

LĘPKOSPĘRZYSTA POWŁOKA WALCOWA NA PODŁOŻU LĘPKOSPĘRZYSTYM
O JEDNOKIERUNKOWEJ CHARAKTERYSTYCE

BOGDAN SKALMIERSKI, ERNEST CZOGAŁA (GLIWICE)

Wstęp

W pracy omówiono problem zginania cienkościennych lepkospęrzystych powłok walcowych na podłożu o jednokierunkowej charakterystyce lepkospęrzystej. Założono, że obciążenia stanowią wyłącznie siły promieniowe. Zagadnienie rozpatrzono w dwóch aspektach: jako quasi-statyczne i jako dynamiczne, tzn. z uwzględnieniem sił bezwładności.

Wykorzystano metody transformacji całkowych, w szczególności transformację Laplace'a. Rozwiązania otrzymano w oparciu o analogię sprężysto-lepkospęrzystą [3, 4, 5]. Specjalne miejsce zajmują w pracy obliczenia numeryczne. Obliczenia dotyczą zagadnienia quasi-statycznego dla siły promieniowej, której punkt przyłożenia zmienia się na obwodzie powłoki walcowej zamkniętej.

Do rozwiązań szczegółowych przyjęto zarówno dla powłoki jak i dla podłoża model reologiczny Voigta.

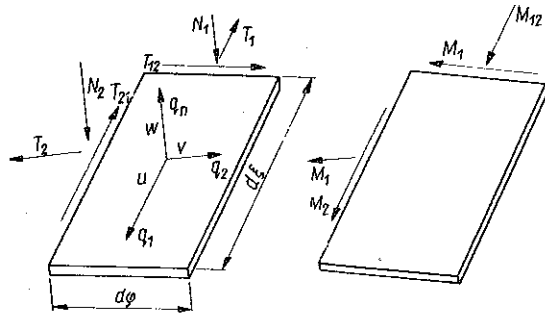
1. Równania równowagi

Równanie równowagi wyprowadzimy przy założeniach liniowej teorii powłok cienkościennych:

- 1) powłoka jest wykonana z materiału podlegającego prawu Hooke'a,
- 2) włókna powłoki prostoliniowe prostopadłe do powierzchni środkowej zostają po odkształceniu powłoki także proste i prostopadłe oraz nie zmieniają swojej długości,
- 3) naprężenia w płaszczyznach równoległych do powierzchni środkowej można pominąć.

Rozważmy nieskończenie mały element cienkościennej powłoki walcowej (rys. 1).

Na element ten działają obciążenia zewnętrzne i wewnętrzne. W ogólnym przypadku obciążenie zewnętrzne ciągle rozłożone posiada trzy składowe q_1, q_2, q_3 .



Rys. 1

Powierzchnię środkową rozpatrywanej powłoki opisują równania

$$(1.1) \quad x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = R\xi.$$

Wielkości wewnętrzne są siłami i momentami rozłożonymi wzdłuż linii ortogonalnych $\xi = \text{const}$ i $\varphi = \text{const}$. Do grupy sił wewnętrznych należą siły osiowe T_1 i T_2 , siły styczne T_{12} i T_{21} oraz siły poprzeczne N_1 i N_2 . Grupa momentów składa się z momentów gnących M_1 i M_2 oraz skręcających M_{12} i M_{21} .

Element powłoki pozostaje w równowadze, gdy suma sił i momentów działających na ten element równa się zeru, zatem musi być spełniony układ równań

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \varphi} \right) + q_1 = 0, \\ & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{N_2}{R} + q_2 = 0, \\ & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} \right) - \frac{T_2}{R} + q_n = 0, \\ & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi} \right) - N_1 = 0, \\ & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right) - N_2 = 0, \\ & T_{12} - T_{21} - \frac{M_{21}}{R} = 0. \end{aligned}$$

Wielkości wewnętrzne można powiązać ze składowymi odkształcenia oraz składowe odkształcenia ze składowymi przemieszczeń [1], str. 4. Korzystając z powyższych powiązań i rugując siły poprzeczne N_1 i N_2 po przekształceniach otrzymamy

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} + \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} + R^2 \frac{1-\nu^2}{E\delta} q_1 = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} v + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} w + R^2 \frac{1-\nu^2}{E\delta} q_2 = 0, \\ & \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} v + \\ & + (1+c^2 \nabla^2 \nabla^2) w - R^2 \frac{1-\nu^2}{E\delta} q_n = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Układ ten stanowi warunki równowagi elementu powłoki walcowej wyrażone w przemieszczeniach.

2. Rozwiązania równań dla lepkospłężystej powłoki

Podstawą naszych rozważań będą równania różniczkowe walcowej powłoki zamkniętej [1]:

$$(2.1) \quad G_w u = \Phi_u w, \quad G_w v = \Phi_v w, \quad \Omega w = G_w z,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} - \\ &\quad - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\}, \\ \Phi_v &= \nu \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\}, \\ (2.2) \quad \Omega &= \nu(1+\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} \left\{ 1 - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left\{ 1 - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\}^2 - \\ &\quad - \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} + G_w(1+c^2 \nabla^4), \\ G_w &= \frac{1-\nu}{2} \nabla^4 + c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\ z &= R^2 \frac{1-\nu^2}{E\delta} q_n(\xi, \varphi, t). \end{aligned}$$

Rozpatrujemy problem z punktu widzenia mechaniki jako quasi-statyczny i przyjmujemy tylko obciążenie promieniowe w postaci

$$(2.3) \quad q_n(\xi, \varphi, t) = q(\xi, \varphi, t) - kw(\xi, \varphi, t),$$

gdzie w, u, v są odpowiednio przemieszczeniami promieniowymi, osiowymi i stycznymi oraz są funkcjami współrzędnych ξ, φ, t . Inne symbole oznaczają: k stałą sprężystości podłoża powłoki, E moduł sprężystości powłoki, R promień krzywizny walca oraz δ grubość powłoki.

Dla przypadku przegubowego zamocowania brzegów powłoki przemieszczenia w będziemy szukać w formie

$$(2.4) \quad w(\xi, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} w_{mn}(\xi, \varphi, t) \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi.$$

Wstawiając (2.4) do ostatniego równania układu (2.1), wykorzystując analogię sprężysto-lepkosprężystą i wykonując na otrzymanym równaniu transformację Laplace'a dostaniemy następujący związek pomiędzy współczynnikami odpowiednich szeregów:

$$(2.5) \quad \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))} \bar{\Omega}_{mn}(p) \bar{w}_{mn}(p) + \bar{k}(p) \bar{G}_{wmn}(p) \bar{w}_{mn}(p) = \bar{G}_{wmn}(p) \bar{q}_{mn}(p),$$

skąd po algebraicznych przekształceniach znajdziemy

$$(2.6) \quad \bar{w}_{mn}(p) = \frac{\bar{q}_{mn}(p)}{k(p) + \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)}},$$

gdzie dla $\bar{\nu}(p) = \nu$:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{mn}(p) = \Omega_{mn} = & \nu(1+\nu) \frac{m^2 n^2 \pi^2}{l^2} \left\{ 1 + c^2 \left[(2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} - \\ & - \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) n^2 \left\{ 1 + c^2 \left[(2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\}^2 - \\ & - \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 + c^2 \left[2(1-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} \nu^2 \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \\ & + \left[1 + c^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right)^2 \right] \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right)^2 + \right. \\ & \left. + c^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \left[2(1-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{wmn}(p) = G_{wmn} = & \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right)^2 + \\ & + c^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \left[2(1-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right], \end{aligned}$$

przy czym

$$F_{wmn}(\xi, \varphi) = \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi.$$

Poszukując pozostałych przemieszczeń w formie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} u_{mn} \cos \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi, \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} v_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi, \end{aligned}$$

z dwóch pierwszych równań układu (2.1) przy wykorzystaniu analogii sprężysto-lepkospreżystej otrzymamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \bar{G}_{wmn}(p) \bar{u}_{mn}(p) &= \bar{\Phi}_{umn}(p) \bar{w}_{mn}(p), \\ \bar{G}_{vmn}(p) \bar{v}_{mn}(p) &= \bar{\Phi}_{vmn}(p) \bar{w}_{mn}(p), \end{aligned}$$

gdzie dla $\bar{v}(p) = v$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{umn}(p) = \Phi_{umn} &= - \left\{ \frac{1+\nu}{2} \frac{mn^2\xi}{l} \left\{ 1 + c^2 \left[(2-\nu) \frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \nu \frac{m\pi}{l} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2 + c^2 \left[2(1-\nu) \frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

przy czym

$$F_{umn}(\xi, \varphi) = \cos \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{vmn}(p) = \Phi_{vmn} &= - \left\{ \left[\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right] n \left\{ 1 + c^2 \left[(2-\nu) \frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \nu \frac{1+\nu}{2} \frac{m^2\pi^2}{l^2} n \right\} \end{aligned}$$

oraz

$$F_{vmn}(\xi, \varphi) = \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi.$$

Podstawiając (2.6) w (2.4) dostajemy

$$(2.9) \quad \bar{w}(\xi, \varphi, p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\bar{q}_{mn}(p)}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}} F_{wmn}(\xi, \varphi),$$

gdzie

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } m \geq 1, \quad n = 0, \\ 1 & \text{dla } m \geq 1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Dla wyznaczenia przemieszczeń przy dowolnym obciążeniu rozwiążemy zagadnienie prowadzące do wyznaczenia funkcji wpływu.

W tym celu obciążymy promieniowo powłokę siłą skupioną $P=1$, działającą w punkcie o współrzędnych $\xi = x$, $\varphi = \pi$. Obciążenie to przedstawimy w postaci dystrybucji δ -Dirac'a

$$(2.10) \quad q(\xi, \varphi, t) = \frac{1}{2R^2} \delta(\varphi - \pi) \delta(\xi - x) \delta(t).$$

Dzielenie przez 2 jest wynikiem złożenia dwu powłok «połówkowych» o kącie $\varphi = \pi$.

Po transformacji Laplac'a otrzymamy

$$(2.11) \quad \bar{q}(\xi, \varphi, p) = \frac{1}{2R^2} \delta(\varphi - \pi) \delta(\xi - x).$$

Obliczymy współczynnik $\bar{q}_{mn}(p)$:

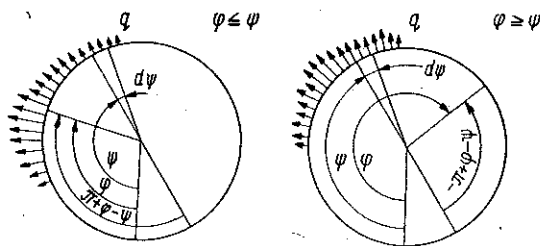
$$(2.12) \quad \bar{q}_{mn}(p) = \frac{4}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{1}{2R^2} \delta(\varphi - \pi) \delta(\xi - x) F_{wmn},$$

gdzie $l = L/R$ oznacza długość zredukowaną powłoki.

Całkując (2.12) dostaniemy

$$(2.13) \quad \bar{q}_{mn}(p) = \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Wprowadzając nową współrzedną dla jakiegoś innego położenia kąowego siły $P = 1$ (rys. 2) zauważymy, że



Rys. 2

$$\sin n(\pi + \varphi - \psi) = \sin n(-\pi + \varphi - \psi) = (-1)^n \sin n(\varphi - \psi),$$

$$\cos n(\pi + \varphi - \psi) = \cos n(-\pi + \varphi - \psi) = (-1)^n \cos n(\varphi - \psi).$$

Po wprowadzeniu ostatnich związków oraz (2.13) do równania (2.9) otrzymamy przemieszczenie, pochodzące od jednostkowego obciążenia, co zaznaczymy indeksem (1) u góry:

$$(2.14) \quad w^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) = \frac{2}{\pi LR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}} F'_{wmn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p)),$$

gdzie

$$F'_{wmn}(\xi, \varphi - \psi(p)) = \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\varphi - \bar{\psi}(p)).$$

We wzorach tych $\bar{\psi}(p) \triangleq \psi(t)$ może oznaczać ruchomą współrzędną ψ .

Korzystając z układu równań (2.8) możemy otrzymać natychmiast pozostałe przemieszczenia dla siły jednostkowej:

$$(2.15) \quad \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) = \\ = \frac{2}{\pi LR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_{wmn}}{G_{wmn}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}} F'_{wmn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p)),$$

gdzie

$$(2.16) \quad \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) = \\ = \frac{2}{\pi LR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{vmn}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{vmn}}} F'_{vmn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p))$$

oraz gdzie

$$F'_{vmn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p)) = \sin \frac{m\pi \xi}{l} \sin n(\varphi - \bar{\psi}(p)).$$

Mając przemieszczenia wywołane działaniem siły jednostkowej, możemy określić stan przemieszczeń dla dowolnego obciążenia $q(x, \psi, t) \triangleq \bar{q}(x, \psi, p)$; a więc

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \bar{w}(\xi, \varphi, p) &= R^2 \iint_S \bar{w}^{(1)} \bar{q} dx d\psi, \\ \bar{u}(\xi, \varphi, p) &= R^2 \iint_S \bar{u}^{(1)} \bar{q} dx d\psi, \\ \bar{v}(\xi, \varphi, p) &= R^2 \iint_S \bar{v}^{(1)} \bar{q} dx d\psi, \end{aligned}$$

gdzie całkujemy po całej powierzchni S .

Dokonując na powyższych równaniach transformacji odwrotnej Laplace'a otrzymamy

$$(2.18) \quad \begin{aligned} w(\xi, \varphi, t) &= R^2 \iint_S \left[\int_0^t D_{mnn}(x, \psi, \xi, \varphi, t-\tau) q(x, \psi, \tau) d\tau \right] dx d\psi, \\ u(\xi, \varphi, t) &= R^2 \iint_S \left[\int_0^t D_{mnu}(x, \psi, \xi, \varphi, t-\tau) q(x, \psi, \tau) d\tau \right] dx d\psi, \\ v(\xi, \varphi, t) &= R^2 \iint_S \left[\int_0^t D_{mnv}(x, \psi, \xi, \varphi, t-\tau) q(x, \psi, \tau) d\tau \right] dx d\psi, \end{aligned}$$

gdzie

$$D_{m\nu\nu}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{w}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \},$$

$$D_{m\nu u}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \},$$

$$D_{m\nu v}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \}$$

są wspomnianymi na początku funkcjami wpływu Greena.

3. Przypadek $\bar{k}(p) = \alpha \bar{E}(p)$ dla modelu Voigta

Rozważmy obecnie nasze dość ogólne równania przy pewnych uproszczeniach. Przyjmijmy mianowicie dla podłoża związek $\bar{k}(p) = \alpha \bar{E}(p)$, gdzie $\alpha = \text{const}$. Oznacza to, że przyjmujemy dla podłoża taki sam model reologiczny jak dla powłoki.

Dla modelu Voigta [3] przy uwzględnieniu warunku nieściśliwości $\bar{\nu}(p) = \nu = 1/2$ [3], str. 75, otrzymamy

$$\frac{E_0}{\bar{E}(p)} = \frac{1}{1 + \lambda p}.$$

W dalszych uproszczeniach przyjmijmy jeszcze $\bar{\nu}(p) = \nu$.

Funkcja Greena dla przemieszczenia promieniowego przyjmie postać

$$(3.1) \quad D_{m\nu\nu}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \\ = \frac{2}{\pi LR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi)}{E_0 \lambda \left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + p} \right\}.$$

Wstawiając (3.1) do (2.20) otrzymamy przemieszczenia dla modelu Voigta:

$$(3.2) \quad w(\xi, \varphi, t) = \frac{2R}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l}}{E_0 \lambda \left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \times \\ \times \int_S \int_0^t \left[\int_0^t \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\varphi - \psi) q(x, \psi, t) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} d\tau \right] dx d\psi,$$

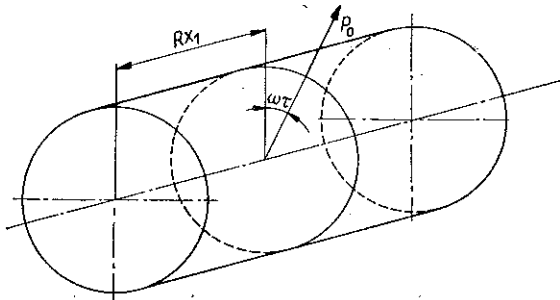
$$u(\xi, \varphi, t) = \frac{2R}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \frac{\cos \frac{m\pi\xi}{l}}{E_0 \lambda \left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \times \\ \times \int_S \int_0^t \left[\int_0^t \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\varphi - \psi) q(x, \psi, t) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} d\tau \right] dx d\psi,$$

(3.2)

$$v(\xi, \varphi, t) = \frac{2R}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l}}{E_0 \lambda \left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Phi_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \times \\ \times \int_S \int_0^t \left[\int_0^t \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n(\varphi - \psi) q(x, \psi, t) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} d\tau \right] dx d\psi.$$

4. Przypadek siły wędrującej

Założymy obecnie, że punkt przyłożenia siły porusza się P_0 po obwodzie koła, z prędkością kątową ω (rys. 3).



Rys. 3

Obciążenie przyjmujemy w postaci

$$(4.1) \quad q(x, \psi, \tau) = \frac{P_0}{R^2} \delta(\psi - \omega\tau) \delta(x - x_1).$$

Przypadek ten sprowadza się do obliczenia całek w równaniach (2.2), (2.3) i (2.1). W rezultacie otrzymujemy następujące wyniki:

$$(4.2) \quad w(\xi, \varphi, t) = \frac{2P_0}{\pi L R E_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \times \\ \times \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi - \omega n) - \sin n(\varphi - \omega t) - \right. \\ \left. - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \varphi, t) &= \frac{2P_0}{\pi L R E_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos \frac{m\pi \xi}{l}}{\left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \times \\
 &\quad \times \frac{\lambda n \omega}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \left\{ \frac{1}{\lambda \omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right\}, \\
 v(\xi, \varphi, t) &= \frac{2P_0}{\pi L R E_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\left[\alpha + \frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \times \\
 &\quad \times \frac{\lambda n \omega}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \left\{ \frac{1}{\lambda \omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

5. Zagadnienie drgań powłoki lepkosprężystej

Punktem wyjścia naszych rozważań będą nadal równania (2.1), opisujące stan równowagi powłoki. Obciążenie nadal pozostawimy promieniowe, uwzględniając siłę bezwładności:

$$(5.1) \quad q^*(\xi, \varphi, t) = q(\xi, \varphi, t) - kw(\xi, \varphi, t) - \rho \delta \frac{\partial^2 w(\xi, \varphi, t)}{\partial t^2},$$

gdzie ρ jest gęstością materiału powłoki.

Pomijamy tutaj dynamiczny wpływ sił podłużnych zakładając, że energia drgań podłużnych jest mała w porównaniu z energią drgań poprzecznych [1].

Uwzględniając (5.1) w ostatnim równaniu układu (2.1) wykonując na nim transformację Laplace'a, przy jednoczesnym wykorzystaniu analogii sprężysto-lepkosprężystych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad & \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2 (1 - \bar{\nu}^2(p))} \bar{\Omega}(p) \bar{w}(\xi, \varphi, p) + \bar{k}(p) \bar{G}_w(p) \bar{w}(\xi, \varphi, p) + \\
 & + \bar{G}_w(p) \rho \delta p^2 \bar{w}(\xi, \varphi, p) = \bar{G}_w(p) \bar{q}(\xi, \varphi, p) + p \bar{G}_w(p) \rho \delta f(\xi, \varphi, 0) + \\
 & + \bar{G}_w(p) \rho \delta g(\xi, \varphi, 0),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$f(\xi, \varphi, 0) = w(\xi, \varphi, 0) \text{ i } g(\xi, \varphi, 0) = \dot{w}(\xi, \varphi, 0).$$

Dokonując również podstawienia (2.4) w równaniu (5.2) przy zachowaniu tych samych warunków brzegowych jak w równaniu dostaniemy:

$$(5.3) \quad \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2 (1 - \bar{\nu}^2(p))} \bar{\Omega}_{mn}(p) \bar{w}_{mn}(\xi, \varphi, p) + \bar{k}(p) \bar{G}_{wmn}(p) \bar{w}_{mn}(\xi, \varphi, p) + \\ + \bar{G}_{wmn}(p) \rho \delta p^2 \bar{w}_{mn}(\xi, \varphi, p) = \bar{G}_{wmn}(p) \bar{q}_{mn}(\xi, \varphi, p) + \\ + p \bar{G}_{wmn}(p) \rho \delta f_{mn}(\xi, \varphi, 0) + \bar{G}_{wmn}(p) \rho \delta g_{mn}(\xi, \varphi, 0).$$

Funkcje wpływu przy założeniu siły jednostkowej otrzymamy w następującej postaci:

$$\bar{w}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \times \\ \times \frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{l} + (-1)^n p \rho \delta f_{mn}(\xi, \varphi, 0) + (-1)^n \rho \delta g_{mn}(\xi, \varphi, 0) \\ \times \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2 (1 - \bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)} + \bar{k}(p) + \rho \delta p^2 \\ \times F'_{wmn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p)), \\ (5.4) \quad \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\bar{\Phi}_{umn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)} \times \\ \times \frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{l} + (-1)^n p \rho \delta f_{mn}(\xi, \varphi, 0) + (-1)^n \rho \delta g_{mn}(\xi, \varphi, 0) \\ \times \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2 (1 - \bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)} + \bar{k}(p) + \rho \delta p^2 \\ \times F''_{umn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p)), \\ \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\bar{\Phi}_{vmn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)} \times \\ \times \frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{l} + (-1)^n p \rho \delta f_{mn}(\xi, \varphi, 0) + (-1)^n \rho \delta g_{mn}(\xi, \varphi, 0) \\ \times \frac{\bar{E}(p) \delta}{R^2 (1 - \bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)} + \bar{k}(p) + \rho \delta p^2 \\ \times F_{vmn}(\xi, \varphi - \bar{\psi}(p)).$$

Dla dowolnego obciążenia promieniowego $\bar{q}(x, \psi, p) = q(x, \psi, t)$ przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie dostajemy następujące przemieszczenia:

$$(5.5) \quad w(\xi, \varphi, t) = R^2 \iint_S \left[\int_0^t R_{mnw}(x, \psi, \xi, \varphi, t - \tau) q(x, \psi, \tau) d\tau \right] dx d\psi, \\ u(\xi, \varphi, t) = R^2 \iint_S \left[\int_0^t R_{mnu}(x, \varphi, \xi, \varphi, t - \tau) q(x, \psi, \tau) d\tau \right] dx d\psi, \\ v(\xi, \varphi, t) = R^2 \iint_S \left[\int_0^t R_{mnv}(x, \psi, \xi, \varphi, t - \tau) q(x, \psi, \tau) d\tau \right] dx d\psi,$$

gdzie

$$R_{mnn}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{w}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \},$$

$$R_{mnu}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \},$$

$$R_{mnv}(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \}$$

są również funkcjami wpływu Greena.

6. Przypadek $\bar{k}(p) = \bar{\alpha E}(p)$ dla modelu Voigta i drgań powłoki lepkosprężystej

Dla przemieszczenia $w(\xi, \varphi, t)$ napiszemy funkcję Greena w postaci

$$(6.1) \quad R(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \left[\frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{l} r_{1mn}(t) + \right. \\ \left. + (-1)^n \varrho \delta f_{mn}(\xi, \varphi, 0) r_{2mn}(t) + (-1)^n \varrho \delta g_{mn}(\xi, \varphi, 0) r_{1mn}(t) \right] \times \\ \times F'_{mnn}(\xi, \varphi - \psi).$$

Zakładając warunek nieściśliwości $\nu = 1/2$ oraz oznaczając

$$a_{mn} = \frac{E_0}{\varrho \delta} \left[\frac{4\delta}{3R^2} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} + \alpha \right],$$

rozpatrzmy dwa przypadki: 1° dla $1 - a_{mn} \lambda^2/4 > 0$ mamy

$$r_{1mn}(t) = \frac{1}{\varrho \delta} \frac{e^{-\frac{1}{2} a_{mn} \lambda t}}{\sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{1}{4} a_{mn} \lambda^2 \right)}} \sin \sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{1}{4} a_{mn} \lambda^2 \right)} t,$$

$$r_{2mn}(t) = \frac{1}{\varrho \delta} e^{-\frac{1}{2} a_{mn} \lambda t} \left[\cos \sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4} \right)} t - \frac{a_{mn} \lambda \sin \sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4} \right)} t}{\sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4} \right)}} \right];$$

(6.2) 2° dla $1 - a_{mn} \lambda^2/4 < 0$

$$r_{1mn}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2} a_{mn} \lambda t}}{\varrho \delta \sqrt{a_{mn} \left(\frac{a_{mn} \lambda^2}{4} - 1 \right)}} \operatorname{sh} \sqrt{a_{mn} \left(\frac{1}{4} a_{mn} \lambda^2 - 1 \right)} t,$$

$$r_{2mn}(t) = \frac{1}{\varrho \delta} e^{-\frac{1}{2} a_{mn} \lambda t} \left[\operatorname{ch} \sqrt{a_{mn} \left(\frac{a_{mn} \lambda^2}{4} - 1 \right)} t - \frac{a_{mn} \lambda \operatorname{sh} \sqrt{a_{mn} \left(\frac{a_{mn} \lambda^2}{4} - 1 \right)} t}{\sqrt{a_{mn} \left(\frac{a_{mn} \lambda^2}{4} - 1 \right)}} \right].$$

7. Wędrująca siła promieniowa

Dla wędrującego obciążenia promieniowego o postaci

$$q(x, \varphi, \tau) = \frac{P_0}{R^2} \delta(\varphi - \omega\tau) \delta(x - x_1)$$

przy uwzględnieniu sił bezwładności i założeniu $f_{mn}, g_{mn} = 0$ otrzymamy po scałkowaniu przemieszczenie dla przypadku $1 - a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} > 0$

$$w(\xi, \varphi, t) = \frac{P_0 \pi RL}{\rho \delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4}\right)}} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\gamma_{1mn}}{\kappa_{mn}^2 + \gamma_{1mn}^2} \left[\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \sin n(\varphi - \omega t) - \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \times \right. \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \sin \delta_{1mn} - \cos \delta_{1mn} \right) \right] + \frac{\gamma_{2mn}}{\kappa_{mn}^2 + \gamma_{2mn}^2} \left[\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \sin n(-\varphi + \omega t) - \right.$$

$$\left. \left. - \cos n(-\varphi + \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \sin \delta_{2mn} - \cos \delta_{2mn} \right) \right] \right\},$$

gdzie

$$\gamma_{1mn, 2mn} = - \sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4}\right)} \mp n\omega,$$

$$\delta_{1mn, 2mn} = \sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4}\right)} t \pm n\varphi, \quad \kappa_{mn} = \frac{1}{2} a_{mn} \lambda,$$

$$u(\xi, \varphi, t) = \frac{P_0 \pi RL}{\rho \delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn} \left(a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} - 1\right)}} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \cos \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\gamma_{1mn}}{\kappa_{mn}^2 + \gamma_{1mn}^2} \left[\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \sin n(\varphi - \omega t) - \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \times \right. \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \sin \delta_{1mn} - \cos \delta_{1mn} \right) \right] + \frac{\gamma_{2mn}}{\kappa_{mn}^2 + \gamma_{2mn}^2} \left[\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \sin n(-\varphi + \omega t) - \right.$$

$$\left. \left. - \cos n(-\varphi + \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \sin \delta_{2mn} - \cos \delta_{2mn} \right) \right] \right\},$$

$$v(\xi, \varphi, t) = \frac{P_0 \pi RL}{\rho \delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\sqrt{a_{mn} \left(1 - \frac{a_{mn} \lambda^2}{4}\right)}} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\gamma_{2mn}}{\kappa_{2mn}^2 + \gamma_{2mn}^2} \left[\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \cos n(-\varphi + \omega t) + \sin n(-\varphi + \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \cos \delta_{2mn} + \sin \delta_{2mn} \right) \right] - \frac{\gamma_{1mn}}{\kappa_{mn}^2 + \gamma_{1mn}^2} \left[\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \cos n(\varphi - \omega t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \cos \delta_{1mn} + \sin \delta_{1mn} \right) \right] \right\}.$$

Dla przypadku $1 - a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} < 0$ przy założeniu $f_{mn}, g_{mn} = 0$ mamy

$$w(\xi, \varphi, t) = \frac{P_0 \pi LR}{\rho \delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn} \left(a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} - 1 \right)}} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\kappa_{2mn}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{2mn} \cos n(\varphi - \omega t) - n\omega \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{2mn} t} \times \right. \\ \left. \times (\kappa_{2mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi)] - \frac{1}{\kappa_{-1mn}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{1mn} \cos n(\varphi - \omega t) - \right. \\ \left. - n\omega \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{1mn} t} (\kappa_{1mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi)] \right\},$$

gdzie

$$\kappa_{1mn, 2mn} = \frac{1}{2} a_{mn} \lambda \pm \sqrt{a_{mn} \left(a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} - 1 \right)},$$

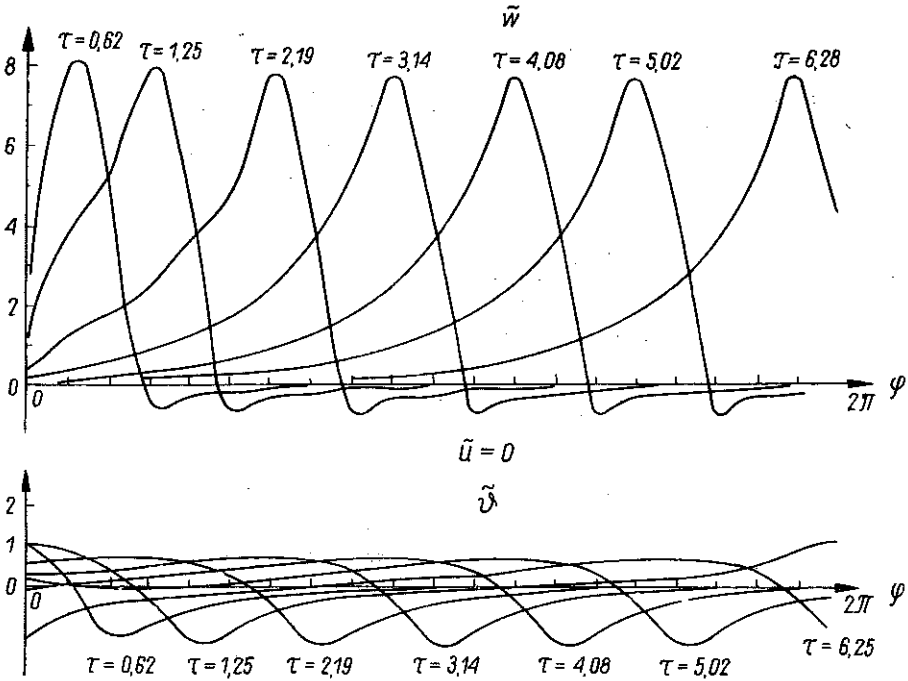
$$u(\xi, \varphi, t) = \frac{P_0 \pi LR}{\rho \delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn} \left(a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} - 1 \right)}} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos \frac{m\pi\xi}{l} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\kappa_{2mn}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{2mn} \cos n(\varphi - \omega t) - n\omega \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{2mn} t} \times \right. \\ \left. \times (\kappa_{2mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi)] - \frac{1}{\kappa_{1mn}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{1mn} \cos n(\varphi - \omega t) - \right. \\ \left. - n\omega \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{1mn} t} (\kappa_{1mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi)] \right\},$$

$$v(\xi, \varphi, t) = \frac{P_0 \pi RL}{\rho \delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn} \left(a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} - 1 \right)}} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\kappa_{2mn}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{2mn} \sin n(\varphi - \omega t) + \omega n \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{2mn} t} \times \right. \\ \left. \times (\kappa_{2mn} \sin n\varphi + n\omega \cos n\varphi)] - \frac{1}{\kappa_{1mn}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{1mn} \sin n(\varphi - \omega t) + \right. \\ \left. + \omega n \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{1mn} t} (\kappa_{1mn} \sin n\varphi + n\omega \cos n\varphi)] \right\}.$$

8. Uwagi końcowe

Wyniki numeryczne uzyskano w oparciu o obliczenia wykonane na maszynie cyfrowej UMC-1 w Ośrodku Maszyn Matematycznych Politechniki Śląskiej. Obliczenia dotyczą zagadnienia quasi-statycznego dla wędrującej siły promieniowej po obwodzie powłoki walcowej zamkniętej. Siła ta obiega powłokę wzdłuż równoleżnika dzielącego ją na dwie równe części. Wyznaczone wartości (rys. 4, 5, 6, 7 i 8) dotyczą następujących wielkości bezwymiarowych:

$$\frac{\xi}{l} = 1,5$$



Rys. 4

$$\tilde{w}(\xi, \varphi, t) = w(\xi, \varphi, t) \pi L R E_0 / 2 P_0,$$

$$\tilde{u}(\xi, \varphi, t) = u(\xi, \varphi, t) \pi L R E_0 / 2 P_0,$$

$$\tilde{v}(\xi, \varphi, t) = v(\xi, \varphi, t) \pi L R E_0 / 2 P_0$$

dla $c^2 = \delta^2 / 12 R^2 = 0,00025$.

Dla współrzędnej φ przyjęte wartości:

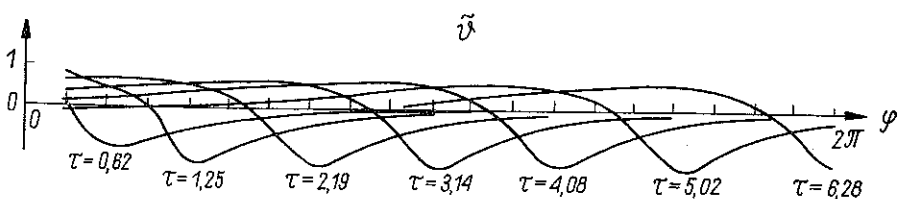
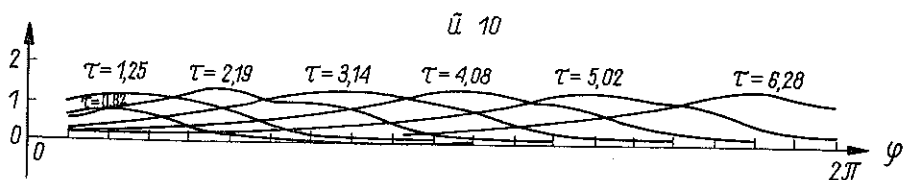
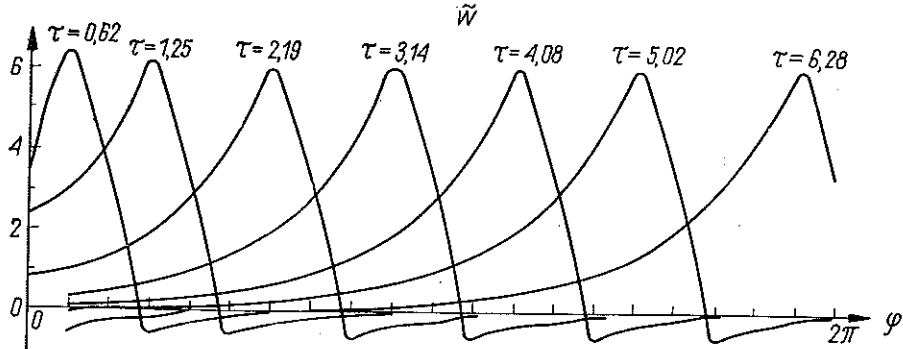
$$\varphi_i / \pi = 0,0; 0,1; 0,2; \dots, 2,0.$$

Ze względu na symetrię zagadnienia obliczenia wykonano tylko dla jednej połowy powłoki przyjmując

$$\xi_i / l = 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,5.$$

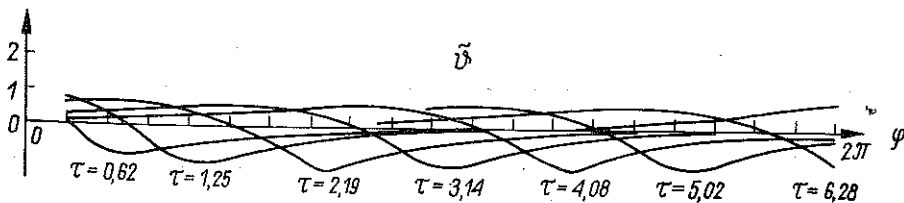
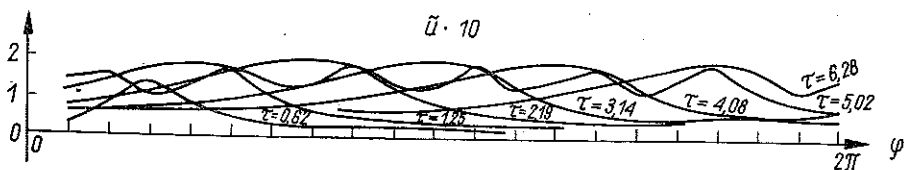
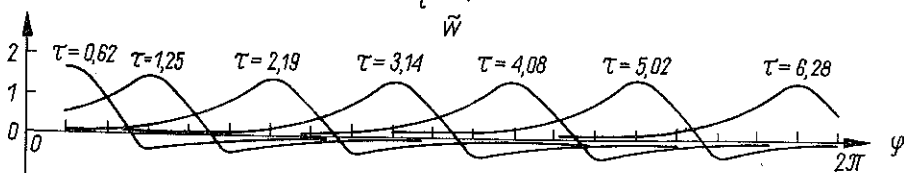
Uzyskano około 20000 wyników dla \tilde{w} , \tilde{u} i \tilde{v} .

$$\frac{\xi}{l} = 1,4$$

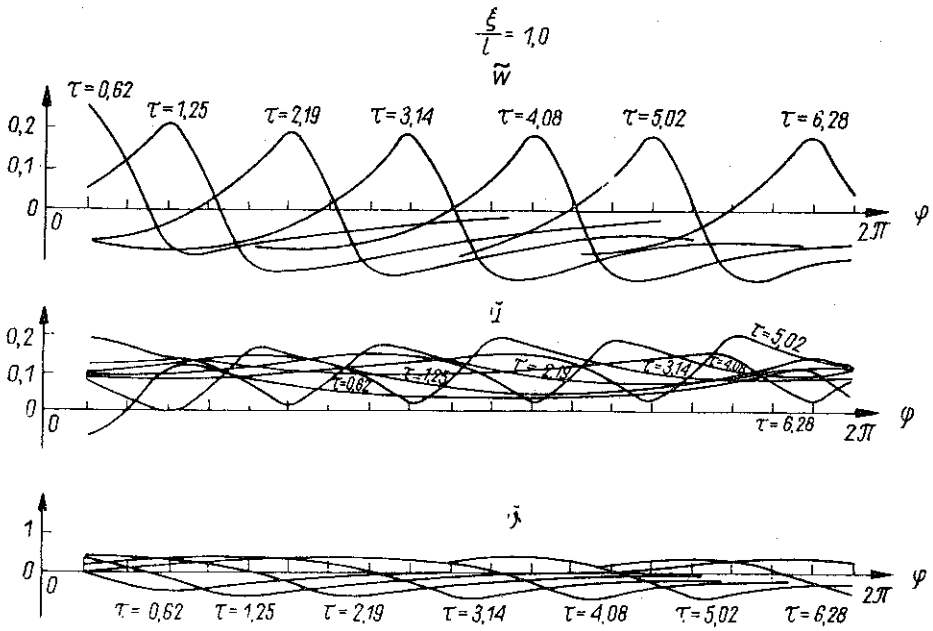


Rys. 5

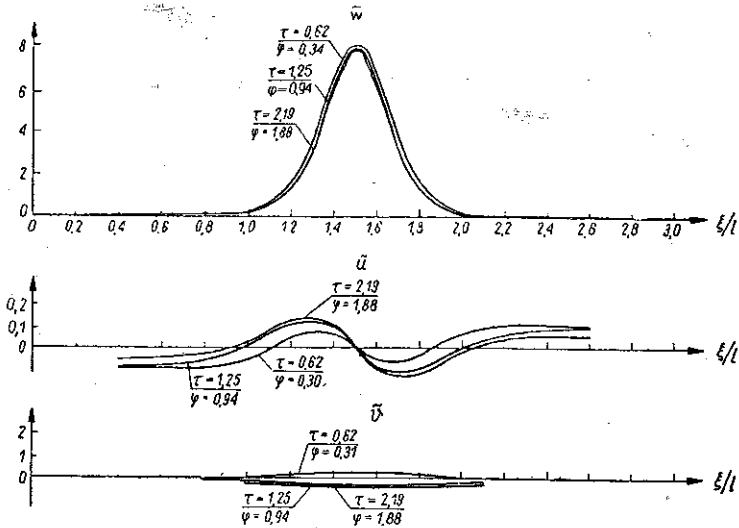
$$\frac{\xi}{l} = 1,2$$



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Z uwagi na obszerność materiału obliczeniowego autorzy postanowili nie zamieszczać wyników, a jedynie ograniczyć się do podania typowych zmian przemieszczeń układu charakteryzujących proces odkształcania.

Na podstawie sporządzonych wykresów warto zauważyć pewne zjawiska charakterystyczne. Do zjawisk tych należy proces wędrowania ekstremów odpowiednich przemieszczeń. Dla przemieszczenia \tilde{w} maximum podąża za punktem przyłożenia siły promieniowej. Spostrzeżenie to jest intuicyjnie jasne zważywszy, że zjawiska zachodzące w materiale lepko-sprężystym charakteryzują się pewnymi opóźnieniami. Przemieszczenia wzdłuż \tilde{u} charakteryzują dwa maksima po obydwu stronach przyłożenia siły.

Przechodząc do przemieszczenia stycznego \tilde{v} obserwujemy ciekawe zjawisko polegające na niejako «popychaniu» maksimum tego przemieszczenia. Innymi słowy maksimum w tym przypadku wyprzedza punkt przyłożenia siły.

Literatura cytowana w tekście

1. B. SKALMIERSKI, *Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych uźebrowanych*, Politechnika Śląska, Zeszyty Naukowe nr 73, Mechanika, Gliwice 1963.
2. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London 1951.
3. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1953.
4. T. ALFREY, *Non homogeneous stresses in visco-elastic media*, Quart. Appl. Math., 2, 1944.
5. E. H. LEE, *Stress analysis in visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Math., 2, 13 (1955).

Резюме

ВЯЗКО-УПРУГАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА НА ВЯЗКО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В работе обсуждается вопрос изгиба тонкостенных вязко-упругих цилиндрических оболочек на основании с однонаправленной вязко-упругой характеристикой. Предполагается, что нагрузки, составляют исключительно радиальные силы. Задача рассматривается в двух аспектах: как квазистатическая и как динамическая, т.е. с учетом сил инерции.

Используется методы интегральных преобразований, а в особенности преобразование Лапласа. Решение получено на основе упруговязкоупругой аналогии [3, 4, 5].

Особое место занимают в работе численные расчеты. Расчеты касаются квази-статической задачи для радиальной силы, странствующей по окружности цилиндрической, замкнутой оболочки.

Для подробных обсуждений принята, как для оболочки так и для основания, реологическая модель Фойгта.

Summary

VISCO-ELASTIC CYLINDRICAL SHELL RESTING ON A FOUNDATION VISCO-ELASTIC IN A SINGLE DIRECTION

This paper is devoted to the problem of bending of a viscoelastic circular shell resting on a foundation having viscoelastic properties in a single direction. It is assumed that the shell is loaded

by radial forces only. The problem is considered in two variants: as a quasi-static and dynamic problem, the inertia forces being taken into consideration in the latter.

Methods of integral transformations are used, the Laplace transformation in particular. The solution is obtained on the grounds of the elastic-viscoelastic analogy [3, 4, 5].

Special emphasis is laid on numerical computations, which concern the quasi-static problem for a radial force travelling along the periphery of a closed cylindrical shell.

The Voigt rheological model is assumed in detailed considerations for both the shell and the foundation.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lutego 1966 r.
