

NAPRĘŻENIE W SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ KULI Z PUSTKĄ KULISTĄ,  
ZNAJDUJĄCEJ SIĘ W ZMIENNYM POLU TEMPERATUR

BOGDAN RANIECKI (WARSZAWA)

I. Wstęp

W pracy podaje się sposób określenia chwilowych i ustalonych naprężeń w kuli z współśrodkową pustką kulistą, znajdującej się w niestacjonarnym polu temperatur. Przyjmując symetrię kulistą rozważono trzy przypadki przy następujących założeniach: 1) obie powierzchnie kuli są wolne od naprężeń, 2) powierzchnia głównego oddziaływania cieplnego jest wolna od naprężeń, natomiast przemieszczenia drugiej powierzchni są równe zeru, 3) wykonując przejście graniczne we wzorach otrzymanych w przypadku drugim, gdy promień pustki kulistej dąży do zera, uzyskano rozwiązanie dla pełnej kuli.

Wyniki uzyskano na podstawie teorii deformacyjnej przyjmując liniowe wzmocnienie oraz pomijając wpływ temperatury na własności fizyczne materiału. W pracy pominięto także wpływ przyspieszeń. Zatem zagadnienie traktowane jest jako quasi-statyczne. Pierwsze założenie ogranicza stosowalność wzorów tylko do tych przedziałów temperatur, w których zmiany własności materiału są jeszcze nieznaczne. Ostatnie założenie może spowodować duże odstępstwo od rzeczywistości tylko w przypadku bardzo szybkich zmian temperatury powierzchni kuli. Można jednakże wykazać, że takie zmiany możliwe są do osiągnięcia (przy wymianie ciepła drogą konwekcji) dopiero przy ogromnych, rzadko spotykanych współczynnikach przenikania ciepła (płyn — ciało stałe) rzędu

$$\frac{c\rho a_0}{2} \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}} \right],$$

gdzie  $c$  oznacza ciepło właściwe ciała stałego,  $\rho$  gęstość ciała stałego oraz  $a_0$  prędkość propagacji fal podłużnych w ciele stałym.

W pracach dotyczących badania stanu naprężenia w sprężysto-plastycznej pełnej kuli (por. np. [1 i 2]) wykazano istnienie w materiale jednocześnie trzech obszarów: odkształceń sprężystych, plastycznych oraz odciążenia. Ten komplikujący rozwiązanie fakt spowodował, że w pracach tych zakładano nieściślność materiału. W pracy [1] przyjmując liniowe wzmocnienie uzyskano błędny obraz ostatecznych naprężeń w kuli ze względu na niepoprawne całkowanie równania równowagi w obszarze odciążenia, co doprowadziło w konsekwencji do błędnego określenia naprężeń na powierzchni granicznej między obszarami odciążenia i obciążenia. W pracy [2] przy-

jęto dodatkowo ciało idealnie-plastyczne, co pozwoliło znacznie uprościć rozwiązanie ze względu na to, że w obszarze odkształceń plastycznych zagadnienie stało się statycznie wyznaczalne.

Rezygnacja z powyższych założeń (jak to pokażemy) powoduje istotne zmiany ilościowe, chociaż jakościowy obraz rozwiązania jest podobny. Dokładność wyznaczonych chwilowych i ostatecznych stanów naprężenia zależy przede wszystkim od dokładności wyznaczenia granic istniejących obszarów. Dlatego sposób określenia tych granic odgrywa ważną rolę w tego typu zagadnieniach. Podobnie jak w pracy [3] pokazano, że wyznaczenie granic sprowadza się do rozwiązania układu równań, z których jedno jest nieliniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym, rozwiązaniem względem pochodnej, a drugie równaniem funkcjonalnym.

## 2. Równania wyjściowe

Opierając się na teorii deformacyjnej oraz wykorzystując ten fakt, że w przypadku symetrii kulistej mamy

$$(2.1) \quad \sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\theta}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r},$$

otrzymamy następujące równania łączące stan naprężenia ze stanem odkształcenia

$$(2.2) \quad \sigma_i = \psi(\varepsilon_i), \quad \sigma_r + 2\sigma_{\varphi} = 3K(\varepsilon_r + 2\varepsilon_{\varphi} - 3\alpha T),$$

gdzie  $\sigma_i^* = |\sigma_i|$  oznacza intensywność naprężenia rozciągającego,  $\varepsilon_i^* = |\varepsilon_i|$  intensywność odkształcenia rozciągającego,  $\psi$  funkcję znaną z próby na czyste rozciąganie,  $\alpha$  współczynnik rozszerzalności liniowej,  $T$  temperaturę,  $K = E/3(1 - 2\nu)$  moduł ściśliwości objętościowej,  $E$  moduł Younga oraz  $\nu$  współczynnik Poissona. Wprowadziliśmy również oznaczenia:

$$(2.3) \quad \sigma_i = \sigma_r - \sigma_{\varphi}$$

oraz

$$(2.4) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(\varepsilon_r - \varepsilon_{\varphi}).$$

Korzystając z idei zawartej w pracy [4] wprowadzimy funkcję

$$(2.5) \quad e = \varepsilon_r - \varepsilon_{\varphi}$$

oraz

$$(2.6) \quad F_1(e) = F(r, t) = \frac{2}{3}\psi\left(\frac{2}{3}e\right) + Ke.$$

Wykorzystując równania (2.2), (2.3), (2.4) i (2.6) równanie równowagi dla małych odkształceń,

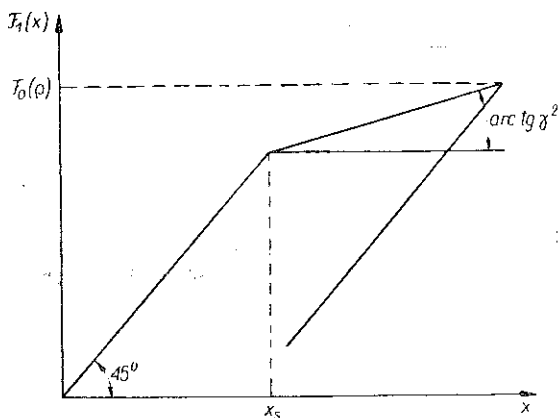
$$(2.7) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_{\varphi})}{r} = 0,$$

przyjmuje postać

$$(2.8) \quad \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{3F}{r} - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy się posługiwać następującymi wielkościami bezwymiarowymi:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{kt}{R^2}, & \varrho &= \frac{r}{R}, & \mathcal{F} &= \frac{2F}{3K\alpha T_0}, & x &= \frac{2E_w e}{3K\alpha T_0}, \\ x_s &= \frac{E_w \varepsilon_s}{K\alpha T_0}, & U &= \frac{2E_w u}{3K\alpha T_0 R}, & \bar{T} &= \frac{T}{T_0}, & S_r &= \frac{2\sigma_r}{3K\alpha T_0}, \\ \gamma_1^2 &= \frac{K}{E_w}, & \gamma^2 &= \frac{\bar{E}_1}{E_w}, & S_\varphi &= \frac{2\sigma_\varphi}{3K\alpha T_0}, & e_r &= \frac{2E_w \varepsilon_r}{3K\alpha T_0}, \\ e_\varphi &= \frac{2E_w \varepsilon_\varphi}{3K\alpha T_0} = \frac{U}{\varrho}, & x &= \frac{\partial U}{\partial \varrho} - \frac{U}{\varrho} = e_r - e_\varphi. & \varepsilon_s &= \frac{2}{3} \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_s. \end{aligned}$$



Rys. 1

Wielkość  $\tau$  nazywamy liczbą Fouriera. We wzorach powyższych przyjęliśmy następujące oznaczenia:  $R$  promień zewnętrznej powierzchni kuli,  $k$  współczynnik dyfuzyjności ciepła materiału kuli,  $T_0$  dowolna stała mająca wymiar temperatury,  $E_1$  moduł liniowego wzmocnienia przy czystym rozciąganiu,  $\sigma_s$  granica sprężystości przy czystym rozciąganiu oraz

$$E_w = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \bar{E}_1 = \frac{4}{9}E_1 + K.$$

Dla przypadku liniowego wzmocnienia funkcja  $\mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(\varrho, \tau)$  przyjmuje na podstawie wzoru (2.6) postać pokazaną na rys. 1.

Całkując równanie (2.8) otrzymamy (w wielkościach bezwymiarowych)

$$(2.10) \quad \mathcal{F} = 2 \left[ \bar{T}(\varrho, \tau) - \frac{1}{\varrho^3} \bar{T}(1, \tau) - \left( \frac{\varrho^3 - 1}{\varrho^3} \right) \omega(\varrho, \tau) \right] + \frac{A(\tau)}{\varrho^3},$$

$$(2.11) \quad \omega(\varrho, \tau) = \frac{3}{1 - \varrho^3} \int_{\varrho}^1 \bar{T}(\eta, \tau) \eta^2 d\eta.$$

Funkcja  $\omega$  oznacza średnią temperaturę warstwy kulistej o promieniach  $r$  i  $R$ . Ze względu na to, że całkowanie równania (2.8) przeprowadzono niezależnie od funkcji  $F_1(x)$ , równanie (2.10) jest słuszne dla wszystkich obszarów.

Nech

$$(2.12) \quad x = G(\mathcal{F}_1)$$

będzie funkcją odwrotną funkcji  $\mathcal{F}_1(x)$ . Na podstawie (2.9) i (2.10) otrzymamy

$$(2.13) \quad \frac{\partial U}{\partial \varrho} - \frac{U}{\varrho} = G(\mathcal{F}_1) = H(\varrho, \tau, A),$$

skąd po scałkowaniu

$$(2.14) \quad \frac{U}{\varrho} = \int_1^{\varrho} \frac{H(\eta, \tau, A)}{\eta} d\eta + B(\tau).$$

Funkcje  $A(\tau)$  i  $B(\tau)$  występujące w równaniach (2.10) i (2.14) wyznaczamy przy rozpatrywaniu kolejnych przypadków.

Na podstawie rys. 1 oraz na podstawie równań (2.2), (2.3) i (2.4) otrzymamy następujące zależności:

dla obszaru odkształceń sprężystych

$$(2.15) \quad x = G(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_1, \quad S_{\varphi} = -2\bar{T} + \frac{\mathcal{F}}{2}(3\gamma_1^2 - 1) + 3\gamma_1^2 e_{\varphi};$$

dla obszaru odkształceń plastycznych

$$(2.16) \quad x = G(\mathcal{F}_1) = \frac{\mathcal{F}_1}{\gamma^2} - z x_s, \quad z = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2},$$

$$S_{\varphi} = -2T + \frac{\mathcal{F}}{2} \left( 3 \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} - 1 \right) + 3\gamma_1^2 e_{\varphi} - \frac{3}{2} \gamma_1^2 z x_s;$$

dla obszaru odciążenia

$$(2.17) \quad x = G(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_0(\varrho) z - x_s z,$$

$$S_{\varphi} = -2\bar{T} + \frac{\mathcal{F}}{2}(3\gamma_1^2 - 1) + 3\gamma_1^2 e_{\varphi} - \frac{3}{2} \gamma_1^2 z x_s + \frac{3}{2} \gamma_1^2 z \mathcal{F}_0(\varrho).$$

Naprężenia  $S_r$  we wszystkich obszarach określa wzór

$$(2.18) \quad S_r = \mathcal{F} + 3\gamma_1^2 e_{\varphi} - 2\bar{T}.$$

3. Przypadek 1

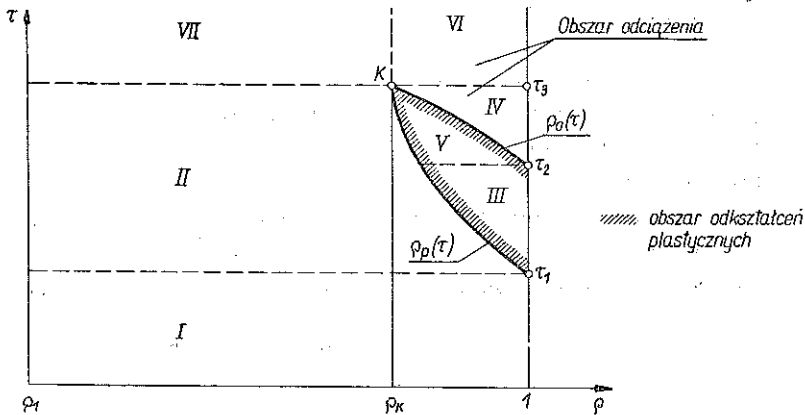
Przyjmujemy, że zewnętrzna i wewnętrzna powierzchnia kuli są wolne od naprężeń, tj.

$$(3.1) \quad [S_r]_{\varrho=1} = 0, \quad [S_r]_{\varrho=e_1} = 0, \quad e_1 = \frac{R_1}{R},$$

gdzie  $R_1$  oznacza promień wewnętrznej powierzchni kuli.

Założymy również dla ustalenia uwagi, że główne oddziaływanie cieplne ma miejsce na powierzchni  $\varrho = 1$ . Oddziaływanie to będziemy rozumieli w tym sensie, że powierzchnia  $\varrho = 1$  jest ogrzewana i następnie chłodzona do początkowej temperatury lub tylko ogrzewana w taki sposób, że w materiale pojawiają się trwałe odkształcenia i że występujące następnie odciążenie nie doprowadzi do pojawienia się wtórnych odkształceń plastycznych.

Przy tego rodzaju założeniach charakter kształtowania się obszarów w materiale będzie następujący (rys. 2):



Rys. 2

Począwszy od pewnego czasu  $\tau_1$  od zewnętrznej powierzchni kuli w głąb materiału będzie się rozwijał obszar odkształceń plastycznych. Następnie w przedziale czasu  $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$  w materiale występują trzy zmienne w czasie warstwy kuliste: pierwsza leżąca w pobliżu powierzchni  $\varrho = 1$  znajduje się w stanie odciążenia, druga leżąca w środku znajduje się w stanie aktywnych odkształceń plastycznych, trzecia leżąca w pobliżu wewnętrznej powierzchni kuli znajduje się w stanie odkształceń sprężystych.

W czasie  $\tau \geq \tau_3$  występują dwie warstwy o stałej szerokości. Pierwsza  $\varrho_K \leq \varrho \leq 1$  będąca w stanie odciążenia. Druga  $\varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_K$  będąca w stanie odkształceń sprężystych. W szczególnym przypadku nieciągłych warunków brzegowych, wyznaczających pole temperatury, może się zdarzyć, że  $\tau_2 = \tau_1$  lub  $\tau_2 = \tau_1 = 0$ .

3.1. Rozwiązanie dla obszaru I. Obszar ten jest obszarem odkształceń sprężystych. Wykorzystując warunki brzegowe (3.1) wyznaczamy funkcje  $A(\tau)$  oraz  $B(\tau)$  ko-

rzyszając z równań (2.10), (2.14), (2.15)<sub>1</sub> oraz (2.18). Otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} = x &= 2\bar{T}(\varrho, \tau) + 2\left(\frac{1}{\varrho^3} - 1\right)\omega(\varrho, \tau) - \frac{2}{\varrho^3}\theta_1(\tau) = \mathcal{F}^s, \\
 e_\varphi &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\varrho^3} - 1\right)[\theta_1(\tau) - \omega(\varrho, \tau)] + \frac{2}{3\gamma_1^2}\theta_1(\tau) = e_\varphi^s, \\
 S_r &= 2\left(\frac{1}{\varrho^3} - 1\right)(1 - \gamma_1^2)[\omega(\varrho, \tau) - \theta_1(\tau)] = S_r^s, \\
 S_\varphi &= -(1 - \gamma_1^2)\left[3\bar{T}(\varrho, \tau) + \left(\frac{1}{\varrho^3} - 1\right)\omega(\varrho, \tau) - \left(2 + \frac{1}{\varrho^3}\right)\theta_1(\tau)\right] = S_\varphi^s,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

gdzie  $\theta_1(\tau) = \omega(\varrho_1, \tau)$  oznacza średnią temperaturę kuli z pustką.

Z pierwszego z równań (3.2) wynika, że (w ramach przyjętych założeń) największa intensywność odkształcenia wystąpi na powierzchni  $\varrho = 1$ .

Zatem warunek pojawienia się odkształceń plastycznych w materiale jest następujący:

$$\bar{T}(1, \tau) - \theta_1(\tau) \geq \frac{x_s}{2}.
 \tag{3.3}$$

Z nierówności (3.3) wynika znany fakt, że o intensywności odkształceń w pobliżu  $\varrho = 1$  decyduje różnica między rzeczywistą temperaturą powierzchni  $\varrho = 1$  oraz średnią temperaturą kuli. Intuicyjnie jest rzeczą zrozumiałą, że warunek (3.3) będzie spełniony przy dostatecznie dużej szybkości ogrzewania kuli. Wielkość tę w praktyce często przyjmuje się jako podstawowy parametr służący do określenia odpowiedniego kryterium zniszczenia.

**3.2. Równanie linii  $\varrho_p(\tau)$  w przedziale  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ .** Niech w chwili  $\tau = \tau_1$  będzie spełniona równość

$$\bar{T}(1, \tau_1) - \theta_1(\tau_1) = \frac{x_s}{2}.
 \tag{3.4}$$

Ponieważ równanie (2.10) jest słuszne zarówno w obszarze II jak i w III, to funkcję  $A(\tau)$  wyznaczamy z warunku  $\mathcal{F}[\tau, \varrho_p(\tau)] = x_s$ .

W ten sposób otrzymamy

$$\begin{aligned}
 A(\tau) &= 2\bar{T}(1, \tau) - 2L(\tau), \\
 \mathcal{F}(\varrho, \tau) &= 2\left[\bar{T}(\varrho, \tau) + \left(\frac{1}{\varrho^3} - 1\right)\omega(\varrho, \tau)\right] - \frac{2}{\varrho^3}L(\tau),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

gdzie

$$L(\tau) = \varrho_p^3(\tau)\left[\bar{T}(\varrho_p, \tau) + \left(\frac{1 - \varrho_p^3}{\varrho_p^3}\right)\omega(\varrho_p, \tau)\right] - \varrho_p^3\frac{x_s}{2}.
 \tag{3.6}$$

Funkcję  $B(\tau)$  wyznaczamy z warunku brzegowego dla  $\varrho = 1$ . Korzystając z równania (2.10), (2.14), (2.18) oraz (3.1) otrzymamy

$$B(\tau) = \frac{2}{3\gamma_1^2}L(\tau).
 \tag{3.7}$$

Równanie linii  $\varrho_p(\tau)$  określimy spełniając warunek brzegowy na powierzchni  $\varrho = \varrho_1$ .

Korzystając z równań (2.18), (2.15), (2.14), (2.16)<sub>1</sub> oraz (3.7) otrzymamy

$$(3.8) \quad [S_r]_{\varrho=1} = [F]_{\varrho=1} + 3\gamma_1^2 \left[ \frac{1}{\gamma_2} \int_1^{\varrho_p(\tau)} \frac{F(\eta, \tau)}{\eta} d\eta - x z \ln \varrho_p + \int_{\varrho_p}^{\varrho_1} \frac{F(\eta, \tau)}{\eta} d\eta \right] - 2\bar{T}(\varrho_1, \tau) + 2L(\tau) = 0,$$

gdzie

$$(3.9) \quad z = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2}.$$

Podstawiając do równania (3.8) funkcję  $F(\varrho, \tau)$  określoną równaniem (3.5)<sub>2</sub> otrzymamy po wykonaniu całkowania oraz szeregu różnych przekształceń następującą postać funkcjonalnego równania określającego linię  $\varrho_p(\tau)$ :

$$(3.10) \quad [z\varrho_1^3 - n\varrho_p^3(\tau)] \bar{T}(\varrho_p, \tau) - (1 - \varrho_p^3) n\omega(\varrho_p, \tau) + \frac{\varrho_p^3 x_s}{2} n - \frac{3}{2} z\varrho_1^3 x_s \ln \varrho_p = \frac{z\varrho_1^3}{2} x_s - z_1 (1 - \varrho_1^3) \theta_1(\tau),$$

gdzie

$$n = z_1 (1 - \varrho_1^3) + \varrho_1^3 z, \quad z_1 = \frac{1 - \gamma_1^2}{\gamma_1^2}.$$

Ponieważ funkcja  $F(\varrho, \tau) = F_1(x)$  jest tak dobrana, że słuszne są następujące równości:

$$\text{sign} \frac{\partial F}{\partial \tau} = \text{sign} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \text{sign} \frac{\partial \sigma_t}{\partial t},$$

to czas  $\tau_2$ , po upływie którego na powierzchni  $\varrho = 1$  wystąpi odciążenie, obliczymy na podstawie (3.5)<sub>2</sub> z równości

$$(3.11) \quad \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=1}^{\tau=\tau_2} - \left[ \frac{dL}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_2} = 0.$$

Zakładamy przy tym, że punkt  $\tau = \tau_2$  jest punktem maximum funkcji  $F$ . Po zróżniczkowaniu (3.6) i (3.10) oraz po podstawieniu otrzymanych wyrażeń do (3.11) otrzymamy drugą postać równania dla  $\tau_2$ :

$$(3.12) \quad \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=1}^{\tau=\tau_2} - \left[ \frac{1}{1 - m(\tau_2)} \frac{d\theta_1}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_2} + \left[ \frac{m(\tau_2)}{1 - m(\tau_2)} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_p(\tau_2)}^{\tau=\tau_2} = 0,$$

gdzie

$$m(\tau) = \frac{z\varrho_1^3 (1 - \varrho_p^3)}{z_1 \varrho_p^3 (1 - \varrho_1^3)}.$$

3.3. Równanie linii  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$  w przedziale  $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$ . W przedziale czasu  $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$  równania linii  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$  muszą być wyznaczone równocześnie.

Pierwsze równanie otrzymamy żądając na linii  $\varrho_0(\tau)$  spełnienia warunku

$$(3.13) \quad \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_0(\tau)} = 0.$$

Zakładamy przy tym, że wzdłuż linii  $\varrho = \varrho_0(\tau)$  pochodna funkcji  $\mathcal{F}$  zmienia znak. Różniczkując równanie (3.5)<sub>2</sub> względem czasu po podstawieniu do otrzymanego równania  $\varrho = \varrho_0(\tau)$ , otrzymamy

$$(3.14) \quad \frac{1}{2} \frac{d\varrho_p}{d\tau} = \frac{\varrho_p^3(\tau) \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_p} + (1 - \varrho_p^3) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_p} - \varrho_0^3 \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_0} - (1 - \varrho_0^3) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_0}}{3\varrho_p^2(\tau) x_s - 2 \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=\varrho_p(\tau)} \varrho_p^3(\tau)}.$$

Jeżeli w równaniu (3.14) wyrazić  $\partial \bar{T} / \partial \tau$  przez pochodne cząstkowe względem promienia wykorzystując w tym celu jednorodne równanie przewodnictwa, to wzór (3.14) pokryje się z podobnym otrzymanym w pracy [3].

Drugie równanie otrzymamy spełniając warunek brzegowy na powierzchni  $\varrho = \varrho_1$ . W tym celu wykorzystujemy wzory (2.18), (2.14), (2.17)<sub>1</sub>, (2.16)<sub>1</sub>, (2.15)<sub>1</sub>, (3.1) oraz (3.7):

$$(3.15) \quad [S_r]_{\varrho=\varrho_1} = [\mathcal{F}]_{\varrho=\varrho_1} + 3\gamma_1^2 \left[ -x_s z \ln \varrho_p + z \int_1^{\varrho_0} \frac{1}{\eta} \mathcal{F}_0(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + z \int_{\varrho_0}^{\varrho_p} \frac{\mathcal{F}(\eta, \tau)}{\eta} d\eta + \int_1^{\varrho_1} \frac{\mathcal{F}(\eta, \tau)}{\eta} d\eta \right] + 2L(\tau) - 2\bar{T}(\varrho_1, \tau).$$

W równaniu tym występuje niewiadoma funkcja

$$(3.16) \quad \mathcal{F}_0(\varrho) = \mathcal{F}[\varrho, \tau_0(\varrho)],$$

gdzie  $\tau = \tau_0(\varrho) = \varrho_0^{-1}(\varrho)$  oznacza funkcję odwrotną do funkcji  $\varrho_0(\tau)$ .

W celu wyliminowania tej funkcji zróżniczkujemy ostatnie równanie względem czasu, co jest równoznaczne z wykorzystaniem warunku  $[\partial S_r / \partial \tau]_{\varrho=\varrho_1} = 0$  zamiast  $[S_r]_{\varrho=\varrho_1} = 0$ .

Biorąc pod uwagę, że

$$(3.17) \quad \mathcal{F}_0[\varrho_0(\tau)] = \mathcal{F}[\varrho_0(\tau), \tau], \quad \mathcal{F}(\varrho_p, \tau) = x_s,$$

otrzymamy

$$(3.18) \quad \left[ \frac{\partial S_r}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_1} = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_1} + 2 \frac{dL}{d\tau} - 2 \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho=\varrho_1} + \\ + 3\gamma_1^2 \left[ \int_1^{\varrho_1} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} d\eta + z \int_{\varrho_0(\tau)}^{\varrho_p(\tau)} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} d\eta \right] = 0.$$



Po wykonaniu występujących w równaniu (3.18) operacji, wykorzystując przy tym wyrażenie dla funkcji  $\mathcal{F}$  [równanie (3.5)], otrzymamy ostatecznie następujące równanie:

$$(3.19) \quad (1 - \varrho_0^3) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0} \left( z_1 - \frac{z_1}{\varrho_1^3} + \frac{z}{\varrho_p^3} \right) + \varrho_0^3 \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0} \left( z_1 - \frac{z_1}{\varrho_1^3} + \frac{z}{\varrho_p^3} - \frac{z}{\varrho_0^3} \right) + \\ + z \left( 1 - \frac{1}{\varrho_p^3} \right) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_p} = - \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) z_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}.$$

Układ równań (3.14) i (3.19) służy do wyznaczenia linii  $\varrho_0(\tau)$  i  $\varrho_p(\tau)$ .

Warunek początkowy  $\varrho_p(\tau_0)$  dla równania (3.14) otrzymamy z układu (3.10) i (3.12).

Uzupełniający warunek, który zapewni zerowanie się naprężeń promieniowych na powierzchni  $\varrho = \varrho_1$ , przyjmiemy w postaci  $\varrho_0(\tau_0) = 1$ .

**3.4. Rozwiązanie w poszczególnych obszarach.** Znając równania granic  $\varrho_0(\tau)$  i  $\varrho_p(\tau)$  oraz funkcję

$$(3.20) \quad \mathcal{F}_0(\varrho) = 2 \left[ \bar{T}(\varrho, \tau_0) + \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau_0) \right] - \frac{2}{\varrho^3} L[\tau_0(\varrho)],$$

łatwo znajdziemy rozwiązanie w poszczególnych obszarach.

W celu wyznaczenia  $e_\varphi$  korzystamy ze wzoru (2.14). Następnie podstawiając otrzymaną funkcję oraz wyrażenie (3.5)<sub>1</sub> do równań (2.15)–(2.17) określimy naprężenia.

Rozwiązanie dla obszaru odkształceń sprężystych II (rys. 2)

$$(3.21) \quad e_\varphi = \left[ \frac{2}{3\gamma_1^2} \bar{T} \right]_{\varrho = \varrho_1} - \frac{1}{3\gamma_1^2} \mathcal{F}(\varrho_1, \tau) + \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{\eta} \mathcal{F}(\eta, \tau) d\eta, \\ e_\varphi = - \frac{2}{3} \left( \frac{1 - \varrho^3}{\varrho^3} \right) \omega(\varrho, \tau) - \frac{2}{3} \left( \frac{1 - \varrho_1^3}{\varrho_1^3} \right) z_1 \theta_1(\tau) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\varrho^3} + \frac{z_1}{\varrho_1^3} \right) L(\tau), \\ S_r = 2(1 - \gamma_1^2) \left[ \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) - \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) - \frac{L(\tau)}{\varrho^3} + \frac{L(\tau)}{\varrho_1^3} \right], \\ S_\varphi = - (1 - \gamma_1^2) \left[ 3\bar{T}(\varrho, \tau) + \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) - \frac{L(\tau)}{\varrho^3} - \frac{2}{\varrho_1^3} L(\tau) \right].$$

Rozwiązania dla obszaru odkształceń plastycznych III (rys. 2)

$$(3.22) \quad e_\varphi = \frac{2}{3\gamma_1^2} L(\tau) + \frac{1}{\gamma_1^2} \int_1^{\varrho} \frac{\mathcal{F}}{\eta} d\eta - x_s z \int_1^{\varrho} \frac{1}{\eta} d\eta, \\ e_\varphi = \frac{2}{3} \left[ - \frac{1}{\gamma_1^2} \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) + \frac{L(\tau)}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) L(\tau) \right] - x_s z \ln \varrho,$$

$$(3.22) \quad S_r = 2 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) [\omega(\rho, \tau) - L(\tau)] - 3\gamma_1^2 x_s z \ln \rho,$$

$$S_\varphi = - \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \left[ 3\bar{T}(\rho, \tau) + \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) \omega(\rho, \tau) - \right. \\ \left. - \left( 2 + \frac{1}{\rho^3} \right) L(\tau) \right] - \frac{3}{2} \gamma_1^2 z x_s (1 + 2 \ln \rho).$$

Rozwiązania dla obszaru odciążenia IV (rys. 2)

$$e_\varphi = \int_1^\rho \frac{\mathcal{F}}{\eta} d\eta + z \int_1^\rho \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta - x_s z \int_1^\rho \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{2}{3\gamma_1^2} L(\tau),$$

$$e_\varphi = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) [L(\tau) - \omega(\rho, \tau)] + \frac{2}{3\gamma_1^2} L(\tau) - x_s z \ln \rho + z \int_1^\rho \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta,$$

$$(3.23) \quad S_r = 2 \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) (1 - \gamma_1^2) [\omega(\rho, \tau) - L(\tau)] - 3\gamma_1^2 x_s z \ln \rho + 3\gamma_1^2 z \int_1^\rho \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta,$$

$$S_\varphi = - (1 - \gamma_1^2) \left[ 3\bar{T}(\rho, \tau) + \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) \omega(\rho, \tau) - \left( 2 + \frac{1}{\rho^3} \right) L(\tau) \right] - \\ - \frac{3}{2} \gamma_1^2 z \left[ x_s + 2x_s \ln \rho - 2 \int_1^\rho \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta - \mathcal{F}_0(\rho) \right].$$

Rozwiązania dla obszaru odkształceń plastycznych V (rys. 2)

$$e_\varphi = - x_s z \ln \left( \frac{\rho}{\rho_p} \right) - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\rho_p^3} \right) z \omega(\rho_p, \tau) - \frac{2}{3} z_1 \left( \frac{1}{\rho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) + \\ + \frac{2}{3\gamma^2} \left( 1 - \frac{1}{\rho^3} \right) \omega(\rho, \tau) - \frac{2}{3} L(\tau) \left( \frac{z}{\rho_p^3} - \frac{z_1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\gamma^2 \rho^3} \right),$$

$$S_r = 2 \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \omega(\rho, \tau) - 2(1 - \gamma_1^2) \left( \frac{1}{\rho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) - \\ (3.24) \quad - 2\gamma_1^2 L(\tau) \left[ \frac{z}{\rho_p^3} - \frac{z_1}{\rho_1^3} + \frac{z_1 - z}{\rho^3} \right] - 2\gamma_1^2 \left( 1 - \frac{1}{\rho_p^3} \right) z \omega(\rho_p, \tau) - 3\gamma_1^2 x_s z \ln \frac{\rho}{\rho_p},$$

$$S_\varphi = - \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \left[ 3\bar{T}(\rho, \tau) + \left( \frac{1}{\rho^3} - 1 \right) \omega(\rho, \tau) - \frac{1}{\rho^3} L(\tau) \right] - \\ - 2z\gamma_1^2 \left( 1 - \frac{1}{\rho_p^3} \right) \omega(\rho_p, \tau) - 2(1 - \gamma_1^2) \left( \frac{1}{\rho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) - \\ - 2\gamma_1^2 L(\tau) \left[ \frac{z}{\rho_p^3} - \frac{z_1}{\rho_1^3} \right] - 3\gamma_1^2 x_s z \ln \frac{\rho}{\rho_p}.$$

Rozwiązania dla obszaru odkształceń sprężystych VII i dla obszaru odciążenia VI. W obszarach tych wzór (3.5)<sub>2</sub> określający funkcję  $\mathcal{F}$  nie jest już prawdziwy. W celu wyznaczenia funkcji  $A(\tau)$  i  $B(\tau)$  wykorzystujemy tu bezpośrednio warunki brzegowe. Po wyznaczeniu funkcji  $A(\tau)$  i  $B(\tau)$  i po podstawieniu  $A(\tau)$  do równania (2.10) otrzymamy funkcję  $\mathcal{F}$ .

Dalej postępując podobnie jak to uczyniono w pozostałych obszarach określimy wzory dla przemieszczeń i naprężeń:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}^s(\varrho, \tau) + \mathcal{F}^0(\varrho), \\ e_\varphi &= e_\varphi^s(\varrho, \tau) + e_\varphi^0(\varrho), \\ S_r &= S_r^s(\varrho, \tau) + S_r^0(\varrho), \\ S_\varphi &= S_\varphi^s(\varrho, \tau) + S_\varphi^0(\varrho), \end{aligned}$$

gdzie  $\mathcal{F}^s$ ,  $e_\varphi^s$ ,  $S_r^s$  i  $S_\varphi^s$  określone wzorami (3.2):

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^0(\varrho) &= \frac{3\varrho_1^3 P}{\varrho^3(1-\varrho_1^3)z_1}, \\ e_\varphi^0(\varrho) &= -\frac{\varrho_1^3 P}{1-\varrho_1^3} - \frac{\varrho_1^3}{\varrho^3} \frac{P}{(1-\varrho_1^3)z_1} - P_1(\varrho), \\ S_r^0(\varrho) &= \left(\frac{1}{\varrho^3} - 1\right) \frac{3\varrho_1^3 \gamma_1^2 P}{(1-\varrho_1^3)} - 3\gamma_1^2 P_1(\varrho), \\ S_\varphi^0(\varrho) &= -\frac{3}{2} \frac{\varrho_1^3 \gamma_1^2 P}{(1-\varrho_1^3)} \left(2 + \frac{1}{\varrho^3}\right) - 3\gamma_1^2 P_1(\varrho) + P_2(\varrho), \\ P_1(\varrho) &= \begin{cases} z \left( x_s \ln \varrho + \int_{\varrho}^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta \right) & \text{dla } \varrho_K \leq \varrho \leq 1 \text{ (obszar VI),} \\ P = \text{const} > 0 & \text{dla } \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_K \text{ (obszar VII),} \end{cases} \\ P &= z \left( x_s \ln \varrho_K + \int_{\varrho_K}^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta \right), \\ P_2(\varrho) &= \begin{cases} \frac{3}{2} \gamma_1^2 z [\mathcal{F}_0(\varrho) - x_s] & \text{dla } \varrho_K \leq \varrho \leq 1; \\ 0 & \text{dla } \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_K. \end{cases} \end{aligned}$$

Funkcje  $S_\varphi^0(\varrho)$  i  $S_r^0(\varrho)$  określają naprężenia po zakończeniu procesu ogrzewanie-chłodzenie ( $\bar{T} = \omega = \theta_1 = 0$ ) lub tylko po zakończeniu procesu ogrzewania ( $\bar{T} = \omega = \theta_1$ ); funkcja  $e_\varphi^0(\varrho)$  odkształcenie po zakończeniu procesu ogrzewanie-chłodzenie.

Ze wzorów (3.26)<sub>3</sub> i (3.26)<sub>4</sub> można już wysnuć pewne wnioski dotyczące rozkładu końcowych naprężeń w materiale. Mianowicie funkcja  $S_r^0$  jest zawsze mniejsza od zera, maleje monotonicznie od zera na powierzchni  $\varrho = \varrho_1$  do minimalnej wartości,

którą osiąga na powierzchni  $\varrho = \varrho_K$ , i następnie rośnie, osiągając wartość zera na powierzchni  $\varrho = 1$ .

Naprężenia obwodowe osiągają minimalną ujemną wartość na wewnętrznej powierzchni kuli i następnie rosną monotonicznie i mogą na powierzchni  $\varrho = 1$  (w zależności od występujących parametrów) osiągnąć wartości dodatnie. Chociaż w rozważaniach tego p. przyjęto  $R_1 < R$ , to wyprowadzone wzory będą również prawdziwe w przypadku  $R_1 > R$ .

#### 4. Przypadek 2

Przyjmijmy w tym paragrafie następujące warunki brzegowe

$$[S_r]_{\varrho=1} = 0, \quad [U]_{\varrho=\varrho_1} = 0.$$

Przy zachowaniu założeń dokonanych w p. 3 tok postępowania oraz obraz rozwiązania na płaszczyźnie  $\varrho\tau$  (rys. 2) będzie taki sam jak w przypadku pierwszym. Jedyna różnica będzie polegała na tym, że równania granic oraz rozwiązania dla obszarów I, II, VII, VI i V wyznaczmy wykorzystując warunek zerowania się przemieszczenia lub prędkości powierzchni  $\varrho = \varrho_1$ . Dlatego w punkcie tym ograniczymy się jedynie do podania odpowiednich wzorów.

##### 4.1. Rozwiązanie dla obszaru I

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 2 \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) + 2\bar{T}(\varrho, \tau) - \frac{2}{\varrho^3} \frac{(1 - \varrho_1^3) \gamma_1^2}{w} \theta_1(\tau) = \mathcal{F}^s, \\ e_\varphi &= \frac{2}{3} \frac{1}{\varrho^3} \left[ \left( 1 - \varrho^3 + \frac{\varrho^3 - \varrho_1^3}{w} \right) \theta_1(\tau) - (1 - \varrho^3) \omega(\varrho, \tau) \right] = e_\varphi^s, \\ (4.1) \quad S_r &= 2 \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \left[ (1 - \gamma_1^2) \omega(\varrho, \tau) - \gamma_1^2 \left( \frac{1 - w}{w} \right) \theta_1(\tau) \right] = S_r^s, \\ S_\varphi &= - (1 - \gamma_1^2) \left[ 3\bar{T}(\varrho, \tau) + \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) \right] + \\ &\quad + \gamma_1^2 \left( \frac{1 - w}{w} \right) \left( 2 + \frac{1}{\varrho^3} \right) \theta_1(\tau) = S_\varphi^0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad w = \varrho_1^3 + \gamma_1^2 (1 - \varrho_1^3).$$

Warunkiem pojawienia się odkształceń plastycznych jest następująca nierówność:

$$\bar{T}(1, \tau) - \frac{(1 - \varrho_1^3) \gamma_1^2}{w} \theta_1(\tau) \geq \frac{x_s}{2}.$$

Czas  $\tau_1$  obliczymy z równania

$$(4.3) \quad \bar{T}(1, \tau_1) - \frac{(1 - \varrho_1^3) \gamma_1^2}{w} \theta_1(\tau_1) = \frac{x_s}{2}.$$

4.2. Równanie dla granicy  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$ . Równanie określające funkcję  $\varrho_p(\tau)$  dla czasu  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$  przyjmie postać

$$(4.4) \quad \varrho_p^3 x_s - 2(1 - \varrho_p^3) \omega(\varrho_p, \tau) - 2(n_1 + \varrho_p^3) \bar{T}(\varrho_p, \tau) + 3x_s n_1 \ln \varrho_p = \\ = -n_1 x_s - \frac{2n_1}{z} \left( \frac{1 - \varrho_1^3}{\varrho_1^3} \right) \theta_1(\tau),$$

gdzie

$$n_1 = \frac{(1 - \gamma^2) \gamma_1^2 \varrho_1^3}{\gamma^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \varrho_1^3 - \gamma_1^2 \varrho_1^3}.$$

Równania linii  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$  dla przedziału czasu  $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$  określają układ równań (3.14) oraz

$$(4.5) \quad \varrho_0^3 \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + \left( \frac{1 - \varrho_0^3}{\varrho_0^3} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0} \left( \frac{\varrho_1^3}{\gamma_1^2} + z \frac{\varrho_1^3}{\varrho_p^3} - \varrho_1^3 + 1 \right) - \\ - \left[ z \varrho_1^3 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0} = (1 - \varrho_1^3) \frac{d\theta_1}{d\tau} + z \varrho_1^3 \left( \frac{1}{\varrho_p^3} - 1 \right) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_p}.$$

Ponieważ równanie (3.5)<sub>2</sub> określające funkcję  $\mathcal{F}$  odnosi się również do rozpatrywanego przypadku, to wartości początkowe dla układu (4.5), (3.19) obliczyć można z układu równań (4.4) oraz (3.11). Będą to wartości  $\tau_2$  oraz  $\varrho_p(\tau_2)$ . Uzupełniający warunek zapewniający zerowanie się prędkości na powierzchni  $\varrho = \varrho_1$  przyjmiemy w postaci  $\varrho_0(\tau) = 1$ .

4.3. Rozwiązanie dla poszczególnych obszarów. Równanie (3.5)<sub>2</sub> określające funkcję  $\mathcal{F}$  w przedziale czasu  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_3$  ma zastosowanie i do rozpatrywanego tu przypadku. Obszar odkształceń sprężystych II (rys. 2)

$$(4.6) \quad e_\varphi = \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{\mathcal{F}}{\eta} d\eta, \\ e_\varphi = -\frac{2}{3} \left[ \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) - \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) + L(\tau) \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho^3} \right) \right], \\ S_r = 2(1 - \gamma_1^2) \left[ \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) - \frac{L(\tau)}{\varrho^3} \right] - \frac{2\gamma_1^2 L(\tau)}{\varrho_1^3} + \\ + 2\gamma_1^2 \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau), \\ S_\varphi = - (1 - \gamma_1^2) \left[ 3\bar{T}(\varrho, \tau) + \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) - \frac{L(\tau)}{\varrho^3} \right] - \\ - 2\gamma_1^2 \left( 1 - \frac{1}{\varrho_1^3} \right) \theta_1(\tau) - \frac{2\gamma_1^2}{\varrho_1^3} L(\tau).$$

Ponieważ funkcje  $A(\tau)$  i  $B(\tau)$  określone wzorami (3.5) i (3.7) pozostają niezmiennicze, to rozwiązanie w obszarach III i IV podane wzorami (3.22) i (3.23) poprzedniego punktu odnosi się również do tego przypadku.

Obszar odkształceń plastycznych V (rys. 2)

$$(4.7) \quad e_{\varphi} = -x_s z \ln \left( \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) + \int_{e_1}^{\varrho_p} \frac{\mathcal{F}}{\eta} d\eta + \frac{1}{\gamma^2} \int_{e_p}^{\varrho} \frac{\mathcal{F}}{\eta} d\eta.$$

Równanie (4.7) otrzymano wykorzystując równanie linii  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$ ; dzięki temu we wzorach określających  $e_{\varphi}$  i naprężenia nie będzie występowała funkcja  $\mathcal{F}_0(\varrho)$ . W ten sposób zwiększa się dokładność obliczeń, gdyż funkcja  $\mathcal{F}_0(\varrho)$  może być wyznaczona tylko w sposób przybliżony.

Dla tego przypadku mamy:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} e_{\varphi} &= -\frac{2}{3\gamma^2} \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) - x_s z \ln \left( \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\varrho_p^3} \right) z\omega(\varrho_p, \tau) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) - \frac{2}{3} L(\tau) \left[ \frac{z}{\varrho_p^3} - \frac{1}{\gamma^2 \varrho^3} + \frac{1}{\varrho_1^3} \right], \\ S_r &= 2 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \left[ \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) - \frac{1}{\varrho^3} L(\tau) \right] - 3\gamma_1^2 z x_s \ln \left( \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) + \\ &\quad + 2\gamma_1^2 \left[ z \left( \frac{1}{\varrho_p^3} - 1 \right) \omega(\varrho_p, \tau) + \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) - L(\tau) \left( \frac{z}{\varrho_p^3} + \frac{1}{\varrho_1^3} \right) \right], \\ S_{\varphi} &= - \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \left[ 3\bar{T}(\varrho, \tau) + \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) \right] - \\ &\quad - \frac{3}{2} \gamma_1^2 z x_s - 3\gamma_1^2 z x_s \ln \frac{\varrho}{\varrho_p} - 2\gamma_1^2 \left( 1 - \frac{1}{\varrho_p^3} \right) z\omega(\varrho_p, \tau) + \\ &\quad + 2\gamma_1^2 \left( \frac{1}{\varrho_1^3} - 1 \right) \theta_1(\tau) + L(\tau) \left[ \frac{1}{\varrho^3} \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) - 2\gamma_1^2 \left( \frac{z}{\varrho_p^3} + \frac{1}{\varrho_1^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Obszar odciążenia VI i obszar odkształceń sprężystych VII

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}^s(\varrho, \tau) + \mathcal{F}^0(\varrho), \\ e_{\varphi} &= e_{\varphi}^s(\varrho, \tau) + e_{\varphi}^0(\varrho), \\ S_r &= S_r^s(\varrho, \tau) + S_r^0(\varrho), \\ S_{\varphi} &= S_{\varphi}^s(\varrho, \tau) + S_{\varphi}^0(\varrho), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^0(\varrho) &= -\frac{3P}{\varrho_1^3 z_1 + 1} \frac{\varrho_1^3}{\varrho^3}, \\ e_{\varphi}^0(\varrho) &= -P_1(\varrho) + \frac{P\varrho_1^3}{w} \left( 1 - \gamma_1^2 + \frac{\gamma_1^2}{\varrho^3} \right), \\ S_r^0(\varrho) &= -3\gamma_1^2 P_1(\varrho) - \frac{3P\gamma_1^2 \varrho_1^3}{w} (1 - \gamma_1^2) \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right), \\ S_{\varphi}^0(\varrho) &= \frac{3P\gamma_1^2 \varrho_1^3}{2(\varrho_1^3 z_1 + 1)} \left( 2 + \frac{1}{\varrho^3} \right) z_1 - 3\gamma_1^2 P_1(\varrho) + P_2(\varrho), \end{aligned}$$

gdzie funkcje  $\mathcal{F}^s$ ,  $e_\varphi^s$ ,  $S_r^s$  i  $S_\varphi^s$  są określone wzorami (4.1), funkcje  $P_1(\varrho)$ ,  $P_2(\varrho)$  i  $P$  wzorami (3.26)<sub>5</sub>–(3.26)<sub>7</sub>, w wzorem (4.2). Funkcje  $e_\varphi^0(\varrho)$ ,  $S_r^0(\varrho)$ ,  $S_\varphi^0(\varrho)$  oznaczają końcowe odkształcenia i naprężenia w kuli po zakończeniu procesu ogrzewanie-chłodzenie.

W odróżnieniu od poprzedniego przypadku końcowe naprężenia powstałe po zakończeniu procesu ogrzewania (wyrównanie się temperatury kuli) zależą od wielkości temperatury, do jakiej ogrzana została kula.

Otrzymane w tym p. wzory pozostają słuszne w przypadku  $R_1 > R$ .

## 5. Pełna kula

Rozwiązanie dla pełnej kuli uzyskamy obliczając granice we wzorach otrzymanych w poprzednim p., gdy promień pustki kulistej dąży do zera.

### 5.1. Rozwiązanie dla obszaru I

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad \mathcal{F} &= 2 [\bar{T}(\varrho, \tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] = \mathcal{F}^s, \\
 e_\varphi &= \frac{2}{3} [\omega_0(\varrho, \tau) + z_1 \theta(\tau)] = e_\varphi^s, \\
 S_r &= 2(1 - \gamma_1^2) [\theta(\tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] = S_r^s, \\
 S_\varphi &= -(1 - \gamma_1^2) [3\bar{T}(\varrho, \tau) - \omega_0(\varrho, \tau) - 2\theta(\tau)] = S_\varphi^s,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.2) \quad \omega_0(\varrho, \tau) = \frac{3}{\varrho^3} \int_0^\varrho \bar{T}(\eta, \tau) \eta^2 d\eta, \quad \omega_0(1, \tau) = \theta(\tau).$$

Ostatnia funkcja oznacza średnią temperaturę kuli.

Warunek pojawienia się odkształceń plastycznych przyjmie postać

$$(5.3) \quad \bar{T}(1, \tau) - \theta(\tau) \geq \frac{x_s}{2}.$$

Czas  $\tau_1$  obliczymy z równania

$$(5.4) \quad \bar{T}(1, \tau_1) - \theta(\tau_1) = \frac{x_s}{2}.$$

5.2. Równanie granicy  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$ . Wykonując w równaniu (4.4) przejście graniczne, gdy  $\varrho_1 \rightarrow 0$  i wykorzystując przy tym równość

$$(5.5) \quad \lim_{\varrho_1 \rightarrow 0} \left[ \frac{\theta_1(\tau)}{\varrho^3} - \left( \frac{1}{\varrho^3} - 1 \right) \omega(\varrho, \tau) \right] = \omega_0(\varrho, \tau)$$

otrzymamy proste równanie określające linię  $\varrho_p(\tau)$  w przedziale  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ :

$$(5.6) \quad \bar{T}(\varrho_p, \tau) - \omega_0(\varrho_p, \tau) = \frac{x_s}{2}.$$

Podobnie postępując z wyrażeniem (4.5) otrzymamy proste równanie linii  $\varrho_0(\tau)$  dla  $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$ :

$$(5.7) \quad \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + \frac{1 - \varrho_0^3}{\varrho_0^3} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0} = \frac{1}{\varrho_0^3} \frac{d\theta}{d\tau}$$

lub

$$(5.8) \quad \left[ \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega_0}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0} = 0.$$

Podstawiając wyrażenie (5.7) do równania (3.14) można to ostatnie doprowadzić do postaci

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau},$$

gdzie  $L(\tau)$  określono równaniem (3.6).

Biorąc pod uwagę, że dla  $\tau = \tau_2$  mamy

$$L(\tau_2) = \theta(\tau_2),$$

[co wynika z równości (5.5), (5.6), (3.6)] otrzymamy

$$(5.9) \quad L(\tau) = \theta(\tau)$$

lub po przekształceniach

$$(5.10) \quad \bar{T}(\varrho_p, \tau) - \omega_0(\varrho_p, \tau) = \frac{x_s}{2}.$$

Wynika stąd, że linia  $\varrho_p(\tau)$  określona jest w całym przedziale czasu  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_3$  jednym i tym samym równaniem (5.6).

Charakter tego równania świadczy o istotnym fakcie, mianowicie że wzmocnienie materiału nie wpływa na kształt granic  $\varrho_0(\tau)$  i  $\varrho_p(\tau)$ .

Na podstawie (5.9) funkcja  $\mathcal{F}$  we wszystkich obszarach przedziału czasu  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_3$  określona jest pierwszym ze wzorów (5.1).

**5.3. Rozwiązanie dla poszczególnych obszarów.** Przejście graniczne  $\varrho_1 \rightarrow 0$  we wzorach (4.6) oraz (4.8) poprzedniego p. jest niemożliwe ze względu na występujące w nich wyrażenia nieoznaczone przy jednoczesnym braku bezpośredniej zależności funkcji  $L(\tau)$  od parametru  $\varrho_1$  (wynika to z faktu, że w poprzednim przypadku ogólnie  $\varrho_p = f(\tau, \varrho_1)$ ). Pozostaje to w związku z uwagą podaną poniżej wzoru (4.7).

W związku z tym rozwiązania dla obszarów II i V napisane poniżej otrzymano stosując ten sam sposób postępowania co w p. 3.

Obszar odkształceń sprężystych II (rys. 2)

$$(5.11) \quad \begin{aligned} e_\varphi &= \frac{2}{3} \left[ \omega_0(\varrho, \tau) + (z_1 - z) \theta(\tau) + z \omega_0(\varrho_p, \tau) - \frac{3}{2} z x_s \ln \varrho_p + z R(\tau) \right], \\ S_r &= -2(1 - \gamma_1^2) \omega_0(\varrho, \tau) + 2 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \theta(\tau) - 3\gamma_1^2 x_s z \ln \varrho_p + \\ &\quad + 2\gamma_1^2 z \omega_0(\varrho_p, \tau) + 2\gamma_1^2 z R(\tau), \\ S_\varphi &= -(1 - \gamma_1^2) [3\bar{T}(\varrho, \tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] - 3\gamma_1^2 z x_s \ln \varrho_p + 2 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \theta(\tau) + \\ &\quad + 2\gamma_1^2 z \omega_0(\varrho_p, \tau) + 2\gamma_1^2 z R(\tau), \end{aligned}$$



gdzie

$$(5.12) \quad R(\tau) = \begin{cases} \theta(\tau) - \omega_0(\varrho_0, \tau) + \frac{3}{2} \int_1^{\varrho_0(\tau)} \frac{1}{\eta} \mathcal{F}_0(\eta) d\eta & \text{dla } \tau_2 \leq \tau \leq \tau_3, \\ 0 & \text{dla } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_0(\varrho) = 2\bar{T}(\varrho, \tau_0) - 2\omega_0(\varrho, \tau_0), \quad \tau_0(\varrho) = \varrho_0^{-1}(\varrho).$$

Obszar odkształceń plastycznych III (rys. 2)

$$(5.13) \quad e_\varphi = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\gamma^2} \omega_0(\varrho, \tau) - \frac{3}{2} x_s z \ln \varrho + (z_1 - z) \theta(\tau) \right],$$

$$S_r = 2 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) [\theta(\tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] - 3x_s \gamma_1^2 z \ln \varrho,$$

$$S_\varphi = - \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) [3\bar{T}(\varrho, \tau) - \omega_0(\varrho, \tau) - 2\theta(\tau)] - 3x_s \gamma_1^2 z \left( \ln \varrho + \frac{1}{2} \right).$$

Obszar odciążenia IV (rys. 2):

$$(5.14) \quad e_\varphi = \frac{2}{3} \omega_0(\varrho, \tau) + \frac{2}{3} z_1 \theta(\tau) - x_s z \ln \varrho - z \int_\varrho^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta,$$

$$S_r = 2(1 - \gamma_1^2) [\theta(\tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] - 3\gamma_1^2 z \left( x_s \ln \varrho + \int_\varrho^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta \right),$$

$$S_\varphi = - (1 - \gamma_1^2) [3\bar{T}(\varrho, \tau) - 2\theta(\tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] +$$

$$+ \frac{3}{2} \gamma_1^2 z \left[ \mathcal{F}_0(\varrho) - x_s - 2x_s \ln \varrho - 2 \int_\varrho^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta \right].$$

Obszar odkształceń plastycznych V (rys. 2)

$$(5.15) \quad e_\varphi = \frac{2}{3} \left[ z_1 \theta + \frac{1}{\gamma^2} \omega_0(\varrho, \tau) - z \omega_0(\varrho_0, \tau) - z \int_{\varrho_0}^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta - x_s z \ln \varrho \right],$$

$$S_r = - 2 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) \omega_0(\varrho, \tau) + 2(1 - \gamma_1^2) \theta(\tau) - 3\gamma_1^2 z \ln \varrho -$$

$$- 3\gamma_1^2 z \int_{\varrho_0}^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta - 2\gamma_1^2 z \omega_0(\varrho_0, \tau),$$

$$S_\varphi = - \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) [3\bar{T}(\varrho, \tau) - \omega_0(\varrho, \tau)] + 2(1 - \gamma_1^2) \theta(\tau) -$$

$$- 2\gamma_1^2 z \omega_0(\varrho_0, \tau) - 3\gamma_1^2 z \left[ \int_{\varrho_0}^1 \frac{\mathcal{F}_0(\eta)}{\eta} d\eta + x_s \ln \varrho + \frac{x_s}{2} \right].$$

Obszar odciążenia VI i obszar odkształceń sprężystych VII. Rozwiązanie w tych obszarach podane jest za pomocą wzoru (4.9), w którym funkcje  $\mathcal{F}^s$ ,  $e_\varphi^s$ ,  $S_r^s$  i  $S_\varphi^s$  określone są wzorami (5.1) oraz

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^0(\varrho) &= 0, \\ e_\varphi^0(\varrho) &= -P_1(\varrho), \\ S_r^0(\varrho) &= -3\gamma_1^2 P_1(\varrho), \\ S_\varphi^0(\varrho) &= -3\gamma_1^2 P_1(\varrho) + P_2(\varrho), \end{aligned}$$

a funkcje  $P_1(\varrho)$  i  $P_2(\varrho)$  określone są za pomocą wzorów (3.26)<sub>5</sub> – (3.26)<sub>7</sub>.

Funkcje  $S_r^0(\varrho)$  i  $S_\varphi^0(\varrho)$  wyznaczają końcowe naprężenia w materiale kuli po zakończeniu procesu ogrzewania oraz również po zakończeniu procesu ogrzewanie-chłodzenie.

Na to, aby obciążenie nie doprowadziło do pojawienia się wtórnych odkształceń plastycznych, musi być spełniony warunek

$$P_2(1) \leq \frac{2\sigma_s}{3K\alpha T_0}.$$

Z równań (5.16) wynika, że  $S_r^0$  w przedziale  $0 \leq \varrho \leq \varrho_K$  ma stałą ujemną wartość i następnie w przedziale  $\varrho_K \leq \varrho \leq 1$  rośnie monotonicznie do zera. Podobnie  $S_\varphi$  w przedziale  $0 \leq \varrho \leq \varrho_K$  posiada tę samą stałą ujemną wartość, natomiast w przedziale  $\varrho \leq \varrho \leq 1$  rośnie monotonicznie do określonej dodatniej wartości. Pokrywa się to z wynikami otrzymanymi w pracy [2], gdzie rozpatrzono to zagadnienie dla ciała nieściśliwego, idealnie-plastycznego.

Ponieważ funkcja  $\mathcal{F}_0(\varrho)$  oraz granice  $\varrho_p(\tau)$  i  $\varrho_0(\tau)$  nie zależą od stopnia wzmocnienia materiału, to wzory (5.17) pozwalają zbadać jego wpływ na wielkość ostatecznych naprężeń. Jak łatwo się przekonać, bezwzględna wartość tych naprężeń maleje odwrotnie proporcjonalnie do modułu wzmocnienia  $\gamma^2$ .

Podstawiając we wszystkich przedstawionych w pracy wzorach  $\gamma_1^2 = \gamma^2$  otrzymamy rozwiązanie dla ciała idealnie-plastycznego.

Przedstawioną metodę oraz otrzymane w pracy wzory wykorzystamy w następnej publikacji, w której rozważać będziemy szczególną klasę pól temperatury. W pracy tej podany zostanie również przykład liczbowy.

#### Literatura cytowana w tekście

1. В. ЛОМАКИН, Упруго-пластическое равновесие шара в нестационарном температурном поле, Прикл. Мат. Мех., 2, 19 (1955).
2. H. PARKUS, Spannungen beim Abkühlen einer Kugel, Ing-Arch., 28 (1959), 251–254.
3. B. RANIECKI, A quasistatic, spherically symmetric problem of thermoplasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 2, 13 (1965).
4. Я. Л. ЛУНЦ, Распространение сферических упруго-пластических волн, Прикл. Мат. Мех., 1, 13 (1949).

## Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ В ШАРЕ,  
СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПЕРЕМЕННОМ  
ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

В работе определяются текущие и остаточные напряжения в шаре, со сферической полостью, вызванные процессом нагрева-охлаждения внешней поверхности шара. Принимая линейное упрочнение материала, пренебрегается влиянием температуры, на изменение его физических свойств. Задача рассматривается как квазистатическая. Определение границ, между существующими в материале и изменяющимися во времени области, сводится к решению системы уравнений, одно из которых является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а второе функциональным уравнением. В частном случае получено решение для полного шара.

## Summary

THE STRESSES IN AN ELASTIC PLASTIC BALL WITH A SPHERICAL CAVITY,  
IN A VARIABLE TEMPERATURE FIELD

The stress (instantaneous and final) in the body under consideration is produced by a heating-cooling process at the outer surface of the body. Assuming linear strain-hardening, the influence of the temperature on the physical properties of the material is disregarded. The problem is considered to be quasi-static. The determination of the borders between time-variable regions in the material is reduced to the solution of a set of equations, one of which is an ordinary differential equation of the 1-st order and the other — a functional equation. The solution for the full spherical body is obtained as a particular case.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1966 r.*

---