aproximations to functions and to the solutions of differential equations*, Report and Memoranda No 1799 (2913), Aeronautical Research Committee, 1937.
4. R. FRISCH-FRAY, *Flexible Bars*, Butterworth's, London 1962.
5. К. М. Караджи, *К расчету стальных листовых настилов и обшивок*, Строит. Мех. и Расчет Сооружений, 6 (1961), 29-32.
6. С. Д. Лейтес, *О несущей способности стальных пластинок с закрепленными кромками*, Проектстальконструкция, вып. 779, Москва 1950.
7. С. Д. Лейтес, *Цилиндрический изгиб стальных пластинок с закрепленными кромками*, Материалы по стальным констр., 3, Проектстальконструкция, Москва 1950, 112-146.
8. С. Д. Лейтес, *Упругий и упруго-пластический изгиб длинных прямоугольных пластинок с закрепленными кромками*, Расчет пространственных конструкций, в. 8, Москва 1962, 175-205.
9. R. LIEBOLD, *Die Durchbiegung einer beidseitig fest eingespannten Blattfeder*, Z. angew. Math. Mech. 7/8, 28 (1948), 247-248.
10. J. MANDES, *Wybrane zagadnienia z teorii belek prostych*, Prace Inst. Techn. Bud., Seria B. Statyka i Wytrzymałość, 21, PWT, 1963.
11. J. ORKISZ, *Principles of choosing multi-pointed equivalent cross-section for elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 10, 10 (1962), 405-414.
12. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Małe ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn. 4, 11 (1963), 677-712.
13. Б. Ф. Папкович, *Строительная механика корабля*, ч. II, Госсюзиздат, Судостроит. пром., Ленинград 1941.
14. H. E. SALZER, CH. N. RICHARDS, I. ARSHAM, *Table for the Solution of Cubic Equations*, Mc Graw-Hill, New York 1958.
15. J. SZARSKI, T. WAŻEWSKI, *Uwagi o równaniu struny drgającej*, Zesz. Nauk. UJ, Mat-Fiz-Chem, 1, Kraków 1953.
16. E. ТАКАБАЯ, *Zur Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers unter besonderer Berücksichtigung der Längskraft*, Springer, Berlin 1924.
17. S. P. TIMOSHENKO, *Strength of Materials*, P. II. Advanced Theory and Problems, D. van Nostrand Co., New York-Toronto-London.
18. S. P. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (tłum. pol., Wyd. «Arkady» W-wa 1962) Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London 1959.
19. Z. WASZCZYSZYN, M. ŻYCZKOWSKI *Finite elastic deflections of a stretchable beam on immovable supports*, Arch. Mech. Stos., 1, 14 (1962), 61-82.

agreement of the shear forces above the support. The satisfaction of both conditions is called the method of two-point collocation while the satisfaction of the first condition alone is called the method of one-point collocation.

A solution for an elastic beam with restricted displacement of the supports is obtained by means of one- and two-point collocation. Confrontation of results shows good agreement with the exact method within a much greater range than with the perturbation method [21].

The introduction of a single collocation function facilitates considerably the computation of the elastic-plastic deflection because the assumption of a single function for the entire beam enables to avoid the difficulty of joining the regions of different types of stress distribution. The solution obtained for a rectangular beam made of a perfect elastic-plastic material is illustrated by a numerical example.

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 czerwca 1964 r.