

SKOŃCZONE UGIĘCIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE BELEK
O DOWOLNYM PRZEKROJU

JANUSZ ORKISZ, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Praca poświęcona jest zastosowaniu metody wielopunktowych przekrojów zastępczych [6, 7, 8, 9 i 10] do przybliżonego obliczania dużych ugięć sprężysto-plastycznych belek o dowolnym przekroju. Metoda ta polega na zastąpieniu rzeczywistego przekroju belki przekrojem zastępczym składającym się z pewnej liczby pólek o powierzchniach (masach) skupionych (tzw. przekrojem wielopunktowym) i obliczaniu ugięć takiej zastępczej belki w sposób ścisły. Wielkość i rozstaw tych pólek dobiera się [6] z warunku równości odpowiedniej liczby momentów geometrycznych przekroju rzeczywistego i zastępczego oraz równej wysokości obu przekrojów, co przy dostatecznej ilości pólek zapewnia dobre przybliżenie przekroju rzeczywistego. Dla przekrojów wielopunktowych (przy przyjęciu modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego lub modelu ciała z wielokrotnym wzmocnieniem odcinkowo-liniowym) krzywizna pręta jest zawsze liniową funkcją momentu gnącego M i siły podłużnej N . Dzięki temu otrzymuje się jednakową postać różniczkowych równań linii ugięcia [10], w których jedynie wartości stałych współczynników zależą od formy przekroju danego, liczby pólek w przekroju zastępczym i sposobu jego uplastycznienia. W pracy [10] wyprowadzone zostały ogólne równania różniczkowe odnoszące się zarówno do przypadku małych jak i dużych ugięć sprężysto-plastycznych prętów o przekrojach wielopunktowych. Granice stosowalności tych równań określają odpowiednie krzywe graniczne w układzie M, N [8]. Przypadek małych ugięć sprężysto-plastycznych prętów o przekrojach wielopunktowych został omówiony w pracy [6]. Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie analogicznego zagadnienia dla ugięć skończonych. Jak się przy tym okazuje metoda wielopunktowych przekrojów zastępczych, obok ujednocnienia rozważania dla prętów o różnych przekrojach poprzecznych oraz możliwości uchwycenia praktycznie materiałów o dowolnej charakterystyce przy aproksymacji ich wielokrotnym wzmocnieniem odcinkowo-liniowym, sprowadziła trudności obliczania ugięć sprężysto-plastycznych do poziomu trudności obliczania ugięć sprężystych [2 i 11] przy zwiększeniu jednak liczby przedziałów i warunków «zszycia».

Ostatnie uwagi mają istotne znaczenie w ocenie przydatności metody ze względu na liczne trudności na jakie napotymano przy rozważaniu skończonych ugięć sprężysto-plastycznych. Właśnie te trudności [10], z których wymienimy tu choćby problem wpływu modelu fizycznego ciała, formy przekroju poprzecznego i sił podłużnych na postać równania różniczkowego linii ugięcia, spowodowały, że jak dotąd nie ma

dostatecznie ogólnego i ściślego rozwiązania tego zagadnienia, a nieliczne prace, jakie się ukazały, poświęcone są zazwyczaj określonemu modelowi ciała i konkretnemu, najczęściej prostokątnemu przekrojowi poprzecznemu pręta. I tak w pracy [13], a częściowo także w [5], rozważono przypadek belki o przekroju prostokątnym i przy idealnie sprężysto-plastycznym modelu ciała. Praca [12] podaje rozwiązanie tego zagadnienia przy uwzględnieniu rozciągłości osi belki. Problem dużych ugięć sprężysto-plastycznych przy czystym zginaniu belki o przekroju prostokątnym wykonanej z materiału ze wzmocnieniem potęgowym rozważono w pracy [3]. W tym przypadku przy znanych zastrzeżeniach odnośnie wykresu ze wzmocnieniem potęgowym osiąga się tę korzyść, że kształt przekroju poprzecznego wpływa na postać równania linii ugięcia belki tylko za pośrednictwem stałego współczynnika. Warto wreszcie z uwagi na bardzo szerokie założenia [np. dowolny doświadczalnie uzyskany wykres $\sigma = \sigma(\epsilon)$] wspomnieć o numerycznej metodzie przedstawionej w pracy [4]. Wymienione wyżej prace wykazują, że nawet w tych nielicznych przypadkach, w których można uzyskać rozwiązania ścisłe, mają one skomplikowaną postać i występują znaczne kłopoty przy ich «zszywaniu» w poszczególnych obszarach.

Stąd wzrasta znaczenie metod przybliżonych opartych na możliwie szerokich założeniach, a przy tym stosunkowo prostych w zastosowaniu jak np. metoda wielopunktowych przekrojów zastępczych.

2. W pracy przyjęto następujące główne założenia:

a) przyjmuje się hipotezę płaskich przekrojów Bernoulliego,

b) materiał belki jest idealnie sprężysto-plastyczny lub odznacza się wzmocnieniem liniowym pojedynczym albo wielokrotnym,

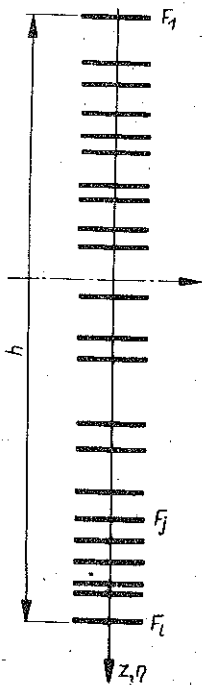
c) belka jest przyzmatyczna o przekroju poprzecznym posiadającym przynajmniej jedną oś symetrii; oś ta leży w płaszczyźnie działania obciążenia zewnętrznego,

d) stan naprężenia w belce jest jednoosiowy; pomija się wpływ naprężeń stycznych oraz naprężeń stykowych w otoczeniu punktów przyłożenia sił i momentów skupionych,

e) pomija się wpływ rozciągłości osi belki,

f) w zakresie sprężysto-plastycznym nie zachodzi odciążenie,

g) przyjmuje się zastępczy przekrój wielopunktowy (rys. 1) w postaci / skupionych mas rozmieszczonych wzdłuż osi symetrii przekroju poprzecznego leżącej w płaszczyźnie zginania belki.



Rys. 1

Przy powyższych założeniach w pracy [10] wyprowadzone zostało ogólne równanie sprężysto-plastycznych ugięć pręta o przekroju wielopunktowym w postaci

$$(2.1) \quad -\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi' = \alpha m + \beta n + \gamma,$$

gdzie $s = ht$ jest długością łuku, a h wysokością przekroju belki; φ i φ' oznaczają odpowiednio jej kąt ugięcia i bezwymiarową krzywiznę; α , β , γ są to stałe zależne od materiału belki, liczby l mas skupionych w całym przekroju i sposobu rozkładu sprężysto-plastycznych naprężeń normalnych; wartości tych stałych dla różnych przypadków podano w pracach [6, 7 i 10]. W równaniu (2.1)

$$(2.2) \quad m = \frac{M}{WQ_r}, \quad n = \frac{N}{(F_I + F_{II})Q_r}$$

oznaczają bezwymiarowy moment zginający i bezwymiarową siłę podłużną, W sprężysty wskaźnik przy zginaniu, F_I i F_{II} pola powierzchni przekroju poprzecznego po obu stronach osi ciężkości oraz Q_r granicę plastyczności przy rozciąganiu.

W szczególnym przypadku przy czystym zginaniu przekrojów o dwóch osiach symetrii równanie (2.1) ma jeszcze prostszą postać (δ jest stałe)

$$(2.3) \quad -\varphi' = am - \delta.$$

Dla celów praktycznych, nie zmniejszając ogólności zagadnienia jak pokazano w pracy [10], dalsze rozwiązania przeprowadzimy dla czteropunktowego przekroju zastępczego o dwóch osiach symetrii ($F_I = F_{II} = F$). Wówczas [8] dla zakresu sprężystego przy jednostronnym i przy dwustronnym uplastycznieniu można napisać

$$(2.4) \quad -\varphi' = am, \quad -\varphi' = am + \beta n - \beta, \quad -\varphi' = am - \beta.$$

Wartości współczynników α i β oraz odpowiednie krzywe graniczne zamieszczono w pracy [10].

3. Równania (2.1), (2.3) i (2.4) posiadają liniowy charakter jedynie w układzie m , n , φ' . Ponieważ jednak bezwymiarowy moment gnący m i bezwymiarowa siła podłużna n mogą w rozmaity sposób zależeć od rodzaju i charakteru działania obciążeń zewnętrznych [10], to dla ugięć skończonych otrzymamy szereg typów różniczkowych, a przy obciążeniach ciągłych na ogół różniczkowo-całkowych równań linii ugięcia. Przy przyjęciu uproszczeń wynikających z rozważania małych ugięć dla bardzo szerokiej klasy obciążeń równania te dają się sprowadzić do równań różniczkowych, a następnie efektywnie rozwiązać. W sposób ścisły (czyli przy skończonych ugięciach) można to uczynić tylko dla niektórych typów obciążeń zewnętrznych, a to dla obciążenia ciągłego prostopadłego do osi belki nieodkształconej i liczonego na jej rzut [$q = q(\xi)$] oraz dla dowolnych sił skupionych i momentów skupionych. Aby sformułować odpowiednie wyrażenia dla m i n rozważmy belkę przedstawioną na rys. 2, przyjmując przy tym dwa układy współrzędnych: kartezjański x , w oraz układ s , φ . Związki transformacyjne pomiędzy nimi mają postać różniczkową

$$(3.1) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dw}{ds} = \sin \varphi$$

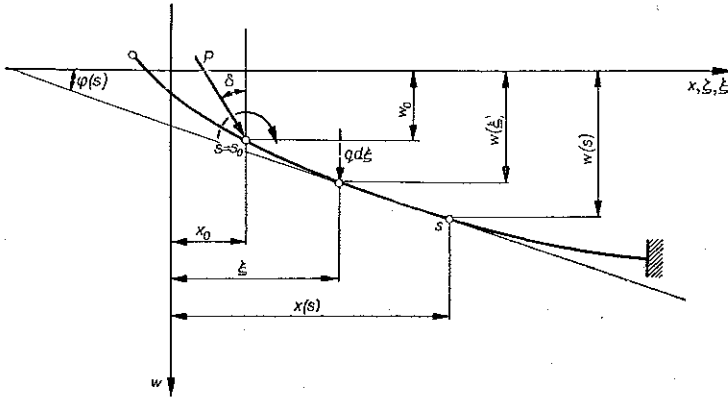
lub całkową

$$(3.2) \quad x = x_0 + \int_{s_0}^s \cos \varphi ds, \quad w = w_0 + \int_{s_0}^s \sin \varphi ds.$$

Wówczas można napisać

$$(3.3) \quad m = \frac{1}{WQ_r} \left\{ \int_{x_0}^x q(\xi) (\xi - x) d\xi + P(x_0 - x) \cos \delta + P(w - w_0) \sin \delta + M_0 \right\},$$

$$n = -\frac{1}{2FQ_r} \left\{ \left[\int_{x_0}^x q(\xi) d\xi + P \cos \delta \right] \sin \varphi + P \sin \delta \cos \varphi \right\}.$$



Rys. 2

4. Wyprowadzimy obecnie równania różniczkowe linii ugięcia belki dla różnych przypadków obciążenia.

4.1. Rozważmy naprzód obciążenie prostopadłe do osi belki nieodkształconej i wprowadźmy bezwymiarową współrzędną

$$(4.1) \quad \zeta = \frac{x}{h}, \quad \zeta_0 = \frac{x_0}{h}.$$

Wówczas na podstawie (3.3) mamy

$$(4.2) \quad m = \frac{1}{WQ_r} \left[\int_{\zeta_0 h}^{\zeta h} q(y) (y - \zeta h) dy + Ph (\zeta_0 - \zeta) + M_0 \right],$$

$$n = -\frac{1}{2FQ_r} \left[\int_{\zeta_0 h}^{\zeta h} q(y) dy + P \right] \sin \varphi,$$

gdzie y oznacza zmienną całkowania mierzoną wzdłuż osi x .

Z uwagi na postać (4.2) w równaniach (2.4) zastąpimy pochodną $d\varphi/dt$ przez $d\varphi/d\zeta$. I tak [por. (3.1)] mamy

$$(4.3) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{d\zeta} \cos \varphi = \frac{d}{d\zeta} (\sin \varphi).$$

Oznaczmy przypadek jednostronnego uplastycznienia przez I, a dwustronnego przez II. Wprowadzając podstawienie

$$(4.4) \quad z = \sin \varphi,$$

na podstawie (2.4) i (4.3) otrzymujemy równania

$$(4.5) \quad \frac{dz}{d\zeta} - zg(\zeta) = f(\zeta) \quad (\text{I}),$$

$$(4.6) \quad \frac{dz}{d\zeta} = f(\zeta) \quad (\text{II}),$$

gdzie

$$(4.7) \quad f(\zeta) = \beta - \frac{\alpha}{WQ_r} \left[\int_{\zeta_0 h}^{\zeta h} q(y) (y - \zeta h) dy + Ph(\zeta_0 - \zeta) + M_0 \right],$$

$$g(\zeta) = \frac{\beta}{2FQ_r} \left[\int_{\zeta_0 h}^{\zeta h} q(y) dy + P \right]$$

są znanymi funkcjami obciążeń zewnętrznych. Stąd po rozwiązaniu

$$(4.8) \quad z = e^{\int g(\zeta) d\zeta} \left[C + \int f(\zeta) e^{-\int g(\zeta) d\zeta} d\zeta \right] \quad (\text{I}),$$

oraz

$$(4.9) \quad z = \int f(\zeta) d\zeta + C \quad (\text{II}),$$

gdzie C jest stałą całkowania. Następnie obliczamy:

$$(4.10) \quad \varphi = \arcsin z, \quad x = \zeta h, \quad w = w_0 + h \int_{\zeta_0}^{\zeta} \operatorname{tg} \varphi dy.$$

Otrzymane stąd wyrażenie dla ugięć w przypadku II

$$(4.11) \quad w = w_0 + h \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{C + \int f(y) dy}{\sqrt{1 - [C + \int f(y) dy]^2}} dy$$

ma podobną strukturę jak rozwiązanie dla strefy sprężystej, podane w pracy [2]. W szczególnym przypadku dla $q = \text{const}$ (4.10) przedstawia całkę hipereliptyczną, a dla $q = 0$ eliptyczną.

4.2. W przypadku obciążenia belki siłą skupioną ukośnie działającą i momentem skupionym ze wzorów (3.3) mamy

$$(4.12) \quad m = \frac{2p}{zh} [(x_0 - x) \cos \delta + (w - w_0) \sin \delta] + m_0,$$

$$n = -p \sin(\varphi + \delta),$$

gdzie wprowadzono bezwymiarowe oznaczenia

$$(4.13) \quad p = \frac{P}{2FQ_r}, \quad m_0 = \frac{M_0}{WQ_r}, \quad \kappa = \frac{W}{hF}.$$

Aby otrzymać czysto różniczkowe równania linii ugięcia, związki (4.12) różniczkujemy względem bezwymiarowej długości t [por. (2.1)] i podstawiamy następnie do (2.4). Otrzymamy stąd [por. (3.1)]

$$(4.14) \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{2p}{\kappa} \cos \psi, \quad \frac{dn}{dt} = -p\psi' \cos \psi,$$

przy czym

$$(4.15) \quad \psi = \varphi + \delta.$$

Dla jednostronnego uplastycznienia (I) mamy więc

$$(4.16) \quad \psi'' = a \frac{dm}{dt} + \beta \frac{dn}{dt} = -\frac{2pa}{\kappa} \cos \psi - p\beta\psi' \cos \psi \quad (\text{I}).$$

Równanie to dzięki podstawieniu

$$(4.17) \quad \psi' = v, \quad \psi'' = \frac{dv}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = v'v$$

można sprowadzić do postaci o zmiennych rozdzielonych:

$$(4.18) \quad -\frac{v dv}{p \left(\beta v + \frac{2a}{\kappa} \right)} = \cos \psi d\psi.$$

Całką tego równania jest funkcja

$$(4.19) \quad \psi = \arcsin \left[C - \frac{1}{p\beta} \left(v + \frac{2a}{\kappa\beta} \ln \left| v + \frac{2a}{\kappa\beta} \right| \right) \right].$$

Aby znaleźć związek $s = s(v)$ zauważmy naprzód, że

$$(4.20) \quad ds = h dt = h \frac{dt}{d\psi} d\psi = \frac{h}{v} d\psi,$$

skąd na podstawie (4.18) mamy

$$(4.21) \quad s = s_0 - \frac{h}{p\beta} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\left(v + \frac{2a}{\kappa\beta} \right) \cos \psi},$$

gdzie $\cos \psi$ obliczamy ze wzoru (4.19). Całka ta niestety nie daje się przedstawić za pomocą funkcji elementarnych. Podobnie jak s wyrazić możemy [por. (3.2), (4.15), (4.20)]

$$(4.22) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + h \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\cos(\psi - \delta)}{v} d\psi = x_0 - \frac{h}{p\beta} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\cos(\psi - \delta) dv}{\left(v + \frac{2\alpha}{\kappa\beta}\right) \cos \psi}, \\ w &= w_0 + h \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin(\psi - \delta)}{v} d\psi = x_0 - \frac{h}{p\beta} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin(\psi - \delta) dv}{\left(v + \frac{2\alpha}{\kappa\beta}\right) \cos \psi}. \end{aligned}$$

Dla dwustronnego uplastycznienia (II) lub przy pominięciu wpływu siły podłużnej mamy odpowiednio:

$$(4.23) \quad \psi'' = a \frac{dm}{dt} = -\frac{2pa}{\kappa} \cos \psi \quad (\text{II}).$$

Wykorzystując podstawienie (4.17) otrzymujemy

$$(4.24) \quad v dv = -\frac{2pa}{\kappa} \cos \psi d\psi,$$

skąd

$$(4.25) \quad \psi = \arcsin \left(C - \frac{v^2}{\omega^2} \right), \quad \omega^2 = \frac{4pa}{\kappa}.$$

Podobnie jak poprzednio możemy napisać:

$$(4.26) \quad \begin{aligned} s &= s_0 + \frac{h}{\omega} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{C - \sin \psi}}, & x &= x_0 + \frac{h}{\omega} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\cos(\psi - \delta)}{\sqrt{C - \sin \psi}} d\psi, \\ w &= w_0 + \frac{h}{\omega} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin(\psi - \delta)}{\sqrt{C - \sin \psi}} d\psi. \end{aligned}$$

Powyższe całki można przedstawić w postaci niepełnych całek eliptycznych pierwszego i drugiego rodzaju $F(\theta, k)$ i $E(\theta, k)$. W tym celu wystarczy rozważyć dwa wyrażenia

$$(4.27) \quad J_1(\psi, \psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{C - \sin \psi}}, \quad J_2(\psi, \psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin \psi}{\sqrt{C - \sin \psi}} d\psi.$$

Wykorzystamy przy tym, że dla $b > |a| > 0$ [por. [1] poz. 290.00; 290.01]:

$$(4.28) \quad \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a+b \cos \vartheta}} = \sqrt{\frac{2}{b}} F(\theta, k), \quad \int_0^{\vartheta} \frac{1 + \cos \vartheta}{\sqrt{a+b \cos \vartheta}} d\vartheta = 2 \sqrt{\frac{2}{b}} E(\theta, k),$$

gdzie

$$(4.29) \quad \theta = \arcsin \sqrt{\frac{b(1 - \cos \varphi)}{a+b}}, \quad k = \sqrt{\frac{a+b}{2b}}.$$

Wówczas mamy

$$(4.30) \quad \begin{aligned} J_1(\psi, \psi_0) &= \sqrt{2} [F(\theta, k) - F(\theta_0, k)], \\ J_2(\psi, \psi_0) &= \sqrt{2} [F(\theta, k) - F(\theta_0, k) - 2E(\theta, k) + 2E(\theta_0, k)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.31) \quad \theta = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin \psi}{1+C}}, \quad \theta_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin \psi_0}{1+C}}, \quad k = \sqrt{\frac{C+1}{2}}.$$

Obecnie wzory (4.26) można napisać w postaci

$$(4.32) \quad \begin{aligned} s &= s_0 + \frac{h}{\omega} I_1(\psi, \psi_0), \\ x &= x_0 - \frac{2h \cos \delta}{\omega} (\sqrt{C - \sin \psi} - \sqrt{C - \sin \psi_0}) - \frac{h \sin \delta}{\omega} J_2(\psi, \psi_0), \\ w &= w_0 - \frac{2h \sin \delta}{\omega} (\sqrt{C - \sin \psi} - \sqrt{C - \sin \psi_0}) + \frac{h \cos \delta}{\omega} J_2(\psi, \psi_0). \end{aligned}$$

Powyższe wzory określają linię ugięcia belki w sposób parametryczny przy pomocy kąta ψ . Pragniemy jednak rozwinąć pierwsze z tych równań względem $\psi = \psi(s)$, aby napisać dwa pozostałe w postaci $x = x(s)$ i $w = w(s)$. Oznaczając

$$(4.33) \quad u = F(\theta, k) = F(\theta_0, k) + (s - s_0) \frac{\omega}{h\sqrt{2}},$$

obliczymy amplitudę

$$(4.34) \quad \theta = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am} \left[F(\theta_0, k) + (s - s_0) \frac{\omega}{h\sqrt{2}}, k \right].$$

Z drugiej strony [por. (4.31)]

$$(4.35) \quad \operatorname{sn}(u, k) = \sin \theta = \sqrt{\frac{1 + \sin \psi}{1+C}},$$

gdzie sn oznacza funkcję eliptyczną Jacobiego. Podstawiając (4.34) do (4.35) i rozwiązując to równanie względem ψ otrzymujemy:

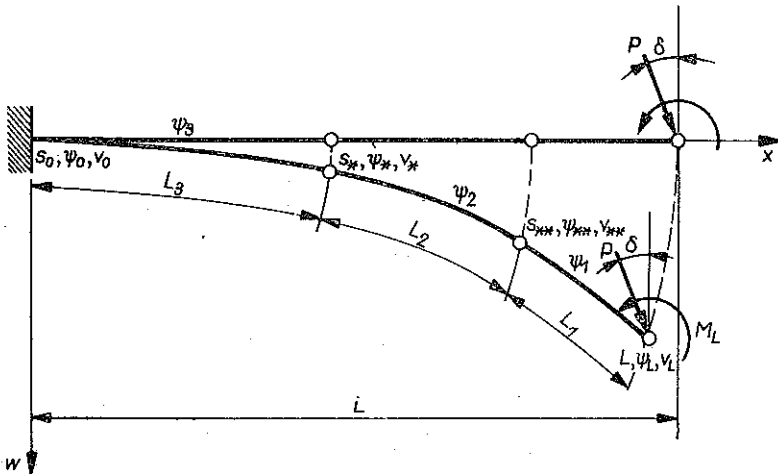
$$(4.36) \quad \psi(s - s_0) = \arcsin \left\{ (1+C) \operatorname{sn}^2 \left[F(\theta_0, k) + (s - s_0) \frac{\omega}{h\sqrt{2}}, k \right] - 1 \right\}.$$

W ten sposób w strefie dwustronnego uplastycznienia równania (4.32) i (4.36) określają linię ugięcia belki (o czteropunktowym przekroju zastępczym) w postaci $x = x(s)$, $w = w(s)$. W przypadku $\delta = 0$ są one równoważne równaniom (4.10) przy $q = 0$. Równania (4.32) będą również prawdziwe dla czystego zginania (zmie-

niają się jedynie współczynniki) belki o dwóch osiach symetrii aproksymowanej wielopunktowym przekrojem zastępczym [por. (2.3)]. W innych przypadkach stosujemy równania (4.22).

5. Problem warunków brzegowych przedstawia się podobnie jak dla małych ugięć sprężysto-plastycznych. Tak więc belkę dzielimy na szereg przedziałów, w których ugięcia dadzą się opisać jednym równaniem różniczkowym, a występujące tam stałe całkowania wyznacza się z warunków ciągłości na granicach poszczególnych stref i geometrycznych warunków zamocowania belki. Ponadto ze względu na różnice długości osi belki s od długości jej rzutu x oraz z uwagi na parametryczną postać równań $x = x(v)$ i $w = w(v)$ potrzebne są dwa dodatkowe warunki. I tak przy pominięciu odkształceń podłużnych całkowita długość belki ugiętej musi być równa długości pierwotnej. Drugi warunek potrzebny jest do podania wartości parametru na końcach przedziału. Wartości tych nie można przyjąć dowolnie, gdyż często taki parametr ma pewien sens fizyczny (np. kąt ψ , krzywizna v itp.). Zatem drugi warunek powinien wynikać z przesłanek fizycznych np. $m(v) = 0$ na wolnym końcu belki.

6. Zastosujemy otrzymane poprzednio rezultaty do obliczenia skończonych ugięć sprężysto-plastycznych belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną i momentem skupionym na wolnym końcu. Sformułujemy naprzód warunki brzegowe dla wspornika przedstawionego na rys. 3. W ogólnym przypadku na długości belki mogą



Rys. 3

powstać trzy strefy: sprężysta, jednostronnego uplastycznienia i dwustronnego uplastycznienia. Ze względu na parametryczny charakter równań (4.26) musimy wyznaczyć aż siedem nieznanymi stałymi. Są to trzy stałe całkowania C_I, C_{II}, C_{III} , dwie nieznanne granice v_* i v_{**} pomiędzy odcinkami belki pracującymi w różnych strefach oraz nie znana «skala» parametru, czyli np. dwie wielkości brzegowe v_0 i v_L . I tak dla stałych całkowania mamy warunki

$$(6.1) \quad \psi_I(v_0) = -\delta, \quad \psi_I(v_*) = \psi_{II}(v_*), \quad \psi_{II}(v_{**}) = \psi_{III}(v_{**});$$

dla granic pomiędzy strefami uplastycznienia [por. [8 i 10]]

$$(6.2) \quad m(v_{**}) + n(v_{**}) = -1, \quad m(v_*) - \frac{\bar{\eta}^2}{\kappa} n(v_*) = -1.$$

Poszczególne wyrażenia w równaniach (6.2) mogą mieć różne znaki zależnie od znaków m i n (por. krzywe graniczne [8 i 10]). W równaniach (6.2) przyjęto (por. rys. 3), że $m \leq 0$, $n \leq 0$. Prócz (6.1) i (6.2) mamy jeszcze warunek fizyczny

$$(6.3) \quad m(v_L) = m_L$$

oraz warunek nierozciągłości osi belki

$$(6.4) \quad L_I + L_{II} + L_{III} = 0.$$

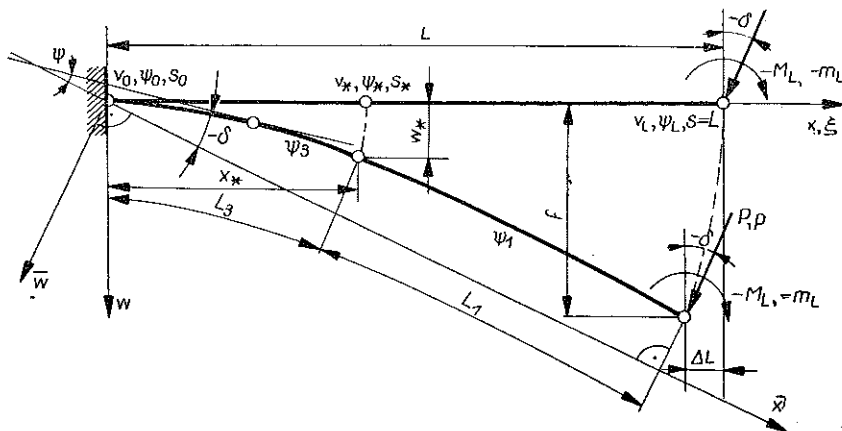
Otrzymamy zatem siedem równań, które są na tyle skomplikowane, że nie dają się sprowadzić do jednego równania przestępnego. Obliczenia znacznie się upraszczają, jeśli wpływ siły podłużnej jest niewielki i zakres jednostronnego uplastycznienia na długości belki można pominąć. Dzieje się to przy $m \gg n$, co na ogół zachodzi, z wyjątkiem kątów bliskich 90° . Jeśli więc przyjąć

$$(6.5) \quad v_{**} \approx v_*, \quad n \approx 0, \quad L_{II} \approx 0,$$

to pozostaje jedynie pięć warunków brzegowych:

$$(6.6) \quad \psi_0 = -\delta, \quad v_*(\psi) = v_*(\psi_{III}), \quad m(\psi_*) = -1, \quad -v(\psi_L) = am_L, \quad L_I + L_{III} = 0$$

z pięcioma niewiadomymi stałymi C_I i C_{III} oraz ψ_0 , ψ_* i ψ_L , które wtedy wygodniej jest przyjąć zamiast v_0 , v_* i v_L .



Rys. 4

Moment gnący wyznaczamy ze wzoru (por. rys. 4)

$$(6.7) \quad M = M_L - P \int_{\bar{x}}^L d\bar{x},$$

skąd po wyprowadzeniu wielkości bezwymiarowych [por. (2.2), (4.13)] i zmiennej t mamy

$$(6.8) \quad m = m_0 - \frac{2p}{\kappa} \int_t^{L/h} dt \cos \psi.$$

Stąd po scałkowaniu na podstawie wzorów (4.19) i (4.25) dla strefy sprężystej i strefy sprężysto-plastycznej otrzymamy odpowiednio:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} m &= \frac{\omega_I}{\alpha_I} (\sqrt{C_I - \sin \psi_L} - \sqrt{C_I - \sin \psi}) + m_L, \\ m &= \frac{\omega_{III}}{\alpha_{III}} (\sqrt{C_{III} - \sin \psi_*} - \sqrt{C_{III} - \sin \psi}) - 1. \end{aligned}$$

Z warunków brzegowych wyznaczamy kolejno poszukiwane stałe wyrażając je przez ψ_L :

$$(6.10) \quad \begin{aligned} C_I &= \sin \psi_L + \left(\frac{\alpha_I m_L}{\omega_I} \right)^2, & C_{III} &= \sin \psi_L - \left(\frac{\alpha_I}{\omega_I} \right)^2 \left(1 - m_L^2 - \frac{\alpha_I}{\alpha_{III}} \right), \\ \sin \psi_* + \sin \psi_L - \left(\frac{\alpha_I}{\omega_I} \right)^2 (1 - m_L^2) & & & \end{aligned}$$

Ostatni warunek (6.6) prowadzi do równania przestępnego

$$(6.11) \quad \frac{h}{\omega_{III}} J_1(-\delta, \psi_*) + \frac{h}{\omega_I} J_1(\psi_*, \psi_L) = L,$$

z którego wyznaczymy ψ_L , a po określeniu stałych (6.10) otrzymujemy na podstawie (4.32) równania linii ugięcia:

$$(6.12) \quad \begin{aligned} x_{III}(s) &= -\frac{2h \cos \delta}{\omega_{III}} (\sqrt{C_{III} - \sin \psi_{III}} - \sqrt{C_{III} + \sin \delta}) - \frac{h \sin \delta}{\omega_{III}} J_2(\psi_{III}, -\delta), \\ x_I(s) &= x_* - \frac{2h \cos \delta}{\omega_I} (\sqrt{C_I - \sin \psi_I} - \sqrt{C_I - \sin \psi_*}) - \frac{h \sin \delta}{\omega_I} J_2(\psi_I, \psi_*), \\ \omega_{III}(s) &= -\frac{2h \sin \delta}{\omega_{III}} (\sqrt{C_{III} - \sin \psi_{III}} - \sqrt{C_{III} + \sin \delta}) + \frac{h \cos \delta}{\omega_{III}} J_2(\psi_{III}, -\delta), \\ \omega_I(s) &= w_* - \frac{2h \sin \delta}{\omega_I} (\sqrt{C_I - \sin \psi_I} - \sqrt{C_I - \sin \psi_*}) + \frac{h \cos \delta}{\omega_I} J_2(\psi_I, \psi_*), \end{aligned}$$

gdzie $\psi_I = \psi_I(s - s_*)$, $\psi_{III} = \psi_{III}(s)$ wyrażają się za pomocą wzoru (4.36) z podstawieniem odpowiednich stałych (6.10), przy czym

$$(6.13) \quad x_* = [x_{III}]_{\psi=\psi_*}, \quad w_* = [w_{III}]_{\psi=\psi_*}, \quad s_* = \frac{h}{\omega_{III}} J_1(\psi_*, -\delta).$$

7. Rozpatrzmy skończone ugięcia belki zginanej sprężysto-plastycznie jako funkcję obciążeń zewnętrznych. Przy pewnej granicznej wartości tych obciążeń belka przejdzie ze stanu sprężystego w sprężysto-plastyczny. W ogólnym przypadku obciążenia te określa równanie [8]:

$$(7.1) \quad |m(q_i, t)| + |n(q_i, t)| = 1,$$

które wiąże ze sobą uogólnione siły zewnętrzne q_i . Przy obciążeniu proporcjonalnym zawiera ono tylko jedną niewiadomą: współczynnik wzrostu obciążenia; po znalezieniu tego współczynnika określamy minimalną wartość sił zewnętrznych, powodującą przejście belki w stan sprężysto-plastyczny. W naszym przypadku siłę p_1 , przy której pojawia się pierwsze odkształcenie plastyczne we włóknach skrajnych, wyznaczymy z warunku

$$(7.2) \quad m(p_1, m_L, 0) = -1, \quad \psi_* = -\delta,$$

skąd na podstawie (6.9) mamy

$$(7.3) \quad p_1 = \frac{\alpha a_1(1+m_L)}{4[\sqrt{C_1 + \sin \delta} - \sqrt{C_1 - \sin \psi_L}]^2}.$$

Ponadto z (6.11) otrzymujemy

$$(7.4) \quad J_1(\psi_*, \psi_L) = \frac{L}{h} \omega_1.$$

Z równań (7.3) i (7.4) możemy wyrugować $\sin \psi_L$ i sprowadzić je do jednego równania przestępnego dla siły p_1 .

Określenie obciążeń niszczących nie jest jednoznaczne i zależy m.in. od materiału belki i sposobu obliczania ugięć. Przy czystym zginaniu belki idealnie sprężysto-plastycznej obciążeniem niszczącym będzie moment $m = m_{\max}$. Natomiast przy obciążeniu belki siłami skupionymi lub ciągłymi (ze względu na możliwość powstania krzywizny o dowolnej wielkości) decydującym o zniszczeniu może okazać się nie moment, a siła podłużna. W belkach rzeczywistych przy pewnej wielkości krzywizny we włóknach skrajnych powstają rysy, odpowiadające końcowemu punktowi wykresu rozciągania lub ściskania. Przesuwają się one następnie ku środkowi i w końcu belka ulega złamaniu. Obciążenia zewnętrzne powodujące powstanie takiej krzywizny będą więc obciążeniami niszczącymi dla danej belki.

Podobna sytuacja istnieje przy rozważaniu belek o przekrojach wielopunktowych, gdyż ulegają one zniszczeniu również przy pewnej maksymalnej, skończonej krzywiznie. Siły powodujące powstanie takiej krzywizny będziemy nazywali siłami niszczącymi. Siły te wyznaczyć można z równań krzywych granicznych [por. [8]], które mają postać

$$(7.5) \quad am(q_i, t) + bn(q_i, t) + c = 0,$$

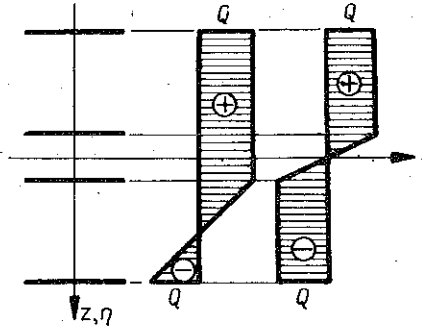
a odpowiadające im krzywizny z równań [por. (11)] typu

$$(7.6) \quad \varphi'_{\max} = am(q_i, t) + \beta n(q_i, t)$$

z podstawieniem (7.5).

Maksymalna krzywizna φ'_{\max} w belkach o przekrojach wielopunktowych uwarunkowana jest odstępem pólek w przekroju. Stąd przy różnych kombinacjach niszczących wartości m i n wielkość tej krzywizny może być rozmaita, już nawet przy czteropunktowym przekroju zastępczym ze względu na różne odstępów pólek (rys. 5). Przy czystym zginaniu sprawa się upraszcza i maksymalna krzywizna jest jednoznacznie wyznaczona wzajemnym odstępem $2\bar{\eta}$ ($\bar{\eta}$ jest bezwymiarowe [10]) dwóch środkowych pólek, a jej wielkość (por. [10], wyprowadzenie równania (1.1)) wynosi

$$(7.7) \quad \varphi'_{\max} = \psi'_{\max} = v_{\max} = \\ = \frac{2a^2}{\bar{\eta}} = \frac{\alpha_I}{\bar{\eta}}, \quad a^2 = \frac{Q_r}{E},$$



Rys. 5

gdzie Q_r oznacza granicę plastyczności, E moduł Younga materiału belki — i zależy od liczby pólek w przekroju zastępczym, kształtu przekroju danego i fizycznego modelu ciała. Tak np. przy czteropunktowym przekroju zastępczym [7] dla belki idealnie sprężysto-plastycznej o przekroju prostokątnym, kołowym i dwuteowym (I 40) mamy odpowiednio:

$$(7.8) \quad \psi'_{\max} = \frac{2a^2}{1/3} = 6a^2, \quad \psi'_{\max} = \frac{2a^2}{0,303} = 6,59a^2, \quad \psi'_{\max} = \frac{2a^2}{0,407} = 4,92a^2.$$

Dla belek wykonanych ze zwykłej stali budowlanej wartości te uzyskane na podstawie wykresu $\sigma = \sigma(\epsilon)$ są mniej więcej dziesięciokrotnie wyższe. Już nawet stąd widać, że czteropunktowy przekrój zastępczy dobrany w myśl zasad podanych w pracy [6] daje w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego znacznie niższe wartości maksymalnej krzywizny, a więc i niższe wielkości niszczących obciążeń zewnętrznych niż wynikałoby to z rozważania belki rzeczywistej. Zbieżność tych wyników można by poprawić bądź to zwiększając liczbę pólek w przekroju zastępczym (znacznie!), co jednak nie ma praktycznego sensu, bądź to przyjmując przekrój np. sześciopunktowy, przy czym zamiast żądać zgodności momentów geometrycznych czwartego rzędu, postawić warunek umieszczenia najbliższych środka pólki w odległości wynikającej z proporcji rzeczywistych odkształceń niszczących do maksymalnych odkształceń sprężystych dla danego materiału belki. Wówczas otrzyma się całkowitą zgodność maksymalnej krzywizny belki rzeczywistej i zastępczej. Takie postawienie sprawy jest jednak właściwe tylko przy czystym zginaniu. Jednakże już przyjęcie maksymalnej krzywizny obliczonej dla przekroju czteropunktowego prowadzi do tak znacznych ugięć, że większość praktycznych przypadków można w ten sposób ująć.

W naszym przypadku maksymalną siłę p_2 najwygodniej jest znaleźć porównując wzory (4.25) i (7.7):

$$(7.9) \quad [v]_{v_{III} = v_0} = \alpha_I \sqrt{\bar{\eta}},$$

skąd

$$(7.10) \quad p_2 = \frac{\kappa a_1^2}{4\alpha_{III} \bar{\eta}^2 (C + \sin \delta)}.$$

Rugując z równań (6.11) i (7.10) $\sin \psi_L$ otrzymujemy jedno równanie przestępne z niewiadomą siłą p_2 .

W ten sposób otrzymaliśmy związki, z których wyznacza się zakres, w jakim może zmieniać się siła p , aby belka znajdowała się w stanie sprężysto-plastycznym. Równania (7.3) i (7.10) można traktować jako kres dolny i górny dla wartości $\sin \psi_L$ przy ustalonych obciążeniach zewnętrznych. Można to też interpretować następująco: równanie (7.3) podaje związek pomiędzy siłą p_1 i kątem ψ_L ugięcia belki przy założeniu, iż w utwierdzeniu wytwarza się moment $m = 1$. Przy sile $p > p_1$ będzie to słuszne dla pewnej fikcyjnej belki krótszej niż rozważana przez nas. Podobnie przy $p < p_2$ równanie (7.10) jest słuszne dla belki dłuższej niż L . Wartości $\sin \psi_L(p_1)$ i $\sin \psi_L(p_2)$ wyznaczają zatem przedział

$$(7.11) \quad \sin \psi_L(p_1) < \sin \psi_L < \sin \psi_L(p_2),$$

w którym należy poszukiwać pierwiastków równania przestępnego (6.11). Wykazanie, iż spełniona jest nierówność (7.11), wystarcza tym samym do stwierdzenia, że belka znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym.

8. Rozwiązane zostały dwa konkretne przykłady liczbowe. W pierwszym belkę wspornikową stanowił okrągły pręt stalowy o długości 400 cm obciążony na wolnym końcu siłą $P = 9$ kG. Ciężar własny, który przy tej długości pręta jest rzędu siły P pominięto, aby mieć do czynienia z możliwie najprostszym obciążeniem. Ponadto przyjęto następujące dane wyjściowe:

$$h = 2 \text{ cm}, \quad E = 2\,100\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad Q_r = 2500 \text{ kG/cm}^2, \quad \delta_p = 0, \quad M_L = 0.$$

W rezultacie obliczeń przeprowadzonych na podstawie podanych poprzednio wzorów otrzymano równania linii ugięcia:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} x &= 217,7 - 333,4 \sqrt{0,4264 - \sin \varphi_{III}} && \text{dla } 0 \leq s \leq 157,9, \\ x &= 365,2 - 597,9 \sqrt{0,5147 - \sin \varphi_I} && \text{dla } 15,9 \leq s \leq 400,0, \\ w &= 166,7J_{23} && \text{dla } 0 \leq s \leq 157,9, \\ w &= 36,7 + 298,9J_{21} && \text{dla } 157,9 \leq s \leq 400, \end{aligned}$$

gdzie

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \varphi_{III} &= \arcsin \{1,426sn^2 [1,122 + 0,004241s; 0,8445] - 1\}, \\ \varphi_I &= \arcsin \{1,515sn^2 [1,223 + 0,002365s; 0,8702] - 1\}, \\ J_{23} &= 0,9233 + \sqrt{2} [F(\theta_{III}; 0,8445) - 2E(\theta_{III}; 0,8445)], \\ J_{21} &= 0,7278 + \sqrt{2} [F(\theta_I; 0,8702) - 2E(\theta_I; 0,8702)]. \end{aligned}$$

Wartości liczbowe dla kilku konkretnych punktów zestawiono w tablicy I, a kształt belki pokazano na rys. 6. Wyrażenia s , x i w liczone są w cm.

Tablica 1

s [cm]	φ	x [cm]	w [cm]	$s - x$ [cm]
0,0	0	0	0	0
100,0	17°21'6''	98,3	16,4	1,6
157,9	22°49'53''	152,4	36,7	5,6
200,0	25°27'34''	191,0	53,8	9,0
300,0	29°38'7''	280,2	99,9	19,8
400,0	30°58'32''	365,1	151,4	34,9

Równania bezwymiarowych momentów gnących mają postać:

$$(8.3) \quad m = 0,6967 + 1,528 \sqrt{0,4264 - \sin \varphi_{III}} \quad \text{dla } 0,0 \leq s \leq 157,9;$$

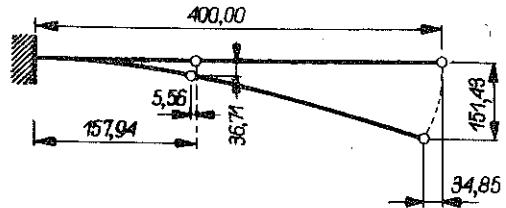
$$m = 2,810 \sqrt{0,5147 - \sin \varphi_I} \quad \text{dla } 157,9 \leq s \leq 400,0.$$

Maksymalna wartość bezwymiarowego momentu wynosi $m = 1,694$, a bezwymiarowej siły podłużnej $n = 0,0005898$, co całkowicie usprawiedliwia pominięcie wpływu sił podłużnych na ugięcia. Belka znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym, gdy

$$(8.4) \quad 4,990 \text{ kG} \leq P \leq 9,134 \text{ kG},$$

co odpowiada

$$(8.5) \quad 0,1299 \leq \sin \varphi_L \leq 0,5194.$$



Rys. 6

Jako drugi przykład rozpatrzone belkę wspornikową I 20 obciążoną siłą ukośną na wolnym końcu, przyjmując dane wyjściowe:

$$h = 20 \text{ cm}, L = 600 \text{ cm}, F = 19,75 \text{ cm}^2, I = 2500 \text{ cm}^4, S = 144,4 \text{ cm}^3,$$

$$W = 250 \text{ cm}^3, E = 2\,100\,000 \text{ kG/cm}^2, Q_r = 2500 \text{ kG/cm}^2, P = 1300 \text{ kG}, \delta = -30^\circ.$$

W wyniku obliczeń otrzymano następujące rezultaty (s, w w [cm]):

$$(8.6) \quad w = 1,03 + 520,00 [2AE(\theta_{III}, k) - \Delta F(\theta_{III}, k)] - 424,50 \sqrt{-\sin \psi_{III} - 0,4876}$$

$$\text{dla } 0 \leq s \leq 59,0;$$

$$w = 18,56 + 1740 [2AE(\theta_I, k) - \Delta F(\theta_I, k)] - 1421 \sqrt{-\sin \psi_I - 0,4616}$$

$$\text{dla } 59,0 \leq s \leq 600,0,$$

przy czym

$$\theta_{III} = \arcsin(1,397 \sqrt{1 + \sin \psi_{III}}), \quad \theta_I = \arcsin(1,363 \sqrt{1 + \sin \psi_I}),$$

gdzie

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \psi_{III} &= \arcsin \{0,5124sn^2 [1,510 + 0,001666s; 0,5062] - 1\} \quad \text{dla } 0 \leq s \leq 59,0, \\ \psi_I &= \arcsin \{0,5385sn^2 [1,396 + 0,0004976s; 0,5189] - 1\} \quad \text{dla } 59,0 \leq s \leq 600,0, \end{aligned}$$

$$(8.8) \quad \Delta F(\theta, k) = K(k) - F(\theta, k), \quad \Delta E(\theta, k) = E(k) - E(\theta, k).$$

Obliczono stąd strzałkę ugięcia na końcu wspornika $f = 18,56$; maksymalne skrócenie długości rzutu poziomego belki 0,53 cm (czyli $x \approx s$); kąt ugięcia na końcu belki wynosi $\varphi_L = 2^\circ 31'$. Równania bezwymiarowych momentów mają postać

$$(8.9) \quad \begin{aligned} m &= 0,9107 + 1,767 \sqrt{-0,4876 - \sin \psi_{III}} \quad \text{dla } 0 \leq s \leq 59,0, \\ m &= 5,911 \sqrt{-0,4616 - \sin \psi_I} \quad \text{dla } 59,0 \leq s \leq 600,0. \end{aligned}$$

Maksymalny moment w belce wynosi

$$(8.10) \quad m = 1,107 < m_{\max} = \frac{2S}{W} = 1,155,$$

a największa co do bezwzględnej wartości siła podłużna — $n = -0,006532$, co jak w poprzednim przykładzie usprawiedliwia pominięcie wpływu siły podłużnej na zginanie.

W przeprowadzonych wyżej obliczeniach istotny problem stanowiło dokładne określenie wartości całek eliptycznych. Trudności wynikły z powodu braku odpowiednio gęstych tablic ominięto w dwojaki sposób: przez zastosowanie dwukierunkowej interpolacji parabolicznej Lagrange'a (pierwszy przykład), lub przez rozwinięcie w szereg wyrażen (8.8) dla $\theta = \pi/2$ (drugi przykład):

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \Delta F(\theta, k) &= \frac{z}{\sqrt{1-k^2}} \left[1 - \frac{k^2}{6(1-k^2)} z^2 + \frac{(4+5k^2)k^2}{120(1-k^2)^2} z^4 + \dots \right], \\ \Delta E(\theta, k) &= z \sqrt{1-k^2} \left[1 + \frac{k^2}{6(1-k^2)} z^2 - \frac{(4-k^2)k^2}{120(1-k^2)^2} z^4 + \dots \right], \\ z &= \frac{\pi}{2} - \theta, \end{aligned}$$

co okazało się praktycznie bardziej korzystne.

9. Zastosowanie metody wielopunktowych przekrojów zastępczych do obliczania skończonych ugięć sprężysto-plastycznych belek pozwala na uniknięcie jednej z podstawowych trudności: wpływu kształtu przekroju poprzecznego na linię ugięcia belki. Dzięki temu można uzyskać jednolitą i stosunkowo prostą postać rozwiązania dla belek o dowolnych kształtach przekroju poprzecznego, co ma istotne znaczenie wobec braku rozwiązań ścisłych lub ich nader skomplikowanej postaci (prostokąt). Uzyskane rozwiązania są szczególnie proste przy założeniu stałej siły podłużnej $n = \text{const}$. Wówczas w przypadku sił i momentów skupionych wzory końcowe dają się napisać za pomocą stabilizowanych całek i funkcji eliptycznych

[por. (4.32) i (4.36)]. Wadą metody jest konieczność «zszywania» rozwiązań odnoszących się do poszczególnych przedziałów. Dokładność obliczeń zależy w znacznej mierze od liczby «mas skupionych» w przekroju zastępczym i wraz z nią wzrasta. Jak wykazują przeliczenia praktyczne wystarczający jest przekrój czteropunktowy, wówczas podobnie jak przy małych ugięciach błędy w ocenie ugięć są średnio rzędu kilku procent.

Literatura cytowana w tekście

1. P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
2. N. J. HUFFINGTON, I. G. LUCHAK, M. E. RAVILLE, C. J. THORNE, *On the nonlinear differential equation for beam deflection by E. J. Scott and D. R. Carver*, J. Appl. Mech., 1, 23 (1956), 144-145.
3. A. M. Кочетков, *Об изгибе стержней при больших перемещениях*, Инж. Журнал, 5, 6 (1965), 1081-1086.
4. Л. О. Колесников, *Метод дослідження великих переміщень стержня у пружно-пластичній стадії*, Прикл. Мех., 3, 4 (1958), 317-325.
5. С. Д. Лейтес, *К вопросу о механизме потери устойчивости*, Инж. Сб., 7 (1950), 123-130.
6. J. ORKISZ, *Zasady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla belek zginanych w zakresie sprężysto-plastycznym*, Czas. Techn. 3., 67 (1962), 9-13. Streszcz. ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 10, 10 (1962), 405-414.
7. J. ORKISZ, *Przykłady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla belek zginanych w zakresie sprężysto-plastycznym*, Czas. Techn., 10, 67 (1962).
8. J. ORKISZ, *Krzywe graniczne dla zastępczych wielopunktowych przekrojów belek zginanych sprężysto-plastycznie*, Czas. Techn., 5, 67 (1962), 1-11. Streszczenie w języku angielskim—Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11, 10 (1962), 451-460.
9. J. ORKISZ, *Obliczanie belek statycznie niewyznaczalnych w zakresie sprężysto-plastycznym metodą wielopunktowych przekrojów zastępczych*, Arch. Inżyn. Ładow., 1, 10 (1964), 71-85.
10. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Małe ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963), 677-712, Streszcz. ang. I cz.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 4, 12 (1964), 177-186.
11. Е. П. Попов, *Нелинейные задачи статики тонких стержней*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1951.
12. Z. WASZCZYNYN, M. ŻYCZKOWSKI, *Finite deflections of elastic-plastic beams, the stretchability of their axes being taken into account*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 10, 11 (1963), 347-358.
13. M. ŻYCZKOWSKI, *Theory of finite deflections of elastic-plastic beams*, Proc. Sec. Congr. Mech. in India, New Delhi 1957, 24-32; Czas. Techn., 3, 62 (1957), 1-7.

Резюме

КОНЕЧНЫЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПРОГИБЫ БАЛОК ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Работа касается применения, приведенного в [6, 7, 8, 10], метода многоточечных эквивалентных сечений к приближенному расчету конечных упруго-пластических прогибов балок. Этот метод состоит в замене данного сечения балки т. наз. многоточечным эквивалентным сечением (рис. 1), состоящим из n полок, обладающих сосредоточенными поверхностями и затем в точном определении прогибов такой балки. Благодаря этому, для модели идеаль-

но упругого тела и тела с многократным кусочно-линейным упрочнением, можно получить самую простую (линейную) зависимость между изгибающим моментом, продольной силой и кривизной балки.

В работе рассматривается случай произвольной нагрузки пересчитанной на горизонтальную проекцию балки и произвольно действующих сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов. В результате получаются системы прогиба балки. Специально простые решения [см. (4.32) и (4.36)], выраженные стабулазированными неполными интегралами и эллиптическими функциями, получены для случая постоянной продольной силы ($n = \text{const}$) при отсутствии сплошной нагрузки. В конкретном случае консольной балки рассматривается вопрос крайних условий и область, в которой могут изменяться внешние силы, чтобы балка находилась в упруго-пластическом состоянии.

Работа иллюстрируется численными примерами.

S u m m a r y

FINITE ELASTIC PLASTIC DEFLECTIONS OF A BEAM OF ANY CROSS-SECTION

The present paper is concerned with the application of the method of substitute "multipoint sections" described in Refs. 6, 7, 8, 10 for approximate computation of finite elastic-plastic deflection of a beam. This method consists in replacing the given cross-section by a "multipoint section" (Fig. 1) composed of n "concentrated flanges" and an accurate computation of the deflection of the beam thus obtained. A linear relation (which is the simplest possible) between the bending moment and the longitudinal force and the curvature of the beam (cf. (2.1)) can be obtained in this way for a perfect rigid-plastic body and a body with sectionally linear strain hardening independently of the form of the cross-section.

The case considered in the present paper is that of any load distributed along the horizontal projection and concentrated forces and moments acting in any manner. As a result sets of differential equations are obtained. Their solutions describe the form of the deflection line. Particularly simple solutions [cf. (4.32) and (4.36)] expressed by tabularized incomplete elliptic integrals and functions are obtained in the case of a constant longitudinal force ($n = \text{const}$) with no distributed load. In the practical case of a cantilever the problem of boundary conditions is considered as well as the range within which the external forces should vary so that the beam may remain in the elastic-plastic state. The paper is illustrated by numerical examples.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI
I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
oraz
KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 czerwca 1966 r.