

OSIADANIE PÓLPRZESTRZENI KONSOLIDUJĄCEJ
POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻENIA SKUPIONEGO

ZOFIA SOB CZYŃSKA (POZNAŃ)

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzoru na osiadanie powierzchni półprzestrzeni podlegającej zjawisku konsolidacji. Za podstawę rozważań przyjmujemy teorię przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne, sformułowaną przez BIOTA [2 i 3].

Zajmiemy się przypadkiem płaskiego stanu odkształcenia szkieletu. Przyjmiemy, że rozważana półprzestrzeń obciążona jest nagle przyłożonym do jej powierzchni obciążeniem skupionym. Założymy, że ciecz może swobodnie wypływać przez powierzchnię ograniczającą półprzestrzeń z wyjątkiem punktu przyłożenia siły.

Za punkt wyjściowy przyjmujemy układ podstawowych równań teorii konsolidacji, wyrażony w przemieszczeniach (por. p. 2). Przy rozwiązywaniu tego układu oprzemy się na pracach W. DERSKIEGO [5 i 7]. Nie czynimy tutaj żadnych założeń upraszczających, które ograniczyłyby wyniki do ściśle określonego rodzaju ośrodka. Jedynymi ograniczeniami są założenia liniowej teorii konsolidacji w przypadku ruchu quasi-ustalonego.

1. Aktualny stan zagadnienia

Omawiając aktualny stan zagadnienia ograniczymy się wyłącznie do prac opartych na sformułowanej przez BIOTA teorii przepływu cieczy przez ośrodki porowate. Jako pierwszą pracę z tej dziedziny należy wymienić pracę Biota [2]. Podał on rozwiązanie dla obciążenia rozłożonego równomiernie na odcinku o szerokości $2a$ na powierzchni półprzestrzeni. Przyjął jednak, że dylatacja cieczy równa się dylatacji szkieletu stałego. Takie założenie ogranicza stosowalność rozwiązania do glin nasyconych wodą, ale pozwala na rozprzężenie układu równań teorii konsolidacji. BIOT obliczył występujące w jego rozwiązaniu całki dla liczby Poissona $\nu = 0$, jak również przyjął asymptotyczne przedstawienie funkcji podcałkowych.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia, tzn. w takim przypadku jak nasz, Biot opracował metodę rozwiązania opartą na wprowadzeniu uogólnionej funkcji naprężeń AIRY'EGO [1]. Jednak ta metoda nie znalazła dotychczas zastosowania praktycznego.

Te same założenia upraszczające co Biot przyjęli w swoich pracach MCNAMEE i GIBSON [21 i 22]. Podali oni postać funkcji przemieszczeń oraz za ich pomocą

wyznaczyli osiadanie półprzestrzeni w przypadku płaskiego stanu odkształcenia dla obciążenia równomiernie rozłożonego na odcinku o szerokości b . Swoje rozwiązanie podali w dwóch wariantach, mianowicie dla półprzestrzeni o powierzchni całkowicie przepuszczalnej dla cieczy i o powierzchni całkowicie nieprzepuszczalnej. Poważną wadą tego rozwiązania jest chyba fakt, że występują w nim wyrażenia całkowe rozbieżne przy t dążącym do nieskończoności. Rozwiązanie posiada również nieciągłości dla $t = 0$.

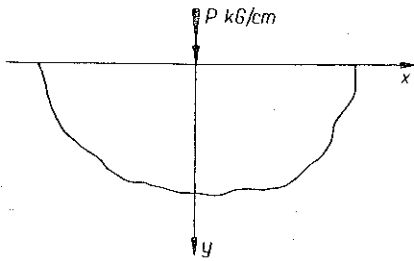
Zagadnieniem półprzestrzeni i warstwy obciążonej siłą skupioną zajmował się J. MANDEL [19 i 20]. Ograniczał się jednak do przypadku obciążenia kołowo-symetrycznego i do ośrodków nieściśliwych.

Ustalenie, jak dalece przyjęte w wymienionych pracach uproszczenia odbiegają od stanu rzeczywistego, jest na razie niemożliwe. W podanych rozwiązaniach występuje bowiem cały szereg stałych związanych ściśle z rodzajem ośrodka. Wartości tych stałych, jak dotąd, zostały wyznaczone doświadczalnie wyłącznie dla piaskowca [11 i 12]. Pewne próby w tym kierunku dla glin opisane są w pracy TAN TJONG KIE i GEUZE'GO [31]. Brak ich natomiast dla innych ośrodków.

Na zakończenie nadmienić należy, że oprócz prac wymienionych autorów ukazało się jeszcze kilka innych, opartych jednak na teorii Terzagiego i dlatego nie będziemy ich tutaj omawiać.

2. Równania teorii konsolidacji w przypadku płaskiego stanu odkształcenia i sformułowanie zagadnienia

Przyjmujemy, że odkształcenie zachodzi równoległe do płaszczyzny xy . Oś y skierowana jest normalnie do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń (rys. 1). Oś x leży w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń i skierowana jest prostopadle do linii obciążenia.



Rys. 1

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia równania równowagi wewnętrznej sprowadzają się do dwóch równań [3]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + \sigma)}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym σ_{ij} oznaczają współrzędne tensora stanu naprężenia, $\sigma = -pf$ jest hydrostatycznym stanem naprężenia przenoszonym przez ciecz, wypełniającą pory szkieletu, p parciem cieczy (dodatnim), f współczynnikiem porowatości szkieletu. W równaniach (2.1) pominięliśmy siły masowe, ponieważ rozważamy powolne zmiany stanu półprzestrzeni.

Drugą grupę równań tworzą związki geometryczne

$$(2.2) \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y},$$

przy czym u i v są współrzędnymi wektora przemieszczenia szkieletu, U oraz V współrzędnymi wektora przemieszczeń filtracyjnych cieczy odniesionych odpowiednio do osi x i y , (ε_{ij}) jest tensorem stanu odkształcenia szkieletu porowatego, Θ oznacza dylatację cieczy.

Związki fizyczne przyjmujemy w postaci najczęściej spotykanej [2]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2N\varepsilon_{xx} + (A\varepsilon + Q\Theta), & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0, \\ \sigma_{yy} &= 2N\varepsilon_{yy} + (A\varepsilon + Q\Theta), & \sigma &= Q\varepsilon + R\Theta, \\ \sigma_{zz} &= A\varepsilon + Q\Theta, & \sigma_{xy} &= 2N\varepsilon_{xy}, \end{aligned}$$

przy czym A , N , Q i R są stałymi rozważanego ośrodka [4], $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ jest dylatacją szkieletu. Należy tutaj zaznaczyć, że ε nie odpowiada rzeczywistej dylatacji szkieletu. Ta wielkość jest dylatacją pozorną szkieletu. Opisuje ona taką sytuację, w której szkielet wypełniałby bez reszty badany obszar. Dylatacja rzeczywista szkieletu $\bar{\varepsilon}$ (w sensie zmiany objętości materiału szkieletu) związana jest z dylatacją pozorną prostym wzorem [5] $\bar{\varepsilon} = (1 - f)\varepsilon$.

Powyższe związki uzupełnia prawo przepływu cieczy przez ośrodki porowate (prawo Darcy'ego), które z pominięciem sił masowych piszemy w postaci równania [2]

$$(2.4) \quad k\nabla^2 \sigma = \dot{\Theta} - \dot{\varepsilon},$$

w którym k oznacza współczynnik przepuszczalności (permeability) cieczy, a kropką oznaczyliśmy pochodną względem czasu.

Sformułujemy zagadnienie w przemieszczeniach. W związkach fizycznych (2.3) rugujemy dylatację cieczy za pomocą ostatniego z nich i po uporządkowaniu piszemy je w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2N\varepsilon_{xx} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma\right), & \sigma_{zz} &= M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma, \\ \sigma_{yy} &= 2N\varepsilon_{yy} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma\right), & M &= \frac{AR - Q^2}{R}, \\ \sigma_{xy} &= 2N\varepsilon_{xy}, \end{aligned}$$

przy czym M jest odpowiednikiem stałej Lamégo dla gruntów nasyconych wodą [4].

Związki fizyczne w postaci (2.5) podstawiamy w równania równowagi wewnętrznej (2.1) i po uporządkowaniu otrzymujemy układ równań zbiorczych teorii konsolidacji, wyrażony w przemieszczeniach szkieletu i jako funkcji parcia cieczy σ :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} NV^2 u + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ NV^2 v + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ k\nabla^2 \sigma &= \frac{1}{R} \dot{\sigma} - \frac{H}{R} \dot{\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$H = Q + R.$$

Ostatnie równanie odpowiada równaniu przepływu (2.4), w którym wyrugowano funkcję θ za pomocą ostatniego ze związków fizycznych (2.3). Układ równań (2.6) rozwiążemy przy założeniu

$$(2.7) \quad [u]_{t=0} = [v]_{t=0} = [\sigma]_{t=0} = 0.$$

Warunek brzegowy na powierzchni półprzestrzeni wiąże z sobą naprężenia σ_{yy} oraz σ , mianowicie

$$(2.8) \quad [\sigma_{yy} + \sigma]_{y=0} = -P\delta(x)\eta(t).$$

We wzorze tym $\delta(x)$ jest funkcją Diraca, a $\eta(t)$ funkcją Heaviside'a. Warunek (2.8) możemy rozdzielić na dwa niezależne warunki. Jak wiadomo, udział cieczy w przenoszeniu obciążenia jest wprost proporcjonalny do powierzchni zajmowanej przez pory i wobec tego możemy napisać [7]

$$(2.9) \quad [\sigma]_{y=0} = -fP\delta(x)\eta(t).$$

Warunki brzegowe dla naprężeń w szkielecie mają wobec tego postać [7]

$$(2.10) \quad [\sigma_{yy}]_{y=0} = -(1-f)P\delta(x)\eta(t).$$

Pomijamy ciężar własny ośrodka, a więc trzeba przyjąć, że dla $y \rightarrow \infty$ rozważane funkcje mają wartości ograniczone.

Układ równań (2.6) jest układem sprzężonym za pośrednictwem funkcji σ i ε . Pierwsze równanie różniczkujemy względem x , drugie względem y , dodajemy i po uporządkowaniu znajdujemy

$$(2.11) \quad \nabla^2 \varepsilon = -\frac{H}{R(M+2N)} \nabla^2 \sigma.$$

Nad ostatnim z równań (2.6) wykonujemy obustronnie transformację Laplace'a, związek (2.11) różniczkujemy względem czasu i za jego pomocą rugujemy ε z równania (2.6). Zamiast równania przepływu (2.6) otrzymujemy równanie w postaci

$$(2.12) \quad \nabla^2 \nabla^2 \sigma = K \nabla^2 \dot{\sigma}, \quad K = \frac{R(M+2N)+H^2}{k(M+2N)R^2} = \frac{A+R+2(Q+N)}{k(AR-Q^2+2NR)}.$$

Równanie (2.12) i dwa pierwsze równania (2.6) tworzą rozprzężony układ równań

$$(2.13) \quad \begin{aligned} NV^2 u + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ NV^2 v + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \sigma &= K \nabla^2 \dot{\sigma}. \end{aligned}$$

Przejdziemy do jego rozwiązania.

3. Metoda rozwiązania. Funkcja potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego

Warunki początkowe pozwalają na zastosowanie transformacji Laplace'a określonej przez wzór [7]

$$(3.1) \quad (u_L, v_L, \sigma_L) = \int_0^{\infty} (u, v, \sigma) e^{-st} dt$$

przy czym $s = \gamma + i\omega$.

Transformata wyjściowego układu równań ma teraz postać:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} N\nabla^2 u_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma_L}{\partial x}, \\ N\nabla^2 v_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial y} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma_L}{\partial y}, \\ k\nabla^2 \sigma_L &= \frac{s}{R} \sigma_L - s \frac{H}{R} \varepsilon_L. \end{aligned}$$

Transformata równania (2.12) przedstawia się następująco:

$$(3.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \sigma_L = K_S \nabla^2 \sigma_L.$$

Równanie (3.3) ma rozwiązanie [6]

$$(3.4) \quad \sigma_L = \varphi_{2L} - \frac{1}{K_S} \varphi_{1L},$$

przy czym funkcje φ_{1L} oraz φ_{2L} są transformatami Laplace'a funkcji φ_1 oraz φ_2 i są rozwiązaniami równań:

$$(3.5) \quad \nabla^2 \varphi_{2L} - sK\varphi_{2L} = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 \varphi_{1L} = 0.$$

Rozwiązania szczególnego równań przemieszczeniowych (3.2) poszukiwać będziemy za pomocą funkcji potencjału, którą definiujemy za pomocą wzorów

$$(3.6) \quad u_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi_L}{\partial x}, \quad v_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi_L}{\partial y},$$

w których funkcja Φ_L jest transformatą Laplace'a funkcji potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego. Związki (3.6) podstawimy w równania przemieszczeniowe (3.2). Porządkujemy je i całkujemy pierwsze względem x , drugie względem y . W wyniku otrzymujemy jedno równanie Poissona,

$$(3.7) \quad \nabla^2 \Phi_L = -K_1 \sigma_L, \quad K_1 = \frac{H}{R(M+2N)} = \frac{Q+R}{AR - Q^2 + 2NR}.$$

Uwzględniając σ_L wyrażone wzorem (3.4) znajdujemy [6]

$$(3.8) \quad \Phi_L = \frac{K_1}{K_S} (\varphi_{3L} - \varphi_{2L}),$$

przy czym φ_{3L} jest funkcją biharmoniczną i taką, że

$$(3.9) \quad \nabla^2 \varphi_{3L} = \varphi_{1L}.$$

Za pomocą rozwiązania (3.8) nie możemy w ogólności spełnić wszystkich warunków brzegowych. Ponadto rozwiązanie (3.8) spełnia układ równań (2.13), ale nie spełnia układu równań (3.2). W celu spełnienia warunków brzegowych i równań (3.2) dodamy rozwiązanie jednorodnego układu równań:

$$(3.10) \quad NV^2 u_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x} = 0, \quad NV^2 v_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial y} = 0.$$

Rozwiązanie układu (3.10) przyjmujemy w postaci funkcji Galerkinia [6] zakładając $\chi_{1L} = \chi_{3L} = 0$ oraz $\chi_{2L} = \chi_L$. W tym przypadku składowe stanu przemieszczenia wyrażają się wzorami

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \bar{u}_L &= \bar{b} \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial x \partial y}, & \bar{v}_L &= V^2 \chi_L + \bar{b} \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2}, \\ \bar{b} &= -\frac{M+N}{M+2N} = -\frac{AR - Q^2 + NR}{AR - Q^2 + 2NR}. \end{aligned}$$

Funkcja χ_L , jak wiadomo, jest funkcją biharmoniczną

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi_L = 0.$$

Poszukiwane rozwiązanie układu równań przemieszczeniowych (3.2) ma zatem postać sumy:

$$u_L = \bar{u}_L + \bar{\bar{u}}_L \quad \text{i} \quad v_L = \bar{v}_L + \bar{\bar{v}}_L.$$

Jeżeli tę sumę podstawimy w równania (3.2), to okaże się, że ostatnie z tych rozwiązań wiąże funkcję χ_L z funkcją φ_{1L} za pomocą warunku

$$(3.12) \quad k\varphi_{1L} = -sNK_1 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \chi_L).$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia występujących w naszym rozwiązaniu funkcji.

4. Wybór funkcji występujących w rozwiązaniu

Rozpocniemy od wyznaczenia funkcji σ_L . Jak wynika z warunku brzegowego (2.9), funkcja σ_L musi być parzysta względem zmiennej x i ograniczona, gdy $y \rightarrow \infty$. Wobec tego funkcję harmoniczną φ_{1L} przyjmujemy w postaci całki Fouriera

$$(4.1) \quad \varphi_{1L} = \int_0^{\infty} A(a) \exp(-ay) \cos ax da.$$

Funkcja φ_{2L} spełnia pierwsze z równań (3.5) i wobec tego przedstawiamy ją w postaci całki Fouriera:

$$(4.2) \quad \varphi_{2L} = \int_0^{\infty} B(\alpha) \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + Ks}) \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Zgodnie ze wzorem (3.4) funkcja σ_L ma postać:

$$(4.3) \quad \sigma_L = \int_0^{\infty} \left[B(\alpha) \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + Ks}) - \frac{1}{Ks} A(\alpha) \exp(-\alpha y) \right] \cos \alpha x \, d\alpha$$

lub

$$\sigma_L = \int_0^{\infty} B(\alpha) \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + Ks}) \cos \alpha x \, d\alpha - \frac{1}{Ks} \int_0^{\infty} A(\alpha) \exp(-\alpha y) \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Funkcja σ_L musi spełniać przetransformowany warunek brzegowy (2.9) z uwzględnieniem przedstawienia całkowego funkcji Diraca ([28], str. 45)

$$(4.4) \quad [\sigma_L]_{y=0} = -\frac{fP}{\pi s} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Po podstawieniu wzoru (4.3) do warunku (4.4) otrzymujemy związek

$$(4.5) \quad B(\alpha) - \frac{1}{Ks} A(\alpha) = -\frac{fP}{\pi s}.$$

Za pomocą związku (4.5) możemy ze wzoru (4.3) wyeliminować $B(\alpha)$; otrzymujemy

$$(4.6) \quad \sigma_L = -\frac{fP}{\pi s} \int_0^{\infty} \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + Ks}) \cos \alpha x \, d\alpha + \frac{1}{Ks} \int_0^{\infty} A(\alpha) [\exp(-y\sqrt{\alpha^2 + Ks}) - \exp(-\alpha y)] \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Przejdźmy obecnie do wyznaczenia funkcji potencjału Φ_L . Jak wynika ze wzoru (3.8), składają się na nią dwie funkcje φ_{3L} oraz φ_{2L} . Funkcję φ_{2L} określa wzór (4.2), natomiast φ_{3L} przyjmujemy w postaci

$$\varphi_{3L} = \int_0^{\infty} C(\alpha) \alpha y \exp(-\alpha y) \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Stałą $C(\alpha)$ określa funkcja φ_{1L} za pomocą równania (3.9), z którego wynika zależność

$$-2C(\alpha) \alpha^2 = A(\alpha).$$

Powyższa zależność pozwala napisać

$$(4.7) \quad \varphi_{3L} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y}{a} A(a) \exp(-ay) \cos ax \, da.$$

Na podstawie wzoru (3.7) mamy

$$(4.8) \quad \Phi_L = \frac{K_1}{Ks} \left\{ \frac{fP}{\pi s} \int_0^{\infty} \exp(-y \sqrt{a^2 + Ks}) \cos ax \, da - \int_0^{\infty} A(a) \left[\frac{y}{2a} \exp(-ay) + \frac{1}{Ks} \exp(-y \sqrt{a^2 + Ks}) \right] \cos ax \, da \right\}.$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć funkcję χ_L . Przyjmujemy ją w postaci

$$\chi_L = \int_0^{\infty} [D(a) + ayE(a)] \exp(-ay) \cos ax \, da.$$

Pamiętamy, że funkcja χ_L musi spełniać warunek (3.12), z którego otrzymujemy zależność

$$kA(a) = -2sNK_1 E(a) a^3.$$

Stałą $E(a)$ wyrażamy za pomocą $A(a)$ i piszemy

$$(4.9) \quad \chi_L = \int_0^{\infty} \left[D(a) - \frac{ky}{2sNK_1 a^2} A(a) \right] \exp(-ay) \cos ax \, da.$$

5. Wyznaczenie transformaty rozwiązania

Funkcje Φ_L oraz χ_L określają składowe stanu naprężenia i za ich pośrednictwem muszą spełniać przetransformowane warunki brzegowe (2.10):

$$(5.1) \quad [\sigma_{yy}]_{y=0} = -(1-f) \frac{P}{\pi s} \int_0^{\infty} \cos ax \, da, \quad [\sigma_{xy}]_{y=0} = 0.$$

Rozwiązanie szczególne, po wykorzystaniu wzorów (2.5), (3.6) i równania (3.7), ma postać następującą

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xxL} &= 2N \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x^2} + \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \Phi_L \\ \bar{\sigma}_{yyL} &= 2N \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial y^2} + \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \Phi_L \\ \bar{\sigma}_{zzL} &= \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \Phi_L, \quad \bar{\sigma}_{xyL} = 2N \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu funkcji Φ_L we wzory (5.2) otrzymujemy

$$(5.3) \quad \begin{aligned} [\bar{\sigma}_{yy}]_{y=0} &= \frac{fP}{\pi s} \int_0^{\infty} \left(1 + 2N \frac{K_1}{Ks} a^2\right) \cos ax da - \frac{2NK_1}{K^2 s^2} \int_0^{\infty} A(a) a^2 \cos ax da, \\ [\bar{\sigma}_{xy}]_{y=0} &= \frac{2NK_1}{Ks} \left\{ \frac{fP}{\pi s} \int_0^{\infty} a \sqrt{a^2 + Ks} \sin ax da + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} A(a) \left[\frac{1}{2} - \frac{a}{Ks} \sqrt{a^2 + Ks} \right] \sin ax da \right\}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniami układu jednorodnego są funkcje (por. (2.5) i (3.11))

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx_L} &= \frac{N}{M+2N} \frac{\partial}{\partial y} \left[M \nabla^2 \chi_L - 2(M+N) \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial x^2} \right], \\ \bar{\sigma}_{yy_L} &= \frac{N}{M+2N} \frac{\partial}{\partial y} \left[(3M+4N) \nabla^2 \chi_L - 2(M+N) \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2} \right], \\ \bar{\sigma}_{zz_L} &= \frac{MN}{M+2N} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \chi_L, \\ \bar{\sigma}_{xy_L} &= \frac{N}{M+2N} \frac{\partial}{\partial x} \left[(M+2N) \nabla^2 \chi_L - 2(M+N) \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Po podstawieniu w powyższe wzory funkcji χ_L określonej równaniem (4.9) i przyjęciu $y = 0$ znajdujemy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} [\bar{\sigma}_{yy_L}]_{y=0} &= -\frac{N}{M+2N} \left[\frac{k}{sK_1} \int_0^{\infty} A(a) \cos ax da + 2(M+N) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\infty} D(a) a^3 \cos ax da \right], \\ [\bar{\sigma}_{xy_L}]_{y=0} &= \frac{N}{M+2N} \left[\frac{Mk}{sNK_1} \int_0^{\infty} A(a) \sin ax da + 2(M+N) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\infty} D(a) a^3 \sin ax da \right]. \end{aligned}$$

Jak już zaznaczyliśmy w p. 2 wzory (2.10), poszukiwany stan naprężenia musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe

$$(5.6) \quad \begin{aligned} [\sigma_{yy_L}]_{y=0} &= [\bar{\sigma}_{yy_L} + \bar{\sigma}_{yy_L}]_{y=0} = -(1-f) \frac{P}{\pi s} \int_0^{\infty} \cos ax da, \\ [\sigma_{xy_L}]_{y=0} &= [\bar{\sigma}_{xy_L} + \bar{\sigma}_{xy_L}]_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

Wykorzystujemy wzory (5.3) oraz (5.5) i stwierdzamy, że $A(\alpha)$ oraz $D(\alpha)$ muszą spełniać dwa warunki

$$(5.7) \quad \frac{fP}{\pi s} \left(1 + \frac{K_2 \alpha^2}{Ks} \right) - A(\alpha) \left[\frac{Nk}{(M+2N)K_1} + \frac{K_2 \alpha^2}{K^2 s^2} \right] - D(\alpha) 2N\bar{b}\alpha^3 = - (1-f) \frac{P}{\pi s},$$

$$\frac{fPK_2 \alpha}{\pi s^2 K} \sqrt{\alpha^2 + Ks} + A(\alpha) \left[\frac{Mk}{(M+2N)K_1} + \frac{K_2}{2Ks} - \frac{K_2 \alpha}{K^2 s^2} \sqrt{\alpha^2 + Ks} \right] - D(\alpha) 2N\bar{b}\alpha^3 = 0,$$

$$K_2 = 2NK_1.$$

Odejmując powyższe równania stronami znajdujemy

$$A(\alpha) \left[\frac{(M+N)k}{(M+2N)K_1 s} + \frac{K_2}{2Ks} + \frac{K_2 \alpha}{K^2 s^2} g(\alpha, s) \right] = \frac{P}{\pi s} \left[1 + f \frac{K_2}{Ks} \alpha g(\alpha, s) \right],$$

gdzie $g(\alpha, s) = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + Ks}$. Jak wiadomo, $K_1 = H/R(M+2N)$. Wobec tego $(M+2N)K_1 = H/R$. Otrzymane równanie mnożymy obustronnie przez $2K^2 s^2 H$ i mamy

$$A(\alpha) [2R(M+N)kK^2 s + K_2 KsH + 2K_2 H \alpha g(\alpha, s)] = \frac{2PKH}{\pi} [Ks + K_2 f \alpha g(\alpha, s)],$$

skąd wyznaczamy

$$(5.8) \quad A(\alpha) = \frac{2PKH [Ks + K_2 f \alpha g(\alpha, s)]}{\pi \{Ks [2R(M+N)kK + K_2 H] + 2K_2 H \alpha g(\alpha, s)\}} = A(\alpha, s).$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć stałą $D(\alpha)$. Możemy ją określić z dowolnego z równań (5.7). Wykorzystujemy w tym celu pierwsze równanie i po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(5.9) \quad D(\alpha) = - \frac{M+2N}{2N(M+N)} \left\{ \frac{P}{\pi s} \left(1 + \frac{K_2 f \alpha^2}{Ks} \right) + A(\alpha, s) \left[\frac{NkR}{Hs} - \frac{K_2 \alpha^2}{K^2 s^2} \right] \right\} = D(\alpha, s).$$

Celem wyznaczenia transformaty rozwiązania wystarcza stałe $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ podstawić do funkcji Φ_L oraz χ_L i wykorzystać wzory określające przemieszczenia oraz naprężenia.

6. Wyznaczenie przemieszczeń

Wyznaczone wzorami (5.8) i (5.9) stałe $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ podstawiamy do równań (4.8) i (4.9) określających funkcję potencjału oraz funkcję Galerkina. W celu wyznaczenia transformat przemieszczeń wykorzystujemy wzory (3.6) i (3.11). Po odpo-

wiednim zróżniczkowaniu funkcji Φ_L i χ_L oraz przeprowadzeniu redukcji otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 u_L &= -\frac{K_1 f P}{K\pi} \int_0^\infty \frac{a}{s^2} \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) \sin ax da + \int_0^\infty A(a, s) \left\{ \left[\frac{K_1}{2K} - \frac{k\bar{b}}{K_2} \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{y}{s} \exp(-ay) + \frac{K_1}{K^2 s^2} a \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) \right\} \sin ax da, \\
 (6.1) \quad v_L &= -\frac{K_1 f P}{K\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{a^2+Ks}}{s^2} \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) \cos ax da + \\
 &\quad + \int_0^\infty A(a, s) \left\{ \frac{K_1}{K^2 s} \sqrt{a^2+Ks} \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left[\frac{k}{NK_1} + \frac{\bar{b}k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right] \frac{1}{as} + \left[\frac{K_1}{2K} - \frac{\bar{b}k}{K_2} \right] \frac{y}{s} \right) \exp(-ay) \right\} \cos ax da + \\
 &\quad + \bar{b} \int_0^\infty D(a, s) a^2 \exp(-ay) \cos ax da.
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu interesować nas będzie wyłącznie osiadanie obciążonej powierzchni. Określa je funkcja v_L , gdy $y=0$, tzn.

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad [v_L]_{y=0} &= -\frac{K_1 f P}{K\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{a^2+Ks}}{s^2} \cos ax da + \int_0^\infty A(a, s) \left\{ \frac{K_1 \sqrt{a^2+Ks}}{K^2 s^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{k}{NK_1} + \frac{\bar{b}k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right] \frac{1}{as} \right\} \cos ax da + \bar{b} \int_0^\infty D(a, s) a^2 \cos ax da.
 \end{aligned}$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia całek wchodzących w skład wzoru dla przemieszczenia $[v_L]_{y=0}$:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{a^2+Ks}}{s^2} \cos ax da, & I_1 &= \int_0^\infty A(a, s) \frac{\sqrt{a^2+Ks}}{s^2} \cos ax da, \\
 I_2 &= \int_0^\infty A(a, s) \frac{1}{as} \cos ax da, & I_3 &= \int_0^\infty D(a, s) a^2 \cos ax da.
 \end{aligned}$$

Na tej podstawie piszemy

$$(6.3) \quad v_L = -\frac{K_1 f P}{K\pi} I_0 + \frac{K_1}{K^2} I_1 + \left[\frac{k}{NK_1} + \frac{\bar{b}k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right] I_2 + \bar{b} I_3.$$

Przed przystąpieniem do wykonania całkowania względem a oraz odwrócenia transformacji Laplace'a rozłożymy na składniki proste $A(a, s)$ i $D(a, s)$. Jak wynika

z budowy $D(a, s)$ wzór (5.9) wystarczy przekształcić jedynie $A(a, s)$. Przepisujemy $A(a, s)$ w postaci

$$A(a, s) = \frac{PKf}{\pi} \frac{\frac{K}{K_2f} s + a^2 - a \sqrt{a^2 + Ks}}{\frac{K[2R(M+N)kK + K_2H]}{2K_2H} s + a^2 - a \sqrt{a^2 + Ks}}.$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$(6.4) \quad \frac{PKf}{\pi} = \bar{A}, \quad a = \frac{K}{K_2f}, \quad b = \frac{K[2R(M+N)kK + K_2H]}{2K_2H}.$$

Zatem

$$A(a, s) = \frac{as + a^2 - a \sqrt{a^2 + Ks}}{bs + a^2 - a \sqrt{a^2 + Ks}}.$$

Licznik i mianownik mnożymy teraz przez $bs + a^2 + a \sqrt{a^2 + Ks}$ i otrzymujemy

$$A(a, s) = \bar{A} \frac{abs}{b^2 \left(s + \frac{2b-K}{b^2} a^2 \right)} + \bar{A} \frac{(b+a-K)a^2}{b^2 \left(s + \frac{2b-K}{b^2} a^2 \right)} + \bar{A} \frac{(a-b)a \sqrt{a^2 + Ks}}{b^2 \left(s + \frac{2b-K}{b^2} a^2 \right)}.$$

Jeżeli do licznika pierwszego składnika dodamy i odejmiemy

$$\frac{2b-K}{b^2} a^2,$$

to $A(a, s)$ możemy napisać w postaci

$$(6.5) \quad A(a, s) = \bar{A} \frac{a}{b} + \frac{C_1 a^2}{s + C_2 a^2} + \frac{C_3 a \sqrt{a^2 + Ks}}{s + C_2 a^2},$$

gdzie

$$(6.6) \quad C_1 = \frac{\bar{A}}{b^3} (a-b)(K-b), \quad C_2 = \frac{2b-K}{b^2}, \quad C_3 = \frac{\bar{A}(a-b)}{b^2}.$$

Funkcję $D(a, s)$ wyrażoną wzorem (5.9) zapiszemy teraz jak następuje:

$$D(a, s) = -\frac{M+2N}{2N(M+N)a^3} \frac{P}{\pi s} - \frac{M+2N}{2N(M+N)a^3} \frac{K_2f}{Ks^2} \frac{P}{\pi} a^2 + \\ + \frac{M+2N}{2N(M+N)a^3} \frac{NkR}{H} A(a, s) + \frac{M+2N}{2N(M+N)a^3} \frac{K_2}{K^2 s^2} a^2 A(a, s).$$

Oznaczając

$$(6.7) \quad -\frac{M+2N}{2N(M+N)} \frac{P}{\pi} = a_1, \quad -\frac{M+2N}{2N(M+N)} \frac{K_2 f P}{K\pi} = a_2,$$

$$\frac{M+2N}{2N(M+N)} \frac{NkR}{H} = a_3, \quad \frac{M+2N}{2N(M+N)} \frac{K_2}{K^2} = a_4,$$

możemy napisać

$$D(\alpha, s) = \frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2 \alpha^2}{s^2} + \frac{a_3}{s} A(\alpha, s) + \frac{a_4}{s^2} \alpha^2 A(\alpha, s) \right].$$

Po podstawieniu funkcji $A(\alpha, s)$ ze wzoru (6.5) otrzymamy

$$D(\alpha, s) = \frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} \alpha^2 + \frac{\bar{A}aa_3}{bs} + \frac{C_1 a_3 \alpha^2}{s(s+C_2 \alpha^2)} + \frac{C_3 a_3 \alpha \sqrt{\alpha^2+Ks}}{s(s+C_2 \alpha^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{A}aa_4 \alpha^2}{bs^2} + \frac{C_1 a_4 \alpha^4}{s^2(s+C_2 \alpha^2)} + \frac{C_3 a_4 \alpha^3 \sqrt{\alpha^2+Ks}}{s^2(s+C_2 \alpha^2)} \right].$$

Dalsze przekształcenia wykonane na dwóch ostatnich wyrazach pozwalają nam napisać $D(\alpha, s)$ w postaci następującej:

$$(6.8) \quad D(\alpha, s) = \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \left[a_1 + \frac{Aaa_3}{b} - \frac{C_1 a_4}{C_2^2} \right] \frac{1}{s} + \left[a_2 + \frac{\bar{A}aa_4}{b} + \frac{C_1 a_4}{C_2} \right] \frac{\alpha^2}{s^2} + \right. \\ \left. + \frac{C_1 a_3 \alpha^2}{s(s+C_2 \alpha^2)} + \frac{C_1 a_4}{C_2^2 (s+C_2 \alpha^2)} + \frac{C_3 a_3 \alpha \sqrt{\alpha^2+Ks}}{s(s+C_2 \alpha^2)} + \right. \\ \left. + \frac{C_3 a_4 \alpha \sqrt{\alpha^2+Ks}}{C_2 s^2} - \frac{C_3 \alpha \sqrt{\alpha^2+Ks} a_4}{C_2 s(s+C_2 \alpha^2)} \right\}.$$

Celem wyznaczenia osiadania powierzchni półprzestrzeni trzeba przekształcone wyżej $D(\alpha, s)$ oraz $A(\alpha, s)$ podstawić do wzoru (6.2) i wykonać powrotną transformację Laplace'a określoną wzorem (por. [9] str. 27)

$$(6.9) \quad v(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+ia} \int_0^{\infty} v_L(x, s) e^{st} \cos ax \, da \, ds.$$

Zanim przystąpimy do operacji określonych wzorem (6.9) musimy stwierdzić, czy funkcja $v_L(x, s)$ wyrażona wzorem (6.2) posiada wartości ograniczone.

Dla przykładu rozpatrzmy całkę I_2 [por. (6.2) i (6.3)]. Po podstawieniu $A(\alpha, s)$ wyrażonej wzorem (6.5) rozważana całka przyjmie postać

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left[\bar{A} \frac{a}{b} + \frac{C_1 a^2}{s+C_2 \alpha^2} + \frac{C_3 \alpha \sqrt{\alpha^2+Ks}}{s+C_2 \alpha^2} \right] \frac{1}{as} \cos ax \, da.$$

Jak łatwo stwierdzić, całka odpowiadająca pierwszemu składnikowi sumy w nawiasie równa się nieskończoności. Jeżeli odwrócimy transformację Laplace'a, całka odpowiadająca drugiemu składnikowi sumy przyjmuje postać

$$\int_0^{\infty} \frac{C_1}{C_2 a} (1 - e^{-C_2 a^2 t}) \cos ax \, da.$$

Łatwo można zauważyć, że w tym wyrażeniu

$$\int_0^{\infty} \frac{C_1}{C_2} \frac{\cos ax}{a} \, da$$

także równa się nieskończoności.

Z podanego przykładu wynika wniosek, że osiadanie określone transformatą (6.2) dla skończonych wartości zmiennej x byłoby nieskończenie duże. Wobec tego, w dalszych rozważaniach będziemy badać przemieszczenia względne $v(x, t)$, odniesione do prostej łączącej dwa punkty brzegowe o współrzędnych $x = \pm l$ (przez l może być dowolnie duże). Założymy, podobnie jak w rozwiązaniach teorii sprężystości, że w punktach $x = \pm l$ istnieje fikcyjne utwierdzenie i w związku z tym przemieszczenia pionowe tych punktów będą równe zeru. Takie założenie odpowiada dodaniu do funkcji $v(x, t)$ pewnej stałej $\Psi(l)$ tak dobranej, aby dla skończonych wartości x , z wyjątkiem, być może, bardzo małego otoczenia punktu $x = 0$, osiadanie było wielkością skończoną. Takie utwierdzenie brzegu nie wpływa na zmianę wartości naprężeń, ponieważ $\Psi(l)$ nie zależy od zmiennych x i y . Z fizycznego punktu widzenia tego rodzaju operacja może być interpretowana jako przesunięcie całego ośrodka, traktowanego jako ciało sztywne, o pewną stałą wielkość.

Przystąpimy teraz do wyznaczenia stałej $\Psi(l)$ z warunku, że dla $x = \pm l$ musi być $v(x, t) = 0$. Tym samym musi być $v_L(l, s) = 0$. Wygodniej jest wyznaczyć stałą $\Psi(l)$ dla transformaty Laplace'a. Na podstawie tego warunku piszemy

$$(6.10) \quad -\frac{K_1 f P}{K \pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{a^2 + Ks}}{s^2} \cos al \, da + \int_0^{\infty} A(a, s) \left\{ \frac{K_1}{K^2} \frac{\sqrt{a^2 + Ks}}{s^2} + \left[\frac{k}{NK_1} + \frac{\bar{b}k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right] \frac{1}{as} \right\} \cos al \, da + \bar{b} \int_0^{\infty} D(a, s) a^2 \cos al \, da + \Psi(l) = 0.$$

Widzimy więc, że poszukiwana stała zależy również od parametru transformacji Laplace'a s , tj. $\Psi(l) = \Psi(l, s)$.

Wyznaczone w ten sposób $\Psi(l, s)$ dodajemy do prawej strony wzoru (6.2) i w rezultacie otrzymujemy transformatę przemieszczenia względnego w postaci

$$(6.11) \quad v'_L = \frac{K_1 f P}{K \pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{a^2 + Ks}}{s^2} (\cos ax - \cos al) \, da + \frac{K_1}{K^2} \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{\sqrt{a^2 + Ks}}{s^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\cos ax - \cos al) da + \left(\frac{k}{NK_1} + \frac{\bar{b}k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right) \int_0^\infty A(a, s) \frac{1}{as} (\cos ax - \\ & - \cos al) da + \bar{b} \int_0^\infty D(a, s) a^2 (\cos ax - \cos al) da. \end{aligned}$$

Dla jasności wywodu rozwiązania całek występujących we wzorze (6.8) podano osobno, w załączonym na końcu pracy dodatku. Tutaj zajmiemy się tylko analizą tych całek, które z uwagi na konieczność różniczkowania względem parametru wymagają dowodu jednostajnej zbieżności.

Rozpatrzmy całkę I_{1c} (por. Dodatek, str. 394). Ma ona postać

$$I_{1c} = \int_0^\infty \frac{C_3 \alpha \sqrt{a^2 + Ks}}{s^2 (s + C_2 a^2)} \sqrt{a^2 + Ks} (\cos ax - \cos al) da.$$

Rozłożymy ją na sumę dwóch całek, a następnie wykonamy odwrotną transformację Laplace'a (por. [10], 229/1 i 232/18) wykorzystując jednocześnie twierdzenie o splocie (por. [9], str. 44) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_{1c} &= \int_0^\infty \frac{C_3 \alpha^3}{s^2 (s + C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da + \int_0^\infty \frac{C_3 \alpha K}{s (s + C_2 a^2)} (\cos ax - \\ & - \cos al) da = \int_0^\infty \frac{C_3 t}{C_2} a (\cos ax - \cos al) da - \int_0^\infty \frac{C_3 (1 - C_2 K)}{C_2^2 a} \times \\ & \times (\cos ax - \cos al) da + \int_0^\infty \frac{C_3 (1 - C_2 K)}{C_2^2} \frac{1}{a} e^{-C_2 a^2 t} (\cos ax - \cos al) da. \end{aligned}$$

Rozwiązanie trzeciej całki z tej funkcji wymaga właśnie różniczkowania względem parametru t . Po wykonaniu całkowania przez części znajdujemy

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{C_3 (1 - C_2 K)}{C_2^2 a} e^{-C_2 a^2 t} (\cos ax - \cos al) da = \frac{C_3 (1 - C_2 K)}{C_2^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{a} e^{-C_2 a^2 t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-2C_2 t e^{-C_2 a^2 t} - \frac{1}{a^2} e^{-C_2 a^2 t} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da \right\} = \frac{C_3 (1 - C_2 K)}{C_2^2} \int_0^\infty 2C_2 t e^{-C_2 a^2 t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da + \\ & + \frac{C_3 (1 - C_2 K)}{C_2^2} \int_0^\infty \frac{e^{-C_2 a^2 t}}{a^2} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da. \end{aligned}$$

Obliczenie pierwszej całki nie przedstawia trudności (por. Dodatek, str. 395). Natomiast drugą całkę musimy zróżniczkować względem czasu, aby w ten sposób doprowadzić ją do postaci, dla której już znamy rozwiązanie. Czy wolno w tym przypadku stosować różniczkowanie względem czasu? Przytoczymy tu odpowiednie twierdzenie (por. [24], str. 311).

«Zbieżną całkę właściwą lub niewłaściwą, zależną od parametru można zróżniczkować pod znakiem całki względem tegoż parametru, jeżeli całka otrzymana po zróżniczkowaniu będzie jednostajnie zbieżna w otoczeniu rozpatrywanej wartości parametru.»

Po zróżniczkowaniu interesującej nas całki względem czasu t otrzymujemy

$$-\frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2} \int_0^{\infty} e^{-C_2 \alpha^2 t} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l} \right) d\alpha.$$

Celem zbadania, czy ta całka jest jednostajnie zbieżna, zastosujemy kryterium Abela-Dirichleta, które brzmi:

Jeżeli całka

$$\int_a^{\infty} f(\alpha) d\alpha$$

jest zbieżna, a funkcja $g(\alpha, t)$ jest monotoniczna względem α i ograniczona, to całka

$$\int_a^{\infty} f(\alpha) g(\alpha, t) d\alpha$$

jest jednostajnie zbieżna względem parametru t (por. [14], str. 589).

Przyjmujemy

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l}$$

i stwierdzamy, że

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l} \right) d\alpha$$

jest zbieżna. Funkcja wykładnicza

$$e^{-C_2 \alpha^2 t}$$

jest jednostajnie malejąca względem α , a więc jest funkcją monotoniczną. Wykazaliśmy w ten sposób, że całka

$$\frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2} \int_0^{\infty} e^{-C_2 \alpha^2 t} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l} \right) d\alpha$$

jest jednostajnie zbieżna względem parametru t .

W oparciu o podane wyżej twierdzenie możemy rozwiązać wszystkie całki wymagające różniczkowania względem parametru t , mianowicie I_{1c} , I_{2b} , I_{3c} , I_{3d} .

Powróćmy do wyznaczenia rozważanej funkcji osiadania. Podane w dodatku rozwiązania poszczególnych całek podstawiamy do wzoru (6.8) i po redukcji wyrażen podobnych oraz po uwzględnieniu oznaczeń skracających, wprowadzonych przy przekształceniu funkcji $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$, [wzory (6.4), (6.6) i (6.7)] otrzymujemy

$$(6.12) \quad v = -\frac{fP}{8\pi Nb} \eta(t) \left(\frac{1}{f} - F \right) \left\{ 2 \ln \left(\frac{x}{l} \right) - Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) + Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) + \right. \\ \left. + 2F_1 i \sqrt{\pi} \sqrt{C_2} \sqrt{t} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \left(\frac{ix}{2\sqrt{C_2 t}} \right) - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \left(\frac{il}{2\sqrt{C_2 t}} \right) \right] + \right. \\ \left. + F_1 [I_{ax} - I_{al}] + F_1^2 [I_{bx} - I_{bl}] \right\},$$

gdzie

$$F = \frac{RkK(M+N) + NK_1 H}{H}, \quad F_1 = \frac{RkK(M+N) + NK_1 H}{RkK(M+N) - NK_1 H}, \\ -\frac{1}{8Nb} = \frac{M+2N}{8N(M+N)},$$

$$(6.13) \quad I_{ax} - I_{al} = \int_0^t \frac{i \sqrt{\pi} \sqrt{C_2}}{\sqrt{\tau}} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 \tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2 \tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 \tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2 \tau}} \right] d\tau, \\ I_{bx} - I_{bl} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1-C_2 K) + C_2 K t}} \times \\ \times \left[e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1-C_2 K) + C_2 K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1-C_2 K) + C_2 K t]}} \right] d\tau.$$

W wyrażeniach (6.12) i (6.13) $\operatorname{erf} \zeta i$ jest funkcją błędu Krampa-Laplace'a argumentu urojonego zdefiniowaną wzorem

$$\operatorname{erf} \zeta = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{\xi^2} d\xi.$$

We wzorze (6.12) występuje jeszcze funkcja

$$Ei(-\zeta) = - \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi,$$

nazywana funkcją wykładniczo-całkową (por. [18], str. 39).

Wykażemy, że występujące we wzorze (6.12) całki $I_{ax} - I_{al}$ i $I_{bx} - I_{bl}$ są zbieżne dla $t \geq 0$.

Przystąpimy do badania pierwszej całki. Dla ułatwienia dowodu wykonamy podstawienie $1/\sqrt{\tau} = \lambda$, które prowadzi do wyniku

$$I_{ax} - I_{at} = - \int_{\infty}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{i \sqrt{\pi} \sqrt{C_2}}{\lambda^2} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2 \lambda^2}{4C_2}} \operatorname{erf} \frac{ix\lambda}{2\sqrt{C_2}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2 \lambda^2}{4C_2}} \operatorname{erf} \frac{i l \lambda}{2\sqrt{C_2}} \right] d\lambda.$$

Do badania zbieżności tej całki zastosujemy kryterium Cauchy'ego (por. [27], str. 253), które głosi:

„Jeżeli w rozpatrywanej całce niewłaściwej

$$\int_a^{\infty} f(\lambda) d\lambda$$

funkcja podcałkowa $f(\lambda)$ jest ciągła przy $\lambda \geq a$ oraz

$$|f(\lambda)| < \frac{A}{\lambda^p} \quad \text{dla } p > 1,$$

to całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna.”

A i p są liczbami stałymi dodatnimi. W zastosowaniach praktycznych często zmieniamy postać tego kryterium. Stwierdzamy mianowicie: «Jeżeli istnieje taka wartość $p > 1$, dla której iloczyn $f(\lambda) \lambda^p$ pozostaje ograniczony, gdy $\lambda \rightarrow \infty$, to badana całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna.» (por. [27], str. 253). Ten warunek na pewno jest spełniony, jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \lambda^p.$$

W naszym przypadku, jeżeli przyjmiemy $p = 2$, to po pominięciu stałego czynnika otrzymujemy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2 \lambda^2}{4C_2}} \operatorname{erf} \frac{ix\lambda}{2\sqrt{C_2}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2 \lambda^2}{4C_2}} \operatorname{erf} \frac{i l \lambda}{2\sqrt{C_2}} \right] \right| = 0,$$

a więc całka jest bezwzględnie zbieżna.

Podobnie możemy wykazać zbieżność drugiej całki. Wykonujemy podstawienie $1/\sqrt{\tau} = \lambda$ i otrzymujemy

$$I_{bx} - I_{bt} = - \int_{\infty}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{2}{\lambda^2 \sqrt{\frac{1 - C_2 K}{\lambda^2} + C_2 K t}} \times \\ \times \left[e^{-\frac{x^2 K}{4 \left[\frac{1 - C_2 K}{\lambda^2} + C_2 K t \right]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4 \left[\frac{1 - C_2 K}{\lambda^2} + C_2 K t \right]}} \right] d\lambda.$$

Przyjmujemy $p = 2$ i badamy czy granica wyrażenia podcałkowego ma wartość skończoną. Oczywiście,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1-C_2K}{\lambda^2} + C_2Kt}} \left[e^{-\frac{x^2K}{4\left[\frac{1-C_2K}{\lambda^2} + C_2Kt\right]}} - e^{-\frac{l^2K}{4\left[\frac{1-C_2K}{\lambda^2} + C_2Kt\right]}} \right] = \\ = \frac{2}{\sqrt{C_2Kt}} \left[e^{-\frac{x^2}{4C_2t}} - e^{-\frac{l^2}{4C_2t}} \right] < \infty \end{aligned}$$

dla wszystkich wartości t . Ta całka jest więc również bezwzględnie zbieżna.

Zajmiemy się teraz rozważeniem występujących we wzorze (6.12) całek dla różnych wartości zmiennej x . Rozpatrzmy całkę $I_{ax} - I_{al}$. Granica wyrażenia podcałkowego przy $x \rightarrow 0$ wynosi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{i\sqrt{\pi}\sqrt{C_2}}{\sqrt{\tau}} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2\tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2\tau}} \right] = \\ = \frac{i\sqrt{\pi}\sqrt{C_2}}{\sqrt{\tau}} \left[\frac{i}{2\sqrt{C_2\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2\tau}} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Podobnie zbadamy zachowanie się całki $I_{bx} - I_{bl}$.

Granica wyrażenia podcałkowego przy $x \rightarrow 0$ równa się

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{\tau(1-C_2K)+C_2Kt}} \left[e^{-\frac{x^2K}{4[\tau(1-C_2K)+C_2Kt]}} - e^{-\frac{l^2K}{4[\tau(1-C_2K)+C_2Kt]}} \right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{\tau(1-C_2K)+C_2Kt}} \left[1 - e^{-\frac{l^2K}{4[\tau(1-C_2K)+C_2Kt]}} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Dalsza analiza wzoru (6.12) pozwala stwierdzić, że dla $x = 0$ występuje w nim osobliwość typu logarytmicznego i funkcji wykładniczo-całkowej. Dla wartości x różnych od zera wszystkie całki mają wartości skończone.

Sprawdźmy, czy w chwili czasu $t = 0$ osiadanie wyrażone wzorem (6.12) jest równe zeru. Zgodnie z warunkami początkowymi określonymi wzorem (2.7).

Wyżej wykazaliśmy, że całki $I_{ax} - I_{al}$ oraz $I_{bx} - I_{bl}$ dla $t = 0$ dążą do zera. Do zera dąży również wyrażenie

$$\sqrt{t} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2t}} \right].$$

Wobec tego, aby $[v]_{t=0}$ było równe zero, granica różnicy funkcji wykładniczo-całkowych występujących we wzorze (6.12) musi dążyć do $-2 \ln(x/l)$. Udowodnimy, że tak jest istotnie. Wykorzystamy definicję funkcji wykładniczo-całkowej i napiszemy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[-Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) + Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{\frac{x^2 K}{4t}}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi - \int_{\frac{l^2 K}{4t}}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\frac{x^2 K}{4t}}^{\frac{l^2 K}{4t}} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi.$$

Jeżeli w tym wyrażeniu przedstawimy funkcję podcałkową w postaci szeregu i wyodrębnimy osobliwość, to otrzymamy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{\frac{x^2 K}{4t}}^{\frac{l^2 K}{4t}} \frac{1}{\xi} d\xi + \int_{\frac{x^2 K}{4t}}^{\frac{l^2 K}{4t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^{n-1}}{n!} d\xi \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[-2 \ln \left| \frac{x}{l} \right| + \int_{\frac{x^2 K}{4t}}^{\frac{l^2 K}{4t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^{n-1}}{n!} d\xi \right].$$

Szereg pod znakiem całki jest bezwzględnie zbieżny i jego granica równa jest zeru przy n dążącym do nieskończoności (por. SMIRNOW [27], t. I, str. 52 i 272), a więc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[-Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) + Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] = -2 \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

Stąd przy $t = 0$ osiadanie wyrażone wzorem (6.12) jest istotnie równe zero.

Zbadamy teraz przebieg osiadania wyrażonego wzorem (6.12) dla $t \rightarrow \infty$. W tym celu znów przeanalizujemy kolejno wyrażenia wchodzące w skład tego wzoru.

Granice różnicy funkcji wykładniczo-całkowych zbadamy wykorzystując podane przez RYŻIKA i GRADSZTEINA (por. [25], str. 338) przedstawienie całkowe tych funkcji. Napišemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] =$$

$$= - \left[\lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-\frac{x^2 K}{4t}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos \xi + \frac{x^2 K}{4t} \sin \xi}{\xi^2 + \left(\frac{x^2 K}{4t} \right)^2} d\xi + e^{-\frac{l^2 K}{4t}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos \xi + \frac{l^2 K}{4t} \sin \xi}{\xi^2 + \left(\frac{l^2 K}{4t} \right)^2} d\xi \right].$$

Wyrażenie to przedstawimy w postaci jednej całki i funkcję podcałkową sprowadzimy do wspólnego mianownika. Otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & \xi^3 \cos \xi \left[e^{-\frac{l^2 K}{4t}} - e^{-\frac{x^2 K}{4t}} \right] + \xi \cos \xi \left[\frac{x^2 K}{4t} e^{-\frac{l^2 K}{4t}} - \frac{l^2 K}{4t} e^{-\frac{x^2 K}{4t}} \right] + \\
 & + \xi^2 \sin \xi \left[\frac{l^2 K}{4t} e^{-\frac{l^2 K}{4t}} - \frac{x^2 K}{4t} e^{-\frac{x^2 K}{4t}} \right] + \\
 & + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi \left[\frac{x^4 l^2 K^2}{64 t^3} e^{-\frac{l^2 K}{4t}} - \frac{x^2 l^4 K^2}{64 t^3} e^{-\frac{x^2 K}{4t}} \right]}{\left[\xi^2 + \left(\frac{x^2 K}{4t} \right) \right] \left[\xi^2 + \left(\frac{l^2 K}{4t} \right) \right]} d\xi = 0.
 \end{aligned}$$

Podobnie do zera dążą wyrażenia podcałkowe całek $I_{ax} - I_{al}$ i $I_{bx} - I_{bl}$.

Granica wyrażenia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2 t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2 t}} \right] = 0,$$

co możemy łatwo stwierdzić stosując regułę de L'Hospitala. Tak więc dla $t \rightarrow \infty$ osiadanie określa wzór

$$(6.14) \quad [v]_{t \rightarrow \infty} = -\frac{fP}{4\pi N b} \left(\frac{1}{f} - F \right) \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

Rozwiązanie to pokrywa się ze znanym z teorii sprężystości rozwiązaniem zagadnienia Flamanta (por. [15], str. 88) i określa sprężyste osiadanie względne powierzchni półprzestrzeni.

7. Przykład liczbowy

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania zilustrujemy teraz przykładem liczbowym. Zbadamy mianowicie przebieg osiadania powierzchni półprzestrzeni pod wpływem obciążenia siłą skupioną. Wykorzystujemy w tym celu wyprowadzony w p. 6 wzór (6.12). Wykresy wykonamy dla czasu $t = \infty$, $t = 1$ sek. oraz $t = 1$ godz.

Zanim jednak do tego przejdziemy musimy jeszcze omówić występujące we wzorze (6.12) stałe: N , M , R , Q , A i k . W p. 1 ograniczyliśmy się do stwierdzenia, że M jest odpowiednikiem stałej Lamégo λ dla gruntów nasyconych wodą, a k współczynnikiem przepuszczalności. Z pozostałych stałych, które określiliśmy jako stałe ośrodka, N równa się modułowi odkształcenia postaciowego. Stałe R , Q i A nie mają natomiast takich odpowiedników z zakresu mechaniki gruntów czy teorii sprężystości. Zajmiemy się ustaleniem ich wartości. Oprzemy się w tym celu na danych zawartych w pracy [4] M. A. BIOTA i D. G. WILLISA oraz na pracach [11 i 12] I. FATTA. Jak wynika z przytoczonych przez Biota i Willisa rozważań interesujące nas stałe można wyznaczyć ze związków fizycznych, w których odkształcenia wyrażono przez cztery stałe pomiarowe: f — porowatość, κ — współczynnik ściśliwości próbki, δ — współczynnik rozszerzalności objętościowej oraz γ — współczynnik zawartości wody w porach.

W wyniku otrzymano następujące związki [4]

$$Q = \frac{f \left(1 - f - \frac{\delta}{\kappa} \right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}}, \quad R = \frac{f^2}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}},$$

$$A = \frac{\frac{\gamma}{\kappa} + f^2 + (1 - 2f) \left(1 - \frac{\delta}{\kappa} \right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}} - \frac{2}{3} G.$$

Ta ostatnia stała nie będzie nam bezpośrednio potrzebna.

Wartości współczynników κ , δ i γ podaje I. Fatt w pracy [12]. Zostały one ustalone dla piaskowców roponośnych występujących w okolicach Boise (stan Idaho). Porowatość badanego piaskowca wynosiła 26%. Z rozważań Fatta wynika, że wartości współczynników κ , δ i γ zależne są od ciśnienia panującego na zewnątrz próbki oraz w porach. Przytoczył on wyniki badań dla zakresu ciśnień od 70,4 KG/cm² do 985,6 kG/cm² (w oryginale 1000—14 000 psi). Nas interesować będą wartości dotyczące ciśnień niższych. Podajemy je w tablicy 1.

Tablica 1. ($f = 0,26$)

Ciśnienie 140,8 kG/cm ²					Ciśnienie 316,8 kG/cm ²				
κ	δ	γ	Q	R	κ	δ	γ	Q	R
34,7 10 ⁻⁶	3,1 10 ⁻⁶	17,1 10 ⁻⁶	8479	3394	27,6 10 ⁻⁶	3,1 10 ⁻⁶	17,1 10 ⁻⁶	8202	3404

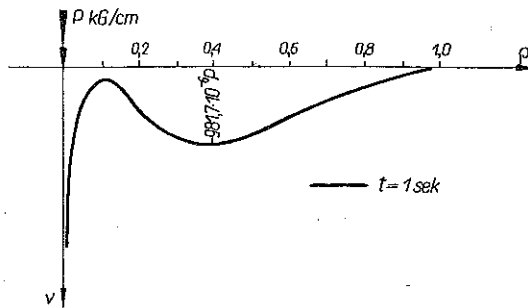
(Wymiar współczynników cm²/kG, wymiar Q i R — kG/cm²).

Aby wyznaczyć pozostałe stałe, M i N musimy znać moduł sprężystości oraz współczynnik Poissona i współczynnik przepływu dla piaskowca. W tablicy 2 zestawiono te wielkości podawane przez różnych autorów [23, 26 i 30]. Jak wynika z tej tablicy wartości modułu sprężystości i współczynnika Poissona podawane przez poszczególnych autorów, dość znacznie się różnią. W tej sytuacji do dalszych obliczeń przyjmujemy dane przytoczone przez Sałustowicza, dotyczące piaskowców Zagłębia Donieckiego, ponieważ ten właśnie autor podaje interesujący nas współczynnik przepuszczalności. Należy jednak zdawać sobie sprawę z faktu, że przyjęcie tych wartości jest w zasadzie przypadkowe. Wielkości współczynników podane przez Fatta zmuszeni jesteśmy przyjąć, jako jedyne tego rodzaju w dostępnej nam literaturze. Dobieramy do nich brakujące wartości modułu sprężystości, współczynnika Poissona i współczynnika przepuszczalności, mimo że nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy budowa i własności mechaniczne piaskowców w obu przypadkach są identyczne.

Tablica 2

Autor	Moduł sprężystości w kG/cm^2 E	Współczynnik Poissona ν	Współczynnik przepływu k
Sałustowicz	347000—398000	0,13—0,17	10—100 m/dobę
Müller	305000	0,17	—
Talobre	57000—216000	0,08—0,12	—

Do dalszych obliczeń przyjmujemy: średni moduł sprężystości $E = 372\,500 \text{ kG/cm}^2$, średni współczynnik Poissona $\nu = 0,15$ i średni współczynnik przepływu $k = 50 \text{ m/dobę}$. Dla tych danych obliczono występujące we wzorze (6.12) stałe oraz wartości



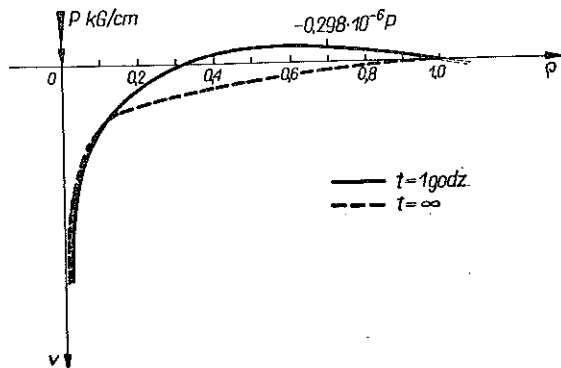
Rys. 2

oznaczeń skracających (por. wzory (6.13)). Po podstawieniu tych wartości do wzoru (6.12) oraz przyjęciu $l = 10,0 \text{ m}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (7.1) \quad v = & -3,25 \cdot 10^{-6} P \left\{ 2 \ln |\varrho| - Ei \left(-1,408 \frac{\varrho^2}{t} \right) + Ei \left(-1,408 \frac{1}{t} \right) - \right. \\
 & - 940,18 \left[\frac{\sqrt{t}}{\varrho l} \exp \left(-5,996 \frac{\varrho^2}{t} \right) \int_0^{2,433 \frac{\varrho}{\sqrt{t}}} e^{u^2} \cdot du - \frac{1}{l} \exp \left(-5,996 \frac{1}{t} \right) \times \right. \\
 & \times \int_0^{2,433 \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du \left. \right] - 470,09 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left[\frac{1}{\varrho l} \exp \left(-5,996 \frac{\varrho^2}{\tau} \right) \int_0^{2,433 \frac{\varrho}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du - \right. \\
 & - \frac{1}{l} \exp \left(-5,996 \frac{1}{\tau} \right) \int_0^{2,433 \frac{1}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du \left. \right] d\tau + 1,307 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{0,765\tau + 0,235t}} \times \\
 & \times \left[\exp \left(-\frac{1,408 \varrho^2}{44,217 \tau + 13,523 t} \right) - \exp \left(-\frac{1,408}{44,217 \tau + 13,523 t} \right) d\tau \right] \left. \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie $\varrho = x/l$.

Występujące we wzorze (7.1) funkcje wyznaczamy za pomocą tablic wartości liczbowych [19, 29 i 32], przyjmując $\varrho = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0$. Całki rozwiązujemy numerycznie metodą trapezów. Przyjmujemy przy tym dla $t = 1$ sek. przedział $\Delta t = 0,1$ sek., a dla $t = 1$ godz. $\Delta t = 360$ sek.



Rys. 3

Na rys. 2 i 3 pokazano wykonane na podstawie powyższych obliczeń wykresy względnego osiadania powierzchni. W tablicach 3 i 4 zestawiono wartości rzędnych tych wykresów. Wprowadzono przy tym następujące oznaczenia:

$$A_1 = \frac{\sqrt{t}}{\varrho l} \exp\left(-5,996 \frac{\varrho^2}{t}\right) \int_0^{2,433 \frac{\varrho}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du, \quad B_1 = \frac{\sqrt{t}}{l} \exp\left(-5,996 \frac{1}{t}\right) \int_0^{2,433 \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du,$$

$$A_2 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\varrho l} \exp\left(-5,996 \frac{\varrho^2}{\tau}\right) \int_0^{2,433 \frac{\varrho}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du d\tau,$$

$$B_2 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} l} \exp\left(-5,996 \frac{1}{\tau}\right) \int_0^{2,433 \frac{1}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du, d\tau,$$

$$A_3 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{0,765 \tau + 0,235 t}} \exp\left(-\frac{1,408 \varrho^2}{44,217 \tau + 13,583 t}\right) d\tau,$$

$$B_3 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{0,765 \tau + 0,235 t}} \exp\left(-\frac{1,408}{44,217 \tau + 13,583 t}\right) d\tau.$$

Analizując podane na rys. 2 i 3 wykresy należy jednak pamiętać, że zostały one wykonane dla podłoża o dużej sztywności i dużej porowatości. Dla innych rodzajów ośrodków kształt ich z pewnością będzie inny (tablica 3 i 4, por. Dodatek).

8. Uwagi końcowe

Na zakończenie niniejszej pracy zreasumujemy krótko metodę rozwiązania oraz wnioski jakie z niego wypływają.

Rozwiązanie przeprowadzono dla przypadku obciążenia półprzestrzeni siłą skupioną. Takie rozwiązanie, o ile wiadomo, nie zostało do chwili obecnej podane. Oparto je na sformułowanej przez Biota teorii przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne bez żadnych założeń upraszczających. Otrzymane rozwiązanie dla siły $P = 1$ jest funkcją Greena dla względnego osiadania powierzchni półprzestrzeni.

W ostatecznym wyniku otrzymano wzór na osiadanie powierzchni półprzestrzeni w stosunkowo prostej postaci (wzór (6.12)). Na podstawie tego wzoru można wnioskować o zachowaniu się obciążonej powierzchni w czasie. W p. 7 podano przykład liczbowy oraz wykresy obrazujące osiadanie powierzchni w chwili czasu $t = 1$ sek. i $t = 1$ godz. Obliczenia przeprowadzono przyjmując jako podłoże piaskowiec. Na podstawie analizy wzoru (6.12) oraz na podstawie wykresów można stwierdzić, że wyrażone nimi osiadanie posiada w otoczeniu punktu $x = 0$ osobliwości typu logarytmicznego oraz typu funkcji wykładniczo-całkowej. Przy rozpatrywaniu osiadania jako funkcji czasu osobliwości nie występują. Osiadanie ma wartości skończone zarówno dla t skończonego jak i dla t dążącego do nieskończoności. Ten fakt wydaje się sugerować, że podane przez MCNAMEE i GIBSONA rozwiązanie dla ośrodków nieściśliwych [22] jest chyba błędne. Podają oni wyniki, w których występują całki rozbieżne przy $t \rightarrow \infty$.

Otrzymane rozwiązanie, jako funkcja Greena, może służyć do budowy rozwiązania dla dowolnie rozłożonego obciążenia brzegu.

Jeżeli w pewnym przedziale $[a, b]$ dana jest funkcja normalnego obciążenia brzegu $P(x)$, to odpowiadające jej rozwiązanie określa wzór

$$(8.1) \quad v(x, t) = \int_a^b \tilde{v}[(x - \xi), t] P(\xi) d\xi,$$

przy czym $\tilde{v}(x, t)$ jest rozwiązaniem (6.12), w którym przyjęto $P = 1$.

Jeżeli w dalszym ciągu przyjmiemy, że nasze obciążenie zmienia się w czasie i można je przedstawić za pomocą iloczynu

$$P(x)f(\tau),$$

to odpowiadające temu osiadanie określa całka Duhamela [8],

$$(8.2) \quad v(x, t) = \int_0^t \bar{v}(x, t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

przy czym $\bar{v}(x, t) = \partial v / \partial t$, gdzie pod \bar{v} rozumie się rozwiązanie (7.1).

Wykazano, że w chwili czasu $t = 0$ osiadanie, zgodnie z przyjętymi warunkami początkowymi, jest równe zero. Różni to niniejszą pracę od prac innych autorów (por. BIOT [1], i FLORIN [13], str. 5), w których w chwili czasu $t = 0$ występowało tzw. „osiadanie natychmiastowe”.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na fakt bardzo ważny, związany z możliwością praktycznego stosowania otrzymanego rozwiązania. W skład współczynników wyprowadzonego wzoru wchodzi szereg stałych materiałowych, których wartości liczbowe zależą od rodzaju ośrodka. W obecnej chwili znane są wartości tych stałych dla piaskowca [11 i 12] oraz częściowo dla glin [31]. Brak ich natomiast dla innych rodzajów podłoży. Ogranicza to praktycznie zakres stosowalności podanego rozwiązania.

Nasuwa się więc wniosek, że szersze wykorzystanie i rozpowszechnienie wyników rozwiązań teorii konsolidacji uzależnione jest w dużej mierze od zainteresowania się specjalistów z dziedziny mechaniki gruntów badaniami nad ustaleniem potrzebnych w tej teorii stałych materiałowych.

Dodatek

Obliczenie całek dla transformaty przemieszczenia względnego

Zajmiemy się kolejno obliczeniem całek wchodzących w skład wyrażenia dla transformaty przemieszczenia względnego (6.2).

Obliczamy całkę I_0 :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + Ks}}{s^2} (\cos ax - \cos al) da = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2}{s^2 \sqrt{\alpha^2 + Ks}} (\cos ax - \cos al) da + \int_0^{\infty} \frac{K}{s \sqrt{\alpha^2 + Ks}} (\cos ax - \cos al) da. \end{aligned}$$

Wykonujemy powrotną transformację Laplace'a wg pozycji [10] (B. 235/21) (1) i w wyniku otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 (t - \tau)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\tau} \sqrt{K}} e^{-\frac{\alpha^2}{K} \tau} (\cos ax - \cos al) da d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{K} \tau} (\cos ax - \cos al) da d\tau. \end{aligned}$$

Na podstawie B. 15/11 znajdziemy

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \frac{t}{2\sqrt{\tau}} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\tau}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\tau}} \right] d\tau + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\tau}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\tau}} \right] d\tau + \\ &+ \int_0^t \frac{K}{2\tau} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\tau}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\tau}} \right] d\tau. \end{aligned}$$

(1) B oznacza tablice [10], 235 — numer strony, 21 — numer wzoru. Ten sam układ oznaczeń stosujemy w całym dodatku.

Stosujemy podstawienie $1/\tau = 4\lambda/x^2K$ i otrzymujemy

$$I_0 = \frac{t}{x^2 l^2} e^{-\frac{(x^2+l^2)K}{8t}} \left[x^2 e^{-\frac{(l^2-x^2)K}{8t}} - l^2 e^{-\frac{(l^2-x^2)K}{8t}} \right] - \frac{K}{4} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right].$$

Zajmiemy się teraz całką I_1 . Po podstawieniu wyrażenia na $A(\alpha, s)$ ze wzoru (6.5) przedstawimy ją w postaci sumy trzech całek $I_1 = I_{1a} + I_{1b} + I_{1c}$. Rozwiązujemy je kolejno:

$$I_{1a} = \int_0^\infty \bar{A} \frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 + Ks}}{s^2} (\cos ax - \cos al) da.$$

Łatwo zauważyć, że ta całka różni się od całki I_0 tylko stałym czynnikiem $\bar{A}(a/b)$. Wobec tego wykorzystując wynik, jaki otrzymaliśmy dla całki I_0 , możemy od razu napisać

$$I_{1a} = \bar{A} \frac{a}{b} \left\{ \frac{t}{x^2 l^2} e^{-\frac{(x^2+l^2)K}{8t}} \left[x^2 e^{-\frac{(l^2-x^2)K}{8t}} - l^2 e^{-\frac{(l^2-x^2)K}{8t}} \right] - \frac{K}{4} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] \right\}.$$

Obliczamy teraz całkę I_{1b} .

$$I_{1b} = \int_0^\infty \frac{C_1 a^2}{s^2(s+a^2)} \sqrt{a^2 + Ks} (\cos ax - \cos al) da.$$

Wykonujemy powrotną transformację Laplace'a wykorzystując jednocześnie twierdzenie o splocie B.229/1 i 232/18. Otrzymujemy

$$I_{1b} = \int_0^t \int_0^\infty \left[\frac{C_1 a^2 (t-\tau)}{C_2} - \frac{C_1}{C_2^2} + \frac{C_1}{C_2^2} e^{-C_2 a^2 (t-\tau)} \right] \frac{e^{-\frac{a^2}{K}\tau}}{\sqrt{\pi} \sqrt{K} \sqrt{\tau}} (\cos ax - \cos al) da d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \frac{C_1 K}{C_2} [1 - e^{-C_2 a^2 (t-\tau)}] \frac{e^{-\frac{a^2}{K}\tau}}{\sqrt{\pi} \sqrt{K} \sqrt{\tau}} (\cos ax - \cos al) da d\tau.$$

Po obliczeniu całek Fouriera wg pozycji B. 15/11 mamy

$$I_{1b} = - \int_0^t \frac{C_1 (1 - C_2 K)}{2C_2^2 \tau} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\tau}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\tau}} \right] d\tau + \int_0^t \frac{C_1 (1 - C_2 K)}{2C_2^2 \sqrt{\tau} \sqrt{\tau} (1 - C_2 K) + C_2 K t} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1 - C_2 K) + C_2 K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1 - C_2 K) + C_2 K t]}} \right] d\tau + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \frac{C_1 (t - \tau)}{2C_2 \tau} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\tau}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\tau}} \right] d\tau.$$

Podstawiamy $1/\tau = 4\lambda/x^2 K$ i otrzymujemy

$$I_{1b} = -\frac{C_1}{C_2} \left\{ \left(\frac{K}{4} - \frac{1}{2C_2} \right) \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{t}{x^2 l^2} e^{-\frac{(x^2+l^2)K}{8t}} \left[x^2 e^{-\frac{(l^2-x^2)K}{8t}} - l^2 e^{-\frac{(l^2-x^2)K}{8t}} \right] \right\} + \frac{C_1(1-C_2 K)}{2C_2^2} [I_{bx} - I_{bl}],$$

gdzie

$$I_{bx} - I_{bl} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1-C_2 K) + C_2 K t}} \times \\ \times \left[e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1-C_2 K) + C_2 K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1-C_2 K) + C_2 K t]}} \right] d\tau.$$

Dyskusję tej całki przeprowadzono na str. 384 i 385 w p. 6.

Przystąpimy teraz do rozwiązania całki I_{1c} . Jej rozwiązanie omawialiśmy już poprzednio w p. 6. Udowodniliśmy tam, że jest ona jednostajnie zbieżna względem parametru t i w związku z tym, funkcję podcałkową możemy różniczkować względem t . Przytaczamy to rozwiązanie jeszcze raz:

$$I_{1c} = \int_0^\infty \frac{C_3 a \sqrt{a^2 + Ks}}{s^2(s + C_2 a^2)} \sqrt{a^2 + Ks} (\cos ax - \cos al) da = \\ = \int_0^\infty \frac{C_3 a^3}{s^2(s + C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da + \int_0^\infty \frac{C_3 aK}{s(s + C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da.$$

Wykorzystamy cytowane już pozycje B. 229/1 i 232/18 oraz twierdzenie o splocie [28], str. 43. Otrzymujemy

$$I_{1c} = \int_0^\infty \left[\frac{C_3 at}{C_2} - \frac{C_3}{C_2^2 a} + \frac{C_3}{C_2^2 a} e^{-C_2 a^2 t} \right] (\cos ax - \cos al) da + \\ + \int_0^\infty \frac{C_3 K}{C_2 a} (1 - e^{-C_2 a^2 t}) (\cos ax - \cos al) da = \int_0^\infty \frac{C_3 t}{C_2} a (\cos ax - \cos al) da - \\ - \int_0^\infty \frac{C_3(1-C_2 K)}{C_2^2} \frac{1}{a} (\cos ax - \cos al) da + \\ + \int_0^\infty \frac{C_3(1-C_2 K)}{C_2^2} \frac{1}{a} e^{-C_2 a^2 t} (\cos ax - \cos al) da.$$

Trzy ostatnie całki obliczymy oddzielnie.

Całka 1.

$$\int_0^{\infty} \frac{C_3 t}{C_2} a (\cos ax - \cos al) da = \left[\frac{C_3 t}{C_2} \left[\frac{1}{x^2} \sin \left(ax + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{l^2} \sin \left(al + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right]_0^{\infty}.$$

(RYŻIK i GRADSZTEIN, [25] 2.513 str. 132).

Całka 2.

$$- \int_0^{\infty} \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \frac{1}{a} (\cos ax - \cos al) da = - \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

(RYŻIK i GRADSZTEIN [25] 3.538, str. 205).

Całka 3.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \frac{1}{a} e^{-C_2 a^2 t} (\cos ax - \cos al) da = \\ & = \left[\frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \left\{ \frac{1}{a} e^{-C_2 a^2 t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) \right\} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[-2C_2 t e^{-C_2 a^2 t} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{a^2} e^{-C_2 a^2 t} \right] \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da \Bigg\} = \\ & = \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \int_0^{\infty} 2C_2 t e^{-C_2 a^2 t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da + \\ & \quad + \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} e^{-C_2 a^2 t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da. \end{aligned}$$

Pierwsza z całek daje w wyniku (B.73/18)

$$\frac{C_3(1 - C_2 K)}{2C_2^2} \left\{ i\sqrt{\pi} \sqrt{C_2} 2 \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2 t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2 t}} \right] \right\}.$$

Drugą całkę obliczamy różniczkując funkcję podcałkową względem parametru t . (Dopuszczalność tej operacji badana jest na str. 382):

$$\begin{aligned} & \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} e^{-C_2 a^2 t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da = \\ & = \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2^2} \int_0^{\infty} \int_0^t -C_2 e^{-C_2 a^2 \tau} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da d\tau = \\ & = \frac{C_3(1 - C_2 K)}{2C_2^2} \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi} \sqrt{C_2}}{\sqrt{\tau}} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 \tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2 \tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 \tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2 \tau}} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Otrzymane wyniki podstawiamy do całki 3. Obecnie możemy już podać wyznaczoną całkę I_{1e} :

$$I_{1e} = \frac{C_3 t}{C_2} \left[-\frac{1}{x^2} \sin \left(ax + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{l^2} \sin \left(al + \frac{\pi}{2} \right) \right] \Big|_0^\infty - \\ - \frac{C_3(1-C_2K)}{C_2^2} \ln \left| \frac{x}{l} \right| + \frac{C_3(1-C_2K)}{2C_2^2} i\sqrt{\pi}\sqrt{C_2}\sqrt{t} \times \\ \times 2 \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2t}} \right] + \frac{C_3(1-C_2K)}{2C_2^2} [I_{ax} - I_{al}],$$

gdzie

$$I_{ax} - I_{al} = \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi}\sqrt{C_2}}{\sqrt{\tau}} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2\tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2\tau}} \right].$$

Wyznaczamy całkę $I_2 = I_{2a} + I_{2b} + I_{2c}$.

Całka I_{2a} :

$$I_{2a} = \int_0^\infty \bar{A} \frac{a}{b} \frac{1}{as} (\cos ax - \cos al) da = \bar{A} \frac{a}{b} \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

(RYŻIK i GRADSZTEIN [25] 3.538, str. 205).

$$I_{2b} = \int_0^\infty \frac{C_1 a}{s(s+C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da = \\ = \int_0^\infty \frac{C_1}{C_2 a} (\cos ax - \cos al) da - \int_0^\infty \frac{C_1}{C_2 a} e^{-C_2 a^2 t} (\cos ax - \cos al) da.$$

Obliczenie tej całki będzie takie samo jak dla całki I_{1e} , wobec tego napiszemy wynik od razu:

$$I_{2b} = \frac{C_1}{C_2} \ln \left| \frac{x}{l} \right| - \frac{C_1}{2C_2} i\sqrt{\pi}\sqrt{C_2}\sqrt{t} \cdot 2 \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2t}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2t}} \right] - \frac{C_1}{2C_2} [I_{ax} - I_{al}],$$

$$I_{2c} = \int_0^\infty \frac{C_3 \sqrt{a^2 + Ks}}{s(s+C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da = \int_0^\infty \frac{C_3 a^2}{s(s+C_2 a^2)\sqrt{a^2 + Ks}} \times \\ \times (\cos ax - \cos al) da + \int_0^\infty \frac{C_3 K}{(s+C_2 a^2)\sqrt{a^2 + Ks}} (\cos ax - \cos al) da.$$

Wykonujemy powrotną transformację Laplace'a wg B. 229/1 i 232/18. Całkę Fouriera podaje B. 73/18. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 I_{2c} &= \int_0^t \int_0^\infty \frac{C_3}{C_2 \sqrt{\pi} \sqrt{K} \sqrt{\tau}} e^{-\frac{a^2}{K} \tau} (\cos ax - \cos al) da d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t \int_0^\infty \frac{C_3(1 - C_2 K)}{C_2 \sqrt{\pi} \sqrt{K} \sqrt{\tau}} e^{-\frac{a^2}{K} [\tau(1 - C_2 K) + C_2 K t]} (\cos ax - \cos al) da d\tau = \\
 &= \int_0^t \frac{C_3}{2C_2 \tau} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\tau}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\tau}} \right] d\tau - \\
 &- \int_0^t \frac{C_3(1 - C_2 K)}{2\sqrt{C_2} \sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1 - C_2 K) + C_2 K t}} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1 - C_2 K) + C_2 K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1 - C_2 K) + C_2 K t]}} \right] d\tau.
 \end{aligned}$$

Po prostym całkowaniu mamy ostatecznie

$$I_{2c} = -\frac{C_3}{2C_2} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] - \frac{C_3(1 - C_2 K)}{2C_2} [I_{bx} - I_{bl}].$$

Wyznaczamy całkę $I_3 = I_{3a} + I_{3b} + I_{3c} + I_{3d} + I_{3e} + I_{3f} + I_{3g}$. Wszystkie składniki tej sumy mają rozwiązania występujące już w całkach I_0, I_1, I_2 . Wobec tego podamy od razu gotowe wyniki:

$$\begin{aligned}
 I_{3a} &= \int_0^\infty \left[a_1 + \frac{\bar{A}aa_3}{b} - \frac{C_1 a_4}{C_2^2} \right] \frac{1}{as} (\cos ax - \cos al) da = \\
 &= \left[a_1 + \frac{\bar{A}aa_3}{b} - \frac{C_1 a_4}{C_2^2} \right] \ln \left| \frac{x}{l} \right|,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{3b} &= \int_0^\infty \left[a_2 + \frac{\bar{A}aa_4}{b} + \frac{C_1 a_4}{C_2} \right] \frac{a}{s^2} (\cos ax - \cos al) da = \\
 &= \left[\left[a_2 + \frac{\bar{A}aa_4}{b} + \frac{C_1 a_4}{C_2} \right] \left[\frac{t}{x^2} \sin \left(ax + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{t}{l^2} \sin \left(al + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right]_0^\infty,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{3c} &= \int_0^\infty \frac{C_1 a_4}{C_2^2 (s + C_2 a^2)} \frac{1}{a} (\cos ax - \cos al) da = \\
 &= \frac{C_1 a_4}{2C_2^2} i \sqrt{\pi} \sqrt{C_2} \sqrt{t} \cdot 2 \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2 t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2 t}} \right] + \\
 &\quad + \frac{C_1 a_4}{2C_2^2} [I_{ax} - I_{al}],
 \end{aligned}$$

Tablica 3 ($t = 1$ sek)

q	$2 \ln q $	$Ei - 1,408 \frac{q^2}{t}$	$Ei - 1,408 \frac{1}{t}$	$940,18 A_1$	$940,18 B_1$	$470,09 A_2$	$470,09 B_2$	$1,307 A_3$	$1,307 B_3$	v
$0-\infty$		∞								∞
0,1—4,6052		3,6984	-0,1148	218,733	200,503	2,695	0,042	2,903	2,749	$70,697 \cdot 10^{-6}$
0,2—3,2190		2,3554	-0,1148	390,786	200,503	1,713	0,042	2,900	2,749	$626,541 \cdot 10^{-6}$
0,3—2,4080		1,6115	-0,1148	484,428	200,503	1,038	0,042	2,891	2,749	$930,475 \cdot 10^{-6}$
0,4—1,8324		1,1263	-0,1148	501,313	200,503	0,653	0,042	2,880	2,749	$981,861 \cdot 10^{-6}$
0,5—1,3862		0,7902	-0,1148	464,063	200,503	0,386	0,042	2,865	2,749	$859,622 \cdot 10^{-6}$
0,6—1,0214		0,5515	-0,1148	402,557	200,503	0,235	0,042	2,842	2,749	$658,902 \cdot 10^{-6}$
0,7—0,7134		0,3810	-0,1148	336,556	200,503	0,156	0,042	2,824	2,749	$443,748 \cdot 10^{-6}$
0,8—0,4462		0,2597	-0,1148	278,848	200,503	0,102	0,042	2,802	2,749	$255,622 \cdot 10^{-6}$
0,9—0,2108		0,1742	-0,1148	234,735	200,503	0,065	0,042	2,779	2,749	$111,725 \cdot 10^{-6}$
1,0—0		0,1148	-0,1148	200,503	200,503	0,042	0,042	2,749	2,749	0

Tablica 4 ($t = 1$ godz)

ϱ	$2 \ln \varrho $	$Ei - 1,408 \frac{\varrho^2}{t}$	$Ei - 1,408 \frac{1}{t}$	$940,18 A_1$	$940,18 B_1$	$470,09 A_2$	$470,09 B_2$	$1,307 A_3$	$1,307 B_3$	ν
$0 - \infty$		∞								∞
0,1—4,6052		∞								—
0,2—3,2190		∞								—
0,3—2,4080		∞								—
0,4—1,8324		8,633	7,249	2,288	2,288	3,230	3,934	10,857	10,857	$-0,083 \cdot 10^{-6}$
0,5—1,3862		8,633	7,249	2,288	2,288	3,281	3,934	10,857	10,857	$-0,212 \cdot 10^{-6}$
0,6—1,0214		8,633	7,249	2,332	2,288	3,347	3,934	10,857	10,857	$-0,295 \cdot 10^{-6}$
0,7—0,7134		7,940	7,249	2,241	2,288	3,044	3,934	10,857	10,857	$-0,298 \cdot 10^{-6}$
0,8—0,4452		7,535	7,249	2,288	2,288	3,476	3,934	10,857	10,857	$-0,097 \cdot 10^{-6}$
0,9—0,2108		7,535	7,249	2,268	2,288	3,817	3,934	10,857	10,857	$-0,0695 \cdot 10^{-6}$
1,0 0		7,249	7,249	2,288	2,288	3,934	3,934	10,857	10,857	0

Uwaga: Rzędnych wykresu w punktach $\varrho = 0,1; 0,2; 0,3$ nie można wyznaczyć, ponieważ dla wartości ζ bliskich zeru nie można interpolować wartości funkcji $Ei - \zeta$.

$$I_{3d} = \int_0^{\infty} \frac{C_1 a_3 \alpha}{s(s+C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da = \int_0^{\infty} \frac{C_1 a_3}{C_2 a} [1 - e^{-C_2 a^2 t}] (\cos ax - \\ - \cos al) da = \frac{C_1 a_3}{C_2} \ln \left| \frac{x}{l} \right| - \frac{C_1 a_3}{C_2} i \sqrt{\pi} \sqrt{C_2} \sqrt{t} \cdot 2 \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{C_2 t}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4C_2 t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{C_2 t}} \right] - \frac{C_1 a_3}{2C_2} [I_{ax} - I_{al}],$$

$$I_{3e} = \int_0^{\infty} \frac{C_3 a_3 \sqrt{a^2 + Ks}}{s(s+C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da = \\ = -\frac{C_3 a_3}{2C_2} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] - \frac{C_3 a_3 (1 - C_2 K)}{2C_2} [I_{bx} - I_{bl}],$$

$$I_{3f} = \int_0^{\infty} \frac{C_3 a_4 \sqrt{a^2 + Ks}}{C_2 s^2} (\cos ax - \cos al) da = \\ = \frac{C_3 a_4}{C_2} \frac{t}{x^2 l^2} e^{-\frac{(x^2 + l^2)K}{8t}} \left[x^2 e^{-\frac{(l^2 - x^2)K}{8t}} - l^2 e^{-\frac{(l^2 - x^2)K}{8t}} \right] - \\ - \frac{C_3 a_4}{C_2} \frac{K}{4} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right],$$

$$I_{3g} = - \int_0^{\infty} \frac{C_3 a_4 \sqrt{a^2 + Ks}}{C_2 s(s+C_2 a^2)} (\cos ax - \cos al) da = \\ = \frac{C_3 a_4}{2C_2^2} \left[Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) \right] + \frac{C_3 a_4 (1 - C_2 K)}{2C_2^2} [I_{bx} - I_{bl}].$$

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. БИОТ, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., **12** (1941), 115-164.
2. M. A. БИОТ, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., **25** (1954), 1385-1391.
3. M. A. БИОТ, *General solutions of the equations of elasticity and consolidation of a porous material*, J. Appl. Phys., **23** (1956), 91-96.
4. M. A. БИОТ, D. G. WILLIS, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Mech., **24** (1957), 594-601.
5. W. DERSKI, *Equations of consolidation theory in the case of fluid sources*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **10**, **12** (1964).
6. W. DERSKI, *A method of solving of the system of equations of consolidation theory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **10**, **12** (1964).
7. W. DERSKI, *Reciprocal theorem for displacements in the theory of consolidation*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **12**, **12** (1964).
8. В. А. ДУМКИН, И. П. КУЗНЕЦОВ, *Справочник по операционному исчислению*, Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит., Москва 1951.

9. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, 1964.
10. A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETINGER, F. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, V. I., McGraw-Hill, New York 1954.
11. I. FATI, *Compressibility of sandstones at low to moderate pressures*, Bull. Amer. Ass. Petr. Geol., 8, 42 (1958).
12. I. FATI, *The Biot-Willis elastic coefficients for a sandstones*, J. Appl. Mech., 26, ser. E, (1959), 296—297.
13. В. А. Флорин, *Основы механики грунтов*, 2, ГОСТРОИЗДАТ Москва.
14. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1, PWN, 1962.
15. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, wyd. IV, 1956.
16. Д. ИВАНЕНКО, А. СОКОЛОВ, *Классическая теория поля*, Гос. Изд. Тех.Теор. Лит., Москва 1951.
17. К. А. Карпов, *Таблицы Функций*, $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области, Изд. АН СССР, Москва 1958.
18. N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, 1957.
19. J. MANDEL, *Consolidation des sols*, Géotechnique, 3, 7 (1953).
20. J. MANDEL, *Tassement d'un couche d'argile saturée d'eau sous effect d'une force concentree a la surface du sol*, Proc. 3th. ICOMEF, 2 (1953).
21. J. MCNAMEE, R. E. GIBSON, *Displacement functions and linear transform applied to diffusion through porous elastic media*, J. Appl. Math., 13 (1960), 98—111.
22. J. MCNAMEE, R. E. GIBSON, *Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum*, J. Mech. Appl. Math., 13 (1960), 210—227.
23. L. MÜLLER, *Der Felsbau*, V.I.F. Enke Verlag Stuttgart, 1963.
24. В. М. Немыцкий, А. Службская, Черкасов, *Курс математического анализа*, 2, Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит., Москва 1957.
25. I. M. RYŻYK, I. S. GRADYSZTEIN, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, 1964.
26. A. SAŁUSTOWICZ, J. GALANKA, *Mechanika górotworu*, AGH, 1960.
27. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, 1 (1958), 2 (1960).
28. И. Снеддон, *Преобразования Фурье*, И. Л., Москва 1955.
29. *Таблицы интегральной показательной функций*, Изд. АН СССР, 1954.
30. J. TALOBRE, *La Mécanique des Roches*, Dunod, 1957.
31. TAN TIONG KIE, E. GEUZE, C.W.A., *The mechanical behaviour of clays*, Proc. Int. Congr. on Rheol., Acad. Press, 1954.
32. M. WARMUS, *Tablice funkcji elementarnych*, PWN, 1960.

Резюме

ОСЕДАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ПОДВЕРГАЮЩЕГОСЯ КОНСОЛИДАЦИИ ПОД ВЛИЯНИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Рассматривается случай полупространства, подвергающегося консолидации, нагруженного сосредоточенной силой, приложенной к поверхности. Рассуждения основываются на теории потока жидкости сквозь пористые деформируемые среды, сформулированной Бiotом. В результате, решения системы уравнений линейной теории консолидации, получено формулу, позволяющую определить относительное оседание поверхности полупространства во времени. Решение, как функция Грина можно использовать для составления решений для произвольной нагрузки края, изменяющегося во времени.

В заключение даются диаграммы, отображающие относительное оседание поверхности для основания из песчаника в момент времени $t = 1$ сек, $t = 1$ час и $t \rightarrow \infty$. Эта последняя диаграмма совпадает с результатами, известного из теории упругости, решения задачи Фламана.

Доказывается также, что в период времени $t = 0$ оседание не происходит. Этот последний факт позволяет судить, что введенные Флориным и Биотом понятие «немедленного» оседания в момент $t = 0$ не является правильным.

Summary

SUBSIDENCE OF A SEMI-INFINITE BODY UNDER THE ACTION OF A CONCENTRATED LOAD

The subject of the present considerations is a semi-infinite consolidating body loaded by a concentrated force acting on its surface. The considerations are based on the theory of liquid flow through porous deformable bodies established by Biot. As a result of solution of a set of equations of the linear consolidation theory, an equation is obtained enabling us to determine the relative subsidence of the surface of the semi-infinite body in function of time. The solution can be used as a Green's function for the construction of the solution for any time-variable load acting on the boundary. In conclusion are given graphs illustrating the relative subsidence of the surface for sandstone at the time $t = 1$ sec, $t = 1$ h and $t \rightarrow \infty$. The latter graph coincides with the solution of the Flamant problem known from the theory of elasticity.

It is shown also that there is no subsidence at $t = 0$, which seems to suggest that the notion of "instantaneous" subsidence at $t = 0$, introduced by FLORIN and BIOT is not correct.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 listopada 1955 r.
